arXiv:2304.05575v1 [math.CO] 12 Apr 2023

具有不平衡符号模式的菲德勒向量

Sooyeong Kim，温尼伯， Steve Kirkland，温尼伯

（收稿日期：2020年5月14日）

Abstract. 在谱二分中，利用费德勒向量的符号模式将图划分为两个连通子图。本文研究具有不平衡符号模式的费德勒向量所对应的图，使得划分后得到的两个连通子图在规模上明显不同。我们刻画了具有恰好一个负分量的费德勒向量的图，并讨论了这类图的一些类别。我们还为具有恰好两个负分量的费德勒向量的正则图建立了类似的结果。特别地，我们考察了在何种情况下，任意费德勒向量的符号模式都会根据最小度顶点的数量而呈现不平衡。

Keywords：代数连通度、费德勒向量、最小度

MSC 2010：05C50，15A18

1. Introduction and preliminaries

谱二分何时效果良好？回顾一下，谱二分是一种近似求解图划分问题的方法：将图 G 划分为 k个子图，使各子图的规模相近，同时尽量减少每对连通分支之间的边数。文献 [10] 给出了谱二分相对于最小割的最大误差结果，前提是各分区规模相同。与此不同，我们将通过考察分区规模，探究谱二分是否是一种稳健的方法。该方法使用图 G 的所谓费德勒向量 [4] ，将费德勒向量符号不同的两个顶点之间的边切断，从而将图 G 划分为两个连通的

本研究获得了曼尼托巴大学研究生奖学金（Sooyeong Kim）的支持，以及加拿大自然科学与工程研究委员会在资助编号 RGPIN–2019–05408 下提供的探索研究资助（Steve Kirkland）的支持。作者谨向一位匿名审稿人致谢，其建设性意见促使本文得以改进。

子图。Urschel 和 Zikatanov 的论文 [11] 推广了 Miroslav Fiedler 关于谱二分的工作 [4] 。具体而言， [11]证明存在一个费德勒向量，使得分别由符号非负和符号为正的顶点集合所诱导的两个子图都是连通的。如果图 G 的所有费德勒向量都具有这样的符号模式：少数顶点取一种符号（也可能为 0），其余顶点取另一种符号，那么谱二分在图划分问题中将无法提供有效的划分。本文考察这类图及其性质。

设 G 是一个阶为 n 的简单图，即 $|V(G)| = n$，其中 $V(G)$ 是 G 的顶点集，并设 H 是 G 的子图。对于 $v \in V(H)$，我们将 $\deg_H(v)$ 定义为 v 在 H 中的度。我们分别用 $\delta(G)$ 和 $v(G)$ 表示 G 的最小度和顶点连通度。G 的拉普拉斯矩阵为 $L(G) = D(G) - A(G)$，其中 $A(G)$ 是邻接矩阵， $D(G)$ 是顶点度的对角矩阵。$L(G)$ 的谱 $S(L(G)) = (\lambda_1(G) \ldots, \lambda_n(G))$ 定义为 $L(G)$ 的特征值按非递增顺序排列所成的序列。众所周知， $L(G)$ 是对称且半正定的。特别地， $L(G)\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$，其中 $\mathbf{1}_n$ 和 $\mathbf{0}_n$ 分别是大小为 n 的全 1 向量和零向量（若不会引起混淆，则省略下标）。因此， $\lambda_n(G) = 0$。类似地，$A(G)$ 的谱 $S(A(G)) = (\mu_1(G) \ldots, \mu_n(G))$ 定义为 $A(G)$ 的特征值按非递增顺序排列所成的序列。此外，若上下文明确，则将 $\lambda_i(G)$ 和 $\mu_i(G)$ 分别简写为 λ_i 和 μ_i。我们用 $am(\lambda)$ 表示 $L(G)$ 或 $A(G)$ 的特征值 λ 的代数重数。图 G 的代数连通度 $\alpha(G)$ 定义为 $\lambda_{n-1}(G)$。文献 [5] 证明，对于非完全图 G，有 $\alpha(G) \leq v(G)$。关于 $\alpha(G)$ 的更多性质，请参阅文献 [5] 。由于 $v(G) \leq \delta(G)$，对于非完全图 G，有 $\alpha(G) \leq \delta(G)$。与 $\alpha(G)$ 对应的特征向量称为费德勒向量。设 $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$，且 $\mathbf{x} = [x_i]$ 是 G 的一个费德勒向量。对于 $1 \leq i \leq n$，若将 v_i 赋值为 x_i，则称顶点 v_i 被 x_i 赋值。

假设 $\mathbf{x} = [x_j]$ 是与特征值 λ 对应的特征向量，属于 $L(G)$ 或$A(G)$。我们定义 $i_\lambda(\mathbf{x}) = \min\{|\{x_j|x_j > 0\}|, |\{x_j|x_j < 0\}|\}$。为区分$L(G)$ 和 $A(G)$，我们定义

$$i_\lambda(G) := \min_{\mathbf{x}\neq 0}\{i_\lambda(\mathbf{x})|L(G)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\} \text{ and } i^*_\mu(G) := \min_{\mathbf{x}\neq 0}\{i_\mu(\mathbf{x})|A(G)\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}\}.$$

特别地， $i_{\alpha(G)}(\mathbf{x})$ 和 $i_{\alpha(G)}(G)$ 分别记作 $i(\mathbf{x})$ 和 $i(G)$。

本文还使用了一些标准术语和记号。若从连通图中移除顶点 v 及其所有关联边后得到非连通图，则称顶点 G 为割点。若图中的顶点 v 与图中其他所有顶点均相邻，则称顶点 v 为支配顶点；如果 v 相邻

与所有其他顶点相连。如果图中每个顶点的度均为 r，则该图称为 r 正则图。完全图 K_n 是一个有 n 个顶点的 $(n-1)$ 正则图。由 k 个顶点组成且没有边的空图记作 N_k。图 G 的线图是这样一个图：其顶点是 G 的边，当且仅当两条对应的边在 G 中关联时，这两个顶点才相邻。图 G 的补图 G 记作 $\bar{}$，其顶点集为 $V(G)$；当且仅当两个顶点在 G 中不相邻时，它们才在 G 中相邻。对于顶点集不相交的两个图 G_1 和 G_2，G_1 与 G_2 的不交并 G_1+G_2 定义为图 $(V(G_1)\cup V(G_2)\ E(G_1)\cup E(G_2)))$。对于顶点 $v\in V(G)$，$G-v$ 是从 G 中删除 v 及其所有关联边后得到的子图。G_1 与 G_2 的联记作 $G_1\vee G_2$，是将 $V(G_1)$ 中的每个顶点与 $V(G_2)$ 中的每个顶点相连后得到的图。此外，$\vee_{i=1}^{k}G$ 定义为 $\underbrace{G\vee\cdots\vee G}$。显然，$G_1\vee(G_2\vee G_3)=(G_1\vee G_2)\vee G_3$ 且 k 乘以 $G_1\vee G_2=G_2\vee G_1$。

由于我们会在多个地方使用图的联结的谱性质，因此先介绍这些性质。考虑两个图 G_1 和 G_2，它们分别定义在互不相交的 p 和 q 个顶点集上。设 $S(L(G_1))=(\lambda_1(G_1)\ldots,\lambda_p(G_1))$ 和 $S(L(G_2))=(\lambda_1(G_2)\ldots,\lambda_q(G_2))$。已知（见 [8]），$L(G_1\vee G_2)$ 的所有特征值的（多重）集合为

$$\{0,\lambda_1(G_1)+q,\ldots,\lambda_{p-1}(G_1)+q,\lambda_1(G_2)+p,\ldots,\lambda_{q-1}(G_2)+p,p+q\}.$$

为说明这一点，按 $V(G_1)$ 后接 $V(G_2)$ 的阶，标记 $L(G_1\vee G_2)$ 的行和列的索引。若 $\mathbf{x}$ 是一个与 $\mathbf{1}_p$ 正交、且对于 $1\le i\le p-1$ 对应于 $\lambda_i(G_1)$ 的特征向量，则 $\begin{bmatrix}\mathbf{x}^T & \mathbf{0}^T\end{bmatrix}$ 是 $L(G_1\vee G_2)$ 的特征向量。类似地，对于一个与 $\mathbf{1}_q$ 正交、且对于 $1\le i\le q-1$ 对应于 $\lambda_i(G_2)$ 的特征向量 $\mathbf{y}$，我们有 $\begin{bmatrix}\mathbf{0}^T\mathbf{y}^T\end{bmatrix}$ 作为 $L(G_1\vee G_2)$ 的特征向量。此外，$\mathbf{1}_{p+q}$ 和 $\begin{bmatrix}-q\mathbf{1}^T & p\mathbf{1}^T\end{bmatrix}$ 分别是与 0 和 $p+q$ 相关联的特征向量。

在第 2 节中，我们找出 G 具有 $i(G)=1$ 的等价条件（定理 2.7）。在第 3 节中，我们根据最小度顶点的数量，通过研究 $am(\alpha(G))$ 的最小值，对所有费德勒向量 $\mathbf{x}$ 均满足 $i(\mathbf{x})=1$ 的所有图 G 进行刻画（定理 3.19）。此外，我们还刻画了所有费德勒向量的符号模式极不平衡的图（定理 3.21）。第 4 节描述了具有 $G=1$ 的 i 阈值图，以及具有三个不同拉普拉斯特征值且具有 $G=1$ 的图。第 5 节通过考察与 G 的补图的最小邻接特征值对应的特征向量的符号模式，对所有满足 $i=2$ 的正则图 G 进行刻画（定理 5.12）。

在本文中，我们假设所有图都是简单图，并用粗体字母表示向量。

2. Characterization of graphs with $i(G) = 1$

命题 2.1. 设 G 是一个阶为 $n \geq 2$ 的图。 G 不连通当且仅当 $i(G) = 0$。

证明。假设 G 是不连通的。那么， $\alpha(G) = 0$。因此，全 1 向量是 G的一个费德勒向量。于是， $i(G) = 0$。反过来，假设 $i(G) = 0$。那么存在一个非负费德勒向量 x。由于 $L(G)$ $\mathbf{x} = \alpha(G)\mathbf{x}$， $\mathbf{1}^T L(G)\mathbf{x} = \alpha(G)\mathbf{1}^T\mathbf{x}$，由此可得 $\alpha(G) = 0$。因此， G 是不连通的。□

对于一个 1 阶图 G ，有 $i(G) = 0$，但 G 是连通的。因此，若 G 是一个有 n 个顶点且满足 $n \geq 2$的图，那么 $i(G) > 0$ 意味着 G 是连通的。

引理 2.2。设 G 是一个 $n \geq 3$阶非完全图。若 $i(G) = 1$，则$\alpha(G) = \delta(G)$。

证明。设 x 是一个满足 $i(\mathbf{x}) = 1$ 的费德勒向量，并且不妨设 $x_1 <0$。我们有 $(L($ $G) - \alpha(G)I)\mathbf{x} = 0$，考察第一项可得 $(\ell_{11} - \alpha(G))x_1 + \sum_{k\neq 1} \ell_{1k}x_k = 0$。由于对所有 $k \neq 1$， $x_1 < 0$、 $\ell_{1k} \leq 0$ 和 $x_k \geq 0$ ，因此必有 $\ell_{11} \leq \alpha(G)$。于是 $\alpha(G) \geq \delta(G)$, 又由于 G 不是完全图，故$\alpha(G) \leq \delta(G)$。由此可推出 $\alpha(G) = \delta(G)$。□

例 2.3。考虑完全图 K_n。那么，$(1, -1, 0, \ldots, 0)^T$是 $\alpha(K_n) = n$ 的特征向量, 根据命题 2.1， $i(K_n) = 1$。此外， $\alpha(G) >\delta(G) = n - 1$。

现在，我们将刻画满足 $\alpha(G) = \delta(G)$ 的非完全连通图 G 。关于满足 $\alpha(G) = v($ $G)$ 的图的刻画见 [6]: 对于一个阶为 n 的非完全连通图 G ， $\alpha(G) = v(G)$ 当且仅当存在一个有 $n - v(G)$ 个顶点的非连通图 G_1 和一个有 $v(G)$ 个顶点的图 G_2，使得 $\alpha($ $G_2) \geq 2v(G) - n$ ，且 $G = G_1 \vee G_2$。由于 $\alpha(G) \leq v(G) \leq \delta(G)$，如果 $\alpha(G) =\delta(G)$, 那么 $\alpha(G) = v(G) = \delta(G)$。因此，我们从一个图的联开始：该联由一个有 $n - \delta(G)$ 个顶点的非连通图 G_1 与一个有 $\delta(G)$ 个顶点且满足 $\alpha(G_2) \geq 2\delta(G) - n$ 的图 G_2 构成。

引理 2.4。设 G 是一个阶为 $n \geq 3$ 的非完全连通图。那么，$\alpha(G) = \delta(G)$ 当且仅当 G 可表示为 G_1 与 G_2 的图的联，其中图 G_1 有 $n - \delta(G)$ 个顶点且含有一个孤立顶点， G_2 是一个有 $\delta(G)$ 个顶点的图，并且 $\alpha(G_2) \geq 2\delta(G) - n$。

证明。假设 $\alpha(G) = \delta(G)$。我们将通过归纳法建立所需结论。对于阶为3的情形，只有一个非完全且连通的图，即 $N_1 \vee N_2$；它的代数连通度与最小度相同，并且具有所需的结构。令 $n \geq 4$。假设一个阶为 n 、满足 $\alpha(G) = \delta(G)$ 的图 G 是非完全且连通的。由于 $\alpha(G) = v(G) = \delta(G)$， G 可表示为

