arXiv:2304.05541v1 [math.DG] 12 Apr 2023

SL（2,Z）几乎复流形的模形式与反常抵消公式

Yong Wang

Abstract. 本文定义了带有一个额外复向量丛的几乎复流形的广义椭圆亏格，它推广了 [10]中的椭圆亏格。这个广义椭圆亏格是一个广义Jacobi形式。借助这个广义Jacobi形式，我们可以得到一些 SL（2, Z）模形式。利用这些 SL（2, Z）模形式，我们为几乎复流形得到了一些有趣的反常抵消公式。作为推论，我们得到了一些关于全纯欧拉示性数的整除性结果。

1. Introduction引言

对于任意紧致自旋流形，都可以定义其椭圆亏格。它是关于二级同余子群的单变量模形式。对于紧致复流形，可以将其椭圆亏格定义为关于两个复变量的函数。在后一种情况下，椭圆亏格是一个形式幂级数的全纯欧拉示性数，该级数的系数取自向量丛。如果复流形的第一陈类等于零，那么椭圆亏格就是弱Jacobi形式。在 [10], 中，Li将几乎复流形的椭圆亏格推广为一个涉及额外复向量丛的扭曲版本。在某些条件下，Li证明了这个椭圆亏格是弱Jacobi形式。本文进一步推广了Li的椭圆亏格，并证明这个广义椭圆亏格并非弱Jacobi形式，而称之为广义Jacobi形式。借助这个广义Jacobi形式，我们可以像 [10]中那样得到一些 SL（2, Z）模形式。

1983年，物理学家 Alvarez-Gaum´e 和 Witten [1] 发现了引力反常的“奇妙抵消”公式，该公式揭示了一个12维光滑黎曼流形的 Hirzebruch L-形式与 A-形式的最高次分量之间的美妙关系。Kefeng Liu [11] 通过发展特征形式的模不变性，建立了（$8k+4$）维黎曼流形上的高维“奇妙抵消”公式。这些公式可用于推导一些整除性结果。在 [8], [9], [3], 中，建立了一些涉及复线丛的更一般的抵消公式及其应用。在 [7], 中，Han、Liu 和 Zhang 表明，规范群 $E_8 \times E_8$ 的 Green-Schwarz 反常因子分解公式和规范群

2010 Mathematics Subject Classification: 58C20; 57R20; 53C80.*Key words and phrases:* 广义Jacobi形式; SL(2,Z) 模式；反常抵消公式；全纯欧拉示性数的可除性.

E_8 的 Horava-Witten 反常因子分解公式都可以通过权为14的模形式导出。这回答了 J. H. Schwarz 提出的问题。在 [5], 中，Han、Huang、Liu 和 Zhang 引入了定义在 SL(2, Z) 上的权为14的模形式，以及定义在 SL(2, Z) 上的权为10的模形式，并在12维流形上得到了若干有趣的反常抵消公式。在 [13], 中，借助 [12] 和 [4] , 中引入的一些 SL(2, Z) 模形式，我们得到了一些有趣的反常抵消公式。作为推论，我们得到了扭曲Dirac算子的指标的一些整除性结果。我们的动机是利用由上述广义Jacobi形式诱导的、定义在 SL(2, Z) 上的模形式，为几乎复流形证明更多反常抵消公式。

本文结构如下：在第2节中，我们引入广义椭圆亏格，并证明它是广义Jacobi形式。在第3节中，利用这一广义Jacobi形式，我们可以得到一些如 [10] 中所示的 SL(2, Z) 模形式。借助这些 SL(2, Z) 模形式，我们为几乎复流形得到了一些有趣的反常抵消公式。作为推论，我们得到全纯欧拉示性数的一些整除性结果。

2. Generalized elliptic genus for almost complex manifolds

设 (M, J) 是一个 $2d$ 维几乎流形， T 是依照 J 意义下的全纯切丛，且 T^* 是 T 的对偶。设 W 表示 M 上一个复 l 维向量丛。将 T 和 W 的第一陈类分别记为 $c_1(M)$ 和 $c_1(W)$。我们分别用 $2\pi\sqrt{-1}x_i$ $(1 \leq i \leq d)$ 和 $2\pi\sqrt{-1}w_j$ $(1 \leq j \leq l)$ 表示 T 和 W 的形式陈根。于是，(M, J) 的 Todd 形式定义为

$$\mathrm{Td}(M) := \prod_{i=1}^{d} \frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{1 - e^{-2\pi\sqrt{-1}x_i}}. \tag{2.1}$$

令（τ， z）$\in \mathcal{H}\times\mathcal{C}$其中， $\mathcal{H}$是上半平面， $\mathcal{C}$是复平面。令 $a_0 \geq 1$为正整数。令 $y_r = e^{2\pi\sqrt{-1}m_r z}$ 当 $1 \leq r \leq a_0$ 且正整数 m_r时。令$q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$和 $c:=\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)$ 。

