arXiv:2304.05580v1 [math.QA] 12 Apr 2023

辛群胚与簇代数

Leonid O. Chekhov*和 Michael Shapiro†

2023年4月13日

摘要

我们研究由满足以下条件的矩阵对 $(B,\mathbb{A})$ 构成的辛群胚： $\mathbb{A}$ 为幂零上三角矩阵，且$B\in GL_n$ 使得 $\widetilde{\mathbb{A}}=B\mathbb{A}B^{\mathrm{T}}$ 也为幂零上三角矩阵。我们利用 Fock–Goncharov–Shen簇变量显式求解这一群胚条件，并证明对于满足~标准半经典李–泊松代数的 B ，矩阵 B、 $\mathbb{A}$和 $\mathbb{A}$ 满足闭合的泊松代数~关系，这些关系可用 r-矩阵形式表示。将 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}$ 的元素识别为测地函数，对应于由马尔可夫元素分隔的闭黎曼曲面两半上的测地线，该曲面的亏格为 $g=n-1$，由此我们得以构造与马尔可夫元素"对偶"的测地函数 G_B 。因此，我们获得了亏格为二的 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}_{2,\,0}$ 的完整簇代数描述。我们还讨论了将这一构造推广到更高亏格的情形。对于大于三的亏格，我们需要基于秩条件 $\mathrm{rank}\,(\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}})\le 4$进行哈密顿约化；我们给出了 $\mathcal{T}_{4,\,0}$的一个此类约化示例。

Dedicated to the memory of great mathematician and person Igor Krichever

1 引言

• 用 $\mathcal{A}_n$ 表示幺幂上三角 $n\times n$ 实矩阵构成的空间。上三角矩阵的辛群胚 $\mathcal{M}$ 由满足$B\mathbb{A}B$T$\in\mathcal{A}_n$的有序对 $(B,\mathbb{A})$ 构成，其中 $B\in GL_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{A}\in\mathcal{A}_n$。这里， $\mathbb{A}$ 被视为一个对象，而 B 是一个将 $\mathbb{A}$ 映到 $B\mathbb{A}B$ T的态射。自然源映射和目标映射 s与 t从 $\mathcal{M}$到 $\mathcal{A}_n$定义为 $s((B,\mathbb{A}))=\mathbb{A}$， $t((B,\mathbb{A}))=B\mathbb{A}B$T。令$\mathcal{M}(2)\subset\mathcal{M}\times\mathcal{M}$为所有相容对 $\big\{\big((C,B\mathbb{A}B\mathrm{T}),(B,\mathbb{A})\big)\big\}$构成的子集，并令 p_1,p_2为从 $\mathcal{M}(2)\to\mathcal{M}$ 分别投影到第一和第二分量的两个自然投影， $m:\mathcal{M}(2)\to\mathcal{M}$ 为乘法映射 $m\left(\big((C,B\mathbb{A}B\mathrm{T}),(B,\mathbb{A})\big)\right)=(CB,\mathbb{A})$。辛群胚 $\mathcal{M}$配备自然辛形式 ω，满足 $m^*(\omega)=p_1^*(\omega)+p_2^*(\omega)$[54]。通过 $(p_1)_*$推前与 ω 对偶的非退化泊松结构$\mathcal{P}_s$，使 $\mathcal{A}$ 成为一个配备反射泊松括号的泊松流形；该括号满足关系 $(p_1)_*(\mathcal{P}_s)=-(p_2)_*(\mathcal{P}_s)$（见 (2.14) 和 (2.15)）。

回顾一下，群 SL_n 是一个配备标准三角Poisson-Lie括号 $\{,\}_{SL_n}$的Poisson簇。考虑由矩阵 B构成的子集 $\mathcal{B}_n\subset SL_n$，其中存在一对 $(B,\mathbb{A})\in\mathcal{M}$。我们证明， $\mathcal{B}_n$ 是 $\{,\}_{SL_n}$的一个辛叶。此外，我们证明，$B\in\mathcal{B}_n$ 的选择唯一确定$\mathbb{A}\in\mathcal{A}_n$ ，使得 $(B,\mathbb{A})\in\mathcal{M}$。这一构造确定了一个映射 ψ ，其从 $\mathcal{B}_n$ 映射到 $\mathcal{A}_n$。文献[15] 中已证明，映射 $\psi:\ (\mathcal{B}_n,\{,\}_{SL_n})\to(\mathcal{A}_n,\{,\})$ 是泊松的。本文利用矩阵 B 的网络实现，以及通过研究$\mathcal{P}_{SL_n,\square}$ 上由 [35]引入的平面正方形上的 SL_n-钉扎的模空间而得到的矩阵 $\mathbb{A}$ 和 $B\mathbb{A}B^{\mathrm{T}}$ ，为这一结论提供了另一种更简单的证明。

Poisson簇 $SL_n,\{,\}_{SL_n}$具有兼容的簇结构，即簇坐标图的集合 $\mathcal{C}(t)=\{z_i(t)\},t\in\mathcal{E}$其中 $\mathcal{E}$是簇代数的交换图，使得 $\{z_i(t)\ z_j(t)\}=\epsilon_{ij}z_i(t)z_j(t)$， ϵ_{ij} 构成一个元素为半整数的斜对称矩阵。我们将映射 ψ 扩展为Poisson映射 $\widetilde{\psi}$： $\mathcal{B}_n\to\mathcal{A}_n\times\mathcal{A}_n$ ，它将 $B\mapsto(\mathbb{A},B\mathbb{A}B^{\mathrm{T}})$映射到。像 $\mathcal{I}=\widetilde{\psi}(\mathcal{B}_n)$是 $\mathcal{A}_n\times\mathcal{A}_n$ 的余维 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$子簇，由以下条件定义： $\mathcal{A}_n$的某些Casimir元的值对于 $\mathbb{A}$和 $B\mathbb{A}B^{\mathrm{T}}$相同。可以将 $\mathcal{B}_n$视为 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$-参数扩张的 $\mathcal{I}$。辛叶 $\mathcal{B}_n$具有一个簇结构，该结构是通过限制和拼接来自钉扎模空间的簇结构而获得的。

