arXiv:2304.05562v1 [math.RT] 12 Apr 2023

约化群中的刚性层

G. Lusztig

Introduction

0.1. 设 G 是代数闭域 k 上的连通约化群。令 $\lambda(G)$ 表示 G 的抛物子群的 Levi 子群 $L \subset G$ 的集合。令 $\mathcal{U}(G)$ 表示 G 中幺幂共轭类的集合。如果 C 不能通过 [LS79] 的诱导过程从 L 的一个幺幂共轭类得到，且满足 $L \in \lambda(G)$、$L \neq G$，则称 $C \in \mathcal{U}(G)$ 是刚性的（见 [S82, 7.9]）。令 $\mathcal{U}_{rig}(G)$ 表示 $\mathcal{U}(G)$ 中由刚性幺幂共轭类组成的子集。

在 [L15] 中，我们定义了 G 的一个划分，将其分为有限多个层；每个层都是局部闭的 [Ca20]，并且是若干维数固定的 G-共轭类之并。G 的层集 $Str(G)$ 可以看作是 $\mathcal{U}(G)$ 的扩充（G 的一个幺幂共轭类恰好包含在一个层中）。本文扩展刚性幺幂共轭类的概念，并引入 $Str(G)$ 的一个子集 $Str_{rig}(G)$，其元素称为刚性层。具体而言，若 G 的一个层 Σ 是 G 上 $G \times Z_G^0$ 的有限多个轨道之并，其中第一个因子通过共轭作用，第二个因子（G 的连通中心）通过平移作用，则称该层为刚性的。这个定义与刚性幺幂共轭类的定义截然不同。为弥补这一点，我们还将给出层刚性的第二个定义，该定义基于将 L 的一个层从 L 诱导到 G 的概念，其中 $L \in \lambda(G)$；我们将证明它与第一个定义等价。利用第二个定义，我们可以在不同特征下 G 的各种版本中，将刚性层的概念与刚性幺幂共轭类的概念联系起来。借助这种联系，我们可以根据 [S82] 中刚性幺幂共轭类的分类，对 G 的刚性层进行分类；我们将明确地对类型为 E_6、E_7、E_8 的 G 做到这一点（见 2.5、2.6）。

0.2. 令 $W = W_G$ 为 G 的 Weyl 群。令 $cl(W)$ 为 W 中共轭类的集合。在 [L15] 中定义了一个满射 $cl(W) \to Str(G)$，并且在 [L22] 中证明了该映射的每个纤维都包含一个唯一的、尽可能非椭圆的元素；将此唯一元素赋给一个层，便定义了一个单射$Str(G) \to cl(W)$，其像记为 $CL(W)$。由此得到一个双射$Str(G) \xrightarrow{\sim} CL(W)$。$Str_{rig}(G)$ 在此双射下的像记为$CL_{rig}(W)$；我们称其为 W 中刚性共轭类的集合。

获美国国家科学基金会资助，项目编号 DMS-2153741

由 $\mathcal{AMS}$-TEX 排版

^^ 0.3.记号。令 $W = W_G$ 为不可约 $\mathbf{Q}[W]$-模的同构类集合。令$\hat{} \underline{W}_G$为由 Springer 对应（在 [L84] 中延拓至小特征）给出的嵌入 $\iota^G : \mathcal{U}(G) \to \hat{}W$的像。对于 $x \in G$，我们写 $x = x_s x_u = x_u x_s$，其中 x_s（分别地，x_u）是半单的（分别是幺半单的）。对于半单的 $s \in G$，令 $Z^0_G(s)$ 为 s 在 G 中的连通中心化子，并令$W_G(s)$ 为其 Weyl 群。

1. Rigid strata

引理 1.1. 设 V 是一个有限维 k-向量空间。设 $A : T \to GL(V)$ 是环面 T 在 k 上的一个有理表示。设 $\sigma \in GL(V)$ 是半单的，并且对所有 $t \in T$，都有 $A(t)\sigma = \sigma A(t)$。存在 T 的一个开稠密子集 $\mathcal{O}$，使得以下结论成立。对于任意 $z \in \mathcal{O}$ 以及 V 的任意子空间 V'，只要 $\sigma A(z)(V') = V'$，就有 $\sigma(V') = V'$，且对所有 $t \in T$，都有 $A(t)(V') = V'$。

