arXiv:2304.05531v2 [math.FA] 3 Jan 2024

从电荷空间到一致空间的函数的可测性

乔纳森·M·基思

[a]莫纳什大学数学学院，Wellington Road, Clayton, 3800, VIC, Australia

摘要

将电荷空间上函数的可测性概念推广到取值于一致空间的函数。在这一背景下，已有的几种可测性形式可以自然地推广，并提出了新的可测性形式。确定了各种可测性形式逻辑等价的条件。将这些概念应用于实值函数，将有界电荷空间上可测函数的一些最新刻画推广到无界情形。

关键词：T_1-可测、 T_2-可测、射线可测、基可测、一致基可测、有限可加测度

1. 引言

一致空间推广了度量空间，由 Andr´eWeil于 1937 [1] 引入。关于一致空间理论的介绍（详略程度各异）可见于 [2, 3, 4, 5, 6, 7]。

本文的目标是：1）提出涉及将电荷空间映射到一致空间的函数的可测性形式；2）探讨这些可测性形式之间的逻辑关系；以及（3）将它们与现有概念联系起来，尤其是对于实值函数而言。

对一致空间的这种关注，部分源于 Aval- lone 和 Basile 的一篇论文 [8], ，该论文表明，Dunford and Schwartz [9] 的积分方法中的关键结果，来自两种一致性的相互作用：一种定义在 T_1-可测函数空间上，其定义方式是基于

电子邮箱：jonathan.keith@monash.edu（Jonathan M. Keith）

*Pr*提交至数学分析与应用杂志的电子预印本2024年1月5日

朦胧收敛，以及另一种在简单函数这一较小空间上、根据由积分诱导的伪度量定义的收敛。这种方法允许对积分作广义解释，并且有可能涵盖值域并非拓扑向量空间的函数。尽管本文并未提出积分方面的任何新概念，但本文提出的可测性形式旨在为积分理论未来的创新铺平道路，尤其可能有助于将 L_p 空间的一致结构与可积函数值域的一致结构联系起来。

下面简要回顾现有的可测性概念。在（可数可加的）测度与积分理论中，可测函数通常定义为：其定义域是一个可测空间，陪域是一个拓扑空间。

定义1.1. 设 $(X, \mathcal{F})$ 是一个可测空间， Y是一个拓扑空间。若对于每个开集 U， $f\colon X \to Y$满足 $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$，则称函数 f是可测的。

下文将把按此意义可测的函数称为常规可测函数。对于这类函数，可以证明，对于任意博雷尔集 B，都有 $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$，并且可以将这一等价性质作为另一种定义（如 [10]的第4.2节所述）。有时也会采用一个更一般的定义，以 Y 的子集的任意 σ-域代替博雷尔集（如 [11]的定义2.1.3所述）。在这种情况下， Y 不一定是拓扑空间。然而，在这一设定下可能出现各种病态现象：例如，即使是连续函数，对于每个勒贝格可测集 $L \subseteq Y$，也未必有 $f^{-1}(L) \in \mathcal{F}$ （ [10]的定理4.2.1）。

然而，在电荷空间上，可测函数的定义有所不同。关于电荷理论的简要综述可见于 [12] 和 [13]。电荷理论的标准参考文献是 [14]。在下述定义中以及本文全文中， μ 表示正电荷，即对所有$A \in \mathcal{F}$， $\mu(A) \geq 0$ 。然而， μ 可以是有界的（$\mu(X) < \infty$），也可以是无界的（$\mu(X) = \infty$）。

定义1.2. 电荷空间（$X, \mathcal{F}, \mu$）上的函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 是：

1. T_1-可测，如果存在一列简单函数 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 模糊地收敛到 f；2. T_2-可测，如果对于每个 $\epsilon > 0$ ，存在一个将 X 划分为集合A_0、 A_1、…、 $A_n \in \mathcal{F}$的划分，使得 $\mu(A_0) < \epsilon$且 $|f(x) - f(x')| < \epsilon$对所有$x$、 $x' \in A_i$和 $i \in \{1, \ldots, n\}$成立。

可以证明， f 是 T_1-可测的，当且仅当它是 T_2-可测的（定理 4.4.7 的 [14]）。此外， T_2-可测函数必然光滑。

定义 1.3. 若函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 满足：对每个 $\epsilon > 0$ ，都存在$k \in (0, \infty)$，使得 $\mu^*(\{x \in X: |f(x)| > k\}) < \epsilon$，则称其为光滑函数。

这里， μ^* 是如下定义的外容量：

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{F}, B \supseteq A\}$$

对 $A \in \mathcal{P}(X)$，其中 $\mathcal{P}(X)$表示 X的幂集。另一个相关函数将在本文后文中发挥重要作用，即内容量：

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{F}, B \subseteq A\}$$

对 $A \in \mathcal{P}(X)$。

当 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 是完备测度空间时， μ 有界，且 f 是实值函数，通常可测性也蕴含光滑性（参见 [14]中的命题 4.2.17）。

当 f 的值域为巴拿赫空间时，朦胧收敛、 T_1-可测性和 T_2-可测性可以通过将绝对值替换为范数而直接推广。（这基本上是 Dunford and Schwartz [9], 第三章所采用的方法，其中使用“完全可测”一词，而非 T_1-可测。）在此背景下，在某些条件下， T_1-可测性等价于通常可测性（参见 [9]中的引理 III.6.9 和定理 III.6.10）。然而，例如当 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 不是完备测度空间时，这种等价关系可能不成立。

Greco [15] 还提出了另一种可测性的形式，它是用 Choquet 积分来表述的。这里，以下刻画（基于 [15] 的定理 1）可作为一种不依赖任何积分的替代定义。

定义 1.4. 设有一个集合族 $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$，其中包含空集 $\emptyset$。若对任意 $a, b \in (0, \infty)$ 且满足 $a > b$，都存在 $H \in \mathcal{E}$ 使得函数 $f: X \to [0, \infty)$ 是 $\mathcal{E}$-可测的，

$$f^{-1}(a, \infty) \subseteq H \subseteq f^{-1}(b, \infty).$$

函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{E}$-可测的，当且仅当 $f^+ := \max\{f, 0\}$ 和 $f^- := \max\{-f, 0\}$ 是 $\mathcal{E}$-可测的。

事实上，Greco 允许 f 为扩展实值函数。就 f 的定义域而言，这种可测性形式非常一般。因此，尝试给出一个同时涵盖 $\mathcal{E}$-可测性和下文第 2 节提出的可测性形式的定义，将会很有意思，但这超出了本文的范围。不过，下文的定理 3.3 确定了在实值函数情形下，$\mathcal{E}$-可测性与其他可测性形式之间的关系。

Greco证明了，如果 $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ 是一个域，那么一个 $\mathcal{F}$-可测且光滑的函数也是 T_2-可测的（Greco 没有明确提及 T_2-可测性或光滑性，但该结论可由 [15] 中的定理 3直接推出）。反之一般并不成立，但本文的一项贡献是确定了一个充分的附加条件，在该条件下逆命题成立（见下文定理 3.3）。

本文结构如下。第 2 节考察了将函数映射到一致空间时，对 T_1-可测性和 T_2-可测性的自然推广，并提出了这类函数可测性的两种新形式，称为基可测性和一致基可测性。本节还辨析了现有可测性概念与所提出概念之间的逻辑关系。第 3 节考察了对于实值函数，这些可测性形式及其他可测性形式之间的关系。本节的主要定理（定理 3.3）大幅改进了 [12], 中的定理 3.4，尤其将该定理推广到了无界电荷的情形。最后一节简要考察了相对于较粗或较细的一致性，可测性的“继承”性质，并将其应用于由伪度量诱导的一致性、弱一致性和积一致性。