对于任意复数 t，令

$$\wedge_t(E) = \mathbf{C}|_M + tE + t^2\wedge^2(E) + \cdots,\ S_t(E) = \mathbf{C}|_M + tE + t^2S^2(E) + \cdots \tag{2.2}$$

分别表示 E的总外幂和对称幂，它们属于 K（M）$[[t]]$.这些运算之间满足以下关系，

$$S_t(E) = \frac{1}{\wedge_{-t}(E)},\ \wedge_t(E-F) = \frac{\wedge_t(E)}{\wedge_t(F)}. \tag{2.3}$$

此外，若 $\{\omega_i\}$、$\{\omega_j'\}$ 分别是 Hermitian 向量丛 E、F 的形式陈根，则

$$\mathrm{ch}(\wedge_t(E)) = \prod_i(1+e^{\omega_i}t),\ \mathrm{ch}(S_t(E)) = \frac{1}{\prod_i(1-e^{\omega_i}t)}. \tag{2.3}$$

定义 2.1. 关于 W 的 (M^{2d}, J) 的广义椭圆亏格（记作 $\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z)$）定义为

$$\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z) := \left\{ exp(\frac{a_0c_1(W)-c_1(M)}{2})Td(M)\mathrm{ch}(E(M,W,\tau,z)) \right\}^{(2d)} \quad \pounds\neg \tag{2.4}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(M,W,\tau,z) :=& c^{2(d-la_0)}y_1^{-\frac{l}{2}}\cdots y_{a_0}^{-\frac{l}{2}}\bigotimes_{n=1}^{\infty}\left(\bigotimes_{r=1}^{a_0}\wedge_{-y_rq^{n-1}}(W^*)\wedge_{-y_r^{-1}q^n}(W)\right)\\ &\bigotimes\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(T^*)\otimes S_{q^n}(T)\right).\end{aligned} \tag{2.5}$$

当 $a_0 = 1$ 且 $m_1 = 1$时，我们得到 Li 的椭圆亏格。我们知道，我们的椭圆亏格不是 Li 的椭圆亏格的特例，因为 $\wedge_{t_1}(W)\otimes\wedge_{t_2}(W) \neq \wedge_{t_1+t_2}(W)$ 且 $\wedge_{t_1}(W)\otimes\wedge_{t_2}(W) \neq \wedge_{t_1t_2}(W)$。使用与 [10], 中引理 3.4 相同的计算，我们得到

引理 2.2。我们有

$$\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z) = \left(\eta(\tau)^{3(d-la_0)}\prod_{i=1}^{d}\frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{\theta(\tau,x_i)}\prod_{j=1}^{l}\prod_{r=1}^{a_0}\theta(\tau,w_j-m_rz)\right)^{(2d)}, \tag{2.6}$$

其中

$$\theta(\tau,z) = 2q^{\frac{1}{8}}\sin(\pi z)\prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1-e^{2\pi\sqrt{-1}z}q^j)(1-e^{-2\pi\sqrt{-1}z}q^j)], \tag{2.7}$$

$$\eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}}\cdot c = q^{\frac{1}{24}}\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j). \tag{2.8}$$

定理 2.3。若 $c_1(W) = 0$ 且第一庞特里亚金类 $p_1(M) = a_0p_1(W)$，则广义椭圆亏格 $\mathrm{Ell}(M, W, \tau, z)$ 满足

(2.9)

$$\mathrm{Ell}(M,W,\frac{a\tau+b}{c\tau+d_0},\frac{z}{c\tau+d_0}) = (c\tau+d_0)^{d-la_0}\exp(\pi\sqrt{-1}l(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)\frac{cz^2}{c\tau+d_0})\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z);$$

(2.10)

$$\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z+\lambda\tau+\mu) = (-1)^{\mu l(\sum_{r=1}^{a_0}m_r)+\lambda la_0}\exp(-\pi\sqrt{-1}l(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)(2\lambda z+\lambda^2\tau))\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z),$$

其中 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d_0 \end{pmatrix} \in SL(2,Z)$ 和 $\lambda,\mu \in Z$。我们知道，广义椭圆亏格 $\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z)$ 不是Jacobi形式，因此我们称之为广义Jacobi形式。

证明。由以下变换定律可知:

$$
\begin{aligned}
(2.11)\quad & \eta^3(-\frac{1}{\tau})=(\frac{\tau}{\sqrt{-1}})^{\frac{3}{2}}\eta^3(\tau),\ \eta^3(\tau+1)=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\eta^3(\tau),\\
& \theta(\tau,z+1)=-\theta(\tau,z),\ \theta(\tau,z+\tau)=-q^{-\frac{1}{2}}\exp(-2\pi\sqrt{-1}z)\theta(\tau,z),\\
& \theta(\tau+1,z)=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta(\tau,z),\ \theta(-\frac{1}{\tau},z)=-\sqrt{-1}(\frac{\tau}{\sqrt{-1}})^{\frac{1}{2}}\exp(\pi\sqrt{-1}\tau z^2)\theta(\tau,\tau z),
\end{aligned}
$$