对于 $c \in \mathbf{k}^*$，令 $V_c = \{v \in V;\ \sigma(v) = cv\}$。对于 $\chi \in X = \mathrm{Hom}(T, \mathbf{k}^*)$，令 $V^\chi = \{v \in V;\ A(t)v = \chi(t)v \quad \forall t \in T\}$。于是$V = \oplus_{(c,\chi)\in J\times J'} V_c \cap V^\chi$，其中$J \subset \mathbf{k}^*$，$J' \subset X$ 是有限的。

令 $\mathcal{O}$ 为所有满足以下条件的 $t \in T$ 的集合

$$c\chi(t) \neq c'\chi'(t) \text{ for any } (c,\chi) \neq (c',\chi') \text{ in } J \times J'$$

也就是说，对于 $J \times J'$ 中任意的 $(c,\chi) \neq (c',\chi')$，都有 $(\chi\chi'^{-1})(t) \neq c'c^{-1}$。若 $\chi = \chi'$，则此条件显然成立。若 $\chi \neq \chi'$，这意味着对于 c, c' in$J$，有 $(\chi\chi'^{-1})(t) \neq c'c^{-1}$，也就是说，

$$t \notin \cup_{\chi\neq\chi' \text{ in } J', c,c' \text{ in } J} (\chi\chi'^{-1})^{-1}(c'c^{-1});$$

因此，$\mathcal{O}$ 是 T 中有限多个余维为 1 的子簇之并的补集。特别地，$\mathcal{O}$在 T 中是开稠密的。

现在假设 $z \in \mathcal{O}, V'$ 如引理所述。由于 $\sigma A(z)(V') = V'$，我们有 $V' = \oplus_{a\in\mathbf{k}^*} V'_a$，其中 $V'_a = \{v \in V';\ \sigma A(z)v = av\}$。令 $v \in V'_a$。我们有$v = \sum_{c,\chi} v'_{c,\chi}$，其中 $v'_{c,\chi} \in V_c \cap V^\chi$ 满足 $c\chi(z) = a$。应用 $\sigma A(z)$，得到

$$a\sum_{c,\chi} v'_{c,\chi} = \sum_{c,\chi} c\chi(z)v'_{c,\chi}$$

that is,

$$\sum_{c,\chi}(a - c\chi(z))v'_{c,\chi} = 0,$$

使得对任意 $(c,\chi) \in J \times J'$，均有 $(a - c\chi(z))v'_{c,\chi} = 0$。因此，对任意满足$v'_{c,\chi} \neq 0$的 c,χ，我们有 $c\chi(z) = a$。于是，$v = \sum_{c,\chi;c\chi(z)=a} v'_{c,\chi}$。由于 $z \in \mathcal{O}$，此和至多有一项非零，因此对于唯一的 c,χ，有 $v = 0$ 或 $v \in V_c \cap V^\chi$。特别地，对于某些 c,χ，我们有 $\sigma v = cv \in V'$，并且对所有$t \in T$，均有 $A(t)(v) = \chi(t)v \in V'$，从而 $\sigma(V') \subset V'$，且对所有 $t \in T$，均有 $A(t)(V') \subset V'$。引理得证。

1.2. 令 $L \in \lambda(G)$, $x \in L$。令 $V = Lie(G)$, $T = Z_L^0$。定义 $A: T \to GL(V)$ 为$A(t) = Ad(t)$。由 $\sigma = \mathrm{Ad}(x_s)$ 定义 $\sigma \in GL(V)$。令 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x$ 为 T的开稠密子集，该子集在引理 1.1 中根据 V、T、A、σ 定义。

引理 1.3。我们沿用 1.2 中的设定。令 $x_s = s$。对于任意 $z \in \mathcal{O}_x$，有 $Z_G^0(x_s z) = Z_L^0(s)$。

显然，我们有$Z_L^0(s) \subset Z_G^0(sz)$，对于任意 $z \in T$。尚需证明，若$z \in \mathcal{O}_x$，则 $Lie(Z_G^0(sz)) \subset Lie(Z_L^0(s))$。令 $\mathcal{L}$ 为 $Lie(Z_G^0(sz))$中的一条直线。我们必须证明 $\mathcal{L} \subset Lie(Z_L^0(s))$。我们有 $\sigma A(z)(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$。由引理 1.1，我们于是得到 $\sigma(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ 以及 $A(t)(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$，对于所有 $t \in T$。最后一个等式表明 $\mathcal{L} \subset Lie(L)$，而等式 $\sigma(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ 表明 $\mathcal{L} \subset Lie(Z_G^0(s))$。由此可得$\mathcal{L} \subset Lie(Z_G^0(s)) \cap Lie(L) = Lie(Z_L^0(s))$。引理得证。