$G_1 \vee G_2$ 其中 G_1 是一个阶为 $n-\delta$（G）的非连通图，而 G_2 是一个阶为 δ（G）且具有 α（G_2）$\geq 2\delta$（G）$-n$的图。对于 $v \in V$（G_1），有 $\deg_G$（v）$\geq \delta$（G）；对于 $w \in V$（G_2），有 $\deg_G$（w）$\geq n-\delta$（G）。若 G_1 有一个孤立顶点，则结论成立。假设 G_1 没有孤立顶点。由于 δ（G_1）>0，对于所有 $v \in V$（G_1），有 $\deg_G$（v）$>\delta$（G）。因此，存在一个顶点 $w \in V$（G_2），使得

$$\deg_G(w) = \deg_{G_2}(w) + (n - \delta(G)) = \delta(G), \text{ and } \deg_{G_2}(w) = \delta(G_2).$$

由于 $\deg_{G_2}(w) \geq 0$，我们得到 $n-\delta(G) \leq \delta(G)$。

假设 $n-\delta(G) = \delta(G)$。那么，$\deg_{G_2}(w) = 0$，因此 G_2 有一个孤立顶点。由于 G_1 不连通，$\alpha(G_1) = 0$。此外，$\delta(G) = \frac{n}{2}$。交换 G_1 和 G_2 的角色后，我们便得到 G 的所需描述。

假设 $n-\delta(G) < \delta(G)$。注意，$\delta(G_2) = 2\delta(G) - n$。由于 $\alpha(G_2) \geq 2\delta(G) - n$，我们得到 $\alpha(G_2) \geq \delta(G_2)$。假设 $\delta(G_2) = \delta(G) - 1$。那么，我们有 $\delta(G) = n-1$，这与 G 非完全矛盾。因此，G_2 是一个阶为 $\delta(G)$ 的非完全连通图，且满足 $\alpha(G_2) = \delta(G_2)$。根据归纳法，存在一个阶为 $\delta(G)$、满足 $-\delta(G_2)$ 且有一个孤立顶点的图 H_1，以及一个阶为 $\delta(G_2)$ 的图H_2，使得 $G_2 = H_1 \vee H_2$ 且 $\alpha(H_2) \geq 2\delta(G_2) - \delta(G)$。因此，$G = G_1 \vee H_1 \vee H_2$。考虑一个阶为 $n-\delta(G)$ 且满足 $+\delta(G_2)$ 的图 $G_1 \vee H_2$。由于 $\delta(G_2) = 2\delta(G) - n$，$G_1 \vee H_2$ 的阶为 $\delta(G)$。此外，G_1 不连通，因此 $\alpha(G_1 \vee H_2)$ 或为 $\delta(G_2)$，或为 $\alpha(H_2) + n - \delta(G)$。考察 $\alpha(H_2) \geq 2\delta(G_2) - \delta(G)$，可知 $\alpha(H_2) + n - \delta(G) \geq \delta(G_2)$。因此，$\alpha(G_1 \vee H_2) = \delta(G_2) = 2\delta(G) - n$。所以，$G$ 可表示为 H_1 与 $G_1 \vee H_2$ 的图的联。

反之，假设 G_1 是一个阶为 $n-k$ 且有一个孤立顶点 $1 \leq k \leq n-2$的图，而 G_2 是一个阶为 k 且满足 $\alpha(G_2) \geq 2k-n$的图。由于$\alpha(G_2) + n - k \geq k$，我们有 $\alpha(G_1 \vee G_2) = k$。令 v 为 G_1中的一个孤立顶点。于是，$\deg_G(v) = k$。因此，$\delta(G) \leq k = \alpha(G)$ 蕴含 $\delta(G) = \alpha(G)$。□

注 2.5. 如果 G 是一个具有 n 个顶点的非完全连通图，则有$\delta(G) < n-1$。因此，引理 2.4 中的 G_1 的阶至少为 2。然而，G_2 可以只由一个顶点 v构成。此时，顶点 v 是 G的一个割点，同时也是 G中的一个支配顶点。

鉴于 $|V(G_1)| \geq 2$ 和 $G = G_1 \vee G_2$，G_1中不存在 G 的割点。此外，如果 G_2 包含 G的割点，则 $|V(G_2)| = 1$。因此，如果$i(G) = 1$，那么 G 至多有一个割点。

引理 2.6. 设 G 是一个非完全连通图，其阶为 n。假设G 可表示为 G_1 与 G_2 的图的联，其中图 G_1 有 $n-\delta$ 个（G）顶点，且有一个孤立顶点 v；G_2 是一个有 δ 个（G）顶点的图，并且 α（G_2）$\geq 2\delta$（G）$-n$。那么，i（G）$=1$。

证明. 存在一个对应于 α（G）的特征向量 x，其中，除 v 外， G_1 中各顶点对应的分量均为 1； v 对应的分量为 $-$（$|V$（G_1）$|-1$），其余分量均为 0。因此， i（G）$=1$。□

推论2.6.1. 设 G 是一个非完全的、连通图。存在一个割点 v 和 $i(G)=1$，当且仅当 v 是一个支配顶点，并且与一个悬挂顶点相邻，即 $G=(G-v)\vee\{v\}$，其中 $G-v$ 不连通。

证明。假设 v 是 G 中的一个割点，且 i（G）$=1$。根据注 2.5， G 可表示为 $G_1\vee G_2$，其中 G_1 包含一个孤立顶点 w 和 $G_2=\{v\}$。显然， v 是一个支配顶点，且与 w 相邻，而 w 是一个悬挂顶点。

反之，假设 $v\in V(G)$ 是一个支配顶点，且与一个悬挂顶点 w 相邻。令 $G_1=G-v$ and $G_2=\{v\}$。那么， w 是G_1 中的一个孤立顶点，且 $G=G_1\vee G_2$。由引理 2.6，得到所需结果。□

因此，由引理 2.2、2.4 和 2.6 可得以下定理。

定理 2.7. 设 G 是一个非完全连通图，其阶为 n。那么，以下条件等价：

(1) $i(G)=1$, (2) $\alpha(G)=\delta(G)$, (3) G 可写成 G_1 和 G_2 的图的联，其中图 G_1 是一个有 $n-\delta(G)$ 个顶点且含有一个孤立顶点的图， G_2 是一个有 $\delta(G)$ 个顶点的图，并且 $\alpha(G_2)\geq 2\delta(G)-n$。

命题 2.8. 设 G 是一个阶为 $n\geq 3$ 的连通图，且$i(G)\neq 1$。那么，我们可以构造一个图 G'，使得 $i(G')=1$，并且 G 是 G' 的诱导子图：最多添加两个顶点，并将它们与 G 的某些顶点相连。特别地，如果 G 是一个图的联，我们只需要一个顶点；否则，需要两个顶点。

证明。假设 G 可以表示为两个图的图的联，分别为 H_1（阶为 n_1）和 H_2（阶为 n_2），其中 $n_1\geq n_2$。令 G' 为新顶点 v 的（$\{v\}+H_1$）$\vee H_2$。然后， δ（G'）$=n_2$。由于 α（G'）$=\min\{n_2, a$（H_2）$+n_1\}$，我们有 δ（G'）$=\alpha$（G'），以及 i（G'）$=1$。

假设 G 不是若干图的图的联。令 $H_1=\{v\}+G$ 和 $H_2=\{w\}$，其中 $v\neq w$。考虑 $G'=H_1\vee H_2$。由于 H_1 含有一个孤立顶点，且$\alpha(H_2)=0\geq 2\delta(G')-n$，根据定理 2.7， $i(G')=1$。接下来只需证明，从图 G 出发，仅通过添加一个新顶点 v 并将其与若干顶点相连而得到的每个图 H，都不满足 $i(H)=1$。反设存在这样一个图 H，满足 $i(H)=1$。根据定理 2.7 和注 2.5， H 可表示为

两个图的图的联 G_1 和 G_2，其中 G_1 有一个孤立顶点，且 $|V(G_1)| \geq 2$。假设新顶点 v 属于 G_1。由于 $|V(G_1)| \geq 2$，从 H 中移除 v 会得到图 G，该图是某些图的图的联，矛盾。因此，$v \in V(G_2)$。此外，$G_2 = \{v\}$，否则，G 将可写成某些图的图的联。因此，$G = G_1$，所以 G 是不连通的。这与 G是连通的这一假设相矛盾。因此，我们至少需要添加两个顶点，才能得到具有所需性质的连通图 G'。□

3. Algebraic multiplicity of a graph with $i(G) = 1$

回顾一下，$i(\mathbf{x})$ 定义为 $\mathbf{x}$ 或 $-\mathbf{x}$ 中负分量数量的最小值。

例 3.1. 设 $G_1 = K_2 + N_1$ 和 $G_2 = N_1 \vee N_3$。由于 G_1 有一个孤立顶点，且 $\alpha(G_2) = 2\delta(G_1 \vee G_2) - 7$，由定理 2.7 可得 $i(G_1 \vee G_2) = 1$。此外，$\alpha(G_1 \vee G_2) = 4$，且 $am(\alpha(G_1 \vee G_2)) = 3$。按照$V(G_1)$ 和 $V(G_2)$ 的顺序为顶点编号后，有三个线性无关的费德勒向量对应于 $\alpha(G_1 \vee G_2)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{x}_2^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{x}_3^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

因此，$i(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = 2$，且 $i(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) = 3$。

设 G 是一个阶为 n、满足 $i(G) = 1$的非完全图。因此，G 可写为 $G = G_1 \vee G_2$，其中图 G_1 有 $n - \delta(G)$ 个顶点且包含一个孤立顶点，而G_2 是一个有 $\delta(G)$ 个顶点、满足 $\alpha(G_2) \geq 2\delta(G) - n$的图。从例 3.1 可知，如果 $\alpha(G_2) = 2\delta(G) - n$，则必须考虑 $am(\alpha(G_2))$，以计算$am(\alpha(G))$。令 $\beta(H)$ 表示图 H中的连通分支数。由于 G_1 的特征值 0 的代数重数为 $\beta(G_1)$，考虑$G = G_1 \vee G_2$，可得

$$am(\alpha(G)) = \begin{cases} \beta(G_1) - 1 + am(\alpha(G_2)), & \text{if } \alpha(G_2) = 2\delta(G) - n, \\ \beta(G_1) - 1, & \text{if } \alpha(G_2) > 2\delta(G) - n. \end{cases} \tag{3.1}$$

此外，由例 3.1 可知，对于一个非完全连通图 G，条件 $i(G) = 1$ 且 $am(\alpha(G)) > 1$ 并不能保证对每个费德勒向量 $\mathbf{x}$ 都有 $i(\mathbf{x}) = 1$。

命题 3.2。设 G 是一个阶为 n 且 $i(G) = 1$的非完全图。假设对于任意满足 $\alpha(G') > 2\delta(G) - n$ 的图 G'，都有 $G \neq N_3 \vee G'$。那么，$am(\alpha(G)) > 1$ 当且仅当存在一个费德勒向量 $\mathbf{x}$，使得 $i(\mathbf{x}) > 1$。

证明。假设 $am(\alpha(G)) > 1$。由于 $i(G) = 1$，存在图 G_1 和G_2 使得 $G = G_1 \vee G_2$，其中图 G_1 含有 $n - \delta(G)$ 个顶点，并包含一个孤立顶点，而 G_2 是一个阶为 $\delta(G)$ 的图，且满足 $\alpha(G_2) \geq 2\delta(G) - n$。假设 $\alpha(G_2) > 2\delta(G) - n$。由 (3.1) 可知，$G_1$中至少有三个连通分支。由于 $G_1 \neq N_3$，$|V(G_1)| \geq 4$。选取 G_1 的两个连通分支 H_1 和 H_2，使得 H_1 和 H_2 分别是 G_1中阶最小和次小的连通分支。于是，$H_1 = N_1$。按照 $V(H_1)$、$V(H_2)$、$V(G_1)\backslash(V(H_1) \cup V(H_2))$ 以及$V(G_2)$的顺序标记顶点，存在一个费德勒向量

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} -1 & -(\frac{|V(G_1)|-|V(H_1)|-|V(H_2)|-1}{|V(H_2)|})\mathbf{1}^T_{|V(H_2)|} & \mathbf{1}^T_{|V(G_1)|-|V(H_1)|-|V(H_2)|} & \mathbf{0}^T_{|V(G_2)|} \end{bmatrix}.$$

那么，x 和 $-$x分别有 $|V(H_1)| + |V(H_2)|$ 和 $|V(G_1)| - |V(H_1)| - |V(H_2)|$ 负分量。显然，$|V(H_1)| + |V(H_2)| \geq 2$。由于 $G_1 \neq N_3$和H_1 和 H_2 是 G_1 中阶最小和次小的连通分支，我们有 $|V(G_1)| - |V(H_1)| - |V(H_2)| \geq 2$。因此，$i(\mathrm{x}) \geq 2$。

假设 $\alpha(G_2) = 2\delta(G) - n$。令 v 为 G_1中的一个孤立顶点。那么，我们有一个费德勒向量 $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{|V(G_1)|} - |V(G_1| \\ | \end{bmatrix}) \mathrm{e}\mathbf{0}_{|V(G_2} \quad v \quad)$，其中 $|V(G_1)| \geq 2$。选取一个对应于 $\alpha(G_2)$ 的特征向量 y，使得 $\mathrm{y}^T\mathbf{1} = 0$ 且 $i(\mathrm{y}) > 0$。由于$\alpha(G_2) = 2\delta(G) - n$，$\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{|V(G_1)|} \mathrm{y} \end{bmatrix}$ 是 G的一个费德勒向量。因此，$i(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2) > 1$。