2. 以一致空间为值域的可测函数

对于陪域为一致空间的函数，有几种自然的可测性定义方式。在以下定义中，以及本文档的全文中，$\overline{\mathcal{F}}$ 表示域 $\mathcal{F}$的佩亚诺–若尔当完备化，其定义见 [13] 及其他相关内容。

定义 2.1. 设有一个电荷空间（X、$\mathcal{F}$、μ）以及一个一致空间 Y，其一致性为 $\mathcal{U}$，一致拓扑为 τ。函数 $f\colon\ X \to Y$ 是:

1. T_1-可测，如果对于每个 $\epsilon > 0$ 以及每个围绕 E ，都存在一个简单函数 s ，使得

$$\mu^*(\{x \in X : (s(x), f(x)) \notin E\}) < \epsilon;$$

2. T_2-可测，如果对于每个 $\epsilon > 0$ 以及每个围绕 E，都存在将 X 划分为集合 A_0、A_1、.....、$A_n \in \mathcal{F}$的一个划分，使得 $\mu(A_0) < \epsilon$ 且$f(A_i) \times f(A_i) \subseteq E$对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$都成立；

3. 光滑是指，对于每个 $\epsilon > 0$ 和每个围绕 E，都存在有限的集族 B_1，...，$B_n \in \mathcal{P}$（Y），使得对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 都有 $B_i \times B_i \subseteq E$，并且

$$\mu^*(\{x \in X : f(x) \notin \cup_{i=1}^n B_i\}) < \epsilon;$$

4.关于 τ 基可测，如果每个 $y \in Y$ 都有一个邻域基 $\mathcal{B}_y$，使得 $f^{-1}(B) \in \overline{\mathcal{F}}$ 对所有 $B \in \mathcal{B}_y$成立；5. 关于 $\mathcal{U}$ 一致基可测，如果存在一个邻近基 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$，使得 $f^{-1}(E[y]) \in \overline{\mathcal{F}}$对所有 $E \in \mathcal{B}$ 和 $y \in Y$成立。

.

光滑性的定义使人联想到全有界性。然而，一般而言，光滑性并不意味着对任意 $\epsilon > 0$，都存在全有界集 $K \subseteq Y$，使得 $\mu^*(f^{-1}(K^c)) < \epsilon$。后一条件直接蕴含光滑性。其逆命题成立的一个充分附加条件是，存在一个围绕 E^*，使得对所有 $y \in Y$，$E^*[y]$ 都是全有界的。（为此，对函数 f 应用光滑性的定义，其中 $E = E^*$，并取给定的 $\epsilon > 0$，从而得到 B_1，...，$B_n \subseteq Y$。注意，对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$，B_i 是全有界的，因为 $B_i \times B_i \subseteq E^*$。定义 $K := \cup_{i=1}^n B_i$。于是 K 是全有界的，并且 $\mu^*(f^{-1}(K^c)) < \epsilon$。）

基可测性的定义并未提及 Y的一致结构，因此即使 Y 仅仅是具有任意拓扑 τ的拓扑空间，也可以使用。

注意，如果 ρ 是 Y 上拓扑 τ 的子基，使得对于所有 $E \in \rho$，$f^{-1}(E) \in \overline{\mathcal{F}}$，那么 f 关于 τ是基可测的。同样地，如果 $\mathcal{R}$ 是一致性 $\mathcal{U}$ 的围绕子基，使得对于所有 $E \in \mathcal{R}$ 和 $y \in Y$，$E[y] \in \overline{\mathcal{F}}$，那么 f 是一致基可测的。

本节的两个定理阐明了这些可测性形式之间的逻辑关系。第二个定理与第一个定理分开，因为需要引入一些新的定义和记号。

定理 2.2。考虑一个电荷空间$(X, \mathcal{F}, \mu)$、一个一致空间 $(Y, \mathcal{U})$，以及一个函数 $f: X \to Y$。

1. f 是 T_1-可测的，当且仅当 f 是 T_2-可测的。若其中任一条件成立，则 f 是光滑的。

2. 假设 $\mathcal{F}$ 是一个 σ-域，且 f 是常规可测的。则以下结论成立。(a) f 是一致基可测的。(b) 若 μ 是有界测度，且 Y 是林德勒夫的，则 f 是 T_2-可测的。3. 假设 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 是一个完备测度空间，且 Y 是遗传林德勒夫的。若以下任一陈述成立：(a) f 是基可测的；或 (b) f 是 T_2-可测的，则 f 是常规可测的。4. 若 f 是一致基可测的，则 f 是基可测的。反之，若 Y 一致局部紧，则结论也成立。5. 若 f 是一致基可测且光滑的，则 f 是 T_2-可测的。

在以下证明中，以及贯穿本文始终，$\mathbb{N}$表示正整数（不包括 0），而 I_A 表示集合 A的指示函数。记号 $\sum_{i=1}^{n} b_i I_{B_i}$（其中 b_1、.....、$b_n \in Y$各不相同，且$\{B_1, \ldots, B_n\}$ 是 X的互不相交子集）用于表示一个简单函数，即使 Y上未定义加法运算。

证明。1 的证明在某种程度上类似于 [14] 中定理 4.4.7 的证明。假设 f 是 T_1-可测的，并选取 $\epsilon > 0$ 和一个围绕 E。存在一个对称邻近 D，使得 $D \circ D \subseteq E$，以及一个简单函数$s := \sum_{i=1}^{n} b_i I_{B_i}$，其中 b_1、. . .、$b_n \in Y$互不相同，且 $\{B_1, \ldots, B_n\}$ 是 X 的一个划分，其元素属于 $\mathcal{F}$，使得 $\mu^*(B_0) < \epsilon$，其中

$$B_0 := \{x \in X : (s(x), f(x)) \notin D\}.$$

此外，存在某个 $A_0 \in \mathcal{F}$，使得 $\mu(A_0) < \epsilon$，且 $B_0 \subseteq A_0$。对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，定义 $A_i := B_i \setminus A_0 \in \mathcal{F}$。那么对于任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$和 x、$x' \in A_i$，必有 $(f(x)\ b_i) = (f(x)\ s(x)) \in D$，类似地，$(f(x')\ b_i) = (f(x')\ s(x')) \in D$。因此，$(f(x)\ f(x')) \in D \circ D \subseteq E$，这意味着 f 是 T_2- 可测的。

反过来，假设 f 是 T_2-可测的，并选取 $\epsilon > 0$和一个 entour-age E。那么 X存在一个由集合 A_0，...，$A_n \in \mathcal{F}$构成的划分，使得 $\mu(A_0) < \epsilon$，且对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，$f(A_i) \times f(A_i) \subseteq E$。对于每个$i \in \{1, \ldots, n\}$，任取 $a_i \in f(A_i)$，并定义 $s := \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}$。于是，对于 $x \in A_i$，$(s(x)\ f(x)) = (a_i, f(x)) \in f(A_i) \times f(A_i) \subseteq E$。由此可得，

$$\mu^*(\{x \in X : (s(x), f(x)) \notin E\}) \leq \mu(A_0) < \epsilon,$$

因此 f 是 T_1-可测的。

关于光滑性，考虑 $\epsilon > 0$ 和一个围绕 E，并令$A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$如 T_2-可测性的定义所述。对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，定义 $B_i := f(A_i)$，使得 $B_i \times B_i \subseteq E$并且