*俄罗斯莫斯科斯捷克洛夫数学研究所、俄罗斯国立高等经济大学，以及美国东兰辛密歇根州立大学。电子邮箱：chekhov@msu.edu。

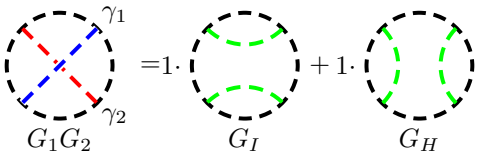
†美国密歇根州东兰辛市密歇根州立大学数学系，邮编 48823。电子邮箱：mshapiro@msu.edu。

• 在 $\mathcal{A}_n$上存在一个众所周知的辫群作用。为了描述这一作用，我们将空间 $\mathcal{A}_n$ 辛群胚 $\mathcal{M}$ 的对象与三角幺幂双线性型的空间等同起来。态射是保持该型的三角幺幂形状的基变换。对于一个固定的双线性型 Φ，如果该双线性型具有三角幺幂形状，我们就称该基为相容基。辫群$\mathfrak{B}_n$ 作用在相容基的集合上。第 i个生成元 β_i 将基（$v_1, \ldots, v_n$）映射为基（$v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i - \Phi(v_i, v_{i+1})v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n$）。

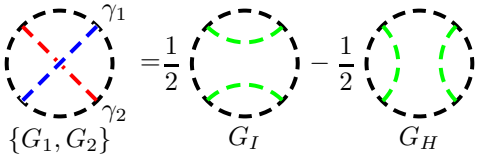
在矩阵形式中，β_i 被实现为作用 $\beta_i(\mathbb{A}) = B_i(\mathbb{A})\mathbb{A}B_i(\mathbb{A})^{\mathrm{T}}$，其中矩阵 $B_i(\mathbb{A})$ 具有 the 分块形式 $B_i(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} a_{i,i+1} & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_{n-i-1} \end{pmatrix}$，其中 Id_k 表示 $k \times k$ 单位矩阵，$a_{i,j}$ 表示矩阵 $\mathbb{A}$ 的元素。

我们将在下文证明，辫群作用是簇的，即可通过一系列簇突变得到。

• 函数代数 $\mathbb{C}(\mathcal{T}_{g,s})$是Teichm¨uller空间$\mathcal{T}_{g,s}$ 上曲线$\Sigma_{g,s}$ 亏格 g 且有 s 孔的函数代数，由测地函数 $\{G_\ell\}$生成；ℓ 是拓扑曲面$\Sigma_{g,s}$上的一个简单环路。函数 G_ℓ满足基于两条测地线交叉点的两种“解析”的编织关系。所有代数关系都适用于相应的测地函数（我们假设包含交叉点的圆外部图案保持不变）：



代数 $\mathbb{C}(\mathcal{T}_{g,\ s})$ 是一个带有 Goldman 泊松括号的泊松代数。对于相同的测地线选择及相应的测地函数，该括号具有如下形式



• 在这种情况下，$s \geq 1$ 曲面 Σ_g 的一个理想三角剖分$_s$ 及其边集 E 给出了参数化 $\mathcal{T}_{g,\ s}$所用的参数称为剪切坐标 y_e，$e \in E$，由 W. Thurston 引入。剪切坐标具有很好的泊松性质；它们是生成 Goldman 括号的对数正则坐标。具体而言，Goldman 括号满足关系 $\{y_e, y_{e'}\} = \epsilon_{e,\ e'}$，其中 $\epsilon_{e,\ e'} = \sum_\Delta \epsilon_{e,\ e'}$（$\Delta$）遍历三角剖分中的所有三角形 Δ；若 $\epsilon_{e,\ e'}$（Δ）在 Δ 内沿逆时针方向上紧接着 $= 1/2$，则取此值；若 $= -1/2$，e（Δ）在 Δ 内沿逆时针方向上紧接着 e'，则取此值；否则取 $\epsilon_{e,\ e'}$（Δ）$= 0$。对偶地，可以用具有相同参数的对偶三价带状图替代三角剖分 y_e；该参数赋给带状图中与三角剖分的边 e 对偶的边。我们用同一个字母 e 表示这条对偶边。

在 [23] 中，找到了用剪切坐标表示测地函数的表达式。在 [12], 中，作者考察了亏格为$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$、具有 $s = 2 -$（n 模 2）个孔的曲面上的一组特殊环路（其中，偶数 n 时的奇偶性为 n 模 $2 = 0$，奇数 n时的奇偶性为$G_{n,j}$模 $2 = 1$）。这组环路导出了相应的一组测地函数 $G_{i,j}, i < j$。将曲面映射到矩阵 $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$,.. .. 的映射是一个泊松嵌入 $\mathcal{T}_{g,s} \to \mathcal{A}_n$。

回顾一下，态射 $B \in \mathcal{B}$ 唯一确定一对对象：源对象 $\mathbb{A} \in \mathcal{A}_n$ 和目标对象 $\tilde{\mathbb{A}} = B\mathbb{A}B^{\mathrm{T}} \in \mathcal{A}_n$。映射 $B \mapsto (\mathbb{A}, \tilde{\mathbb{A}})$定义了一个纤维维数为正的纤维丛。