假设存在一个费德勒向量 x，使得 $i(\mathrm{x}) > 1$。根据假设，存在一个费德勒向量 x′ 使得 $i(\mathrm{x}') = 1$。显然，x′ 不是 x 的标量倍数，因此这两个向量线性无关。因此，$am(\alpha(G)) \geq 2$。□

命题 3.2 表明，$i(G) = 1$ 且 $am(\alpha(G)) = 1$这一条件，迫使任意费德勒向量 x 满足 $i(\mathrm{x}) = 1$。此外，所有满足 G 且 $am(\alpha(G)) > 1$ 并且对于所有费德勒向量 x 都有 $i(\mathrm{x}) = 1$ 的图的集合为

$$\{N_3 \vee G' | G' \text{ is a graph with } \alpha(G') > 2\delta(N_3 \vee G') - |V(N_3 \vee G')|\}.$$

我们将通过研究 $am(\alpha(G))$ 与度为 $\delta(G)$ 的顶点数之间的关系，刻画满足 $i(G) = 1$ 且 $am(\alpha(G)) = 1$ 的图。在给出这一刻画之前，我们将推导 $am(\alpha(G))$ 的下界。

引理 3.3. 设 G 是一个阶为 n 的非完全连通图。恰有 ℓ 个度为 δ（G）的顶点和 i（G）$= 1$，当且仅当存在某个 $k \geq 1$，使得有图 $G_1, \ldots, G_k$ 满足以下条件：

(1) $|V(G_1)| = \cdots = |V(G_k)| = n - \delta(G) \geq 2$；(2) 对于 $i = 1, \ldots, k$，每个 G_i 包含 $\ell_i (\geq 1)$ 个度为 $\delta(G)$ 的孤立顶点，位于G中，且 $\ell = \sum_{j=1}^{k} \ell_j$；

(3) G 由以下两种情况之一描述：

(a) $G = \vee_{j=1}^{k} G_j$ 或 (b) $G = (\vee_{j=1}^{k} G_j) \vee G'$，其中 G' 是一个具有 $k\delta(G) - (k-1)n$ 个顶点的图，使得对于所有 $v \in V(G')$，$\deg_G(v) > \delta(G)$，且 $\alpha(G') \geq (k+1)\delta(G) - kn$。

证明。我们将对 ℓ 使用归纳法，以证明为了使 G 恰好有 ℓ 个度为 $\delta(G)$ 和 $i(G) = 1$ 的顶点，条件(1)、(2) 和 (3) 是必要的。情形 $\ell = 1$ 由定理2.7立即得到。令 $\ell \geq 2$。由于 G 是非完全图且 $i(G) = 1$，G 可以写成两个图 G_1 和 G_2 的图的联，其中 G_1 是一个具有 $n - \delta(G)$ 个顶点且含有一个孤立顶点的图，而 G_2 是一个具有 $\delta(G)$ 个顶点且具有 $\alpha(G_2) \geq 2\delta(G) - n$ 的图。根据注2.5，G_1 的阶大于 1。如果 G_1 包含 ℓ 个孤立顶点，则对于所有 $v \in V(G_2)$，$\deg_G(v) > \delta(G)$。通过选取 $G_1 = G_1$ 和 $G' = G_2$，我们得到带有 $k = 1$ 的所需结果，这对应于情形(3b)。假设 G_1 中有 ℓ_1 个孤立顶点，其中 $\ell_1 < \ell$。于是，G_2 在 G 中恰好包含 $\ell_2 := \ell - \ell_1$ 个度为 $\delta(G)$ 的顶点。由于 G 中的最小度是 $\delta(G)$，所以这 ℓ_2 个顶点也具有 G_2 中的最小度。根据 $G = G_1 \vee G_2$ 这一事实，我们有 $\delta(G_2) = 2\delta(G) - n$。如果 G_2 是完全图，那么 $\delta(G_2) = \delta(G) - 1$，从而 $\delta(G) = n - 1$，这与 G 是非完全图这一事实矛盾。因此，G_2 是一个非完全图且 $\delta(G_2) \geq \alpha(G_2)$。由于 $\delta(G_2) = 2\delta(G) - n$ 且 $\alpha(G_2) \geq 2\delta(G) - n$，我们有

$$\delta(\hat{G}_2) = \alpha(\hat{G}_2) = 2\delta(G) - n.$$

假设 G_2 不连通。那么 $\alpha(G_2) = 0$，这就推出 $\delta(G_2) = 0$，并且 $\delta(G) = \frac{n}{2}$。由于 $\delta(G_2) = 0$，ℓ_2 个顶点是 G_2 中仅有的孤立顶点。此外，我们有 $|V(G_1)| = |V(G_2)|$，因为 $\delta(G) = \frac{n}{2}$。令 $\ell_2 = \ell_2$, $G_1 = G_1$, $G_2 = G_2$，我们得到结果 $k = 2$，对应于 (3a)。

现在假设 G_2 是连通的。那么，根据定理 2.7，$i(G_2) = 1$。由于 $\ell_2 < \ell$，根据归纳法，存在图 $G_2, \ldots, G_k$，其中某个 $k \geq 2$ 满足以下条件：

(i) $|V(G_2)| = \cdots = |V(G_k)| = \delta(G) - \delta(G_2) = n - \delta(G) \geq 2$; (ii) 对于 $i = 2, \ldots, k$，每个 G_i 在 G_2 中都包含 $\ell_i (\geq 1)$ 个度为 $\delta(G_2)$ 的孤立顶点，且 $\ell_2 = \sum_{j=2}^{k} \ell_j$；以及

(iii) $\hat{G}_2$ 由以下两种情况之一描述：

(a) $\hat{G}_2 = \vee_{j=2}^{k} G_j$ or

(b) $\hat{G}_2 = (\vee_{j=2}^{k} G_j) \vee G'$ where G' is a graph on $(k-1)\delta(\hat{G}_2) - (k-2)|V(\hat{G}_2)|$ vertices such that $\deg_{\hat{G}_2}(v) > \delta(\hat{G}_2)$ for all $v \in V(G')$ and $\alpha(G') \geq k\delta(\hat{G}_2) - (k-1)|V(\hat{G}_2)|$.

显然，条件 (1) 成立。由于 G 中的 ℓ_2 顶点在 G 中的度为 $\delta(G)$，我们有 $\ell = \ell_1 + \ell_2 = \sum_{j=1}^{k} \ell_j$。因此，条件 (2) 得证。令 $G_1 = G_1$。

若 $G_2 = \vee_{j=2}^{k} G_j$，则得到情形 (3a)。设 $G_2 = (\vee_{j=2}^{k} G_j) \vee G'$。考虑到 $G = G_1 \vee G_2$, $\delta(G_2) = 2\delta(G) - n$ 以及 $|V(G_2)| = \delta(G)$，不难验证 (3b) 中其余条件。因此，我们得到了对 G 的所需描述。

为证明逆命题，假设存在一个图 G，具有 $G_1, \ldots, G_k$，其中某个 $k \geq 1$ 满足陈述中的条件 (1) 和 (2)。对于情形 (3a)，根据条件 (2)，G 含有 ℓ 个度为 $\delta(G)$ 的顶点。考虑情形 (3b)。由于对所有 $v \in V(G')$，$\deg_G(v) > \delta(G)$，G 恰好含有 ℓ 个度为 $\delta(G)$ 的顶点。还需证明 $i(G) = 1$。假设 G 如情形 (3b) 所述。注意到 $\alpha(G') \geq (k+1)\delta(G) - kn$。因此，通过计算该图的联的谱，可以从 G_1 中的特征值 0 得到 $\alpha(G)$，从而_超碰

$$\alpha(G) = (k-1)(n - \delta(G)) + |V(G')| = \delta(G).$$

因此，根据定理 2.7，$i(G) = 1$。类似地，对于情形 (3a)，容易证明 $\alpha(G) = \delta(G)$。□

注释 3.4. 继续沿用引理 3.3 中的记号和术语，我们有 $|V(G')| = k\delta(G) - (k-1)n$ 以及 $|V(G_1)| = n - \delta(G)$。因此，

$$\alpha(G') \geq (k+1)\delta(G) - kn = |V(G')| - |V(G_1)|.$$

¯此外，我们注意到，每个 G_i（$i = 1, \ldots, k$）的补图 G_i 都是连通的，因此 G_i 不能表示为若干图的联。因此，引理 3.3 中用图的联来分解 G 的方式是唯一的（除了图的排列顺序）。特别地，k 是唯一确定的。

定义 3.5. 设 $\ell \geq 1$。图 $H_1, \ldots, H_\ell$ 称为初等图，当且仅当
(1) $|V(H_1)| = \cdots = |V(H_\ell)| \geq 2$，且 (2) 对每个 H_i（$i = 1, \ldots, \ell$），都包含至少一个孤立顶点。
如果 G 可写成 $G = \vee_{j=1}^{k} G_j$，其中 $k \geq 2$ 满足 G_1、……、G_k 均为初等图，则称图 G 为一个初等 k–联。图 G_1、……、G_k 称为 G的初等图。

定义 3.6. 若图 G 有 n 个顶点，且可表示为 $G = (\vee_{j=1}^{k} G_j) \vee G'$，其中 $k \geq 1$ 满足 G_1、……、G_k 是初等图，并且 G' 是一个有 $k\delta(G) - (k-1)n$ 个顶点的图，满足对于所有 $v \in V(G')$，$\deg_G(v) > \delta(G)$，且 $\alpha(G') \geq |V(G')| - |V(G_1)|$，则称图 G 为一个组合 k–联。图 G_1、……、G_k 和图 G' 分别称为 G 的初等图和组合图。

注释 3.7. 如果 G 是一个初等 k–图的联，则 $k \geq 2$。否则，G 将是不连通的。考虑注释 3.4，一个初等 k–图的联 G 并不意味着G 是一个组合 k–图的联，反之亦然。

定义 3.8. 若 G 是一个 k–图的联，当且仅当 G 是一个初等k–图的联或一个组合 k–图的联。

注 3.9. k–联接不是完全图。

由引理 3.3 可直接得到以下结果。

定理 3.10. 设 G 是一个非完全连通图。那么，$i(G) = 1$ 当且仅当 G 是一个 k–联接。

例 3.11. 考虑参数为 (16, 6, 2, 2) 的 Shrikhande 图 G'，它是一个强正则图，见 [1]。经计算，$\alpha(G') = 4$ 且$am(\alpha(G')) = 6$。设 $G_1 = K_{11} + \{v\}$。则 $i(G_1 \vee G') = 1$，且它只有一个顶点的度为最小度，但 $am(\alpha(G_1 \vee G')) = 7$。此外，$G_1 \vee G'$是一个复合 1–联接。

定理 3.12. 假设 G 是一个初等 k–联接，且 $G_1, \ldots, G_k$ 是 G的初等图。那么，$am(\alpha(G)) = \sum_{i=1}^{k} \beta(G_i) - k$。假设 G 是一个复合 k–联接，且 $G_1, \ldots, G_k$ 和 G' 分别是 G的初等图和复合图。那么，

$$am(\alpha(G)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \beta(G_i) - k + am(\alpha(G')), & \text{if } \alpha(G') = 2\delta(G) - n, \\ \sum_{i=1}^{k} \beta(G_i) - k, & \text{if } \alpha(G') > 2\delta(G) - n \end{cases}$$

证明。考虑图的联图的谱，我们立即得到所需结果。□

设 $\mathcal{A}_\ell$ 为所有满足以下条件的非完全图 G 的集合：其最小度为 δ，有 ℓ 个顶点，且 $i(G) = 1$。对于 $G \in \mathcal{A}_\ell$，G 是某个 $1 \le k \le \ell$ 的 1–联接。注意，若 $k = 1$，则 G 是一个组合 1–联接。为了求得 $am(\alpha(G))$ 的最小值，其中 $G \in \mathcal{A}_\ell$ 是一个 k 的联接，根据定理 3.12，我们只需考虑初等 k–联接和组合 k–联接 G，其中 G 的组合图 G' 满足 $\alpha(G') > 2\delta(G) - |V(G)|$。令 $\mathcal{A}_{\ell,\,k}$ 表示 $\mathcal{A}_\ell$ 的子集，该子集由初等 k–联接和此类组合 k–联接构成。定义

$$m_{\ell,k} := \min\{am(\alpha(G))|G \in \mathcal{A}_{\ell,k}\}.$$

我们将研究$m_{\ell,\,k}$ 以及达到 $m_{\ell,\,k}$ 的图族。随后将推导出 $\{am(\alpha(G))|G \in \mathcal{A}_\ell\}$ 的最大下界。

令$G \in \mathcal{A}_{\ell,\,k}$，其中 $1 \le k \le \ell$。令 $G_1, \ldots, G_k$ 为 G 的初等图。对于 $i = 1, \ldots, k$，每个 G_i 至少包含一个孤立顶点，记作 v_i，因此 $\beta(G_i) - 1$