$$\mu^*(\{x \in X : f(x) \notin \cup_{i=1}^n B_i\}) \leq \mu(A_0) < \epsilon,$$

这意味着 f 是光滑的。

对于 2，假设 $\mathcal{F}$ 是一个 σ-域，且 f 是常规可测的。由于由开对称邻近组成的集族 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ 构成一个邻近基（参见 [2]第 6 章定理 6），显然 f 是一致基可测的。对于 2b，考虑 $E \in \mathcal{U}$。存在 $D \in \mathcal{O}$ 使得 $D \subseteq E$。由于 Y 是 Lindel¨of，且 $\{D[y] : y \in Y\}$ 是 Y的一个开覆盖，因此存在一个序列 $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq Y$ 使得 $Y = \cup_{i=1}^{\infty} D[y_i]$。定义 $B_1 := D[y_1]$，并对 $i \geq 2$迭代定义 $B_i := D[y_i] \setminus \cup_{j=1}^{i-1} B_j$。于是 $A_i := f^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$，且对所有 $i \in \mathbb{N}$，$f(A_i) \times f(A_i) \subseteq E$。此外，若 μ 是有界测度，则对任意 $\epsilon > 0$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\mu((\cup_{i=1}^n A_i)^c) < \epsilon$。定义$A_0 := (\cup_{i=1}^n A_i)^c \in \mathcal{F}$，则 $A_0, A_1, \ldots, A_n$是一个符合 T_2-可测性定义要求的划分。

对于 3，假设 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 是一个完备测度空间，且 Y 是遗传 Lindel¨of。进一步假设 f 是基可测的，并考虑一个开集 $G \subseteq Y$。对于每个 $y \in G$，令 $\mathcal{N}_y$ 为由所有满足 $N \subseteq G$ 且 $f^{-1}(N) \in \overline{\mathcal{F}}$ 的 y 的邻域 N 构成的（非空）集合。令 $\mathcal{N} := \cup_{y \in G} \mathcal{N}_y$。内部 $\{N^\circ : N \in \mathcal{N}\}$ 构成 G 的一个开覆盖，因此存在一个可数集 $\{N_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{N}$，使得 $G = \cup_{i=1}^{\infty} N_i$，从而 $f^{-1}(G) = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(N_i) \in \overline{\mathcal{F}}$。但由 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 的完备性可知 $\mathcal{F} = \mathcal{F}$，因此 f 是常规可测的。

对于 3b，考虑一个开集 $G \subseteq Y$。对于每个 $y \in G$，令 $\mathcal{N}_y$ 为由所有二元组 (U, V) 构成的集合，其中 U 是 y 的一个开邻域，且包含于 G，并满足 $f^{-1}(U) \subseteq V \subseteq f^{-1}(G)$。如果 f 是 T_2- 可测的，那么 $\mathcal{N}_y$ 非空，以下构造即可说明这一点。存在 $D \in \mathcal{O}$，使得 $(D \circ D)[y] \subseteq G$。于是 $U := D[y]$ 是 y 的一个开邻域，且包含于 G。利用 f 的 T_2-可测性，可以构造一个两两不交序列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$，使得对所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 $f(A_i) \times f(A_i) \subseteq D$，并且 $\mu^*(A_0) = 0$，其中 $A_0 := (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)^c$。由于 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 是完备的，A_0 的子集都是 $\mathcal{F}$ 的元素。现在定义

$$V := \bigcup \{A_i : A_i \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset\} \cup (A_0 \cap f^{-1}(U)).$$

那么 $V \in \mathcal{F}$与 $f^{-1}(U) \subseteq V$。此外，$f(V) \subseteq (D \circ D)[y] \subseteq G$，因此$V \subseteq f^{-1}(G)$，如所需。现在令 $\mathcal{N} := \cup_{y \in Y} \mathcal{N}_y$。由于 Y具有遗传性。

Lindel¨of，存在一个序列 $\{(U_i, V_i)\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{N}$，使得 $G = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$，因此 $f^{-1}(G) = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(U_i) \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} V_i \subseteq f^{-1}(G)$。由此可得 $f^{-1}(G) = \cup_{i=1}^{\infty} V_i \in \mathcal{F}$，也就是说，$f$ 是常规可测的。

要证明 4，注意到，如果 f 是一致基可测的，并具有如定义 2.1(5) 中的围绕基 $\mathcal{B}$，那么 $\mathcal{B}_y := \{E[y] \colon E \in \mathcal{B}\}$ 对任意 $y \in Y$ 都是 y 处的邻域基，并且对所有 $B \in \mathcal{B}_y$，$f^{-1}(B) \in \overline{\mathcal{F}}$。因此，$f$ 是基可测的。对于部分逆命题，考虑 $E \in \mathcal{U}$。如果 Y 是一致局部紧的，则存在 $D \in \mathcal{U}$，使得 $D \circ D \subseteq E$，并且对所有 $y \in Y$，$D[y]$ 是紧致的。如果 f 是基可测的，则对于每个 $z \in D[y]$，由所有满足 $N \subseteq E[y]$ 且 $f^{-1}(N) \in \overline{\mathcal{F}}$ 的 z 的邻域 N 所组成的集合 $\mathcal{N}_z$ 非空。定义 $\mathcal{N} := \cup_{z \in D[y]} \mathcal{N}_z$。内部 $\{N^{\circ} \colon N \in \mathcal{N}\}$ 构成 $D[y]$ 的一个开覆盖，因此存在一个覆盖 $D[y]$ 的有限集 $\{N_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{N}$。定义 $V_y := \cup_{i=1}^{n} N_i$，则 $D[y] \subseteq V_y \subseteq E[y]$ 且 $f^{-1}(V_y) \in \overline{\mathcal{F}}$。但是此时 $V := \cup_{y \in Y} \{y\} \times V_y$ 是一个围绕，满足 $D \subseteq V \subseteq E$，并且对所有 $y \in Y$，$f^{-1}(V[y]) \in \overline{\mathcal{F}}$，这意味着 f 是一致基可测的。

为证明 5，任取 $\epsilon > 0$ 和任意一个围绕 E。于是存在某个对称邻近 D，使得 $D \circ D \subseteq E$。若 f 是一致基可测的，则存在某个围绕 $C \subseteq D$，使得对所有 $y \in Y$，$f^{-1}(C[y]) \in \overline{\mathcal{F}}$。若$f$是光滑的，则存在集合 $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{P}(Y)$，使得对于$i \in \{1, \ldots, n\}$，$G_i \times G_i \subseteq C$，且 $\mu^*(f^{-1}((\cup_{i=1}^{n} G_i)^c)) < \epsilon$。对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，选取$y_i \in G_i$，并注意到 $G_i \subseteq C[y_i]$ 和 $C[y_i] \times C[y_i] \subseteq D[y_i] \times D[y_i] \subseteq D \circ D \subseteq E$。如下构造 Y的一个划分：定义 $B_1 := C[y_1]$和 $B_i := C[y_i] \setminus \cup_{j=1}^{i-1} B_j$，其中 $i \in \{2, \ldots, n\}$。然后定义 $B_0 := (\cup_{i=1}^{n} B_i)^c \subseteq (\cup_{i=1}^{n} G_i)^c$。令 $A_i := f^{-1}(B_i)$，其中 $i \in \{0, \ldots, n\}$；则 $A_0, A_1, \ldots, A_n$是一个划分，其形式符合 T_2-可测性的定义。 □

在 3b 的证明中构造两两不交序列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$，隐含地用到了可数选择公理：必须对序列 $\epsilon_n \to 0$ 中的每个元素，选取 X 的一个有限划分（利用 f 的 T_2-可测性）。4 的证明通过为每个 $y \in Y$ 选取一个有限覆盖，用到了选择公理。结合 4 和 5 可得，若 Y 是一致局部紧的，且 f 是基可测且光滑的，则 f 是 T_2-可测的。后一结果也可以在不调用任何选择公理的情况下证明（证明略）。