˜我们详细考察 $n = 3$ 的情形。在这种情况下，投影 $B \mapsto (\mathbb{A}, \mathbb{A})$ 的纤维是一维的。˜根据 [12], ，矩阵 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}$ 各自编码一个带有一个孔的双曲环面。此外，测地

边界的长度 $\ell_{\mathfrak{M}}$ 由所谓的马尔可夫元素 $\mathfrak{M} = G_{1,\ 2}G_{2,\ 3}G_{1,\ 3} - G_{1,\ 2}^2 - G_{2,\ 3}^2 - G_{1,\ 3}^2 = e^{\ell_{\mathfrak{M}}/2} + e^{-\ell_{\mathfrak{M}}/2} - 2$ 决定，该元素在 $\mathbb{A}$ 和 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 中相同。由于两个环面的测地边界长度相同，可以沿边界粘合这两个双曲环面，得到一个没有孔的双曲二亏格曲面。 B 中的额外参数决定了粘合方式。因此，配备簇结构的空间 $\mathcal{B}_3$ 描述了闭二亏格曲线 $\mathcal{T}_{2,\ 0}$ 的 Teichm¨uller 空间，且其簇结构与 $\mathcal{T}_{2,\ 0}$ 上的 Goldman 泊松括号相容。据我们所知，这种构造是新的。

在 [5] 中记载了此前为无边界曲面构造簇坐标的方法；然而，这些方法的构造包括通过某个难以计算、且其簇含义仍需阐明的表达式进行哈密顿约化。对于 $g = 2$ 和 $g = 3$，我们的方法不需要这种哈密顿约化，但对于更高亏格的情形，则需要另一种哈密顿约化。

- 为使本文更易阅读，我们省略了这一构造的量子版本。量子代数将在另一篇论文中加以描述。

- 本文的主要结果包括

  – 用平面网络求解群胚条件；– 在三角幺幂形式的辛群胚的对象对（源点、目标）空间（或其扩展）上构造与自然泊松括号相容的簇坐标；– 辫群作用的簇表示；– 在闭的（无边界）亏格为二的双曲黎曼曲面的 Teichm¨uller 空间上构造簇坐标。这一构造的某些要素也适用于更高亏格的黎曼曲面。

2 半经典辛群胚

2.1 求解群胚兼容条件

回顾一下，双曲黎曼曲面 Σ 上带有标记点的钉扎模空间$\mathcal{P}_{SL_n,\Sigma}$ [35] 由所谓的Fock-Goncharov-Shen（FGS）参数的集合描述。FGS参数由 Σ 的一个理想三角剖分 T 定义，其中三角形的顶点位于标记点处，三角形的边为测地线。将每个三角形细分为较小三角形的格（ T的每条边都被细分为 n个子区间），并为该格的每个顶点分配一个 FGS 参数（见图 1），这样做很方便。由 FGS 参数集合描述的钉扎，为 T 的每条边赋予 $\mathbb{R}^n$ 中的一个基，因此确定了 T的每个三角形中两条边之间的传输矩阵。所有传输矩阵都可以实现为适当定向的网络的“边界测量”矩阵（或响应矩阵） [48, 17] ，其中面权重由 FGS参数给出。Goldman泊松括号由箭图 Q 描述，其顶点配备了 FGS参数 Z_{abc}；更确切地说，$\{Z_{abc}, Z_{pqr}\} = \varepsilon_{abc}^{pqr} Z_{abc}$、 Z_{pqr}，其中 ε_{abc}^{pqr} 是从顶点 abc 到 pqr 的箭头数量减去从顶点 pqr 到 abc的箭头数量，且箭头位于 Q 中。

本文中，我们只考虑两种情形： Σ 要么是边界上带有三个穿孔点（标记点）的圆盘，要么是边界上带有四个穿孔点（标记点）的圆盘。在第一种情形中，我们称 Σ 为三角形，并用 $\triangle$表示；在第二种情形中，我们称 Σ 为正方形，并用 $\square$表示。

在本节中，我们解决群胚相容性问题：寻找这样的对（B， $\mathbb{A}$），使得 $B \in SL_n$、$\mathbb{A} \in \mathcal{A}_n$和 $\widetilde{\mathbb{A}} = B\mathbb{A}B^T \in \mathcal{A}_n$ 可用正方形中的传输矩阵表示。

考虑 $\mathcal{P}_{SL_n,\ \square}$。我们的主要研究对象是由两个 FGS 三角形网络粘合而得到的网络及其对应的箭图（见图 2） [25]。设 T_1、 T_1 和 $\overline{T}_1$ 为右三角形中的（上三角、~非归一化）传输矩阵，并设 T_2、 T_2 和 $\overline{T}_2$ 为左三角形中的（下三角、非归一化）传输矩阵。不同三角形中的簇变量泊松对易。

每个传输矩阵 T 都满足李–泊松代数 [17]

$$\left\{\overset{1}{T} \underset{,}{\otimes} \overset{2}{T}\right\} = -r\overset{1}{T}\overset{2}{T} + \overset{1}{T}\overset{2}{T}r = r^{\mathrm{T}}\overset{1}{T}\overset{2}{T} - \overset{1}{T}\overset{2}{T}r^{\mathrm{T}}, \tag{2.1}$$

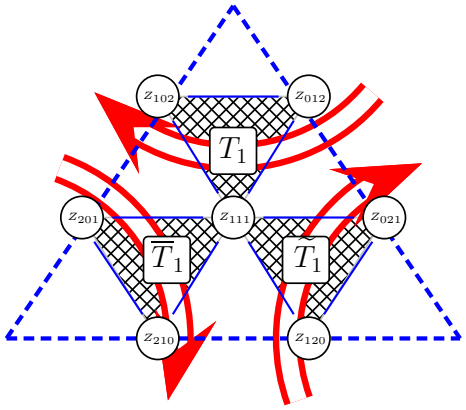


图 1：F $\mathcal{P}_{SL_3,\triangle}$ 的 GS 参数。双箭头表示传输矩阵 $T_1, \widetilde{T}_1, \overline{T}_1$ 的方向 .