1.4. 令 $x \in G$。设 $s = x_s, u = x_u$。令 $\rho_u^G = \iota^G(C) \in \hat{W}^G$（见 0.3），其中 C 是 u 的 G-共轭类。按照 [L15, 2.2]，设

$$\rho_x^G = j_{W_G(s)}^W(\rho_u^{Z_G^0(s)}) \in \hat{W}. \tag{a}$$

此处 $j_{W_G(s)}^W$ 是 [LS79]中定义的截断诱导； $W_G(s)$被视为 W 的反射子群，正如 [L15,2.1]中所述。

现在我们假设 $L \in \lambda(G)$、$x \in L$（使得 $s \in L, u \in L$）； $T = Z_L^0$, $\mathcal{O}_x \subset T$ 与 1.2 中相同。对于任意 $z \in \mathcal{O}$, $\rho_{xz}^G \in \hat{W}$, $\rho_x^L \in \hat{W}_L$，均按上述方式定义。我们证明:

$$\rho_{xz}^G = j_{W_L}^W(\rho_x^L) \in \hat{W}. \tag{b}$$

等价的说法是

$$j_{W_G(sz)}^W(\rho_u^{Z_G^0(sz)}) = j_{W_L}^W(j_{W_L(s)}^{W_L}(\rho_u^{Z_L^0(s)}).$$

利用截断诱导的传递性，这与

$$j_{W_G(sz)}^W(\rho_u^{Z_G^0(sz)}) = (j_{W_L(s)}^W(\rho_u^{Z_L^0(s)}). \tag{c}$$

由引理 1.3 可知 $Z_G^0(sz) = Z_L^0(s)$。由此可得 $W_G(sz) = W_L(s)$，从而 (c) 成立。我们看到 (b) 成立。

1.5. 回顾 [L15] 中关于 G 的层的定义。若 g、g' 作为 $\hat{W}$ 的对象时 $\rho_g^G = \rho_{g'}^G$，则称 G 中的这两个元素属于 G 的同一层。令 $Str(G)$ 为 G的层集。注意，对于任意 $g \in \Sigma$，$\Sigma \mapsto \rho_\Sigma^G = \rho_g^G$是一个定义良好的单射 $Str(G) \to \hat{W}$；令 $\hat{} \ W_G^*$ 为此映射的像。因此， $\Sigma \mapsto \rho_\Sigma^G$是一个双射。

$$Str(G) \xrightarrow{\sim} \hat{W}_G^*; \tag{a}$$

特别地， $Str(G)$ 是有限的。

1.6. 现在令 $L \in \lambda(G)$。对于任意 $x \in L$，令 $\mathcal{O}_x \subset Z_L^0$ 如 1.3 中所述。

(a) 设 Σ' 为 L 的一个层。存在唯一的层 Σ 属于 G，使得对于任意 $x \in \Sigma'$ 和任意 $z \in \mathcal{O}_x$，我们有 $xz \in \Sigma$。

Σ 的唯一性显而易见。为证明其存在，只需证明：若 x、x' 属于 L 且满足 $\rho_x^L = \rho_{x'}^L$，并且若 $z \in \mathcal{O}_x$、$z' \in \mathcal{O}_{x'}$，则 $\rho_{xz}^G = \rho_{x'z'}^G$。这立即由 1.4(b) 得出。

我们称 Σ 是通过从 L诱导而从 Σ' 得到的。由1.4(b)可见

(b) $\rho_\Sigma^G = j_{W_L}^W(\rho_{\Sigma'}^L)$.