本节的第二个定理指出，定理 2.2(5) 存在一个部分逆命题，其中 $\mathcal{U}$ 是由函数族 $\mathcal{S}$ 生成的弱（即初始）一致性。该定理的条件需要以下定义和记号。

定义 2.3.考虑一个电荷空间（X、$\mathcal{F}$、μ）和一个函数 f： $X \to \mathbb{R}$。对于每个 $z \in \mathbb{R}$，定义边界质量极限 ϕ_f： $\mathbb{R} \to [0,\infty]$ 为函数：

$$\phi_f(z) := \lim_{\delta \to 0} \mu_*(f^{-1}(z-\delta, z+\delta)).$$

令 Ξ 表示 $\mathbb{R}$ 上的通常一致性。给定一致空间 $(Y,\mathcal{U})$、函数 g： $Y \to \mathbb{R}$ 和集合 $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，定义

$$g^{-1}(V) := \{(y, y') \in Y \times Y : (g(y), g(y')) \in V\}$$

并注意，当 g 一致连续且 $V \in \Xi$ 时， $g^{-1}(V) \in \mathcal{U}$。

定义 2.4。考虑电荷空间 $(X,\mathcal{F},\mu)$、一致空间 $(Y,\mathcal{U})$ 和函数 f： $X \to Y$。令 $\mathcal{S}$ 为 Y 上一致连续实值函数的一个族。对每个 $g \in \mathcal{S}$，定义

$$\begin{aligned}
\epsilon_g &:= \{(-\infty, z), (z, \infty) : z \in \mathbb{R}, \phi_{g\circ f}(z) < \infty\},\\
\eta_g &:= \{g^{-1}(E) : E \in \epsilon_g\},\\
\mathcal{E}_g &:= \{g^{-1}(E) : E \in \Xi, E[z] \in \epsilon_g \text{ for all } z \in \mathbb{R}\},\\
\kappa_g &:= \{(-\infty, z), (z, \infty) : z \in \mathbb{R}, \phi_{g\circ f}(z) = 0\},\\
\zeta_g &:= \{g^{-1}(E) : E \in \kappa_g\},\\
\mathcal{Z}_g &:= \{g^{-1}(E) : E \in \Xi, E[z] \in \kappa_g \text{ for all } z \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

另定义 $\eta := \cup_{g\in\mathcal{S}}\eta_g$, $\mathcal{E} := \cup_{g\in\mathcal{S}}\mathcal{E}_g$, $\zeta := \cup_{g\in\mathcal{S}}\zeta_g$ 和 $\mathcal{Z} := \cup_{g\in\mathcal{S}}\mathcal{Z}_g$。

因此， η 是所有开射线在其端点处具有有限边界质量极限的原像所构成的集族，而 $\mathcal{E}$ 是由 η 中的元素构成的围绕集族。类似地， ζ 是所有开射线在其端点处具有零边界质量极限的原像所构成的集族，而 $\mathcal{Z}$ 是由 ζ 中的元素构成的围绕集族。

$\mathcal{S}$ 中的函数的一致连续性确保了 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{U}$ 和 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{U}$。它还确保了 η 和 ζ 的元素是开集（尽管连续函数对此已足够）。

定理 2.5。考虑一个电荷空间（X、$\mathcal{F}$、μ）、一个一致空间（Y、$\mathcal{U}$）以及一个 T_2-可测函数 f： $X \to Y$。令 $\mathcal{S}$、 η 和 $\mathcal{E}$ 如定义 2.4 所述。

1. 如果 η 是一致拓扑的子基，那么 f 是基可测的。

2. 如果 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{U}$ 的围绕子基，那么 f 是一致基可测的。

证明依赖于两个关于边界质量极限性质的引理，这些引理将在本节稍后陈述并证明。

证明。对于1，只需证明对于任意 $E \in \eta$ 和 $y \in E$，存在$D \in \zeta$ 使得 $y \in D \subseteq E$，因为这样 ζ 也是一致拓扑的一个子基。此外，根据下面的引理 2.6，$f^{-1}(D) \in \overline{\mathcal{F}}$ 对于所有 $D \in \zeta$，因此 f 是基可测的。设 $y \in E \in \eta$。于是，对于某个 $g \in \mathcal{S}$和 $V \in \epsilon_g$，有 $E = g^{-1}(V)$，其中 V是形如$(-\infty, v)$ 或 (v, ∞)的区间，且对于某个 $v \in \mathbb{R}$ 满足 $\phi_{g\circ f}(v) < \infty$。注意 $g(y) \in V$。下面的引理2.7(4)表明，在 v 和 $g(y)$ 之间严格存在 w，使得 $\phi_{g\circ f}(w) = 0$。因此 $g(y) \in W \subseteq V$，其中 W 是包含 $g(y)$ 的区间$(-\infty, w)$ 或(w, ∞)中的那个。于是$D := g^{-1}(W) \in \zeta$，其中 $y \in D \subseteq E$，如所要求。

对于 2，只需证明对于任意 $E \in \mathcal{E}$，存在 $D \in \mathcal{Z}$ 使得 $D \subseteq E$，因为这样一来，$\mathcal{Z}$也是 $\mathcal{U}$的围绕子基。此外，根据下面的引理 2.6，对于所有 $D \in \mathcal{Z}$ 和 $y \in Y$，$f^{-1}(D[y]) \in \overline{\mathcal{F}}$，因此 f 是一致基可测的。于是，设 $E \in \mathcal{E}$。那么，对于某些 $g \in \mathcal{S}$和 $V \in \Xi$，有 $E = g^{-1}(V)$；其中，对每个 $z \in \mathbb{R}$，$V[z] \in \epsilon_g$是形如 $(-\infty, v_z)$ 或 (v_z, ∞) 的区间，其中某个 $v_z \in \mathbb{R}$ 满足 $\phi_{g\circ f}(v_z) < \infty$。由于 $V \in \Xi$，存在某个 $\gamma > 0$，使得 $V \supset U_\gamma := \{(u, u') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |u - u'| \leq \gamma\}$。因此，对每个 $z \in \mathbb{R}$，$[z-\gamma, z+\gamma] \subset V[z]$。引理 2.7(4) 表明，存在一个 w_z，严格位于 v_z与区间 $[z-\gamma, z+\gamma]$之间，且满足 $\phi_{g\circ f}(w_z) = 0$。因此 $z \in W_z \subseteq V[z]$，其中 W_z是包含 z 的区间 $(-\infty, w_z)$ 或 (w_z, ∞)。构造集合 $W := \cup_{z\in\mathbb{R}}\{z\} \times W_z$。由于 $U_\gamma \subset W$，有 $W \in \Xi$，因此 $D := g^{-1}(W) \in \mathcal{Z}$。此外，$W \subseteq V$，从而 $D \subseteq E$，如所需。 □

前一个定理第 2 部分的证明隐含地用到了选择公理，因为必须为每个 $z \in \mathbb{R}$ 选取 w_z。如果 Y 是一致局部紧的，那么也可以由 1 和定理 2.2(4) 推出 2。