我们得到 $\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z)$ 满足以下变换律:

$$
\begin{aligned}
(2.12)\quad & \mathrm{Ell}(M,W,\tau+1,z)=\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z),\\
& \mathrm{Ell}(M,W,\tau,z+1)=(-1)^{l(\sum_{r=1}^{a_0}m_r)}\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z),\\
& \mathrm{Ell}(M,W,\tau,z+\tau)=(-1)^{la_0}\exp(-\pi\sqrt{-1}l(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)(\tau+2z))\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z),\\
& \mathrm{Ell}(M,W,-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau})=\tau^{d-la_0}\exp(\pi\sqrt{-1}l(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)\frac{z^2}{\tau})\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z).
\end{aligned}
$$

根据(2.12)，我们可以得到(2.9)和(2.10)。 □

下面，我们介绍一些带有额外复向量丛W 和实向量丛 V的广义椭圆亏格。设 V 是一个 $2b_0$ 维实欧几里得向量丛，带有欧几里得联络 ∇^V，其曲率为 R^V。设 $\{\pm2\pi\sqrt{-1}u_r\}$ $(1\le r\le b_0)$~是 $V\otimes C$的形式陈根。设 $V_C=V_C$ –维V.

定义 2.4. 关于 W和 V、~ 的(M^{2d},J) 的广义椭圆亏格，我们记为 $\mathrm{Ell}(M,W,V,\tau,z)$、$\mathrm{Ell}(M,W,V,\tau,z)$、$\mathrm{Ell}(M,W,V,\tau,z)$，定义为

$$
\begin{aligned}
(2.13)\quad \mathrm{Ell}(M,W,V,\tau,z):=&\left\{exp(\frac{a_0c_1(W)-c_1(M)}{2})Td(M)\mathrm{ch}(E(W,q,\tau))\right.\\
&\left.\pounds\neg\cdot\det{}^{\frac{1}{2}}\cosh(\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}R^V)\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{q^m}(\widetilde{V_C})\otimes\bigotimes_{r=1}^{\infty}\wedge_{q^{r-\frac{1}{2}}}(\widetilde{V_C})\otimes\bigotimes_{s=1}^{\infty}\wedge_{-q^{s-\frac{1}{2}}}(\widetilde{V_C})\right]\right\}^{(2d)},
\end{aligned}
$$

(2.14)

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ell}}(M,W,V,\tau,z):=&\left\{exp(\frac{a_0c_1(W)-c_1(M)}{2})Td(M)\mathrm{ch}(E(W,q,\tau))\right.\\
&\left.\pounds\neg\cdot\left[\det{}^{\frac{1}{2}}\cosh(\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}R^V)\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{q^m}(\widetilde{V_C})\right]+\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{r=1}^{\infty}\wedge_{q^{r-\frac{1}{2}}}(\widetilde{V_C})\right]+\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{s=1}^{\infty}\wedge_{-q^{s-\frac{1}{2}}}(\widetilde{V_C})\right]\right]\right\}^{(2d)},
\end{aligned}
$$

$$\overline{\mathrm{Ell}}(M,W,V,\tau,z):=\left\{exp(\frac{a_0c_1(W)-c_1(M)}{2})Td(M)\mathrm{ch}(E(W,q,\tau))\right. \tag{2.15}$$
$$\left.\pounds\neg\cdot\det{}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin(\frac{1}{4\pi^2}R^V)}{\frac{1}{4\pi^2}R^V}\right)\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{-q^m}(\widetilde{V_C})\right]\right\}^{(2d)}.$$

引理 2.5. 我们有

$$\mathrm{Ell}(M,W,V,\tau,z)=\left(\eta(\tau)^{3(d-la_0)}\prod_{i=1}^{d}\frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{\theta(\tau,x_i)}\prod_{j=1}^{l}\prod_{r=1}^{a_0}\theta(\tau,w_j-m_rz)\right. \tag{2.16}$$
$$\left.\cdot\prod_{r=1}^{b_0}\left(\frac{\theta_1(u_r,\tau)}{\theta_1(0,\tau)}\frac{\theta_2(u_r,\tau)}{\theta_2(0,\tau)}\frac{\theta_3(u_r,\tau)}{\theta_3(0,\tau)}\right)\right)^{(2d)},$$