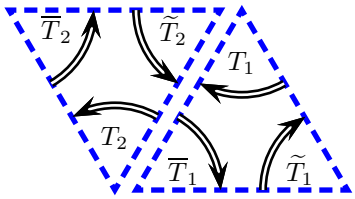


图 2： 正方形三角剖分中的传输矩阵。

1 2其中 $r = \sum_{i,j} \theta(i-j) E_{i,j} E_{j,i}$ 是三角函数 r-矩阵； $\theta(x) = \{1\ x > 0; 1/2\ x = 0; 0\ x < 0\}$，而 $r + r^{\mathrm{T}} = P$——置换矩阵。给定传输矩阵 T，反方向的传输矩阵 $T^\star$ 与 T 的逆相关，如下所示

$$T^\star = ST^{-1}S, \text{ where } S = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i E_{i,n+1-i},\ S^2 = \pm Id,\ S^{\mathrm{T}} = \pm S \tag{2.2}$$

偶数 n 对应符号 $+$，奇数 n 对应符号 $-$。

于是， [17],[33], 中证明的基本关系

$$\left\{ \overset{1}{T}_1 \underset{,}{\otimes} \overset{2}{\widetilde{T}}_1^\star \right\} = \overset{1}{T}_1 \overset{2}{\widetilde{T}}_1^\star r,$$

意味着

$$\left\{ \overset{1}{T}_1 \underset{,}{\otimes} \overset{2}{\widetilde{T}}_1 \right\} = -\overset{1}{T}_1 (\overset{2}{S} r \overset{2}{S}) \overset{2}{\widetilde{T}}_1 \tag{2.3}$$

~对于按循环次序排列的另外两对 $(T_1, \overline{T}_1)$ 和 $(\overline{T}_1, T_1)$，也有类似的关系成立。

相应的 T_2 关系为

$$\left\{ \overset{1}{\widetilde{T}}_2 \underset{,}{\otimes} \overset{2}{T}_2 \right\} = -\overset{2}{T}_2 (\overset{1}{S} r \overset{1}{S}) \overset{1}{\widetilde{T}}_2, \tag{2.4}$$

~对于另外两对 $(\overline{T}_2, T_2)$ 和 $(T_2, \overline{T}_2)$，也有类似的关系成立。

群胚 pat h 条件在量子情形下于 [17] 中得到证明，并在 t 中蕴含以下关系

半经典极限 $q \to 1$:

$$\widetilde{T}_1 S \overline{T}_1 S T_1 S = Id \tag{2.5}$$

and

$$\widetilde{T}_2 S \overline{T}_2 S T_2 S = Id. \tag{2.6}$$

我们使用图 2 中的网络来求解宽松（非归一化）的辛群胚相容性问题。令 $\mathfrak{B}_n$ 为 SL_n中由非退化上三角矩阵构成的博雷尔子群。若 $\mathbb{A} \in \mathfrak{B}_n$, $B\mathbb{A}B^{\mathrm{T}} \in \mathfrak{B}_n$, 则称有序对 $(B, \mathbb{A})$,$B \in SL_n$, $\mathbb{A} \in \mathfrak{B}_n$ 满足非归一化的辛群胚相容条件。以下构造求解了图 2 所示网络的非归一化辛群胚相容条件。

定理 2.1. 对于由传输矩阵乘积给出的矩阵 B

$$B = T_2 T_1. \tag{2.7}$$

~在图（2）所示的网络中，通过取 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}:=B\mathbb{A}B^T$ 均为上三角，便可解决非归一化辛群胚条件

$$\mathbb{A} = T_1^{-1} S \widetilde{T}_2 \widetilde{T}_1^T S. \tag{2.8}$$

Then

$$\widetilde{\mathbb{A}} := B\mathbb{A}B^T = S[\overline{T}_2]^{-1}\left[\overline{T}_1^T\right]^{-1} S T_2^T \tag{2.9}$$

其自身自动是上三角的。在推导这些表达式时，我们使用了群胚路径关系（2.5）和（2.6）。

证明。事实上，将 $\mathbb{A} = T_1^{-1} S \widetilde{T}_2 \widetilde{T}_{\mathrm{T}_1} S = (-1)^{n+1} \cdot T_1^{-1} \cdot S\widetilde{T}_2 S \cdot S\widetilde{T}_{\mathrm{T}_1} S$进行分解。注意，根据构造，所有矩阵 T_1、ST_2S和 $ST_1^{\mathrm{T}}S$ are 上三角的，这意味着 $\mathbb{A}$ 也是上三角的。同样，$\widetilde{\mathbb{A}} = S[\overline{T}_2]^{-1}\left[\overline{T}_{\mathrm{T}_1}\right]^{-1} S T^{\mathrm{T}2} = (-1)^{n+1} \cdot S[\overline{T}_2]^{-1} S \cdot S\left[\overline{T}_1^{\mathrm{T}}\right]^{-1} S \cdot T_{\mathrm{T}2}$是上三角的，剩下的工作是证明$\widetilde{\mathbb{A}} = B\mathbb{A}B^{\mathrm{T}}$。