是 $G_i - v_i$ 中连通分支的数量。由于根据定理 3.12，在 $G_1 - v_1, \ldots, G_k - v_k$ 的不交并中还剩下 $\ell - k$ 个孤立顶点，我们有

$$am(\alpha(G)) = \ell - k + p(G)$$

其中， $p(G)$是 G的初等图 G_1、.. 、G_k 中阶大于 1 的连通分支数量。定义

$$p_{\ell,k} := \min\{p(G) | G \in \mathcal{A}_{\ell,k}\}.$$

因此，我们有

$$m_{\ell,k} = \ell - k + p_{\ell,k}.$$

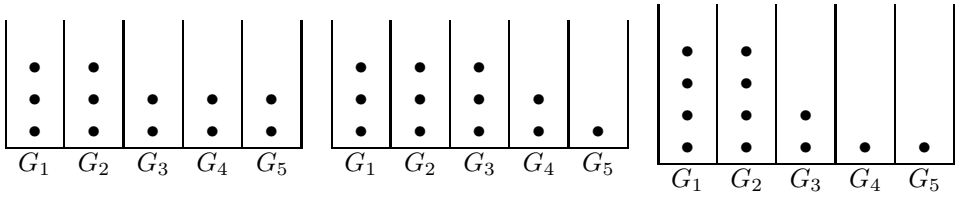
然后，$m_{\ell,\ k}$ 可通过考察 $1 \leq k \leq \ell$的以下 3 种情形完全确定：(i)$k \mid \ell$ 其中 $\ell \geq 2$ 且 $1 \leq k < \ell$，(ii) $k = \ell$ 或 $k = \ell - 1 \geq 2$，(iii) $k \nmid \ell$ 且$2 \leq k \leq \ell - 2$。

引理 3.13（情形 (i)）。设 $G \in \mathcal{A}_{\ell,\ k}$，其中 $\ell \geq 2$ 和 $1 \leq k < \ell$。假设 G_1，..., G_k 是 G 的初等图。那么， $k \mid \ell$ 当且仅当 $m_{\ell,\ k} = \ell - k$。特别地，对于 $i = 1 \ldots$，有 $G_i = N_{a+1}$，其中 $a \geq 1$ 和 $\ell =$ （$a + 1$）k。

证明。注意， $k \mid \ell$ 当且仅当 $k \mid \ell - k$。设对某个$a \geq 1$，有 $\ell - k = ak$。通过为 $i = 1 \ldots$选择 $G_i = N_{a+1}$， k，我们得到 p（G） $= 0$。因此，$p_{\ell,\ k} = 0$且$m_{\ell,\ k} = \ell - k$。反过来，若$m_{\ell,\ k} = \ell - k$，则$p_{\ell,\ k} = 0$，所以每个 G_i 都必须由孤立顶点构成。由于 $|V$（G_1）$| = \cdots = |V$（G_k）$| \geq 2$，可知存在 $a \geq 1$ 使得 $\ell - k = ak$。此外，对于 $i = 1$, ..., k，有 $G_i = N_{a+1}$。□

我们将考察一个例子，以说明 p（G）取决于 G_1，....., G_k 由孤立顶点构成的方式。

例 3.1。令$G \in \mathcal{A}_{12,\ 5}$，并令 G_1，....., G_5 为G的初等图。注意，对于 $i = 1$，....., 5， G_i 至少有一个孤立顶点。考虑将 12 个孤立顶点分配到 G_1，....., G_5中的以下三种配置：



情况1　　情况2　　情况3

其中，对于每种情况， • 表示一个孤立顶点，而 j^{th} 列描述了 G_j 包含多少个孤立顶点。请注意，对于每种情况，都不存在更多的

G_j 中的孤立顶点；在 $|V(G_1)| = \cdots = |V(G_5)| \geq 2$ 的条件下， G_j 可能有阶大于 1 的非连通分支。

考虑情况1。如果对于 $i = 1$， $|V(G_i)| = 3$，.....，5，那么 G_3、G_4 和 G_5 必须有三个孤立顶点，这与 $\ell = 12$ 矛盾。为了使 G 满足只有12个孤立顶点的条件，并且 $|V(G_1)| = \cdots = |V(G_5)| \geq 2$，必须在每个 G_j 中至少添加一个阶大于1的连通分支。因此，对于情况1， $p(G) \geq 5$。

采用情况2的相同论证可知，我们还需要至少五个阶大于1的连通分支。因此， $p(G) \geq 5$ 适用于情况2。

对于情况3，我们至少需要三个连通分支： K_2、 K_3 和 K_3 分别位于 G_3、 G_4 和G_5中。因此， $|V(G_1)| = \cdots = |V(G_5)| \geq 4$ 和 $p(G) \geq 3$。

令 $G \in \mathcal{A}_{\ell,\ k}$，其中 $\ell - k \geq 1$。设 G_1，.....， G_k 是 G 的初等图，且对于 $i = 1$，.....， k， v_i 是 G_i 中的一个孤立顶点。令 $c_i(G) \geq 0$ 表示 $G_i - v_i$ 中孤立顶点的数量，使得 $\ell - k = \sum_{i=1}^{k} c_i(G)$。设 $c_{\max}(G) := \max\{c_1(G)....., c_k(G)\}$，且对于 $1 \leq i \leq k\}|$， $q(G) := |\{i|c_i(G) = c_{\max}(G)$。由于 $\ell - k \geq 1$，我们有 $c_{\max}(G)\ q(G) \geq 1$。若根据上下文可以明确 G，则 $c_i(G)$ 和 $c_{\max}(G)$ 分别可写为 c_i 和 $c_{\max}$。假设存在一个 $G_j - v_j$ 使得 $c_{\max} - c_j = 1$。由于 $|V(G_1)| = \cdots = |V(G_k)|$，并且 $G_1 - v_i$，.....， $G_k - v_k$ 的不交并中只有 $\ell - k$ 个孤立顶点，因此每个 G_i 中至少有一个阶大于 1 的连通分支。于是， $p(G) \geq k$。此外，对 $j = 1$，.....， k 选择 $G_j = N_{c_j+1} + K_{s-c_j-1}$，其中 $s \geq c_{\max} + 3$，我们有 $|V(G_1)| = \cdots = |V(G_k)| = s$，从而 $p(G) = k$。另一方面，假设对于所有 $1 \leq j \leq k$ 都有 $c_{\max} - c_j \neq 1$。选择

$$G_j = \begin{cases} N_{c_j+1} + K_{c_{\max}-c_j}, & \text{if } c_{\max} - c_j \geq 2, \\ N_{c_{\max}+1}, & \text{if } c_j = c_{\max}, \end{cases}$$

对于 $1 \leq j \leq k$，我们得到 $|V(G_1)| = \cdots = |V(G_k)| \geq 2$，因此 $p(G) = k - q(G)$，其中$q(G) \geq 1$。

令 $\mathcal{G}_{\ell,\ k}$ 为图 $G \in \mathcal{A}_{\ell,\ k}$ 的集合，使得对于初等图$G_1, .., G_k$， $c_{\max} - c_j \neq 1$ 对所有 $1 \leq j \leq k$ 均成立，其中 $\ell - k \geq 1$。于是，我们立即得到以下命题。

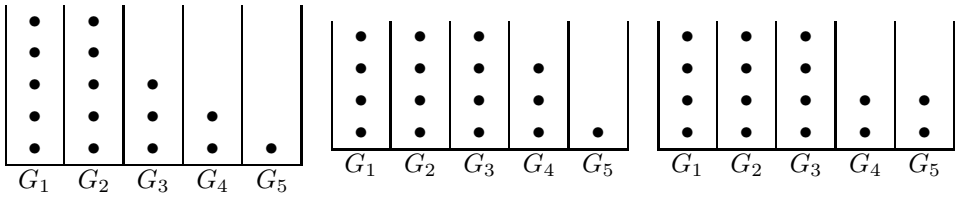
命题 3.15。设 $G \in \mathcal{A}_{\ell,\ k}$，其中 $\ell - k \geq 1$。若 $G \in \mathcal{G}_{\ell,\ k}$，则$p(G) \geq k - q(G)$，其中 $q(G) \geq 1$；并且存在一个图 $H \in \mathcal{G}_{\ell,\ k}$，使得$p(H) = k - q(G)$，其中 $q(G) \geq 1$。若 $G \notin \mathcal{G}_{\ell,\ k}$，则 $p(G) \geq k$，并且存在一个图 $H \in \mathcal{A}_{\ell,\ k}$，使得 $p(H) = k$。

命题 3.15 表明，如果 $\mathcal{G}_{\ell,k}$ 非空，那么$p_{\ell,k} < k$。否则，$p_{\ell,k} = k$，因此 $m_{\ell,\ k} = \ell$。

引理3.16（情形 (ii)）。设$G \in \mathcal{A}_{\ell,\ k}$。如果 $k = \ell$ 或 $k = \ell - 1 \geq 2$，则$m_{\ell,\ k} = \ell$。

证明。设 G_1、...、G_k 是 G的初等图。假设 $k = \ell$。注意，对于 $i = 1$、...、k，$|V(G_i)| \geq 2$。由于对于 $i = 1$、...、k 的每个 G_i 都恰好有一个孤立顶点，因此每个 G_i 必须至少有一个阶大于1 的连通分支。因此，$p_{\ell,\ell} = k$，从而 $m_{\ell\ell} = \ell$。如果 $k = \ell - 1 \geq 2$，则存在一个图 G_j，对于某个$1 \leq j \leq k$ 使得 $c_{\max} - c_j = 1$。所以，$\mathcal{G}_{\ell,k}$ 是空集，这意味着 $m_{\ell,\ell-1} = \ell$。□

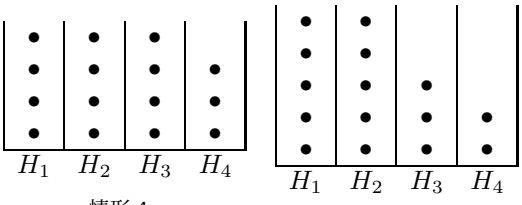
例3.17。设$G \in \mathcal{A}_{16,5}$，并设 G_1、.....、G_5 为 G的初等图。注意，对于 $i = 1$，.....，5，每个 G_i 至少有一个孤立顶点。请参见以下将16个顶点分成 G_1，.....，G_5 的两种配置：



情况1　　情况2　　情况3

其中，对于每种情况，• 表示一个孤立顶点，而 j^{th} 列描述了 G_j 拥有的孤立顶点数量。对于情况1，$G \in \mathcal{G}_{16,5}$ 根据命题3.15，我们可以有 $p(G) = 3$。假设 G 对应于情况2的配置。由于 $c_{\max} - c_4 = 1$, $G \notin \mathcal{G}_{\ell,k}$，因此 $p(G) \geq 5$。如果 G 对应于情况3，那么对于所有 $1 \leq j \leq 5$ 都有 $c_{\max} - c_j \neq 1$，从而我们可以通过分别将 K_2 置于 G_4 和 G_5中，得到 $p(G) = 2$。此外，根据抽屉原理，在$G \in \mathcal{G}_{16,5}$ 中不存在满足$c_{\max} = 2$的图。因此，$p_{16,5} = 2$，从而$m_{16,5} = 13$。

令 $H \in \mathcal{A}_{15,4}$，并令 H_1、...、H_4 为 H的初等图。考虑将15 个顶点分配到 H_1、...、H_4 中的以下两种配置：



情形 4　　情形 5

对于情形 4，$H \notin \mathcal{G}_{15,4}$，因此 $p(H) \geq 4$。对于情形 5，我们有 $p(H) \geq 2$。可以验证，$m_{15,4} = 13$。

从例3.17中的情形 1、2 和 3 可以看出，为了使 $p_{\ell,k}$ 能够达到最大值，应使 $c_{\max}(G)$最小。因此，我们将考虑满足 $0 \leq \ell - k - c_{\max}(G)q(G) \leq c_{\max}(G) - 1$ 的图 $G \in \mathcal{A}_{\ell,k}$，然后研究图 G 中 $c_{\max}(G)$ 的最小值。然而，例3.17中的情形 4 和 5 表明，即使 $c_{\max}(G)$ 的最小值在 $\hat{G}$ 处取得，也不保证 $\ell - k = c_{\max}(G)q(G) - 1$ 时能够达到 $\hat{p}_{\ell,k}$。

引理 3.18（情形 (iii)）。设 $G \in \mathcal{A}_{\ell,k}$ 其中 $k \nmid \ell$ 且 $2 \leq k \leq \ell - 2$。令 $\tilde{c} = \max\{\lceil \frac{\ell-k}{k} \rceil, 2\}$。则，

$$m_{\ell,k} = \begin{cases} \ell - \lfloor \frac{\ell-k}{3} \rfloor, & \text{if } \ell - k \text{ is odd, and } \lfloor \frac{\ell-k}{2} \rfloor \leq k-1, \\ \ell - \lfloor \frac{k(\ell-k)}{\ell+k+1} \rfloor, & \text{if } k \mid (\ell+1), \text{ and } \ell + 1 \geq 4k, \\ \ell - \lfloor \frac{\ell-k}{\tilde{c}} \rfloor, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。让我们考虑一个图 $G \in \mathcal{A}_{\ell,k}$。于是，存在初等图$G_1$、.....、$G_k$的 G。设 $0 \leq \ell - k - c_{\max}(G)q(G) \leq c_{\max}(G) - 1$，其中 $k \nmid \ell$和$2 \leq k \leq \ell - 2$。不妨设 $c_1 = \cdots = c_{q(G)} = c_{\max}(G)$ 和 $c_{q(G)+1} = r(G)$，其中 $r(G) = \ell - k - c_{\max}(G)q(G)$。注意，如果 $0 \leq r(G) \leq c_{\max}(G) - 2$，那么$G \in \mathcal{G}_{\ell,k}$。