$$\widetilde{\mathrm{Ell}}(M,W,V,\tau,z)=\left(\eta(\tau)^{3(d-la_0)}\prod_{i=1}^{d}\frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{\theta(\tau,x_i)}\prod_{j=1}^{l}\prod_{r=1}^{a_0}\theta(\tau,w_j-m_rz)\right. \tag{2.17}$$
$$\left.\cdot\prod_{r=1}^{b_0}\left(\frac{\theta_1(u_r,\tau)}{\theta_1(0,\tau)}+\frac{\theta_2(u_r,\tau)}{\theta_2(0,\tau)}+\frac{\theta_3(u_r,\tau)}{\theta_3(0,\tau)}\right)\right)^{(2d)},$$

$$\overline{\mathrm{Ell}}(M,W,V,\tau,z)=\left(\eta(\tau)^{3(d-la_0)}\prod_{i=1}^{d}\frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{\theta(\tau,x_i)}\prod_{j=1}^{l}\prod_{r=1}^{a_0}\theta(\tau,w_j-m_rz)\right. \tag{2.18}$$
$$\left.\cdot\prod_{r=1}^{b_0}\left(\frac{\theta(u_r,\tau)}{\theta_1(0,\tau)\theta_2(0,\tau)\theta_3(0,\tau)u_r}\right)\right)^{(2d)}.$$

θ 函数具有以下变换律（参见 [2] ）：

$$\theta_1(v,\tau+1)=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta_1(v,\tau),\ \theta_1(v,-\frac{1}{\tau})=\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta_2(\tau v,\tau); \tag{2.19}$$

$$\theta_2(v,\tau+1)=\theta_3(v,\tau),\ \theta_2(v,-\frac{1}{\tau})=\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta_1(\tau v,\tau); \tag{2.20}$$

$$\theta_3(v,\tau+1)=\theta_2(v,\tau),\ \theta_3(v,-\frac{1}{\tau})=\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta_3(\tau v,\tau). \tag{2.21}$$

由 (2.19)–(2.21)，类似于定理 2.3，我们有

定理 2.6。如果 $c_1(W)=0$，且第一庞特里亚金类 $p_1(M)=a_0p_1(W)$ 以及$\sim p_1(E)=0$，那么广义椭圆亏格 $\mathrm{Ell}(M,W,V,\tau,z)$、$\mathrm{Ell}(M,W,V,\tau,z)$、$\mathrm{Ell}(M,W,V,\tau,z)$ 满足 (2.9) 和 (2.10)。

3. Anomaly cancellation formulas for almost complex manifolds

我们回顾，艾森斯坦级数 $G_{2k}(\tau)$ 定义为

$$G_{2k}(\tau) := -\frac{B_{2k}}{4k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) \cdot q^n, \tag{3.1}$$

其中 $\sigma_k(n) := \sum_{m>0,\ m|n} m^k$ 以及 B_{2k} 是伯努利数。众所周知， $SL(2,Z)$上的模形式的整个分次环由 $G_4(\tau)$和 $G_6(\tau)$生成。我们回顾 [10]中的命题 3.5

命题 3.1.([10]) 假设函数 $\varphi(\tau, z)$: $\mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 满足

$$\varphi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d_0}, \frac{z}{c\tau+d_0}) = (c\tau+d_0)^k \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}mcz^2}{c\tau+d_0})\varphi(\tau,z);\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d_0 \end{pmatrix} \in SL(2,Z). \tag{3.2}$$

我们定义

$$\Phi(\tau,z) := \exp(-8\pi^2 m G_2(\tau) z^2)\varphi(\tau,z) := \sum_{n\geq 0} a_n(\tau) \cdot z^n, \tag{3.3}$$

那么这些 $a_n(\tau)$ 是权为 $k+n$ 的模形式，定义在 $SL(2,Z)$ 上。

命题3.2。设 $c_1(W) = c_1(M) = 0$以及第一庞特里亚金类 $p_1(M) = a_0 p_1(W)$，则级数 $a_n(M, W, \tau)$ 由

$$\exp(-4\pi^2 l(\sum_{r=1}^{a_0} m_r) G_2(\tau) z^2)\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z) = \sum_{n\geq 0} a_n(M,W,\tau)\cdot z^n, \tag{3.4}$$

是关于 $SL(2,Z)$、权为 $d - la_0 + n$ 的模形式。此外， $a_n(M,W,\tau)$ 的前五个级数具有以下形式:

$$\begin{aligned} a_0(M,W,\tau) &= \{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)} + q\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_0)\}^{(2d)} \\ &+ q^2\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_1)\}^{(2d)} + O(q^3), \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中

$$A_0 = T + T^* - 2(d - la_0) - W_0 - W_0^*,\ W_0 = a_0 W, \tag{3.6}$$

and

$$\begin{aligned} A_1 &= S^2T + T^*\otimes T + S^2T^* + \wedge^2 W_0^* + \wedge^2 W_0 + W_0^*\otimes W_0 \\ &+ [2(d-la_0)-1](W_0 + W_0^* - T - T^*) - (W_0+W_0^*)\otimes(T+T^*) \\ &+ (d-la_0)(2d-2la_0-3), \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$(3.8)\qquad a_1(M,W,\tau)=\Bigg\{2\pi\sqrt{-1}Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)$$
$$\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\Big\}^{(2d)}+q\left\{Td(M)\mathrm{ch}(A_3)\right\}^{(2d)}+O(q^2),$$