1.7. 回顾 [L84, 3.1] 中 G 的片段的定义。设 $L \in \lambda(G)$，并令 S 为 $L \to L/Z_L^0$ 下孤立共轭类（见 [L84, 2.6]）L/Z_L^0 的逆像。对于这样的 (L, S)，我们定义 $[L, S]$ 为子集 $\{x \in S; Z_G^0(x_s) \subset L\}$ 在 S 中的 G-共轭像之并。子集 $[L, S]$ 称为 G 的一个片段。它仅取决于 (L, S) 的 G-共轭类。G 的片段将 G 划分为有限多个子集。我们证明：

(a) 如果 $[L, S]$ 是一个片段，则 $[L, S]$ 包含于 G 的层中；该层由将 L 中的 L 层诱导到 G 而得到，其中包含 S。

设 $x \in S$ 使得 $Z_G^0(x_s) \subset L$。只需证明，对于任意 $z \in \mathcal{O}_x$（1.2中的记号），我们有 $Z_G^0((xz)_s) \subset L$，即 $Z_G^0(x_s z) \subset L$。由引理1.3，我们有 $Z_G^0(x_s z) = Z_L^0(x_s)$，特别地，$Z_G^0(x_s z) \subset L$。这就证明了(a)。

由(a)可知，G 的任意层都是 G 的片段的并集（这在 [L15]中曾未经证明地陈述过）。

1.8. $G \times Z_G^0$ 在 G 上的作用（见0.1）保持 G的每个片段不变。我们证明：

(a) 一个片段 $[L, S]$包含有限多个 $G \times Z_G$-轨道，当且仅当 $L = G$（此时它是单个 $G \times Z_G^0$-轨道，即 S）。

将 G bt G/Z_G^0 替换后，我们可以假设 $Z_G^0 = \{1\}$。“若”这一部分是显然的。反过来，假设 $[L, S]$ 只包含有限个 G-共轭类。令 $x \in S$。按照 1.7(a) 的证明，对于任意 $z \in \mathcal{O}_x$（采用 1.2 的记号），我们有 $xz \in [L, S]$。因此，$x\mathcal{O}_x$ 只与有限个 G-共轭类相交。取半单部分可知，$x_s\mathcal{O}_x$ 只与有限个 G-共轭类相交。令 $\mathcal{T}$ 为 L 的一个包含 x_s 的极大环面；我们有 $\mathcal{O}_x \subset Z_L^0$，从而 $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{T}$，因此 $x_s\mathcal{O}_x \subset \mathcal{T}$。现在，$G$ 的任意 G-共轭类与 $\mathcal{T}$ 的交集都是有限集。由此可知，$x_s\mathcal{O}_x$ 是有限集。由于 $\mathcal{O}_x$ 在 Z_L^0 中开且稠密，因此 $Z_L^0 = \{1\}$，从而 $L = G$。这就证明了 (a)。

命题 1.9. 设 Σ 是 G 的一个层。那么 Σ 是刚性的（见 0.1）当且仅当它满足下文的 (i)。

(i)对任意 $L \in \lambda(G)$（具有 $L \neq G$）以及任意 $\Sigma' \in Str(L)$，Σ 不是由 L、Σ' 诱导的层。

如 1.8 中所述，我们可以假设 $Z_G^0 = \{1\}$。首先假设 Σ 不满足 (i)，但 Σ 是有限个 G-共轭类的并。于是我们可以找到 $L \in \lambda(G)$，使得 $L \neq G$ 且 $\Sigma' \in Str(L)$，从而对于任意 $x \in \Sigma'$ 和任意 $z \in \mathcal{O}_x$，我们都有

$xz \in \Sigma$。于是， $x\mathcal{O}_x$ 只与有限多个 G共轭类相交。重复 1.8(a) 的证明中的论证，我们得到 $L = G$，矛盾。由此可见，若 Σ 是有限多个 G 共轭类的并，则 Σ 满足 (i)。接下来，我们假设 Σ 是无限多个 G 共轭类的并。由于 Σ 是有限个部分的并，至少存在一个部分，记为 $[L, S]$，它包含于 Σ 中，且是无限多个 G 共轭类的并。由 1.8(a) 可知 $L \neq G$，而由 1.7(a) 可知 Σ 是由 L 的一个层诱导的。因此， Σ 不满足 (i)。命题得证。

1.10. 令 $Str_{rig}(G)$ 为 $Str(G)$ 中由刚性层构成的子集 .