$B\mathbb{A}B^{\mathrm{T}} = T_2 T_1 T_1^{-1} S \widetilde{T}_2 \widetilde{T}^{\mathrm{T}}{}_1 S T_1^{\mathrm{T}} T^{\mathrm{T}}{}_2 = \left(T_2 S \widetilde{T}_2\right) \cdot \left(\widetilde{T}^{\mathrm{T}1} S T_{\mathrm{T}_1}\right) T^{\mathrm{T}2}$。利用群胚条件（2.5、2.6），我们将后一个表达式改写为 $\left(S[\overline{T}_2]^{-1} S\right) \cdot \left(S[\overline{T}_{\mathrm{T}_1}]^{-1} S\right) \cdot T^{\mathrm{T}}{}_2 = S[\overline{T}_2]^{-1}[\overline{T}^{\mathrm{T}}{}_1]^{-1} S T^{\mathrm{T}_2} = \widetilde{\mathbb{A}}$。 □

~现在我们讨论矩阵 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}$ 为幺幂矩阵的归一化条件。对于 $B \in SL_n$，对所有 $k \in [1, n-1]$、$\delta_0 = \tilde{\delta}_4 = 1$，定义$\delta_k = \det(B^{[1,k]}_{[n-k+1,n]})$、$\tilde{\delta}_k = \det(B^{[k+1,n]}_{[1,n-k]})$；$\delta_4 = \tilde{\delta}_0 = \det(B)$。这里，$I$、$J$是 $[1, n]$ 的两个子集，基数均为 $|I| = |J| = \ell$；B^J_I表示由I 中的行和 J中的列构成的 B 的 $\ell \times \ell$ 子矩阵。

~引理 2.2. 设 $B \in SL_n$ 对所有 $k \in [1, n-1]$都满足条件 $\delta_k/\delta_k = 1$。那么存在唯一的 $\mathbb{A} \in \mathcal{A}_n$使得 $B\mathbb{A}B^T \in \mathcal{A}_n$。

证明. 将变量 $\mathbb{A}_{k,\ell}$ $1 \le k < \ell \le n$ 表示为方程组的解，其中方程组要求$\tilde{\mathbb{A}} = B\mathbb{A}B^{\mathrm{T}}$ 的下三角部分为零，并将这些表达式代入 $\tilde{\mathbb{A}}$的对角元素中。我们得到

$$\frac{\tilde{\mathbb{A}}_{k,k}}{\mathbb{A}_{k,k}} = (-1)^{n+1} \left(\frac{\tilde{\delta}_{n-k}}{\delta_{n-k}}\right) \left(\frac{\delta_{n-k+1}}{\tilde{\delta}_{n-k+1}}\right).$$

~假设满足幺幂条件$\mathbb{A}_{k,k} = \mathbb{A}_{k,k} = 1$ 这些方程意味着，当 $\delta_k/\tilde{\delta}_k = (-1)^{(n-k)(n+1)}$ $\forall k \in [0, n]$时，归一化的辛群胚相容性条件存在唯一解。 □

~注 2.3. 注意，函数 $\det(B)$ δ_k/δ_k 构成了 GL_n 的标准 R-矩阵泊松-李括号的一组完备的独立 Casimir 函数。

~注 2.4. 要同时满足 $\mathbb{A}$ 和 $\delta_i/\delta_i = 1$ 的幺幂条件很容易（见定理 3.1）~，具体可参见网络图 2。由于矩阵 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}$ 由处于一般位置的矩阵 B 唯一确定，且矩阵 $\mathbb{A}$还须满足幺幂条件，因此上述解实际上是唯一的！此外，若要求矩阵 $\mathbb{A}$ 为幺幂矩阵，则会对矩阵 B的卡西米尔元素施加额外限制，见 [4]。我们将在下一节解决这些条件。

注 2.5。 [17] 中讨论了传输矩阵的量子版本。其元素是量子环面代数的元素。将定理 2.8 的构造推广到元素属于量子环面代数的上三角矩阵是直接的。量子构造将另行发表。

2.2 半经典辛群胚代数

辛群胚构造最具吸引力的特征之一是，任何可容许对$(B,\mathbb{A})$的元素都满足封闭的泊松代数。在 [15] 中表明，矩阵 $\widetilde{B}$上的泊松–李关系诱导出 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}$ 上的反射方程关系，以及 B 与$\widetilde{\mathbb{A}}$ 和 $\mathbb{A}$之间的所有其他交换关系；特别地， $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}$ 的元素彼此泊松对易。 [15] 中的证明直截了当，但在技术上较为繁琐：其基础是将 $\mathbb{A}$ 的元素表示为 B 的形式，前提是 $B\mathbb{A}B^{\mathrm{T}}$ 是幺幂的，并推导出诱导的泊松关系。现在，我们从传输矩阵所满足的泊松关系出发，推导出所有这些代数关系。

定理 2.6。 SL_n 上的三角Poisson-Lie括号在 $\mathcal{A}_n$ 和 $\widetilde{\ }$ 上诱导出反射泊松括号，而 B、 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}$ 的元素之间还有其他泊松关系。

2.2.1 $B-B$ 关系

$B=T_2T_1$ 本身满足泊松–李代数，这直接源于每个矩阵 T_1 和 T_2 都满足泊松–李括号，且 T_1 与 T_2 泊松对易：

$$\begin{aligned}\big\{\overset{1}{B}\underset{,}{\otimes}\overset{2}{B}\big\}=&\big\{\overset{1}{T}_2\underset{,}{\otimes}\overset{2}{T}_2\big\}\overset{1}{T}_1\overset{2}{T}_1+\overset{1}{T}_2\overset{2}{T}_2\big\{\overset{1}{T}_1\underset{,}{\otimes}\overset{2}{T}_1\big\}=r\overset{1}{T}_2\overset{2}{T}_2\overset{1}{T}_1\overset{2}{T}_1-\overset{1}{T}_2\overset{2}{T}_2r\overset{1}{T}_1\overset{2}{T}_1+\overset{1}{T}_2\overset{2}{T}_2r\overset{1}{T}_1\overset{2}{T}_1-\overset{1}{T}_2\overset{2}{T}_2\overset{1}{T}_1\overset{2}{T}_1r\\=&r\overset{1}{T}_2\overset{2}{T}_2\overset{1}{T}_1\overset{2}{T}_1-\overset{1}{T}_2\overset{2}{T}_2\overset{1}{T}_1\overset{2}{T}_1r=r\overset{1}{B}\overset{2}{B}-\overset{1}{B}\overset{2}{B}r.\end{aligned}\tag{2.10}$$