其中

(3.9)

$$A_3=2\pi\sqrt{-1}[-2(d-la_0)+T+T^*-a_0(W+W^*)]\sum_{r=1}^{a_0}m_r(1+\wedge_{-1}(W^*))^{a_0-1}\otimes$$
$$(-W^*+2\wedge^2W^*+\cdots+(-1)^ll\wedge^lW^*)+(1+\wedge_{-1}(W^*))^{a_0}\Bigg\{-2\pi\sqrt{-1}\sum_{r=1}^{a_0}m_r(W+W^*)$$
$$-l\pi\sqrt{-1}\sum_{r=1}^{a_0}m_r[-2(d-la_0)+T+T^*-a_0(W+W^*)]\Bigg\},$$

(3.10)

$$a_2(M,W,\tau)=\Bigg\{-2\pi^2Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)^2$$
$$\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\Big\}^{(2d)}$$
$$+\frac{l}{6}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)\pi^2\Bigg\{Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\Bigg\}^{(2d)}+O(q),$$

(3.11)

$$a_3(M,W,\tau)=\Bigg\{\frac{4}{3}\pi^3(\sqrt{-1})^3Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)^3$$
$$\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\Big\}^{(2d)}$$
$$+\frac{\sqrt{-1}l}{3}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)\pi^3\Bigg\{Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)$$
$$\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\Big\}^{(2d)}+O(q),$$

(3.12)

$$a_4(M,W,\tau)=\left\{\frac{2}{3}\pi^4 Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r p_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)^4\right.$$
$$\left.\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)}$$
$$-\frac{l^2}{3}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)^2\pi^4\left\{Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r p_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)^2\right.$$
$$\left.\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)}$$
$$+\frac{l^2}{72}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)^2\pi^4\left\{Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)}+O(q),$$

证明。我们知道 $\mathrm{Ell}(M,W,\tau,0)=a_0(M,W,\tau)$，并且

(3.13)
$$\mathrm{Ell}(M,W,\tau,0)=\{Td(M)\mathrm{ch}(E(M,W,\tau,0))\}^{(2d)}\ £\neg$$

其中

(3.14)
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(M,W,\tau,0):=&c^{2(d-la_0)}\wedge_{-1}(W_0^*)\bigotimes_{n=1}^{\infty}\wedge_{-q^n}(W_0^*)\wedge_{-q^n}(W_0)\bigotimes\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(T^*)\otimes S_{q^n}(T)\right)\\&=\wedge_{-1}(W^*)+q\wedge_{-1}(W^*)\otimes A_0++q^2\wedge_{-1}(W^*)\otimes A_1+O(q^3).\end{aligned}$$

因此我们得到（3.5）。如果我们令

(3.15)
$$\exp(-4\pi^2 l(\sum_{r=1}^{a_0}m_r)G_2(\tau)z^2):=C_0(Z)+C_1(z)q+O(q^2),$$

and

(3.16)
$$\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z):=B_0(Z)+B_1(z)q+O(q^2),$$

我们可以得到这一点

(3.17)

$$C_0(z)=1+\frac{l}{6}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)\pi^2z^2+\frac{l^2}{72}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)^2\pi^4z^4+O(z^6),$$

$$C_1(z)=-4l(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)\pi^2z^2-\frac{2l^2}{3}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)^2\pi^4z^4+O(z^6),$$

$$B_0(z)=\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)}$$

$$+\left\{2\pi\sqrt{-1}Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)\right.$$

$$\left.\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)}z$$

$$+\left\{-2\pi^2Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)^2\right.$$

$$\left.\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)}z^2$$

$$+\left\{\frac{4}{3}\pi^3(\sqrt{-1})^3Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)^3\right.$$

$$\left.\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)}z^3$$

$$+\left\{\frac{2}{3}\pi^4Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)^4\right.$$

$$\left.\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)}z^4+O(z^5)$$

$$B_1(y)=\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes[-2(d-la_0)+T+T^*-a_0(W+W^*)])\}^{(2d)}$$

$$+\left\{Td(M)\mathrm{ch}(2\pi\sqrt{-1}[-2(d-la_0)+T+T^*-a_0(W+W^*)]\sum_{r=1}^{a_0}m_r(1+\wedge_{-1}(W^*))^{a_0-1}\otimes\right.$$

$$(-W^*+2\wedge^2W^*+\cdots+(-1)^ll\wedge^lW^*)+(1+\wedge_{-1}(W^*))^{a_0}\left\{-2\pi\sqrt{-1}\sum_{r=1}^{a_0}m_r(W+W^*)\right.$$

$$\left.\left.-l\pi\sqrt{-1}\sum_{r=1}^{a_0}m_r[-2(d-la_0)+T+T^*-a_0(W+W^*)]\right\}^{(2d)}z+O(z^2).\right.$$