设 $c_0 = \min\{c \geq 2 | \lfloor \frac{\ell-k}{c} \rfloor \leq k-1\}$和$r_0 = \ell - k - c_0 \lfloor \frac{\ell-k}{c_0} \rfloor$。我们将考虑 3种情况：(a) $c_0 = 2$ 和 $r_0 = 1$，(b) $\lfloor \frac{\ell-k}{c_0} \rfloor = k-1$ 和 $r_0 = c_0 - 1$，其中 $c_0 \geq 3$，(c) (a) 和 (b) 均不成立。

- （情形 (a)）若 $c_{\max}(G) = 2$ 且 $r(G) = 1$，则 $c_{\max}(G) - c_{q(G)+1} = 1$ 从而 $p(G) \geq k$。假设 $c_{\max}(G) = 3$。由于 $c_0 = 2$ 且 $r_0 = 1$，$\lfloor \frac{\ell-k}{2} \rfloor \leq k-1$这意味着 $\lfloor \frac{\ell-k}{3} \rfloor \leq k-2$。若 $r(G) = 0$或 $r(G) = 1$，则 $G \in \mathcal{G}_{\ell,k}$ 且根据命题 3.15，$p_{\ell,k} = k - \lfloor \frac{\ell-k}{3} \rfloor$。假设$r(G) = 2$。由于 $\lfloor \frac{\ell-k}{3} \rfloor \leq k-2$，存在一张图 $\hat{G} \in \mathcal{G}_{\ell,k}$ 使得 $\hat{c}_1(G) = \cdots = c_{q(G)}(G) = 3$ 且 $c_{k-1}(G) = c_k(G) = 1$。根据命题 3.15，我们得到 $m_{\ell,k} = \ell - \lfloor \frac{\ell-k}{3} \rfloor$。此外，考虑到 $c_0 = 2$，条件 $r_0 = 1$ 等价于 $\ell - k$ 为奇数。

- （情形 (b)）如果 $c_{\max}(G) = c_0 \geq 3$, $q(G) = k-1$ 且 $r(G) = c_0 - 1$，那么$c_{\max} - c_k = 1$ 使得 $G \notin \mathcal{G}_{\ell,k}$。注意，$\ell - k = c_0(k-1) + c_0 - 1$ 可表示为 $c_0 = \frac{\ell+1}{k} - 1 \geq 3$，即 $\ell + 1$ 可被 k 和 $\ell + 1 \geq 4k$整除。假设 $c_{\max}(G) = c_0 + 1$。我们有 $q(G) = \lfloor \frac{\ell-k}{c_0+1} \rfloor = \lfloor \frac{k(\ell-k)}{\ell+k+1} \rfloor$。由于$\lfloor \frac{\ell-k}{c_0} \rfloor = k-1$，我们有 $q(G) \leq k-2$。如果 $r(G) = 0$，则存在 $\hat{G} \in \mathcal{G}_{\ell,k}$，使得 $c_1(G) = \cdots = c_{q(G)}(G) = c_0 + 1$。如果 $r(G) \geq 1$，取一个图 $\hat{G} \in \mathcal{G}_{\ell,k}$，使得 $c_1(G) = \cdots = c_{q(G)}(G) = c_0 + 1$, $c_{k-1}(G) = r(G) - 1$ 且$c_k(\hat{G}) = 1$。因此，由命题 3.15，$m_{\ell,k} = \ell - \lfloor \frac{k(\ell-k)}{\ell+k+1} \rfloor$。

- (情况(c)) 考虑情况(a)和(b)，如果 $c_0 = 2$，则 $r_0 = 0$；如果$r_0 = c_0 - 1$，则 $\lfloor \frac{\ell-k}{c_0} \rfloor \leq k-2$。令$c_{\text{最大}}(G) = c_0$和 $q(G) = \lfloor \frac{\ell-k}{c_0} \rfloor$。

很容易验证，对于 $c_0 = 2$ ，我们可以得到所需结果。若$r(G) = c_0 - 1 \geq 2$，则 $q(G) \leq k-2$。于是，存在一个图 $G \in \mathcal{G}_{\ell,k}$，使得 $c_1(G) = \cdots = c_{q(G)}(G) = c_0$, $c_{k-1}(G) = r(G)-1$ 且 $c_k(G) = 1$。若$r(G) < c_0-1$，则显然有 $G \in \mathcal{G}_{\ell,k}$。因此，$m_{\ell,k} = \ell - \lfloor \frac{\ell-k}{c_0} \rfloor$。考虑 $c_0 = \min\{c \geq 2 | \lfloor \frac{\ell-k}{c} \rfloor \leq k-1\}$。由于 $\lfloor \frac{\ell-k}{c} \rfloor \leq k-1 \Leftrightarrow \frac{\ell-k}{c} < k \Leftrightarrow \frac{\ell-k}{k} < c$，我们有 $c_0 = \max\{\lceil \frac{\ell-k}{k} \rceil, 2\}$。

□

总结引理 3.13、3.16 和 3.18，我们得到以下定理。

定理 3.19.设$G \in \mathcal{A}_{\ell,k}$，其中 $1 \leq k \leq \ell$。那么，

$$m_{\ell,k} = \begin{cases} \ell, & \text{if } k = \ell - 1 \geq 2 \text{ or } k = \ell, \quad (3.2) \\ \ell - k, & \text{if } k \mid \ell \text{ and } 1 \leq k < \ell, \quad (3.3) \\ \ell - \left\lfloor \dfrac{k(\ell-k)}{\ell+k+1} \right\rfloor, & \text{if } k \mid (\ell+1),\ \ell+1 \geq 4k,\ 2 \leq k \leq \ell-2, \quad (3.4) \\ \ell - \left\lfloor \dfrac{\ell-k}{3} \right\rfloor, & \text{if } k \nmid \ell,\ 2 \nmid (\ell-k),\ \lfloor \frac{\ell-k}{2} \rfloor \leq k-1 \leq \ell-3, \quad (3.5) \\ \ell - \left\lfloor \dfrac{\ell-k}{\tilde{c}} \right\rfloor, & \text{otherwise}, \quad (3.6) \end{cases}$$

其中 $\tilde{c} = \max\{\lceil \frac{\ell-k}{k} \rceil, 2\}$。

推论3.19.1. 设 G 是一个非完全连通图，阶为 n ，且满足$i(G) = 1$，以及 $\ell \geq 1$ 个 $\delta(G)$的顶点。那么，

$$am(\alpha(G)) \geq \begin{cases} \frac{\ell}{2}, & \ell \text{ is even}, \\ \ell - \lfloor \frac{\ell}{3} \rfloor, & \ell \text{ is odd}. \end{cases}$$

ℓ ℓ当且仅当 $G = \vee_{i=1}^{\frac{\ell}{2}} N_2 (\ell \geq 4)$ 或 $G = (\vee_{i=1}^{\frac{\ell}{2}} N_2) \vee K_{n-\ell}$时，对于偶数 ℓ 等号成立。特别地，$G = N_2 \vee K_{n-2}$ 对于 $\ell = 2$。

证明。令 $m_\ell := \min\{am(\alpha(G)) | G \in \mathcal{A}_\ell\}$。我们只需分别找到偶数 ℓ 和奇数ℓ的 m_ℓ，即可完成证明。沿用定理 3.19的记号，对于情形(3.4)，存在 $a \geq 1$ 使得 $\ell + 1 = ak$。由于 $k \leq \ell$，我们有 $a \geq 2$。因此，$\ell - \lfloor {}^{k}{(\ell-k)\frac{}{\ell+k+1}} \rfloor$ 可以改写为 $\ell - \lfloor \frac{(\ell-k)}{a+1} \rfloor \geq \ell - \lfloor \frac{(\ell-k)}{3} \rfloor$，即 $\lfloor {}_{(\ell-k)a+1} \rfloor \leq \lfloor {}_{(\ell-k)_3} \rfloor$。

假设 ℓ 为偶数。那么，$\frac{\ell}{2} \mid \ell$。由 (3.3) 可得 $m_{\ell,\ \frac{\ell}{2}} = \ell - \frac{\ell}{2}$ 其中$k = \frac{\ell}{2}$。注意到 $\tilde{c} \geq 2$。因此，对于 $1 \leq k \leq \ell$，我们有 $\lfloor {}_{(\ell-k)_3} \rfloor < \frac{\ell}{2}$和 $\lfloor {}_{(\ell-k)_{\tilde{c}}} \rfloor < \frac{\ell}{2}$。因此，$m_\ell = \ell - \frac{\ell}{2}$，这只能由 (3.3) 得到。此外，由引理 3.13 可知，对于 $G \in \mathcal{A}_\ell$，$am(\alpha(G)) = \frac{\ell}{2}$ 当且仅当 $G = \vee_{i=1}^{\frac{\ell}{2}} N_2$ ($\ell \geq 4$) 或

$_{\ell}G=(\vee_{i=1}^{\overline{3}}N_2)\vee G'$ 其中 $\alpha(G')>|V(G')|-2$。由 $\delta(G')\leq|V(G')|-1$可知，G' 是完全图。

显然，$m_1=1$。假设 ℓ 为奇数且 $3\mid\ell$。应用（3.3），$m_{\ell,\ \frac{\ell}{3}}=\ell-\frac{\ell}{3}$。设对于（3.6），存在 $\tilde{c}\geq2$和 $k_0\geq1$，使得 $\ell\neq3k_0$和 $\left\lfloor\frac{\ell-k_0}{\tilde{c}}\right\rfloor\geq\frac{\ell}{3}$。由于 $k_0\geq1$，我们必有 $\tilde{c}=2$。这意味着 $\ell>3k_0$。因此，$\left\lceil\frac{\ell-k_0}{k_0}\right\rceil>2$，这与 $\tilde{c}=\max\{\left\lceil\frac{\ell-k_0}{k_0}\right\rceil,2\}=2$ 矛盾。于是，$\left\lfloor\frac{\ell-k}{\tilde{c}}\right\rfloor<\frac{\ell}{3}$。此外，由于对于 $1\leq k\leq\ell$，$\lfloor\ _{(\ell-k)\ _3}\ \rfloor<\frac{\ell}{3}$，我们有 $m_\ell=\ell-\frac{\ell}{3}$。

假设 ℓ 为奇数，且对某个 $b\geq2$，$\ell=3b+1$。选取 $k=b+1$，使得 $\ell-k=2b$。因此，$\lfloor\frac{\ell-k}{2}\rfloor=b$，并由 (3.6) 得，$m_{\ell,\ b+1}=\ell-\lfloor\frac{\ell}{3}\rfloor$。若 k 属于 (3.3) 的情形，则 $k\,(\neq\ell)$ 是 ℓ 的一个因子。于是，$k=1$ 或 $k\geq5$。注意，ℓ 为奇数，且 $\ell\geq7$。由此可得，对于 ℓ 的所有因子 $k\,(\neq\ell)$，均有 $k<\lfloor\frac{\ell}{3}\rfloor$。此外，由于对于 $k\geq2$，~~我们有~~ $\lfloor\ _{(\ell-k)_3}\ \rfloor<\lfloor\frac{\ell}{3}\rfloor$，因此对于对应于 (3.4) 或 (3.5) 的任意 k，均有 $m_{\ell,\ b+1}<m_{\ell,\ k}$。因此，$m_\ell=\ell-\lfloor\frac{\ell}{3}\rfloor$。

同样地，假设 ℓ 为奇数，并且对于某个 $d\geq1$ 有 $\ell=3d+2$。取 $k=d+2$。于是，$\ell-k=2d$，由（3.6）可推出 $m_{\ell,d+2}=\ell-\lfloor\frac{\ell}{3}\rfloor$。注意到 $\ell\geq5$。对于（3.3），令 $k\,(\neq\ell)$ 为 ℓ 的一个因子。于是，$k\leq\lfloor\frac{\ell}{3}\rfloor$，当且仅当 $k=1$ 且 $\ell=5$ 时等号成立。此外，$\lfloor\ _{(\ell-k)_3}\ \rfloor\leq\lfloor\frac{\ell}{3}\rfloor$ 对于 $k\geq2$ ~~成立~~，当且仅当 $k=2$ 时等号成立。特别地，可以验证，如果 $k=2$，则 k 属于（3.4）的情形，并且$\left\lfloor\frac{k(\ell-k)}{\ell+k+1}\right\rfloor=\lfloor\frac{\ell}{3}\rfloor$ 当且仅当 $\ell=5$。因此，对于对应于（3.4）或（3.5）的任意 k，有 $m_{\ell,d+2}\leq m_{\ell,k}$，当且仅当 $k=2$ 且 $\ell=5$ 时等号成立。□

注记 3.20. 延续推论 3.19.1 的记号，奇数 ℓ 时取等号的图可由推论 3.19.1 的证明分类。设 $_{\ell}$ $_{\ell}$，且 $3\mid\ell$。由引理 3.13，$G=\vee_{i=1}^{\overline{3}}N_3$ 对于 $\ell\geq6$ 或 $G=(\vee_{i=1}^{\overline{3}}N_3)\vee G'$，其中 $\alpha(G')>|V(G')|-3$。假设 ℓ 为奇数，且对某个 $b\geq2$ 有 $\ell=3b+1$。由于 $\ell\geq7$，只有情形 (3.6) 能取等号。因此，$G=(\vee_{i=1}^{b}N_3)\vee(N_1+K_2)$ 或 $G=(\vee_{i=1}^{b}N_3)\vee(N_1+K_2)\vee G'$，其中 $\alpha(G')>|V(G')|-3$。设对某个 $d\geq1$ 有 $\ell=3d+2$。对于 $\ell=5$，当 $k=1$、2、3 时等号成立。因此，得到以下情形：对于 $k=1$，$G=N_5\vee G'$，其中 $\alpha(G')>|V(G')|-5$；对于 $k=2$，$G=N_4\vee(N_1+K_3)$、$G=N_4\vee(N_1+(N_1\vee K_2))$、$G=N_4\vee(N_1+K_3)\vee G'$ 或 $G=N_4\vee(N_1+(N_1\vee K_2))\vee G'$，其中 $\alpha(G')>|V(G')|-4$；对于 $k=3$，$G=N_3\vee(N_1+K_2)\vee(N_1+K_2)$ 或 $G=N_3\vee(N_1+K_2)\vee(N_1+K_2)\vee G'$，其中 $\alpha(G')>|V(G')|-3$。对于 $\ell\geq11$，可以验证，只有 $G=(\vee_{i=1}^{d}N_3)\vee(N_1+K_2)\vee(N_1+K_2)$ 或 $G=(\vee_{i=1}^{d}N_3)\vee(N_1+K_2)\vee(N_1+K_2)\vee G'$ 能使 m_ℓ 取等号，其中 $\alpha(G')>|V(G')|-3$。