2.2.2 $B-\mathbb{A}$ 关系

我们这里有

$$\begin{aligned}\big\{\overset{1}{B}\underset{,}{\otimes}\overset{2}{\mathbb{A}}\big\}=&\overset{2}{T}_1^{-1}\overset{2}{S}\big\{\overset{1}{T}_2\underset{,}{\otimes}\overset{2}{\widetilde{T}}_2\big\}\overset{2}{\widetilde{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}\overset{1}{T}_1+\overset{1}{T}_2\big\{\overset{1}{T}_1\underset{,}{\otimes}\overset{2}{T}_1^{-1}\big\}\overset{2}{S}\overset{2}{\widetilde{T}}_2\overset{2}{\widetilde{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}+\overset{1}{T}_2\overset{2}{T}_1^{-1}\overset{2}{S}\overset{2}{\widetilde{T}}_2\big\{\overset{1}{T}_1\underset{,}{\otimes}\overset{2}{\widetilde{T}}_1^{\mathrm{T}}\big\}\overset{2}{S}\\=&\overset{2}{T}_1^{-1}\overset{2}{S}\big(\overset{1}{T}_2\overset{2}{S}r^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}\overset{2}{\widetilde{T}}_2\big)\overset{2}{\widetilde{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}\overset{1}{T}_1+\overset{1}{T}_2\big(-\overset{2}{T}_1^{-1}r^{\mathrm{T}}\overset{1}{T}_1+\overset{1}{T}_1r^{\mathrm{T}}\overset{2}{T}_1^{-1}\big)\overset{2}{S}\overset{2}{\widetilde{T}}_2\overset{2}{\widetilde{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}+\overset{1}{T}_2\overset{2}{T}_1^{-1}\overset{2}{S}\overset{2}{\widetilde{T}}_2\big(-\overset{1}{T}_1\overset{2}{\widetilde{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}r^{t_2}\overset{2}{S}\big)\overset{2}{S}\\=&\overset{1}{T}_2\overset{1}{T}_1r^{\mathrm{T}}\overset{2}{T}_1^{-1}\overset{2}{S}\overset{2}{\widetilde{T}}_2\overset{2}{\widetilde{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}-\overset{1}{T}_2\overset{2}{T}_1^{-1}\overset{2}{S}\overset{2}{\widetilde{T}}_2\overset{1}{T}_1\overset{2}{\widetilde{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}r^{t_2}\overset{2}{S}\overset{2}{S}\\=&\overset{1}{B}r^{\mathrm{T}}\overset{2}{\mathbb{A}}-\overset{1}{B}\overset{2}{\mathbb{A}}r^{t_2},\end{aligned}\tag{2.11}$$

其中， r^{t_2} 是一个部分转置的 r-矩阵。

2.2.3 $B-\widetilde{\mathbb{A}}$ 关系

$$\begin{aligned}\big\{\overset{1}{B}\underset{,}{\otimes}\overset{2}{\widetilde{\mathbb{A}}}\big\}=&\overset{2}{S}\big\{\overset{1}{T}_2\underset{,}{\otimes}\overset{2}{\overline{T}}_2^{-1}\big\}\big[\overset{2}{\overline{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\overset{2}{S}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\overset{1}{T}_1+\overset{2}{S}\overset{2}{\overline{T}}_2^{-1}\big[\overset{2}{\overline{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\overset{2}{S}\big\{\overset{1}{T}_2\underset{,}{\otimes}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\big\}\overset{1}{T}_1+\overset{1}{T}_2\overset{2}{S}\overset{2}{\overline{T}}_2^{-1}\big\{\overset{1}{T}_1\underset{,}{\otimes}\big[\overset{2}{\overline{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\big\}\overset{2}{S}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\\=&\overset{2}{S}\big(\overset{1}{S}r\overset{1}{S}\overset{1}{T}_2\overset{2}{\overline{T}}_2^{-1}\big)\big[\overset{2}{\overline{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\overset{2}{S}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\overset{1}{T}_1+\overset{2}{S}\overset{2}{\overline{T}}_2^{-1}\big[\overset{2}{\overline{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\overset{2}{S}\big(-\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}r^{t_2}\overset{1}{T}_2+\overset{1}{T}_2r^{t_2}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\big)\overset{1}{T}_1-\overset{1}{T}_2\overset{2}{S}\overset{2}{\overline{T}}_2^{-1}\big(\big[\overset{2}{\overline{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\overset{1}{S}r^{t_1}\overset{1}{S}\overset{1}{T}_1\big)\overset{2}{S}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\\=&r^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}\overset{1}{T}_2\overset{2}{\overline{T}}_2^{-1}\big[\overset{2}{\overline{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\overset{2}{S}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\overset{1}{T}_1-\overset{2}{S}\overset{2}{\overline{T}}_2^{-1}\big[\overset{2}{\overline{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\overset{2}{S}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}r^{t_2}\overset{1}{T}_2\overset{1}{T}_1\\=&r^{\mathrm{T}}\overset{1}{B}\overset{2}{\widetilde{\mathbb{A}}}-\overset{2}{\widetilde{\mathbb{A}}}r^{t_2}\overset{1}{B},\end{aligned}\tag{2.12}$$