我们知道

$$\sum_{n\geq 0} a_n(M,W,\tau)\cdot z^n = C_0(z)B_0(z)+[C_0(z)B_1(z)+C_1(z)B_0(z)]q+\cdots, \tag{3.18}$$

那么由 (3.17) 和 (3.18) 可得命题 3.2。 □

由于不存在奇权或非零权的 $SL(2,Z)$ 模形式≤ 2, 因此我们有

命题 3.3。设 $c_1(W) = c_1(M) = 0$以及第一庞特里亚金类 $p_1(M) = a_0p_1(W)$, 则

1)若 $d-la_0$ 为奇数或 $d-la_0\leq 2$, 但 $d-la_0\neq 0$, 则

$$\begin{aligned}&\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)} = \{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_0)\}^{(2d)} = 0\\ &\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_1)\}^{(2d)} = 0,\end{aligned} \tag{3.19}$$

以及对于复流形,

$$\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)) = \chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes(A_0)) = \chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes(A_1)) = 0, \tag{3.20}$$

其中, $\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*))$表示扭曲全纯欧拉示性数。2）如果 $d-la_0$ 为偶数, 或 $d-la_0\leq 1$, 但 $d-la_0\neq -1$, 那么

$$\begin{aligned}&\Big\{Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)\\ &\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\Big\}^{(2d)} = 0,\\ &\{Td(M)\mathrm{ch}(A_3)\}^{(2d)} = 0,\end{aligned} \tag{3.21}$$

以及对于复流形,

$$\begin{aligned}&\chi(M,\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*) = 0,\\ &\chi(M,A_3) = 0.\end{aligned} \tag{3.22}$$

3）如果 $d-la_0$ 为奇数, 或 $d-la_0\leq 0$ 但 $d-la_0\neq -2$, 则

$$\begin{aligned}&\Big\{-2Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)^2\\ &\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\Big\}^{(2d)}\\ &+\frac{l}{6}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)\left\{Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)} = 0,\end{aligned} \tag{3.23}$$

4）如果 $d-la_0$ 为偶数，或 $d-la_0\leq -1$ 但 $d-la_0\neq -3$，则

$$
\begin{aligned}
(3.24)\qquad &\left\{\frac{4}{3}\pi^3(\sqrt{-1})^3Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)^3\right.\\
&\left.\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)}\\
&+\frac{\sqrt{-1}l}{3}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)\pi^3\left\{Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)\right.\\
&\left.\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)}=0,
\end{aligned}
$$

5）若 $d-la_0$ 为奇数或 $d-la_0\leq -2$ 但 $d-la_0\neq -4$，则

(3.25)

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{2}{3}\pi^4Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)^4\right.\\
&\left.\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)}\\
&-\frac{l^2}{3}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)^2\pi^4\left\{Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_rp_r-\frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r)^2\right.\\
&\left.\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)}\\
&+\frac{l^2}{72}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r^2)^2\pi^4\left\{Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}\wedge^{p_1}W^*\otimes\cdots\otimes\wedge^{p_{a_0}}W^*)\right\}^{(2d)}=0.
\end{aligned}
$$

类似地，在情形3）、4）、5）中，我们有使用扭曲全纯欧拉示性数的表达式。

定理3.4. 设 $c_1(W)=c_1(M)=0$，且第一庞特里亚金类 $p_1(M)=a_0p_1(W)$，则

1）若 $d-la_0=4$，则

$$
\begin{aligned}
(3.26)\qquad &\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_0)\}^{(2d)}=240\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)}\\
&\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_1)\}^{(2d)}=2160\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)},
\end{aligned}
$$

而对于复流形，

$$
\begin{aligned}
(3.27)\qquad &\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_0)=240\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)),\\
&\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_1)=2160\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)),
\end{aligned}
$$

因此，$\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_0)$ 是 240 的整数倍，而 $\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_1)$ 是 2160 的整数倍。

2）如果 $d-la_0=6$，那么

$$\begin{aligned}(3.28)\qquad &\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_0)\}^{(2d)}=-504\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)}\\ &\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_1)\}^{(2d)}=-16632\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)},\end{aligned}$$

对于复流形，

$$\begin{aligned}(3.29)\qquad &\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_0)=-504\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)),\\ &\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_1)=-16632\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)),\end{aligned}$$

因此，$\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_0)$ 是504的整数倍，而 $\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_1)$ 是16632的整数倍。

3)如果 $d-la_0=8$，那么

$$\begin{aligned}(3.30)\qquad &\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_0)\}^{(2d)}=480\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)}\\ &\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_1)\}^{(2d)}=61920\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)},\end{aligned}$$