ˆ ˆ 我们称 $E \in W_G^*$ 为刚性的，若对于任意满足 $L \neq G$ 的 $L \in \lambda(G)$ 以及任意 $E' \in W_L^*$，都有 $E \neq j_{W_L}^W(E')$。令 $(\hat{}W_G^*)_{rig}$ 为 $\hat{}W_G^*$ 中由刚性元素构成的子集。利用 1.6(b) 可知，在 1.5(a) 中的双射 $Str(G) \xrightarrow{\sim} \hat{}W_G^*$ 下，$\hat{}Str_{rig}(G)$ 对应于 $(W_G^*)_{rig}$。

2. Relation with rigid unipotent classes

¯ ¯2.1. 令 $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}, \bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \sqcup \{0\}$。对于 $r \in \mathcal{P}$，令 $\mathbf{k}_r$ 为特征为 r 的代数闭域，并令 G^r 为 $\mathbf{k}_r$ 上与 G 类型相同的连通约化群（因此具有相同的 Weyl 群 W）；我们可以假设，对于某个 $r \in \mathcal{P}$，有 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_r, G = G^r$。根据 [L15]，已知对于任意 $r' \in \mathcal{P}$，都有

(a) $$\hat{W}_{G^{r'}}^* = \cup_{r \in \bar{\mathcal{P}}} \hat{\underline{W}}_{G^r} \subset \hat{W};$$

ˆ ˆ特别地，$W_{G^{r'}}^*$ 与 r' 无关，因此它与W_G^*相同。由此还可知，可以采用一种与 r'无关的方式对 $Str(G^{r'})$进行索引。

2.2. 令 $L \in \lambda(G)$。这是 G的抛物子群 P 的莱维子群。¯对于每个 $r \in \mathcal{P}$，令 $L^r \in \lambda(G^r)$使得 L^r 是 G^r 的抛物子群 G^r 的莱维子群，其类型与 P相同；我们可以假设，对于任意 $r \in \bar{\mathcal{P}}$，$W_{L^r} = W_L$。令 $r \in \bar{\mathcal{P}}$。令 $\mathrm{ind}_{L^r}^{G^r}\colon \mathcal{U}(L^r) \to \mathcal{U}(G^r)$ 为从 [LS79] 诱导幺正类的诱导。在恒等 $\iota^{G^r}\colon \mathcal{U}(G^r) \xrightarrow{\sim} \hat{}\underline{W}_{G^r}$， $\iota^{L^r}\colon \mathcal{U}(L^r) \xrightarrow{\sim} \hat{}\underline{W}_{L^r}$下，映射$\mathrm{ind}_{L^r}^{G^r}$ 变为截断诱导映射 $j_{W_L}^W\colon \hat{}\underline{W}_{L^r} \to \hat{}\underline{W}_{G^r}$（见 [LS79]）。

¯2.3. 设 $r \in \mathcal{P}$。回顾 [S82, 7.9]，若对于任意 $L \in \lambda(G)$ $L \neq G$ 及任意 $C' \in \mathcal{U}(L^r)$，都有 $C \neq \mathrm{ind}_{L^r}^{G^r}(C')$，则称 $C \in \mathcal{U}(G_r)$ 是刚性的。

令 $\mathcal{U}_{rig}(G^r)$ 为 $\mathcal{U}(G^r)$ 中由刚性幺幂共轭类组成的子集。令 ˆ ˆ $(\underline{W}_{G^r})_{rig}$ 为 $E \in \underline{W}_{G^r}$ 中满足以下条件的对象：对于任意 $L \in \lambda(G)$ $L \neq G$ 及任意 $E' \in \hat{}\underline{W}_{L^r}$，都有 $E \neq j_{W_L}^W(E')$。由 2.2 中的结果可知， ι^{G^r} 限制为一个双射 $\mathcal{U}_{rig}(G^r) \xrightarrow{\sim} (\hat{}\underline{W}_{G^r})_{rig}$。

¯2.4. 令 $r' \in \mathcal{P}$。我们证明：

(a) $$(\hat{W}_{G^{r'}}^*)_{rig} = \cup_{r \in \mathcal{P}} (\hat{\underline{W}}_{G^r})_{rig}.$$

我们可以假设 G 是单的。首先假设 G 是类型 $\neq E_8, G_2$。根据[L84], [S85]可知，对于任意 $L\in\lambda(G)$ 以及任意 $r\in\mathcal{P}$，我们有 $\underline{W}_{L^r}\subset\underline{W}_{L^2}$，因此

(b) $\hat{W}^*_{L^{r'}}=\underline{\hat{W}}_{L^2}$.

那么，(a) 立即由定义得出。

下面假设 G 是 G_2 类型的。由 [S85] 可知，对于任意 $L\in\lambda(G)$ 以及任意 $r\in\mathcal{P}$，我们有 $\underline{W}_{L^r}\subset\underline{W}_{L^3}$，因此

(c) $\hat{W}^*_{L^{r'}}=\underline{\hat{W}}_{L^3}$.