以下定理是本节关于对具有 $i(G)=1$ 和 $am(\alpha(G))=1$ 的图进行分类的主要结果。

定理 3.21. 设 G 是一个阶为 n 的非完全连通图。那么，$i(G) = 1$ 和 $am(\alpha(G)) = 1$ 当且仅当 $G = N_2 \vee K_{n-2}$ 或 $G = G_1 \vee G'$，其中 G_1 是一个阶为 $n - \delta(G)$ 且恰有一个孤立顶点的图，而 G' 是一个有 $\delta(G)$ 个顶点且满足 $\alpha(G') > 2\delta(G) - n$ 和 $\delta(G') > 2\delta(G) - n$ 的图。

证明。假设 $i(G) = 1$ 且 $am(\alpha(G)) = 1$。令 ℓ 为 G中度最小的顶点数。由推论 3.19.1，$\ell = 1$ 或 $\ell = 2$。对于 $\ell = 1$，由于G 是连通的，G 是一个与 G'构成的 1-联接。由于对所有 $v \in V(G')$，$\deg_G(v) > \delta(G)$，因此有 $\delta(G') > 2\delta(G) - n$。假设 $am(\alpha(G)) = 1$ 意味着 $\alpha(G') > 2\delta(G) - n$。对于 $\ell = 2$，由推论 3.19.1可知结论显然成立。

证明逆命题很容易。 □

例 3.22。假设 $G_1 = K_{n_1} + N_1$ 和 $G' = K_{n_2}$，其中 $n_1, n_2 > 0$。考虑 $G = G_1 \vee G'$。那么，$\alpha(G') = n_2$, $\delta(G') = n_2 - 1$ 且 $2\delta(G) - |V(G)| = n_2 - n_1 - 1$。由定理 3.21，得到 $i(G) = 1$ 且 $am(\alpha(G)) = 1$。

现在，我们将在 [11],中介绍一个未经证明的结果以及一些记号，以寻找对于将谱二分应用于图划分问题而言的病态图。设 G 为一个阶为 n的连通图，设 X 为对应于 $\alpha(G)$ 的特征空间，并记

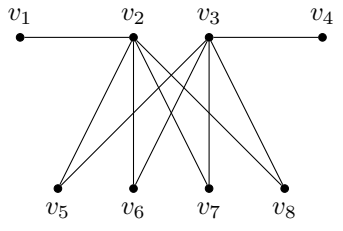
$$
\begin{aligned}
i_+(\mathbf{x}) &:= \{j | 1 \le j \le n, x_j > 0\}, \\
i_-(\mathbf{x}) &:= \{j | 1 \le j \le n, x_j < 0\}, \\
i_0(\mathbf{x}) &:= \{j | 1 \le j \le n, x_j = 0\}, \\
i_0(X) &:= \bigcap_{\mathbf{x} \in X} i_0(\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

定理 3.23（[11]）。设 G 为一个连通图。则存在一个费德勒向量 x，使得由 G 中 i_+(x)、$\cup\, i_0$(x) 和 i_-(x) 诱导的子图都是连通的。

命题 3.24。设 G 为一个阶为 n的连通图，且 X 为对应于 $\alpha(G)$ 的特征空间。假设存在 G的一个诱导子图G_2，使得 $G = G_1 \vee G_2$和 $\alpha(G_2) > \alpha(G) - |V(G_1)|$。那么，$V(G_2) \subseteq i_0(X)$。

证明。考虑图的联结的特征向量以及条件 $\alpha(G_2) > \alpha(G) - |V(G_1)|$，可知对于任意费德勒向量，$V(G_2)$ 的顶点所赋的值均为 0。因此，$V(G_2) \subseteq i_0(X)$。□

例 3.25。命题 3.24 的逆命题对以下图 G 不成立:



令 X 为对应于 $\alpha(G)$ 的特征空间。计算可得，$\lambda_1(G) < |V(G)| = 8$, $am(\alpha(G)) = 1$ 且 $i_0(X) = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$。由于 $\lambda_1(G) < 8$,G 不能表示为图的联。

定理 3.23 保证对于任意连通图，都存在一个能使两个子图保持连通的费德勒向量。然而，这并不能保证这样的费德勒向量会将图划分为两个规模相近的子图。接下来，我们将展示一族图，其中所有费德勒向量的符号模式都极度不平衡。在定理 3.23 中，我们可以稍微改变条件，得到如下结果：由 $i_-(x) \cup i_0(x)$ $i_+(x)$ 诱导的 G 子图是连通的。

例 3.26. 假设 G 是一个阶为 n 的非完全连通图，且 $i(G) = 1$ 和 $am(G) = 1$。那么，根据定理 3.21，$G = N_2 \vee K_{n-2}$ 或 G 是一个 1-联接，其中 G' 满足 $\alpha(G') > 2\delta(G) - n$ 且 $\delta(G') > 2\delta(G) - n$。对于 $G = N_2 \vee K_{n-2}$ 的一个费德勒向量 x，不失一般性，由 $i_-(x) \cup i_0(x)$ 和 $i_+(x)$ 诱导的 G 的两个子图分别是 K_{n-1} 和 N_1。

对于后一种情况 $G = G_1 \vee G'$，让我们重新考察例 3.22。假设 X 是对应于 $\alpha(G)$ 的特征空间，其中 $G = (K_{n_1} + N_1) \vee K_{n_2}$。根据命题 3.24，有 $K_{n_2} \subseteq i_0(X)$。由于 $am(\alpha(G)) = 1$, $i_0(X) = K_{n_2}$。由定理 3.23 可知，$i_-(x) \cup i_0(x)$，而 $i_+(x)$ 分别为 K_{n_2+1} 和 K_{n_1}。因此，对于满足 $\frac{n_1}{n_2} \to \infty$ 的点对 (n_1, n_2)，相应的图 G 关于谱二分将是病态的。

4. Some classes of graphs with $i(G) = 1$

在本节中，我们将在 $i(G) = 1$ 的背景下，考察阈值图以及具有三个不同拉普拉斯特征值的图。

定义 4.1。阈值图是从单个顶点出发，通过反复执行以下操作之一得到的图:

(1) 向图中添加一个孤立顶点 (2) 添加一个支配顶点。

命题 4.2. 每个阶为 n 的连通阈值图 G 都有 $i(G) = 1$。

证明。我们将对顶点数使用归纳法来完成证明。如果 G 是完全图，则证明完毕。令 G 为一个阶为 n 的非完全连通的阈值图。对于阶 3， $N_2 \vee N_1$ 是唯一的此类图，并且 $i(N_2 \vee N_1) = 1$。令$n > 3$。假设任意阶为 $k < n$ 的非完全连通阈值图 H 都满足 $i(H) = 1$。由于 G 是一个连通的阈值图，因此存在一个顶点 v，使得 $\deg(v) = n - 1$。令 $G' = G - \{v\}$。假设 G' 是连通的。那么， G' 不是完全图，否则， G 将是完全图。根据归纳法， $i(G') = 1$，因此 $\delta(G') = \alpha(G')$。考虑 $G' \vee \{v\}$ 的谱，我们有

$$\alpha(G) = \alpha(G') + 1 = \delta(G') + 1 = \delta(G).$$

因此， $i(G) = 1$。若 G' 不连通，则 G' 有一个孤立顶点。由定理 2.7， $i(G) = 1$。□

阈值图的谱见于 [7]。在论文 [7], 中，连通阈值图被称为极大图，因为该文证明了：大小为 m 的连通阈值图的度序列，不被任何其他大小为 m的图的度序列主化。特别地，我们将介绍以下结果，用以说明 $am(\alpha(G))$所起的作用。

定理 4.3（[7]）。若 G 是连通阈值图，则 $S(G) = \mathbf{d}^*$ ，其中 $\mathbf{d}^*$ 是 G的度序列的共轭。

定理 4.4（[7]）。设 G 为阈值图。假设 G 不连通，因此有 $\ell+1$ 个连通分支。那么， ℓ个连通分支由孤立顶点构成。

命题 4.5. 设 G 是一个阶为 n 的非完全连通阈值图。那么， $\alpha(G) = k$ 且 $am(\alpha(G)) = \ell$ ，当且仅当恰有 k 个顶点 $v_1 \ldots, v_k$ 满足：对于 $i = 1, \ldots, k$， $\deg_G(v_i) = n - 1$；并且由 $V(G) - \{v_1, \ldots, v_k\}$ 诱导的 G 的子图 G_1 由 $\ell + 1$ 个连通分支组成，其中 ℓ 个连通分支分别只含一个顶点。

证明. 设 $\alpha(G) = k$ 且 $am(\alpha(G)) = \ell$。由定理 4.3，度为 $n - 1$ 的顶点数为 $\alpha(G)$。恰有 k 个顶点 $v_1, \ldots, v_k$ 满足：对于 $i = 1, \ldots, k$， $\deg_G(v_i) = n - 1$。设 G_1 是由 $V(G) - \{v_1, \ldots, v_k\}$ 诱导的 G 的子图。由于 G 中度为 $n - 1$ 的顶点只有 k 个，图G_1 是不连通的。此外， $G = G_1 \vee K_k$。由于 $am(\alpha(G)) = \ell$，由定理 4.4 可得所需结果。

对于逆命题，显然有 $G = G_1 \vee K_k$。由于 G_1 恰好有 ℓ 孤立顶点， $\alpha(G) = k$ 且 $am(\alpha(G)) = \ell$。□

现在，我们将研究这样一个图 G 的等价条件：该图的联具有三个不同的拉普拉斯特征值，并且具有 $i(G)=1$。

命题4.6。设 G 为一个非完全的连通图，其阶为 n。图 G 有三个不同的拉普拉斯特征值0、$\alpha(G)$和 n，其中 $am(\alpha(G))=k$，当且仅当存在整数 $p\geq 0$、$q\geq 1$ 和 $r\geq 2$，使得 $p+q\geq 2$ 以及$G=K_p\vee(\vee_{i=1}^{q}N_r)$，其中 $n=qr+p$、$\alpha(G)=r(q-1)+p$，且 $k=q(r-1)$。

证明。假设 G 有 3 个不同的拉普拉斯特征值 0、α（G）和 n。那么，G 的补图 G 有 $n-k$ 个连通分支，因为 G 的特征值 0 的重数为 $n-k$。因此，存在图 G_1、.....、G_{n-k}，使得 $G=G_1\vee$

$\cdots\vee G_{n-k}$其中 $n-k\geq 2$。注意，对于 $i=1$，.....，$n-k$，$L(G_i)$ 不以$|V(G_i)|$ 为特征值。若存在一个具有三个不同特征值的 G_j，那么根据图的联图的谱可知，G 有多于三个不同的特征值，这就产生了矛盾。因此，每个 G_i 都只有一个或两个不同的特征值。只有空图具有一个特征值，而只有完全图具有两个不同的特征值。因此，每个 G_i 要么是 N_{r_i}，要么是某个 r_i 或 p_i 的 K_{p_i}。考虑 N_{r_i} 和 N_{r_j}，其中 r_i、$r_j\geq 2$ 和 $r_i\neq r_j$。那么，$L(N_{r_i}\vee N_{r_j})$ 有 4 个不同的特征值：0、r_i、r_j 和 r_i+r_j。因此，作为 $G_1\vee\cdots\vee G_{n-k}$ 的因子的所有空图都必须具有相同的阶。显然，对于 p_i，$K_{p_i}\vee K_{p_j}=K_{p_i+p_j}$ $p_j\geq 1$。若 G_i 是完全图，则 $G_i=K_1$。令 p 表示 G 中孤立

¯ ¯顶点的数目，令 q 表示 G 中阶为 $r\geq 2$ 的完全图的数目。若$q=0$，则 G 是完全图。因此，$q\geq 1$。若 $p+q=1$，则 G 不连通，因此 $p+q\geq 2$。由此得到所需的图 G。根据图的联图的谱，可以验证关于 n、$\alpha(G)$ 和 k 的其余条件。

根据图的联的谱，逆命题的证明显而易见。 □

推论 4.6.1. 设 G 是一个阶为 n 、具有三个不同拉普拉斯特征值的非完全连通图。最大拉普拉斯特征值为 n，当且仅当 $i(G)=1$。

证明. 假设最大拉普拉斯特征值为 n。根据命题 4.6，存在 $p\geq 0$、$q\geq 1$ 和 $r\geq 2$，使得 $p+q\geq 2$ 且 $G=K_p\vee(\vee_{i=1}^{q}N_r)$。由于 $G=N_r\vee(K_p\vee(\vee_{i=1}^{q-1}N_r))$，根据定理 2.7，我们得到 $i(G)=1$。反之，$i(G)=1$ 意味着 G 是若干图的联。因此，最大特征值为 n。□