对于复流形，

$$\begin{aligned}(3.31)\qquad &\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_0)=480\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)),\\ &\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_1)=61920\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)),\end{aligned}$$

因此，$\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_0)$ 是480的整数倍，而 $\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_1)$ 是61920的整数倍。

4）如果 $d-la_0=10$，那么

$$\begin{aligned}(3.32)\qquad &\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_0)\}^{(2d)}=-264\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)}\\ &\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_1)\}^{(2d)}=-135432\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)},\end{aligned}$$

对于复流形，

$$\begin{aligned}(3.33)\qquad &\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_0)=-264\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)),\\ &\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_1)=-135432\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)),\end{aligned}$$

因此 $\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_0)$ 是 264 的整数倍，而 $\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_1)$ 是 135432 的整数倍。

5）如果 $d-la_0=12$，那么

$$\begin{aligned}(3.34)\qquad &\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_1)\}^{(2d)}=196560\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)}\\ &-24\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_0)\}^{(2d)},\end{aligned}$$

对于复流形，$\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_1)$ 是 24 的整数倍。6)如果 $d-la_0=14$，那么

$$\begin{aligned}(3.35)\qquad &\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_0)\}^{(2d)}=-24\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)}\\ &\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_1)\}^{(2d)}=-196632\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)},\end{aligned}$$

以及对于复流形,

$$\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_0)=-24\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)), \tag{3.36}$$
$$\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_1)=-196632\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)),$$

因此， $\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_0)$ 是 24 的整数倍，而 $\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_1)$ 是 196632 的整数倍。

7）如果 $d-la_0=16$，那么

$$\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_1)\}^{(2d)}=146880\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\}^{(2d)} \tag{3.37}$$
$$+216\,\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_0)\}^{(2d)},$$

and 对于复流形， $\chi(M,\wedge_{-1}(W_0^*)\otimes A_1)$ 是 216 的整数倍 .

证明。 $a_0(M,W,\tau)$ 是权为 $d-la_0$ 的 $SL(2,Z)$ 上的模形式。因此，1）如果 $d-la_0=4$，那么 $a_0(M,W,\tau)$ 与.....成正比

$$G_4(\tau)=1+240q+2160q^2+6720q^3+\cdots,$$

因此（3.26）成立。

2）若 $d-la_0=6$，则 $a_0(M,W,\tau)$ 与.....成比例

$$G_6(\tau)=1-504q-16632q^2-122976q^3+\cdots.$$

因此（3.28）成立。

3）若 $d-la_0=8$，则 $a_0(M,W,\tau)$ 与.....成比例

$$G_4(\tau)^2=1+480q+61920q^2+\cdots.$$

因此（3.30）成立。

4）若 $d-la_0=10$，则 $a_0(M,W,\tau)$ 与.....成比例

$$G_4(\tau)G_6(\tau)=1-264q-135432q^2+\cdots.$$

因此（3.32）成立。

5）如果 $d-la_0=12$，那么

$$a_0(M,W,\tau)=\lambda_1G_4(\tau)^3+\lambda_2G_6(\tau)^2, \tag{3.38}$$

其中 λ_1、 λ_2 是 $2d$ 次形式。我们有

$$G_4(\tau)^3=1+720q+179280q^2+\cdots, \tag{3.39}$$

$$G_6(\tau)^2=1-1008q+220752q^2+\cdots. \tag{3.40}$$

在 (3.38) 中比较 1、 q、 q^2 的系数，可得关于 λ_1、 λ_2 的三个方程。解这三个方程，得到 (3.34)。

6）如果 $d-la_0=14$，那么 $a_0(M、W、\tau)$ 与以下表达式成比例

$$G_4(\tau)^2G_6(\tau)=1-24q-196632q^2+\cdots,$$

因此 (3.35) 成立。

7)如果 $d-la_0=16$，那么

$$a_0(M,W,\tau)=\lambda_1G_4(\tau)^4+\lambda_2G_4(\tau)G_6(\tau)^2, \tag{3.41}$$

其中 λ_1、λ_2 是 $2d$ 次形式。我们有

$$G_4(\tau)^4 = 1 + 960q + 354240q^2 + \cdots, \tag{3.42}$$

$$G_4(\tau)G_6(\tau)^2 = 1 - 768q - 19008q^2 + \cdots. \tag{3.43}$$

由 (3.41)-(3.43)，可得 (3.37)。 □

类似地，由 $a_1(M, W, \tau)$，我们有

定理 3.5. 设 $c_1(W) = c_1(M) = 0$且第一庞特里亚金类 $p_1(M) = a_0 p_1(W)$，则

1)若 $d - la_0 = 3$，则

$$\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_3)\}^{(2d)} \tag{3.44}$$

$$= 240 \Bigg\{ 2\pi\sqrt{-1}Td(M)\mathrm{ch}\Big(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}\Big(\sum_{r=1}^{a_0}m_r p_r - \frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r\Big) \tag{3.45}$$