那么，(a)立即由定义得出。

现在假设 G 是 E_8 类型的。已知 [L84], [S85], ，对于任意带有 $L\neq G$ 的 $L\in\lambda(G)$ 以及任意 $r\in\mathcal{P}$，我们有 $\underline{W}_{L^r}\subset\underline{W}_{L^2}$，因此 $W^*_{L^{r'}}=\underline{W}_{L^2}$。此外，已知 [S85]，对于任意 $r\in\mathcal{P}$，我们有 $\underline{W}_{G^r}\subset\underline{W}_{G^2}\sqcup\{E\}$，其中 $E\in W$ 是 $\underline{W}_{G^3}$ 中不属于 $\underline{W}_{G^2}$ 的唯一对象；因此

(d) $\hat{W}^*_{G^{r'}}=\underline{\hat{W}}_{G^2}\sqcup\{E\}$.

因此，只需注意，对于任意 $L\in\lambda(G)$ $L\neq G$ 和任意 $E'\in\underline{W}_{L^2}$，都有 $E\neq j^W_{W_L}(E')$；事实上，我们有 $j^W_{W_L}(E')\in\underline{W}_{G^2}$ 和 $E\in\underline{W}_{G^2}$。这证明了 (a)。

2.5.利用2.4(b)、(c)、(d)，我们可以明确计算出对于任意单G，集合$(W^*_G)^{rig}$。我们给出 G 单的类型为 E_6、E_7、E_8时的结果。这些结果是利用 [L82], [S85]得到的。（W 的元素按照 [S85]中的方式记号。）

类型 E_6.$1_{36}, 6_{25}, 15_{16}, 10_9$. 类型 E_7.

$1_{63}, 7_{46}, 27_{37}, 35_{31}, 15_{28}, 189_{22}, 70_{18}, 280_{17}, 84_{15}$. 类型

E_8.$1_{120}, 8_{91}, 35_{74}, 84_{64}, 50_{56}, 210_{52}, 560_{47}, 400_{43}, 448_{39},$

$1344_{38}, 175_{36}, 1050_{34}, 972_{32}, 1400_{29}, 840_{26}, 168_{24}, 420_{20},$

$1344_{19}, 2016_{19}, 840_{14}, 175_{12}$.

2.6. 现在我们描述对于类型为 E_6、E_7、E_8 的 G 单群，集合 $CL_{rig}(W)$。（我们使用 2.5 以及 [L15、§4] 中的表格。） W 中共轭类的记号与[C72] 中的一致。

类型 E_6.$A_0, A_1, 3A_1, 2A_2A_1$.类型 E_7.$A_0, A_1, 2A_1, (3A_1)'', (4A_1)'', A_2+2A_1,$ $2A_2+A_1, (A_3+A_1)'', A_3+A_2$. 类型 E_8.$A_0, A_1, 2A_1, 3A_1, (4A_1)'', A_2+A_1,$ $A_2+2A_1, A_2+3A_1, 2A_2+A_1, A_3+A_1, 2A_2+2A_1, (A_3+2A_1)'', A_3+A_2,$ $A_3+A_2+A_1, (2A_3)'', D_4+A_2, A_4+A_3, D_5(a_1)+A_2, (A_5+A_1)'', D_5+A_2,$ $(A_7)''$.

References

[Ca20] G.Carnovale, *Lusztig's strata are locally closed*, Arch.derMath. 115 (2020,23-26).[C72] R.W.Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group*, CompositiogMath. 25(1972), 1-59.[L84] G.Lusztig, *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Invent.Math. 75 (1984),205-272.[L15] G.Lusztig, *On conjugacy classes in a reductive group*, 约化群的表示, Progr.inMath.312, Birkh¨auser, 2015, pp.333-363.[L22] G.Lusztig, *Distinguished strata in a reductive group*,Repres.Th.26 (2022), 698-713.[LS79] G.Lusztig and N.Spaltenstein, *Induced unipotent classes*, J.Lond.Math.Soc. 19 (1979),41-52.[S82] N.Spaltenstein, *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel*, Lecture Notes in Math., vol.946, Springer Verlag, 1982.[S85] N.Spaltenstein, *On the generalized Springer correspondence for exceptional groups*,代- 数群及相关主题, Adv.Stud.Pure Math.6, North Holland and Kinokuniya, 1985, pp. 317-338.

Department of Mathematics, M.I.T., Cambridge, MA 02139