这里我们用到了 $r^{t_1}\overset{1}{S}\overset{2}{S}=\overset{1}{S}\overset{2}{S}r^{t_2}$ 和 $\overset{1}{S}\overset{2}{S}r=r^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}\overset{2}{S}$。

2.2.4 $\mathbb{A}-\mathbb{A}$ 关系

$$\begin{aligned}\big\{\overset{1}{\mathbb{A}}\underset{,}{\otimes}\overset{2}{\widetilde{\mathbb{A}}}\big\}=&\overset{2}{S}\overset{2}{\overline{T}}_2^{-1}\big\{T_1^{-1}\underset{,}{\otimes}\big[\overset{2}{\overline{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\big\}\overset{2}{S}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}\overset{1}{\widetilde{T}}_2\overset{1}{\widetilde{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}+\overset{2}{S}\overset{2}{\overline{T}}_2^{-1}T_1^{-1}\overset{1}{S}\overset{1}{\widetilde{T}}_2\big\{\overset{1}{\widetilde{T}}_1^{\mathrm{T}}\underset{,}{\otimes}\big[\overset{2}{\overline{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\big\}\overset{2}{S}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}\\&+\overset{2}{S}T_1^{-1}\overset{1}{S}\big\{\overset{1}{\widetilde{T}}_2\underset{,}{\otimes}\overset{2}{\overline{T}}_2^{-1}\big\}\big[\overset{2}{\overline{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\overset{2}{S}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\overset{1}{\widetilde{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}+\overset{2}{S}\overset{2}{\overline{T}}_2^{-1}\big[\overset{2}{\overline{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\overset{2}{S}T_1^{-1}\overset{1}{S}\big\{\overset{1}{\widetilde{T}}_2\underset{,}{\otimes}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\big\}\overset{1}{\widetilde{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\overset{2}{S}\overline{\overset{2}{T}}_2^{-1}\big(\overset{1}{T}_1^{-1}\big[\overline{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\overset{1}{S}r^{t_1}\overset{1}{S}\big)\overset{2}{S}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}\widetilde{\overset{1}{T}}_2\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}+\overset{2}{S}\overline{\overset{2}{T}}_2^{-1}\overset{1}{T}_1^{-1}\overset{1}{S}\widetilde{\overset{1}{T}}_2\big(\overset{2}{S}r^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\big[\overline{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\big)\overset{2}{S}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}\\
&+\overset{2}{S}\overset{1}{T}_1^{-1}\overset{1}{S}\big(-\widetilde{\overset{1}{T}}_2\overline{\overset{2}{T}}_2^{-1}\overset{2}{S}r^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}\big)\big[\overline{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\overset{2}{S}\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}+\overset{2}{S}\overline{\overset{2}{T}}_2^{-1}\big[\overline{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\big]^{-1}\overset{2}{S}\overset{1}{T}_1^{-1}\overset{1}{S}\big(-\overset{1}{S}r^{t_2}\overset{1}{S}\widetilde{\overset{1}{T}}_2\overset{2}{T}_2^{\mathrm{T}}\big)\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}.
\end{aligned}
$$

在这个表达式中，第一项与第四项相消，第二项与第三项相消，因此我们得到

$$
\big\{\overset{1}{\mathbb{A}}\underset{,}{\otimes}\overset{2}{\widetilde{\mathbb{A}}}\big\}=0. \tag{2.13}
$$

2.2.5 $\mathbb{A}-\mathbb{A}$ 关系

$$
\begin{aligned}
\big\{\overset{1}{\mathbb{A}}\underset{,}{\otimes}\overset{2}{\mathbb{A}}\big\}=&\big\{\overset{1}{T}_1^{-1}\underset{,}{\otimes}\overset{2}{T}_1^{-1}\big\}\overset{1}{S}\widetilde{\overset{1}{T}}_2\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}\overset{2}{S}\widetilde{\overset{2}{T}}_2\widetilde{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}+\overset{1}{T}_1^{-1}\overset{1}{S}\overset{2}{T}_1^{-1}\overset{2}{S}\big\{\widetilde{\overset{1}{T}}_2\underset{,}{\otimes}\widetilde{\overset{2}{T}}_2\big\}\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}\widetilde{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}+\overset{1}{T}_1^{-1}\overset{1}{S}\widetilde{\overset{1}{T}}_2\overset{2}{T}_1^{-1}\overset{2}{S}\widetilde{\overset{2}{T}}_2\big\{\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\underset{,}{\otimes}\widetilde{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\big\}\overset{1}{S}\overset{2}{S}\\
&+\overset{1}{T}_1^{-1}\overset{1}{S}\widetilde{\overset{1}{T}}_2\big\{\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\underset{,}{\otimes}\overset{2}{T}_1^{-1}\big\}\overset{1}{S}\overset{2}{S}\widetilde{\overset{2}{T}}_2\widetilde{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}+\overset{2}{T}_1^{-1}\overset{2}{S}\widetilde{\overset{2}{T}}_2\big\{\overset{1}{T}_1^{-1}\underset{,}{\otimes}\widetilde{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\big\}\overset{2}{S}\overset{1}{S}\widetilde{\overset{1}{T}}_2\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}\\
=&\big(r\overset{1}{T}_1^{-1}\overset{2}{T}_1^{-1}-\overset{1}{T}_1^{-1}\overset{2}{T}_1^{-1}r\big)\overset{1}{S}\widetilde{\overset{1}{T}}_2\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}\overset{2}{S}\widetilde{\overset{2}{T}}_2\widetilde{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}+\overset{1}{T}_1^{-1}\overset{1}{S}\overset{2}{T}_1^{-1}\overset{2}{S}\big(r^{\mathrm{T}}\widetilde{\overset{1}{T}}_2\widetilde{\overset{2}{T}}_2-\widetilde{\overset{1}{T}}_2\widetilde{\overset{2}{T}}_2r^{\mathrm{T}}\big)\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}\widetilde{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}\\
&+\overset{1}{T}_1^{-1}\overset{1}{S}\widetilde{\overset{1}{T}}_2\overset{2}{T}_1^{-1}\overset{2}{S}\widetilde{\overset{2}{T}}_2\big(r^{\mathrm{T}}\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\widetilde{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}-\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\widetilde{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}r^{\mathrm{T}}\big)\overset{1}{S}\overset{2}{S}\\
&+\overset{1}{T}_1^{-1}\overset{1}{S}\widetilde{\overset{1}{T}}_2\big(-\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}r^{t_2}\overset{1}{S}\overset{2}{T}_1^{-1}\big)\overset{1}{S}\overset{2}{S}\widetilde{\overset{2}{T}}_2\widetilde{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}+\overset{2}{T}_1^{-1}\overset{2}{S}\widetilde{\overset{2}{T}}_2\big(\widetilde{\overset{2}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{2}{S}r^{t_2}\overset{2}{S}\overset{1}{T}_1^{-1}\big)\overset{2}{S}\overset{1}{S}\widetilde{\overset{1}{T}}_2\widetilde{\overset{1}{T}}_1^{\mathrm{T}}\overset{1}{S}\\
=&r\overset{1}{\mathbb{A}}\overset{2}{\mathbb{A}}-\overset{1}{\mathbb{A}}\overset{2}{\mathbb{A}}r-\overset{1}{\mathbb{A}}r^{t_2}\overset{2}{\mathbb{A}}+\overset{2}{\mathbb{A}}r^{t_2}\overset{1}{\mathbb{A}}=-r^{\mathrm{T}}\overset{1}{\mathbb{A}}\overset{2}{\mathbb{A}}+\overset{1}{\mathbb{A}}\overset{2}{\mathbb{A}}r^{\mathrm{T}}-\overset{1}{\mathbb{A}}r^{t_2}\overset{2}{\mathbb{A}}+\overset{2}{\mathbb{A}}r^{t_2}\overset{1}{\mathbb{A}},
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