当 $\mathcal{U}$ 是由 $\mathcal{S}$ 生成的弱一致性（对于第2 部分），或者当一致拓扑是由 $\mathcal{S}$ 生成的弱拓扑（对于第 1部分）时，建立定理 2.5的条件可能是直接的。例如，如果 μ是有界的，那么 $\mathcal{E}$ 显然是 $\mathcal{U}$ 的围绕子基，而 η 是一致拓扑的子基，因为对于所有 $g \in \mathcal{S}$，$\phi^{-1}_{g\circ f}(\infty)$都是空的。或者，如果对于每个 $A \in \mathcal{F}$，要么 $\mu(A) < \infty$，要么 $\mu(A^c) < \infty$，那么 $\phi^{-1}_{g\circ f}(\infty)$ 至多包含一个元素。如果 Y 是一个巴拿赫空间，并且按照 [9], 的定义 III.2.17 的意义，f 是可积的，那么 $\phi^{-1}_{g\circ f}(\infty)$ 不包含任何非零元素，因此定理的条件再次得到满足。

此处人们关注边界质量极限的主要原因是，边界质量极限为零的 $\mathbb{R}$中的点会以以下引理所述的方式，在 Y 中诱导出逆像属于$\overline{\mathcal{F}}$的集合。请注意，此结果推广了 [12], 的引理 3.1，该引理仅适用于实值的 T_2-可测函数。

引理 2.6。设有一个电荷空间 $(X, \mathcal{F}, \mu)$、一个一致空间 Y，以及一个函数 $f\colon X \to Y$。假设 $g\colon Y \to \mathbb{R}$ 是一致连续函数，且对于某个 $z \in \mathbb{R}$，有 $\phi_{g\circ f}(z) = 0$。定义 $D := g^{-1}(-\infty, z)$，并假设以下条件至少有一个成立：

1. f 是 T_2-可测的，或者 2. f 是一致基可测的，且 D 全有界。

那么 $f^{-1}(D) \in \overline{\mathcal{F}}$，且 $f^{-1}(\partial D) \in \overline{\mathcal{F}}$，其中 $\overline{\mu}(f^{-1}(\partial D)) = 0$。

证明。定义 $h := g \circ f$。由于 $\phi_h(z) = 0$，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得 $\mu_*(h^{-1}(z-\delta, z+\delta)) < \epsilon/2$。

假设 f 是 T_2-可测的。那么 h 是 T_2-可测的（这可由 T_2-可测性和一致连续性的定义推出）。因此，存在 X 的一个划分，其元素为 $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$，使得 $\mu(A_0) < \epsilon/2$ 且 $|h(x) - h(x')| < \delta$，对所有 x、$x' \in A_i$ 以及所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$均成立。定义 B 为 $\{A_1, \ldots, A_n\}$ 中包含于 $h^{-1}(-\infty, z)$的那些元素的并集；如果没有这样的元素，则定义为空集。定义 E 为 $\{A_1, \ldots, A_n\}$ 中与 $h^{-1}(-\infty, z]$ 及 $h^{-1}[z, \infty)$都相交的那些元素的并集；如果没有这样的元素，则定义为空集。于是 $E \subseteq h^{-1}(z-\delta, z+\delta)$，因为若 $A_i \subseteq E$，则对于满足 $h(x) \leq z \leq h(x')$的每一对 x、$x' \in A_i$，必有 $|h(x) - h(x')| < \delta$，从而 $|h(x) - z| < \delta$ 且 $|h(x') - z| < \delta$。定义 $C := B \cup A_0 \cup E$。然后

$$\mu(C \setminus B) = \mu(A_0 \cup E) \leq \mu(A_0) + \mu_*(h^{-1}(z-\delta, z+\delta)) < \epsilon.$$

现在，B，$C \in \mathcal{F}$与 $B \subseteq h^{-1}(-\infty, z) \subseteq C$，因此 $f^{-1}(D) = h^{-1}(-\infty, z) \in \overline{\mathcal{F}}$。此外，$f^{-1}(\partial D) \subseteq h^{-1}(z) \subseteq C \setminus B$，因为 $\partial D \subseteq g^{-1}(z)$。因此$f^{-1}(\partial D) \in \overline{\mathcal{F}}$与 $\overline{\mu}(f^{-1}(\partial D)) = 0$。

或者，假设 f 一致基可测，且 D 全有界。由于 g一致连续，集合 $\{(y, y') : |g(y) - g(y')| < \underline{\delta}\}$是一个围绕，因此包含一个围绕 E，满足 $f^{-1}(E[y]) \in \mathcal{F}$ 对所有 $y \in Y$ 成立。由 D 的全有界性可知，存在某个有限集 $F \subseteq Y$，使得$\overline{D} \subseteq \cup_{y\in F} E[y]$。定义 $B := \bigcup\{f^{-1}(E[y]) : y \in$

F、 $E[y] \subseteq D\}$，或者在该并集中没有元素时为空集。定义$C := \cup_{y\in F} f^{-1}(E[y])$。那么 B、$C \in \overline{\mathcal{F}}$满足 $B \subseteq f^{-1}(D) \subseteq C$且 $C \setminus B \subseteq f^{-1}(g^{-1}(z-\delta, z+\delta))$。后者意味着$\overline{\mu}(C \setminus B) \leq \epsilon$，因此 $f^{-1}(D) \in \overline{\mathcal{F}}$。此外， $f^{-1}(\partial D) \subseteq C \setminus B$，因此 $f^{-1}(\partial D) \in \mathcal{F}$，且 $\overline{\mu}(f^{-1}(\partial D)) = 0$。 □

为了利用引理 2.6 证明某个函数是基可测或一致基可测，定理 2.5 的证明要求 $\mathbb{R}$ 中零边界质量极限点的集合在有限边界质量极限点的集合中稠密。令人惊讶的是，对于电荷空间上的任意实值函数，这一点都成立，即使该函数在任何意义下都不可测。这是以下引理的推论，该引理推广了 [12] 的引理 3.2：后者仅适用于有界电荷空间上的 T_2-可测函数。

引理 2.7. 考虑一个电荷空间 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 和一个函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$。边界质量极限 ϕ_f 具有以下性质。

1. 对于任意满足 $\phi_f(z) = 0$ 的 $z \in \mathbb{R}$，以及任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得$\phi_f(w) < \epsilon$对所有 $w \in (z-\delta, z+\delta)$ 都成立。2. 对于任意 $(0, \infty)$ 中的 $z \in \phi_f^{-1}$，存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $w_1, \ldots, w_n \in (z-\delta, z+\delta) \setminus \{z\}$，都有 $\phi_f(z) > \sum_{i=1}^n \phi_f(w_i)$。3. 集合 $\phi_f^{-1}(0, \infty)$ 是可数的。4. $\phi_f^{-1}[0, \infty)$ 是一个开集，其中 $\phi_f^{-1}(0)$ 稠密。

证明。性质1可通过反证法证明。假设其不成立，即存在 $z \in \mathbb{R}$，使得 $\phi_f(z) = 0$ 且 $\epsilon > 0$，从而对任意 $\delta > 0$，存在 $w \in (z-\delta, z+\delta)$，使得 $\phi_f(w) \geq \epsilon$。任取这样的 δ 和 w，则 $\mu_*(f^{-1}(z-\delta, z+\delta)) \geq \phi_f(w) \geq \epsilon$。令 $\delta \to 0$，得到 $\phi_f(z) \geq \epsilon$，矛盾。