推论 4.6.2. 设 G 是一个非完全的连通图，其阶为 n，具有三个不同的拉普拉斯特征值 0、$\alpha(G)$ 和 n，其中 $k=am(\alpha(G))$。那么，G 的团数为

$$\omega(G)=n-k.$$

证明。由命题 4.6 可知，存在 $p \geq 0$、 $q \geq 1$ 和 $r \geq 2$，使得 $p+q \geq 2$ 和 $G = K_p \vee (\vee_{i=1}^{q} N_r)$。因此， $\omega(G) = p+q$。由于 $n = qr+p$ 和 $k = qr-q$，我们有 $\omega(G) = n-k$。□

5. Characterization of regular graphs with $i(G) = 2$

在本节中，我们将考虑 $i(G) = 2$。事实证明， $i(K_n) = 1$。因此，如果$i(G) = 2$，那么 G 是非完全且连通的。

命题 5.1. 设 G 是一个阶为 n 且满足 $i(G) = 2$的连通图，$\mathbf{x}$ 是一个满足 $i(\mathbf{x}) = 2$的费德勒向量。那么，$\mathbf{x}$ 取负值的两个顶点相邻，并且 $0 < \delta(G) - \alpha(G) \leq 1$。此外，这两个顶点中有一个的度为 $\delta(G)$。

证明。由于 $i(G) = 2$，存在 $\mathbf{x} = (x_1 \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$，使得对于 $j = 3, \ldots, n$，有 $x_1, x_2 < 0, x_j \geq 0$，且 $(L(G) - \alpha(G)I)\mathbf{x} = 0$。我们有

$$(\ell_{11} - \alpha(G))x_1 + \ell_{12}x_2 + \ell_{13}x_3 + \cdots + \ell_{1n}x_n = 0, \tag{5.1}$$

$$\ell_{21}x_1 + (\ell_{22} - \alpha(G))x_2 + \ell_{23}x_3 + \cdots + \ell_{2n}x_n = 0. \tag{5.2}$$

由于 $i(G) > 1$，因此可得

$$\ell_{ii} - \alpha(G) \geq \delta(G) - \alpha(G) > 0 \tag{5.3}$$

对 $i = 1, \ldots, n$。假设 $\ell_{12} = \ell_{21} = 0$。于是，$(\ell_{11} - \alpha(G))x_1 < 0$ and $\sum_{j=3}^{n} \ell_{1j}x_j \leq 0$，这导致 (5.1) 的左端为负。因此，$\ell_{12} = \ell_{21} = -1$。

将 (5.1) 和 (5.2) 相加，得到

$$(\ell_{11} - \alpha(G) - 1)x_1 + (\ell_{22} - \alpha(G) - 1)x_2 + \sum_{j=3}^{n}(\ell_{1j} + \ell_{2j})x_j = 0. \tag{5.4}$$

不失一般性，设 $\ell_{11} \leq \ell_{22}$。若 $\ell_{11} - \alpha(G) > 1$，则方程 (5.4) 的左端为负。因此，$\ell_{11} - \alpha(G) \leq 1$ and 由 (5.3) 可得，$0 < \delta(G) - \alpha(G) \leq 1$。此外，设 $\ell_{11} > \delta(G)$，即 $\ell_{11} \geq \delta(G) + 1$。利用 $\ell_{11} - \alpha(G) \leq 1$，可推得 $\alpha(G) = \delta(G)$，这与 $i(G) = 2$ 矛盾。因此， $\ell_{11} = \delta(G)$。□

注 5.2. 命题 5.1 给出了两种情形： $0 < \delta(G) - \alpha(G) < 1$ 和$\delta(G) - \alpha(G) = 1$。注意， $\delta(G) \geq v(G) \geq \alpha(G)$。考虑情形 $0 < \delta(G) - \alpha(G) < 1$。由于 $\alpha(G)$ 不是整数，因此有 $\delta(G) = v(G) > \alpha(G)$。

假设 $\delta(G) - \alpha(G) = 1$。沿用命题 5.1 证明中的记号和假设，由 (5.4) 可得 $\ell_{22} \leq \alpha(G) + 1 = \delta(G)$；根据$\ell_{22} \geq \delta(G)$，有 $\ell_{22} = \delta(G)$。因此，命题 5.1 中费德勒向量 x 上取负号的两个顶点的度为 $\delta(G)$。此外，以下两种情形至少有一种成立：$\delta(G) - v(G) = 0$ 或 $\delta(G) - v(G) = 1$。对于后一种情形，由于 $\delta(G) - \alpha(G) = 1$，所以有 $v(G) = \alpha(G)$。由 [6] 可知， G 可写成两个图G_1和 G_2的图的联，其中 G_1 是一个阶为 $n - v(G)$ 的非连通图，而 G_2是一个有 $v(G)$ 个顶点且满足 $\alpha(G_2) \geq 2v(G) - n$ 的图。

回顾一下，在按非递增顺序排列的特征值序列 $S(L(G))$ 和 $S(A(G))$ 中， $\lambda_k(G)$ 和 $\mu_k(G)$ 分别是 k^{th} 拉普拉斯特征值和 k^{th} 邻接特征值。我们将考虑一个连通的 r 正则图 G ，其阶为 n ，且满足 $i(G) = 2$。注意， $L(G) = rI - A(G)$。因此， $\alpha(G) = r - \mu_2(G)$，其中 $\mu_2 < r$；而 G 的任意费德勒向量都是 $A(G)$ 的一个对应于 μ_2 的特征向量。因此，我们也将对应于 $A(G)$ 的第二大特征值的特征向量不加区分地视为费德勒向量。

图 G 中的匹配是 G 中边的集合，且该集合中任意两条边都不共享顶点。

命题 5.3. 设 G 是一个连通的 r 正则图 G ，其阶为 n ，且满足 $i(G) =2$。则，

$$0 < \mu_2(G) \leq 1.$$

特别地，如果 $\mu_2(G) = 1$，那么 G 中存在一个大小至少为 2 的匹配。

证明。考虑 $\alpha(G) = r - \mu_2(G)$ 和 $\delta(G) = r$。由命题 5.1 可直接得出 $0 < \mu_2(G) \leq 1$。

假设 $\mu_2(G) = 1$。由于 $i(G) = 2$，存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $(A(G) - \mu_2(G)I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 且 $i(\mathbf{x}) = 2$。我们可以假设 $\mathbf{x} = (x_1 \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 使得 $x_1, x_2 < 0$, $x_j \geq 0$ 对 $j = 3, \ldots, n$成立。令 $A(G) = [a_{ij}]_{n \times n}$。由命题 5.1，得到 $a_{12} = a_{21} = 1$。由 $(A(G) - \mu_2(G)I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$的第一行和第二行方程，

$$-x_1 + x_2 + \sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j = 0 \text{ and } x_1 - x_2 + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j = 0.$$

将两个方程相加，得到

$$\sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j = 0.$$

由于 $x_j \geq 0$对 $j = 3$、.....、n和 $A(G) \geq 0$, 因此对于任何与 v_1 或 v_2相邻的顶点 v_k，都有 $\sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j = \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j = 0$ 和 $x_k = 0$。此外， $x_1 = x_2$。令 $I = \{k \in [n] | x_k > 0\}$，其中 $[n] = \{1, \ldots, n\}$，并令 A为对应的主子矩阵 $A[I]$，$\tilde{\mathbf{x}}$为对应的子向量 $\tilde{\mathbf{x}}[I]$。于是， $A\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}$，其中 $\tilde{\mathbf{x}} > 0$。假设与 A 对应的子图 H 是连通的。根据佩龙–弗罗贝尼乌斯定理，特征值 1 是 A 的谱半径$\tilde{}$，且是单特征值。这意味着 $H = K_2$。由于任何满足 $k \in I$ 的顶点 v_k 都不与 v_1 和 v_2相邻，因此存在两条边，即 $v_1 \sim v_2$ 和 H中的边，它们没有共同的顶点。接下来，假设 H 是不连通的。由于 H 的每个连通分支都是连通的， H 由两两不相邻的边组成。因此， G 至少包含两条两两不相邻的边。□

可在 [3] 中找到： $\mu_2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = 0$，其中 $\max(n_1, n_2, \ldots, n_k) \geq 2$，$\mu_2(K_n) = -1$，并且对于所有其他连通图 G， $\mu_2(G) > 0$。显然，$i(K_n) = i(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = 1$。受命题 5.3 的启发，我们将考虑所有正则图 G，其满足 $0 < \mu_2(G) \leq 1$ 以及 $i(G) = 2$。由于 $A(G) + A(G) = J - I$，因此 $0 < \mu_2(G) \leq 1$ 等价于 $-2 \leq \mu_n(G) < -1$。此外， $A(G)$ 的任意特征向量，只要其对应于 $\mu_n(G)$，就是 $A(G)$ 的一个特征向量，并且对应于$\mu_2(G)$，反之亦然。因此，与 $\alpha(G)$ 相关的特征空间与和 $\mu_n(G)$ 相关的特征空间重合，而后者是 G 的最小邻接特征值。此外，对应于 $\mu_n(G)$ 的特征空间与对应于 $\lambda_1(G)$ 的特征空间相同。回顾 $i^*_\lambda(G) := \min\{i_\lambda(\mathbf{x}) | A(G)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$。因此，对于一个正则图 G,

$$i(G) = i^*_{\mu_2}(G) = i^*_{\mu_n}(\bar{G}) = i_{\lambda_1}(\bar{G}).$$

设 G 是一个阶为 n、度为 $i(G) = 2$的连通正则图。于是 $i^*_{\mu_n}(G) = 2$。容易验证，当且仅当 G 不能表示为若干图的图的联时， G 才是连通的。因此， G 中的度与 $\mu_n(G)$之差，也就是 G的最大拉普拉斯特征值，小于 n。设 G 是不连通的，且 H_j 是 G 中一个含有 m_j 个顶点的连通分支，其中 $j = 1, \ldots, k$，对某个 $k \geq 2$ 成立。则存在连通分支 $H_{j_1}, \ldots, H_{j_q}$，对某个 $1 \leq q \leq k$ 成立，使得对$i = 1, \ldots, q$，有 $\mu_n(G) = \mu_{m_{j_i}}(H_{j_i})$。由此可得

$$i^*_{\mu_{m_{j_i}}}(H_{j_i}) \geq i^*_{\mu_n}(\bar{G})$$

当 $i = 1, \ldots, q$时。 G 中对应于 μ_n 的特征空间是 H_{j_i} 中对应于 $\mu_{m_{j_i}}$ 的特征空间的直和（其中 $i = 1, \ldots, q$），因此条件 $i^*_{\mu_n}(G) = 2$意味着存在一个 $i \in \{1, \ldots, q\}$，使得 $i^*_{\mu_{m_{j_i}}}(H_{j_i}) = 2$。由此得到以下结果。

引理 5.4. 设 G 是一个阶为 n 的连通正则图。假设对于某个 $k \geq 1$， H_j^- 是 G 中含有 m_j 个顶点的连通分支，且适用于 $j = 1$，.....， k。当且仅当存在一个连通分支 H_j，使得对于所有 $1 \leq i \leq k$，$\mu_{m_i}(H_i) \geq \mu_{m_j}(H_j)$，并且 $i^*_{\mu_{m_j}}(H_j) = 2$，我们有 $i(G) = 2$。

引理 5.4 告诉我们，要理解满足 $i(G) = 2$的正则图 G，应当考察 G的补图的连通分支。具体而言，我们可以将研究范围缩小到阶为 n、满足 $r - \mu_n < n$的连通r正则图 H 的最小邻接特征值 $-2 \leq \mu_n < -1$ 对应的特征向量；也就是说， H 不能写成若干图的联结。

文献 [2] 中指出，一个阶为 n 且满足 $\mu_n(H) \geq -2$ 的 r–正则图 H，要么是线图、鸡尾酒会图，要么是正则例外图。已知每个鸡尾酒会图都可以表示为图的联结。因此，所有鸡尾酒会图均被排除。

命题 5.5. [2] 最小邻接特征值大于 -2 的连通正则图，要么是完全图，要么是奇圈。

由于 $i(K_n) = 1$, K_n 被排除。我们将考虑阶为 n的圈 C_n 的最小邻接特征值的特征向量。如 [1], 中对 $\ell = 0, \ldots, n-1$所述，$2\cos(\frac{2\pi\ell}{n})$ 是 $A(C_n)$ 的一个特征值，与 $\mathbf{x}_\ell = \left[1, \epsilon^\ell, \ldots, \epsilon^{(n-1)\ell}\right]^T$相关，其中$\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$。如果 n为偶数，则 $\mu_n(C_n)$ 是单特征值，而$\mathbf{x}_{\frac{n}{2}} = [1, -1, 1, \ldots, 1, -1]^T$是相应的特征向量。因此，对于偶数 n，我们有 $i^*_{\mu_n}(C_n) = \frac{n}{2}$。假设$n$ 为奇数。那么， μ_n 的代数重数为 2，相应的线性无关特征向量为 $\mathbf{x}^{\frac{n-1}{2}}$和 $\mathbf{x}^{\frac{n+1}{2}}$。令 $\mathbf{v} = [v_0, \ldots, v_{n-1}]^T$和 $\mathbf{w} = [w_0, \ldots, w_{n-1}]^T$，其中 $v_j = (-1)^j\cos(\frac{\pi}{n}j)$，且 $w_j = (-1)^j\sin(\frac{\pi}{n}j)$，分别对于 $j = 0, \ldots, n-1$。可以验证，$\mathbf{v} = \mathbf{x}_{\frac{n-1}{2}} + \mathbf{x}_{\frac{n+1}{2}}$，且$\mathbf{w} = \mathbf{x}_{\frac{n-1}{2}} + \mathbf{x}_{\frac{n+1}{2}}$。因此，为了求出奇数 n时的 $i^*_{\mu_n}(C_n)$，我们需要考虑 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 的所有可能线性组合。