$$\wedge^{p_1}W^* \otimes \cdots \otimes \wedge^{p_{a_0}}W^*)\Bigg\}^{(2d)}$$

对于复流形，$\chi(M, \wedge_{-1}(W_0^*) \otimes A_3)$ 是 240 的整数倍。2)若 $d - la_0 = 5$，则

$$\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_3)\}^{(2d)} \tag{3.46}$$

$$= -504 \Bigg\{ 2\pi\sqrt{-1}Td(M)\mathrm{ch}\Big(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}\Big(\sum_{r=1}^{a_0}m_r p_r - \frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r\Big) \tag{3.47}$$

$$\wedge^{p_1}W^* \otimes \cdots \otimes \wedge^{p_{a_0}}W^*)\Bigg\}^{(2d)}$$

对于复流形，$\chi(M, \wedge_{-1}(W_0^*) \otimes A_3)$ 是 504 的整数倍。3)如果 $d - la_0 = 7$，那么

$$\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_3)\}^{(2d)} \tag{3.48}$$

$$= 480 \Bigg\{ 2\pi\sqrt{-1}Td(M)\mathrm{ch}\Big(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}\Big(\sum_{r=1}^{a_0}m_r p_r - \frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r\Big) \tag{3.49}$$

$$\wedge^{p_1}W^* \otimes \cdots \otimes \wedge^{p_{a_0}}W^*)\Bigg\}^{(2d)}$$

对于复流形， $\chi(M, \wedge_{-1}(W_0^*) \otimes A_3)$ 是 480 的整数倍。4)如果 $d - la_0 = 9$，那么

$$\{Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W_0^*))\mathrm{ch}(A_3)\}^{(2d)} \tag{3.50}$$

$$= -264 \left\{ 2\pi\sqrt{-1}Td(M)\mathrm{ch}(\sum_{p_1,\cdots,p_{a_0}=0}^{l}(-1)^{\sum_{r=1}^{a_0}p_r}(\sum_{r=1}^{a_0}m_r p_r - \frac{l}{2}\sum_{r=1}^{a_0}m_r) \right. \tag{3.51}$$

$$\left. \wedge^{p_1}W^* \otimes \cdots \otimes \wedge^{p_{a_0}}W^*) \right\}^{(2d)}$$

and 对于复流形， $\chi(M, \wedge_{-1}(W_0^*) \otimes A_3)$ 是 264 的整数倍 .

我们指出，证明定理 3.4 和定理 3.5 的想法已出现在 [10] 中。

4. Acknowledgements

作者部分获得了国家自然科学基金项目（编号：11771070）的资助。作者谨向P. Li 教授所提出的有益意见表示感谢。作者还感谢审稿人认真审阅本文并提出宝贵意见。

References

[1] L. Alvarez-Gaum´e，E. Witten，引力反常，Nucl. Phys. B234 (1983)，269-330。[2] K. Chandrasekharan，《椭圆函数》，Spinger-Verlag，1985。[3] Q. Chen，F. Han，特征数的模不变性与扭曲反常抵消，Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009)，1463-1493[4] Q. Chen，F. Han，W. Zhang，广义 Witten 属与消失定理。J. Differential Geom. 88(2011)，第 1 期，1-40。[5] F. Han，R. Huang，K. Liu 和 W. Zhang，三次形式、反常抵消与模性。Adv. Math. 394(2022)，论文编号 108023，共 46 页。[6] F. Han，K. Liu 和 W. Zhang，模形式与广义反常抵消公式，J. Geom. Phys, 62 (2012) 1038-1053。[7] F. Han，K. Liu 和 W. Zhang，反常抵消与模性，II： $E_8 \times E_8$ 情形。Sci. China Math. 60(2017)，第 6 期，985-994。[8] F. Han，W. Zhang，Spin^c-流形与椭圆属，C. R. Acad. Sci. Paris Serie I.，336 (2003)，1011-1014。[9] F. Han，W. Zhang，模不变性、特征数与 eta 不变量，J. Diff. Geom. 67 (2004)，257-288。[10] P. Li，复幂 -1现象与椭圆属，Pacific J. Math. 273 (2015) 331-351。[11] K. Liu，模不变性与特征数。Commu. Math. Phys. 174 (1995), 29-42。[12] K. Liu，关于椭圆属与 theta 函数。Topology 35 (1996)，第 3 期，617–640。[13] Y. Wang， SL(2, Z) 模形式与反常抵消公式，arXiv:2304.01458。[14] W. Zhang，《Chern-Weil 理论与 Witten 变形讲义》。南开数学讲座第 4 卷，World Scientific，新加坡，2001。

中国吉林省长春市东北师范大学数学与统计学院，邮编 130024

电子邮箱：wangy581@nenu.edu.cn