性质 2 同样可以通过反证法证明。假设该性质不成立，这意味着存在 $z \in \phi_f^{-1}(0, \infty)$，使得对于任意 $\delta > 0$，都有 $w_1, \ldots, w_n \in (z-\delta, z+\delta) \setminus \{z\}$，满足 $\phi_f(z) \leq \sum_{i=1}^n \phi_f(w_i)$。选取 $\delta^{(1)} > 0$，得到 $w_1^{(1)}, \ldots, w_{n_1}^{(1)} \in (z-\delta^{(1)}, z+\delta^{(1)}) \setminus \{z\}$，满足 $\phi_f(z) \leq \sum_{i=1}^n \phi_f(w_i^{(1)})$。选取 $\delta^{(2)} \in (0, \delta^{(1)})$，使得区间 $\{(w_i^{(1)} - \delta^{(2)}, w_i^{(1)} + \delta^{(2)})\}_{i=1}^{n_1}$ 和区间 $(z-\delta^{(2)}, z+\delta^{(2)})$ 是 $(z-\delta^{(1)}, z+\delta^{(1)})$ 的两两不相交区间。但此时存在 $w_1^{(2)}, \ldots, w_{n_2}^{(2)} \in (z-\delta^{(2)}, z+\delta^{(2)}) \setminus \{z\}$，满足 $\phi_f(z) \leq \sum_{i=1}^{n_2} \phi_f(w_i^{(2)})$。对所有 $k \in \mathbb{N}$ 重复这一过程，可得到 $\delta^{(k)}$，以及

$w_1^{(k)}, \ldots, w_{n_k}^{(k)} \in (z-\delta^{(k)}, z+\delta^{(k)}) \setminus \{z\}$。现在 $(z-\delta^{(1)}, z+\delta^{(1)})$ 包含所有两两不相交区间

$$\{(w_i^{(k)} - \delta^{(k+1)}, w_i^{(k)} + \delta^{(k+1)}) : i \in \{1, \ldots, n_k\}, k \in \mathbb{N}\}.$$

因此，对于任意 $K \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mu_*(f^{-1}(z-\delta^{(1)}, z+\delta^{(1)})) &\geq \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_k} \mu_*(f^{-1}(w_i^{(k)} - \delta^{(k+1)}, w_i^{(k)} + \delta^{(k+1)})) \\ &\geq \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_k} \phi_f(w_i^{(k)}) \\ &\geq K\phi_f(z). \end{aligned}$$

因此 $\mu_*(f^{-1}(z-\delta^{(1)}, z+\delta^{(1)})) = \infty$，因为 $\phi_f(z) > 0$。但这对任意$\delta^{(1)} > 0$都成立，因此 $\phi_f(z) = \infty$，矛盾。

要证明性质3，考虑 $z \in \phi_f^{-1}(0,\infty)$ 以及 $\delta_z > 0$，它具有第2 点中所指定的性质。然后，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\phi_f^{-1}(1/n, \infty) \cap (z-\delta_z, z+\delta_z)$ 必须是有限集，因此 $\phi_f^{-1}(0,\infty) \cap (z-\delta_z, z+\delta_z)$ 是可数的。这些集合

$$\{\phi_f^{-1}(0,\infty) \cap (z-\delta_z, z+\delta_z) : z \in \phi_f^{-1}(0,\infty)\}$$

在子空间拓扑中构成 $\phi_f^{-1}(0,\infty)$ 的开覆盖。因此存在可数子覆盖，因为 $\mathbb{R}$ 是遗传林德勒夫的。因此 $\phi_f^{-1}(0,\infty)$ 是可数集的可数并，故为可数集。

对于 4，注意 1和 2 共同意味着$\phi_f^{-1}[0,\infty)$ 是一个开集。考虑 $z \in \phi_f^{-1}(0,\infty)$以及任意具有 2 中所述性质的 $\delta > 0$。那么 $(z-\delta, z+\delta)$不包含 $\phi_f^{-1}(\infty)$ 中的任何元素。此外，$\phi_f^{-1}(0,\infty) \cap (z-\delta, z+\delta)$ 是可数的，正如 3 的证明中所述。因此，$(z-\delta, z+\delta)$ 必须包含 $\phi_f^{-1}(0)$中的一个元素，这意味着 $\phi_f^{-1}(0)$ 在 $\phi_f^{-1}[0,\infty)$ 中稠密。 □

在前述引理第3 部分的证明中，$\mathbb{R}$ 是遗传林德勒¨夫的断言，等价于可数选择公理对 $\mathbb{R}$ [16]的子集成立这一断言。注意，第 3 部分未用于任何其他证明中。

3. Measurable real-valued functions

现在将把前两节所述的各种可测性概念应用于实值函数。此外，还将介绍专用于实值函数的其他可测性概念。

可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 上的实值函数 f 按照惯例称为可测的，当且仅当对所有 $y \in \mathbb{R}$，$f^{-1}(y, \infty) \in \mathcal{F}$。（一些作者以这种方式定义实值函数的可测性：参见 [17] 中的定义 121C 和定理 121E(f)。）这一条件可以通过几种方式推广。

定义 3.1。设有一个电荷空间（X、$\mathcal{F}$、μ）。函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$是

1. 当对所有 $y \in D$ 均有 $f^{-1}(y, \infty) \in \overline{\mathcal{F}}$，且 D 是 $\mathbb{R}$ 的稠密子集时，称为右射线可测；2. 当对所有 $y \in D$ 均有 $f^{-1}(-\infty, y) \in \overline{\mathcal{F}}$，且 D 是 $\mathbb{R}$ 的稠密子集时，称为左射线可测；3. 当对所有 $y \in D$ 均有 $f^{-1}(y, \infty) \in \overline{\mathcal{F}}$ 且 $f^{-1}(-\infty, y) \in \overline{\mathcal{F}}$，且 D 是 $\mathbb{R}$ 的稠密子集时，称为射线可测；4. 若存在由 $\overline{\mathcal{F}}$-简单函数构成的序列 $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$，模糊地收敛于 f，则称为正则 T_1-可测，其中（a） $s_i := \sum_{k=1}^{n_i} y_{ik}(I_{A_{ik}^+} - I_{A_{ik}^-})$，且 $n_i := i2^i - 1$；（b）对每个 $k \in \{1, \dots, n_i + 1\}$、$i \in \mathbb{N}$ 及某个 $\delta > 0$，有 $y_{ik} := k2^{-i}\delta$；（c）对每个 $k \in \{1, \dots, n_i\}$ 和 $i \in \mathbb{N}$，有 $A_{ik}^+ := f^{-1}(y_{ik}, y_{i,k+1}] \in \overline{\mathcal{F}}$ 及 $A_{ik}^- := f^{-1}[-y_{i,k+1}, -y_{ik}) \in \overline{\mathcal{F}}$。

不同形式的可测性之间的一些逻辑关系可以立即表述如下。下文中，“$\overline{\mathcal{F}}$-可测”一词按定义 1.4 的含义使用。

命题 3.2。考虑一个电荷空间$(X, \mathcal{F}, \mu)$ 和一个函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$。

1. 如果 f 是射线可测的，那么它是左射线可测且右射线可测的。2. 如果 f 是左射线可测或右射线可测的，那么它是 $\overline{\mathcal{F}}$-可测的。3. 如果 f 是 $\overline{\mathcal{F}}$-可测的，那么它是基可测的。4. f 一致基可测当且仅当它基可测。5. f 射线可测当且仅当 f^+ 和 f^- 射线可测。6. 如果 f 射线可测，那么对于任意同胚 $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$\psi(f)$ 也是射线可测的。（对 $\mathcal{F}$-可测函数和基可测函数也有类似结论。）7. 如果 $\mathcal{F}$ 是一个 σ-域，且 f 常规可测，那么 f 射线可测。

8. 如果 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 是一个完备测度空间，且 f 射线可测，那么 f 常规可测。