命题 5.6. 设 C_n是长度为 n的圈。那么， $i^*_{\mu_n}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。

证明. 对于偶环，显然 $i^*_{\mu_n}(C_n) = \frac{n}{2}$。假设 n 是奇数。由于 C_n 的每个费德勒向量都是 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 的线性组合，

$$i^*_{\mu_n}(C_n) = \min\{i_{\mu_n}(c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{w}) | c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ c_1c_2 \neq 0\}.$$

设 $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{w}$，其中 $\mathbf{u} = [u_0, \ldots, u_{n-1}]^T$。若 $c_1 = 0$且 $c_2 \neq 0$，则$i^*_{\mu_n}(\mathbf{u}) = \frac{n-1}{2}$。假设 $c_1 \neq 0$。注意，对于 $j = 0, \ldots, n-1$， $u_j = c_1v_j + c_2w_j = (-1)^j\sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos\left(\frac{\pi}{n}j - \theta\right)$，其中 $\tan(\theta) = \frac{c_2}{c_1}$。我们有 $u_ju_{j+1} = -(c_1^2 + c_2^2)\cos(\alpha_j)\cos\left(\alpha_j + \frac{\pi}{n}\right)$，其中 $\alpha_j = \frac{\pi}{n}j - \theta$。可以验证 $u_ju_{j+1} > 0$

当且仅当 $\alpha_j \in (0, \frac{\pi}{2})$ 且 $\alpha_j + \frac{\pi}{n} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$，或者 $\alpha_j \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ 且 $\alpha_j + \frac{\pi}{n} \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$。假设对所有 $j = 0, \ldots, n-1$，都有 $u_j \neq 0$。由于 $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in [-\theta, -\theta + \pi)$，满足 $u_j u_{j+1} > 0$ 的 j 在 $\{0, \ldots, n-2\}$ 中至多有一个。因此，由于 $u_j u_{j+1} > 0$ 蕴含 u_j 和 u_{j+1} 符号相同，在 u_j 与 u_{j+1} 之间（$j = 0, \ldots, n-2$）至少发生 $(n-2)$ 次符号变化。由此可得，u 中要么有 $\frac{n-1}{2}$ 个负号和 $\frac{n+1}{2}$ 个正号，要么有 $\frac{n-1}{2}$ 个正号和 $\frac{n+1}{2}$ 个负号。因此，$i^*_{\mu_n}(\mathrm{u}) = \frac{n-1}{2}$。假设存在 $j_0 \in \{0, \ldots, n-1\}$ 使得 $u_j = 0$。由于 $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in [-\theta, -\theta + \pi)$，$j_0$ 是对于 $j = 0, \ldots, n-1$ 的方程 $u_j = 0$ 的唯一解。考虑 $u_{j_0-1}u_{j_0+1} = (c_1^2 + c_2^2)\cos\left(\left(j_0-1\right)_n \frac{\pi}{n} - \theta\right)\cos\left(\left(j_0+1\right)_n \frac{\pi}{n} - \theta\right)$。由于 $\left(j_0-1\right)_n \frac{\pi}{n} \in (0, \frac{\pi}{2})$ 且 $\left(j_0+1\right)_n \frac{\pi}{n} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$，或者 $\left(j_0-1\right)_n \frac{\pi}{n} \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ 且 $\left(j_0+1\right)_n \frac{\pi}{n} \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$，我们得到 $u_{j_0-1}u_{j_0+1} < 0$。此外，$u_j u_{j+1} < 0$（当 $j \in \{0, \ldots, n-2\} \backslash \{j_0 - 1, j_0\}$ 时）。于是，u 中分别有 $\frac{n-1}{2}$ 个正号和负号，以及一个 0。因此，$i^*_{\mu_n}(\mathrm{u}) = \frac{n-1}{2}$。由此得到所需结论。□

推论 5.6.1. 设 C_n 是长度为 n 的圈。那么，$i^*_{\mu_n}(C_n) = 2$ 当且仅当 $n = 4, 5$.

引理5.7。设一个连通正则图 H 的阶为 n，具有 $\mu_n(H) > -2$。那么，$i^*_{\mu_n}(H) = 2$ 当且仅当 $H = C_5$。

证明。由命题 5.5 和推论 5.6.1 可立即得证。 □

令 e_i 为一个向量，其 i^{th} 连通分支为 1，其余位置为 0。其大小可从文本中看出。

定义5.8。 [2] 对于 $n > 1$，令 D_n 为形如 $\pm\mathrm{e}_i \pm \mathrm{e}_j (i < j)$ 的向量集合。

定义 5.9。 [2] 令 E_8 为 $\mathbb{R}^8$ 中由 D_8 中的112个向量以及形如 $\pm\frac{1}{2}\mathrm{e}_1 \pm \frac{1}{2}\mathrm{e}_2 \pm \cdots \pm \frac{1}{2}\mathrm{e}_8$, 的128个向量组成的向量集合，其中正系数的个数为偶数。

现在还需考察最小邻接特征值为 -2 的正则线图和正则例外图。这些图在 [2] 中利用 D_n 和 E_8（即所谓的根系）进行了研究。设 H 是一个具有 n 个顶点且最小邻接特征值为 -2 的图。对称矩阵 $2I + A(H)$ 是秩为 s 的半正定矩阵。由于 $2I + A(H)$ 可以正交对角化，因此可知 $C^T C = 2I + A(H)$，其中 C 是一个秩为 s 的 $s \times n$ 矩阵。根据 [2],, C 的列向量由 D_n 或 E_8 确定。

引理 5.10. 设 H 是一个最小邻接特征值为 -2 的连通正则图。若 H 包含一个诱导 4 圈，则存在一个特征向量 $\mathbf{x}^T = [1, -1, 1, -1, 0, \ldots, 0]$，它是 $A(H)$ 对应于 -2 的特征向量。

证明. 考虑根系，存在一个实矩阵 C，使得 $C^TC = 2I + A(H)$。由于 H 包含一个诱导 4 圈，不失一般性，$A(H)$ 的前导主 4×4 子矩阵是 C_4 的邻接矩阵。设 C 的前 $\tilde{}$ 四列构成矩阵 $C_。$ 于是，

$$\tilde{C}^T\tilde{C} = 2I + A(C_4).$$

由于 $\tilde{}\mathbf{x}^T = [1,-1,1,-1]$ 是与 -2对应的 $A(C_4)$ 的特征向量，因此有 $(\tilde{C}\tilde{}\mathbf{x})^T\tilde{C}\tilde{}\mathbf{x} = 0。$ C是实数，因此 $\tilde{C}\tilde{}\mathbf{x} = 0。$ 假设 $\mathbf{x}^T = [1,-1,1,-1,0,\ldots,0]。$ 那么，$C\mathbf{x} = 0。$ 因此可知，$\mathbf{x}$ 是与-2对应的 $A(H)$ 的特征向量。□

引理 5.11. 设 H 是一个 r–正则连通图，阶为 n，且满足 $\mu_n(H) = -2$，其中 $r+2 < n。$ 那么，$i^*_{\mu_n}(H) = 2$ 当且仅当 H 包含一个作为诱导子图的 4–圈。

证明。假设 $i^*_{\mu_n}(H) = 2。$ 由于 $r+2 < n$，H 的补图 $\bar{H}$ 是连通正则图，且满足 $\mu_2(\bar{H}) = 1。$ 此外，$i_{\mu_2}(\bar{H}) = i(\bar{H}) = 2。$ 根据命题 5.3，$\bar{H}$ 包含两条作为诱导子图的互不相邻的边。因此，H 有一个诱导子图 $C_4。$

反过来，根据引理 5.10，存在一个与 -2 相关的 $A(H)$ 的特征向量 $\mathbf{x}^T = [1,-1,1,-1,0,\ldots,0]。$ 因此，$i^*_{\mu_n}(H) \le 2。$ 由于 $\mu_n \neq r$，任何与 μ_n 相关的特征向量都必须包含负分量和正分量。因此，$i^*_{\mu_n}(H) > 0。$ 假设 $\bar{H}$ 是连通的，$i^*_{\mu_n}(H) = 1。$ 由于 H 是连通的，可以推出 $i^*_{\mu_n}(H) = i_{\mu_2}(H) = i(\bar{H}) = 1。$ 因此，根据定理 2.7，$\bar{H}$ 可以表示为两个图的图的联。这与其为连通图相矛盾。因此，$i^*_{\mu_n}(H) = 2。$ □

以下是本节关于刻画所有具有 $i(G) = 2$ 的连通正则图的主要结果。

定理 5.12. 设 G 是一个阶为 n 的 r 正则连通图。那么，$i(G) = 2$ 当且仅当 G 中存在一个阶为 m 的连通分支 H，使得 $\mu_n(G) = \mu_m(H) = \alpha(G) - r - 1$，且 H 满足以下任一条件：

(1) $r - 1 < \alpha(G) < r$ 且 $H = C_5$；或 (2) $\alpha(G) = r - 1$，H 不是鸡尾酒会图，且 H 包含 C_4 作为诱导子图。

证明. 综合引理 5.4、5.7 和 5.11，可得所需结果。 □

例 5.13. 设 H 是一个最小邻接特征值为 -2 的强正则图。根据 Seidel 的分类 [9]，H 是以下之一

(1) 对于 $n \ge 2$，完全 n 部图 $K_{2,\ldots,2}$，

(2) 彼得森图，(3) 对于 $n \geq 5$， K_n 的线图，(4) 对于 $n \geq 3$，两个 K_n 的笛卡尔积，(5) Shrikhande 图，(6) 三个 Chang 图之一，(7) Clebsch 图，(8) Schl¨afli 图。

注意到 $K_{2,\ldots,2}$ 表示为图的联结。彼得森图的围长为 5。可以验证， H 含有诱导 4–圈，当且仅当H 的线图包含 C_4 作为诱导图。这意味着，完全图的任意线图都不含 C_4。对于从 (4) 到 (8) 的其他图，可以验证它们都含有 C_4 作为诱导子图。因此，如果连通正则图 G 将图 (4) 到 (8) 中的一个¯作为 G中的一个连通分支，那么 $i(G) = 2$。

References

[1] *Brouwer, Andries E. and Haemers, Willem H.*：《图的谱》。施普林格出版社，纽约（2012），xiv +250。Zbl 1231.05001，MR2882891，DOI 10.1007/978–1–4614–1939–6[2] *Cvetković, Dragoš and Rowlinson, Peter and Simić, Slobodan*：《线图的谱推广》。剑桥大学出版社 314（2004），xii+298。Zbl 1061.05057，MR2120511，DOI 10 1017 9780511751752 。/cbo ， ， *Slobodan*：[3] *Cvetković Dragoš and Simić*《图的第二大特征值（综述）》。Filomat 9，第 3 部分（1995），449–472。Zbl 0851.05078，MR1385931[4] *Fiedler, Miroslav*：《非负对称矩阵的特征向量的一个性质及其在图论中的应用》。Czechoslovak Math. J. 25(100)（1975），619–633。Zbl 0437.15004，MR0387321[5] *Fiedler, Miroslav*：《图的代数连通度》。Czechoslovak Math. J. 23(98)（1973），298–305。Zbl 0265.05119，MR0318007[6] *Kirkland,*

Stephen J. and Molitierno Jason J. and Neumann Michael and Shader Bryan , , , , ：《具有相等 *L.* **341** 2002 的代数连通度和顶点连通度的图》。Linear Algebra Appl.（ ），

45 56 0991 05071, 1873608, 10 1016 0024 3795 01 00312 3 – 。Zbl 。MR DOI 。/s – （ ） – ，：[7] *Merris Russell*《度极大的图是拉普拉斯整图》。Linear Algebra Appl. 199（

1994 381 389 0795 05091, 1274427, 10 1016 0024 3795 94 90361 1 ），– 。Zbl 。MR DOI 。/ –[8] *Merris Russell* （ ） – ，：《拉普拉斯图特征向量》。Linear Algebra Appl.（ ），221–236。Zbl 0932.05057，**278** 1998 MR1637359，DOI 10.1016/s0024–3795(97)10080–5[9] *Seidel, J. J.*：《邻接矩阵为（−1，1，0）且具有特征值 3 的强正则图》。Linear Algebra Appl. 1（1968），281–298。Zbl 0159.25403，MR234861，DOI 10.1016/0024– 3795(68)90008–6[10] *Urschel, John C. and Zikatanov, Ludmil T.*：《图二分谱近似的最大误差》。Linear Multilinear Algebra. 64（2016），1972–1979。Zbl 1352.05120，MR3521152[11] *Urschel, John C. and Zikatanov, Ludmil T.*：《图的谱二分与连通性》。Linear Algebra Appl. 449（2014），1–16。Zbl 1286.05101，MR3191855，DOI 10.1016/j.laa.2014.02.007*Authors' addresses*： *Sooyeong Kim*，加拿大温尼伯的曼尼托巴大学，电子邮箱：

kims3428@myumanitoba.ca，*Steve Kirkland*，加拿大温尼伯曼尼托巴大学，电子邮m件：stephen.kirkland@umanitoba.ca。