断言 4 由定理 2.2(4) 立即得出，因为 $\mathbb{R}$ 是一致局部紧的。其他断言的证明都很直接，故略去。

在下述定理的条件下，这些不同可测性类型之间还存在其他关系。该定理以两种方式推广了 [12] 的定理 3.4：1）允许 μ 为无界电荷；2）涉及其他形式的可测性。

定理 3.3. 设有一个电荷空间 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 和一个函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$。假设 $\phi_f^{-1}[0, \infty)$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密。

1. 以下陈述逻辑等价。(a) f 是射线可测的。(b) f 是左射线可测的。(c) f 是右射线可测的。(d) f 是 $\overline{\mathcal{F}}$-可测的。(e) f^+ 和 f^- 是基可测的。(f) f 是基可测的，且 $\exists y \in \mathbb{R}$ 与 $f^{-1}(y, \infty) \in \overline{\mathcal{F}}$。2. 以下陈述逻辑等价。(a) f 是正则 T_1-可测的。(b) f 是 T_1-可测的。(c) f 是 T_2-可测的。(d) f 是射线可测且光滑的。(e) f 是基可测且光滑的。

证明。蕴含关系 1a $\implies$ 1b $\implies$ 1d $\implies$ 1e 由命题 3.2（第 1、2 和 3 条）以及以下事实得出：f是 $\overline{\mathcal{F}}$-可测的，当且仅当 f^+和 f^-是 $\overline{\mathcal{F}}$-可测的。蕴含关系 1a $\implies$ 1c $\implies$ 1d 同理可得。

(1e $\implies$ 1a) 假设 f^+和 f^-基可测。由命题 3.2(4)，f^+是一致基可测的。定义具有子空间一致性的 $Y := [0, \infty)$，并令 $g\colon Y \to \mathbb{R}$ 表示包含映射。注意，g 是一致连续的，并且对于任意 $z \in \mathbb{R}$，$g^{-1}(-\infty, z) = [0, z)$ 是全有界的。由引理 2.6 的第二个条件可知，对于任意满足 $\phi_{f^+}(z) = 0$ 的 $z \in \mathbb{R}$，$(f^+)^{-1}(-\infty, z) \in \overline{\mathcal{F}}$ 且 $(f^+)^{-1}(z, \infty) \in \overline{\mathcal{F}}$。但是，由于根据下文的引理 3.4，$\phi_f^{-1}(0)$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，且 $\phi_f^{-1}(0) \setminus \{0\} \subseteq \phi_{f^+}^{-1}(0)$，因此 $\phi_{f^+}^{-1}(0)$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密。因此 f^+是射线可测的，类似的论证可得 f^- 是射线可测的。于是，根据命题 3.2(5)，f 是射线可测的。

(1a $\iff$ 1f) 假设 f 是射线可测的。根据命题 3.2(1、2 和 3), f 是基可测的，且 1f 的附加条件显然成立。反过来，假设 1f 成立。注意，对于任意 0 的邻域 B，$((f-y)^+)^{-1}(B) = f^{-1}(-\infty, y] \cup f^{-1}(y+B)$，且 $((f-y)^-)^{-1}(B) = f^{-1}(y,\infty) \cup f^{-1}(y-B)$，因此 $(f-y)^+$ 和 $(f-y)^-$ 都是基可测的。于是，由于 1e $\implies$ 1a, $f-y$ 是射线可测的。但这样一来，根据命题 3.2(6), f 是射线可测的。

(2a$\implies$ 2b $\implies$ 2c) 如果 f 是正则 T_1-可测的，那么它关于电荷空间 $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ 是T_1-可测的，因此根据 [13] 的命题 1.8(c)，它关于$(X, \mathcal{F}, \mu)$也是 T_1-可测的。第二个蕴含由 [14] 的定理 4.4.7 得出。

(2c $\implies$ 2a)由下面的引理 3.4，集合 $\phi_f^{-1}(0)$ 在 $\mathbb{R}$ 中是余瘦的。但集合

$$\{\delta \in (0,\infty) : \phi_f(k2^{-i}\delta) > 0 \text{ for some } i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$$

在 $(0,\infty)$中是瘦的，因为它是瘦集的可数并。由于 $(0,\infty)$ 在自身中不是瘦的，因此存在某个 $\delta \in (0,\infty)$，使得 $\phi_f(k2^{-i}\delta) = 0$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$都成立。现在，如果 f是 T_2-可测的，那么根据引理 2.6的第一个条件，令 g 为定义在 $Y = \mathbb{R}$上的恒等函数，可得 $f^{-1}(-\infty, k2^{-i}\delta) \in \overline{\mathcal{F}}$以及 $f^{-1}(k2^{-i}\delta, \infty) \in \overline{\mathcal{F}}$对所有 $i \in \mathbb{N}$和 $k \in \mathbb{Z}$都成立。因此，可以按照定义 3.1(4)定义一个由$\overline{\mathcal{F}}$-简单函数构成的序列 $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$。由于f 是光滑的，因此对于任意 $\epsilon, M > 0$，存在某个 $k \in \mathbb{N}$，使得 $\mu^*(\{x \in X : |f(x)| > k\}) < \epsilon$且 $2^{-k} < M$。但是，对于 $i \geq k$,

$$\mu^*(\{x \in X : |s_i(x) - f(x)| > M\}) \leq \mu^*(\{x \in X : |f(x)| > k\}) < \epsilon.$$

因此， s_i 模糊地收敛到 f，这意味着 f 是正则的 T_1-可测函数。

(2c $\implies$ 2d) 如果 f 是 T_2-可测的，那么 f 是光滑的。此外，对于任意满足 $\phi_f(z) = 0$ 的 $z \in \mathbb{R}$，都有 $f^{-1}(-\infty, z) \in \overline{\mathcal{F}}$ 和 $f^{-1}(z,\infty) \in \overline{\mathcal{F}}$；这是由引理 2.6 的第一条件（其中 g 是 $Y = \mathbb{R}$ 上的恒等函数）得出的。因此， f 是射线可测的，因为根据引理 3.4， $\phi_f^{-1}(0)$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密。

(2d $\implies$ 2e $\implies$ 2c) 第一个蕴含关系由命题 3.2(1、2 和 3) 得出。第二个蕴含关系由定理 2.2(4 和 5) 得出。 □

要求 $\phi_f^{-1}[0,\infty)$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，可以替换为下文引理 3.4 中提到的任一等价条件。注意，这一要求仅在以下证明中被使用：1e $\implies$ 1a（其本身又用于证明 1f $\implies$ 1a）、2c $\implies$ 2a 和 2c $\implies$ 2d。该要求是

定理 2.5(1) 中条件的一种特殊情形——即 η 是一个拓扑子基。为说明这一点，假设在定义 2.4 中，$Y = \mathbb{R}$ 和 $\mathcal{S}$ 仅包含恒等函数 $\iota(y) = y$。那么 $\eta = \{(-\infty, z),\ (z, \infty)\colon\ z \in \phi_f^{-1}[0, \infty)\}$；当 $\phi_f^{-1}[0, \infty)$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密时，它是 $\mathbb{R}$ 上通常拓扑的一个子基。因此，蕴含关系 2c $\implies$ 2e 也可由定理 2.5(1) 得出。

这里无需援引可数选择公理，就可以断言上文证明 2c $\implies$ 2a 中定义的集合是瘦集，因为它是瘦集的可数并；这是因为并集中的每个瘦集都可以按照规范顺序表示为无处稠密集的可数并（见下文 $2 \implies 3$ 引理 3.4 的证明）。

正如引言中所指出的，电荷空间上的光滑、$\overline{\mathcal{F}}$-可测函数必然是 T_2-可测的，这是 [15] 定理 3 的推论。上文定理 3.3 表明，如果 $\phi_f^{-1}[0, \infty)$ 在 $\mathbb{R}$中稠密，则其逆命题也成立。

下面的引理用于定理 3.3 的证明，可视为引理 2.7 的推论，突出了具有零、有限和无限边界质量极限的点在 $\mathbb{R}$中的分布情况。

引理 3.4. 设 I 是 $\mathbb{R}$中的任意开区间（有界或无界）。以下陈述逻辑等价。

1. $\phi_f^{-1}(\infty) \cap I$ 不包含任何开区间。 2. 对所有 $a \in (0, \infty]$，$\phi_f^{-1}[a, \infty] \cap I$ 在 I 中处处不稠密。 3. $\phi_f^{-1}(0) \cap I$ 在 I中是余贫集。 4. $\phi_f^{-1}(0) \cap I$ 在 I中稠密。 5. $\phi_f^{-1}[0, \infty) \cap I$ 在 I中稠密。

证明。 $1 \implies 2$，因为如果存在 $a \in (0, \infty]$ 使得 $\phi_f^{-1}[a, \infty] \cap I$在 I的某个开子区间 J 中稠密，那么引理 2.7(1 and 2)推出 J不包含 $\phi_f^{-1}[0, \infty)$中的任何元素，因此 $J \subseteq \phi_f^{-1}(\infty) \cap I$。 $2 \implies 3$，因为$\phi_f^{-1}(0, \infty] \cap I = \cup_{n \in \mathbb{N}} \phi_f^{-1}[1/n, \infty] \cap I$。 $3 \implies 4$，因为 I是贝尔空间，所以余贫集是稠密的。 $4 \implies 5$，因为 $\phi_f^{-1}(0) \subseteq \phi_f^{-1}[0, \infty)$。 $5 \implies$1，因为区间的稠密子集与每个开子区间都相交。 □

4. 可测性的继承

本节最后将说明，在什么条件下，函数 $f\colon\ X \to Y$ 的可测性会被较粗或较细的一致性“继承”。三个主要结果陈述如下定理。

定理 4.1. 设有一个电荷空间 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 和一个函数 $f\colon X \to Y$。

1. 若 f 关于 $\mathcal{U}_1$ 上的 T_2 可测或光滑，则 f 关于任意更粗的一致性 $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$ 分别是 T_2 可测或光滑。2. 若 f 对集族 $\mathcal{C}$ 中 Y 上的每个拓扑都是基可测，则 f 对 $\bigvee \mathcal{C}$ 是基可测。3. 若 f 对集族 $\mathcal{C}$ 中 Y 上的每种一致性都是一致基可测，则 f 对 $\bigvee \mathcal{C}$ 是一致基可测。

在该定理的断言 2 中，拓扑集族 $\mathcal{C}$ 的上确界 $\bigvee \mathcal{C}$ 是包含 $\bigcup \mathcal{C}$ 的最小拓扑。同理，在断言 3 中，一致性集族 $\mathcal{C}$ 的上确界 $\bigvee \mathcal{C}$ 是包含 $\bigcup \mathcal{C}$ 的最小一致性。

断言 1 可由 T_2 可测性和光滑性的定义直接得出。断言 2 源于这样一个事实：通过对取自 $\mathcal{C}$ 中各拓扑的基之并集的元素取有限交，可以得到 $\bigvee \mathcal{C}$ 的一个基。断言 3 也可类似地推出。因此，这些断言都无需详细证明。不过，该定理有一些有用的推论。

推论 4.2。考虑一个电荷空间$(X, \mathcal{F}, \mu)$、一个具有由伪度量族 $\mathcal{S}$诱导的一致性 $\mathcal{U}$ 的一致空间 Y，以及一个函数 $f\colon X \to Y$。

1. 如果 f 关于 $\mathcal{U}$ 是 T_2-可测的，那么 f 关于由每个 $p \in \mathcal{S}$ 诱导的一致结构是 T_2-可测的。 2. 如果 f 关于由每个$p \in \mathcal{S}$ 诱导的一致结构是一致基可测的，那么 f 关于 $\mathcal{U}$ 是一致基可测的。

推论 4.3。考虑一个电荷空间 $(X, \mathcal{F}, \mu)$、一个具有由函数族 $\{h_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ 诱导的弱一致性 $\mathcal{U}$ 的一致空间 $(Y, \mathcal{U})$，其中 $h_\alpha : Y \to Y_\alpha$，且对于每个 $\alpha \in \Omega$，$(Y_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ 都是一致空间，以及一个函数 $f\colon X \to Y$。

1. 如果对每个 $\alpha \in \Omega$，f 关于 $\mathcal{U}$ 是 T_2-可测的，那么 $h_\alpha \circ f$ 关于 $\mathcal{U}_\alpha$ 是 T_2- 可测的。 2. 如果对每个 $\alpha \in \Omega$，$h_\alpha \circ f$ 关于 $\mathcal{U}_\alpha$ 一致基可测，那么 f 关于 $\mathcal{U}$ 一致基可测。

特别地，当 $Y := \prod_{\alpha \in \Omega} Y_\alpha$ 带有乘积一致性，且 h_α 是 Y 到 Y_α 的坐标投影（对每个 $\alpha \in \Omega$）时，推论 4.3 适用。

References

[1] A. Weil, 《关于具有一致结构的空间及一般拓扑》, 《科学与工业实况》, 551, 斯特拉斯堡大学数学研究所出版物, 1937 年。[2] J. L. Kelley, 《一般拓扑学》, D. Van Nostrand Company, 纽约, 1963 年。[3] N. Bourbaki, 《一般拓扑学》第 1 部分, Hermann, 巴黎, 1966 年。[4] I. M. James, 《拓扑空间与一致空间》, 《数学本科教材》, Springer-Verlag, 纽约, 1987 年。[5] I. M. James, 《一致空间导论》, 伦敦数学学会讲义系列 144, 剑桥大学出版社, 纽约, 1990 年。[6] K. P. Hart, J.-I. Nagata, J. E. Vaughan, J. E. Vaughan, 《一般拓扑学百科全书》, Elsevier Science, 牛津, 2003 年。[7] S. Willard, 《一般拓扑学》, Dover Publications, 纽约, 2004 年。[8] A. Avallone 和 A. Basile, 《积分：一致结构》, 《数学分析与应用杂志》, 159（1991）373–381。[9] N. Dunford 和 J. T. Schwartz, 《线性算子》第 I 部分：《一般理论》, 《纯粹与应用数学》7, Wiley-Interscience, 纽约, 1958 年。[10] R. M. Dudley, 《实分析与概率》, CRC Press, 2017 年。[11] K. B. Athreya 和 S. N. Lahiri, 《测度论与概率论》, Springer, 纽约, 2006 年。[12] J. M. Keith, 《有界电荷空间上的函数的性质》, 《度量空间中的分析与几何》, 10（2022）63–89。[13] A. Basile 和 K. P. S. Bhaskara Rao, 《有限可加情形下 L_p-空间的完备性及相关问题》, 《数学分析与应用杂志》, 248（2000）588–624。

[14] K. P. S. Bhaskara Rao 和 M. Bhaskara Rao，《电荷理论》，《纯粹与应用数学》第109卷，学术出版社，纽约，1983年。[15] G. H. Greco，《关于函数相对于一族集合的可测性》，帕多瓦大学数学研讨会论文集，65（1981年），163–176。（译文：arXiv:2309.04049）[16] H. Herrlich 和 G. E. Strecker，《何时是 Lindelöf? 》，查理大学数学评论，38(3)（1997年），553–556。[17] D. H. Fremlin，《测度论》第1卷，Torres Fremlin，2011年。