也就是说，我们得到了半经典反射方程。

2.2.6 $\widetilde{\mathbb{A}}-\widetilde{\mathbb{A}}$ 关系

与前一个关系类似，我们得到

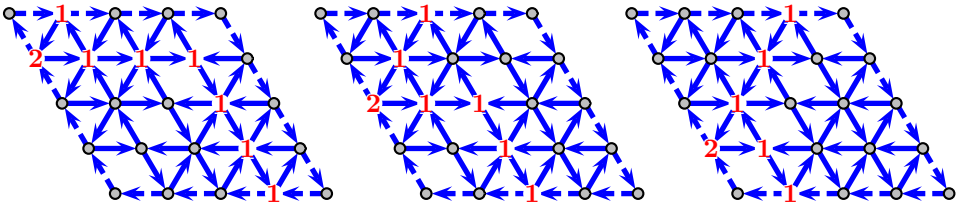
$$
\big\{\overset{1}{\widetilde{\mathbb{A}}}\underset{,}{\otimes}\overset{2}{\widetilde{\mathbb{A}}}\big\}=-r\overset{1}{\widetilde{\mathbb{A}}}\overset{2}{\widetilde{\mathbb{A}}}+\overset{1}{\widetilde{\mathbb{A}}}\overset{2}{\widetilde{\mathbb{A}}}r+\overset{1}{\widetilde{\mathbb{A}}}r^{t_2}\overset{2}{\widetilde{\mathbb{A}}}-\overset{2}{\widetilde{\mathbb{A}}}r^{t_2}\overset{1}{\widetilde{\mathbb{A}}}, \tag{2.15}
$$

因此，映射 $\mathbb{A}\mapsto\widetilde{\mathbb{A}}$ 是反泊松的。

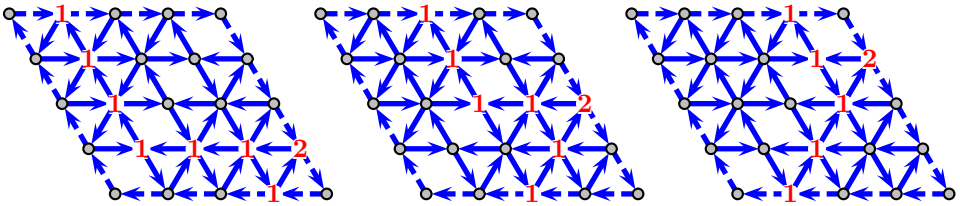
3 卡西米尔元素

本节首先介绍钉扎$\mathcal{P}_{SL_n,\square}$ 模空间上 Goldman 泊松括号族的卡西米尔元素（或用广为接受的术语来说，Casimir元），然后介绍 $\mathcal{A}_n$上的反射括号的卡西米尔元素。由于 FGS 参数 Z_{abc} 是这两种括号的对数正则坐标，因此使用这些参数计算两种情形下的卡西米尔元很方便。事实上，在 $\log Z_{abc}$中，括号变为常数，卡西米尔元的方程也变为线性方程。尤其是，这意味着卡西米尔元素代数的生成元可以表示为 Z_{abc}中的 Laurent 单项式。

下面我们以图示的方式描述两个括号的 Casimir 元。每幅图描述一个单项式。下方箭图的每个顶点都对应一个 FGS 参数。箭图中的蓝色箭头描述分配给箭头端点的参数之间的泊松-李括号。顶点上的红色数字表示对应变量在单项式 C_i 或 C_i中的指数，具体以图注为准；未标数字的顶点不参与。



F ~ ~ ~图3：完整秩箭图 $Q_\square$（对应 $\mathcal{P}_G$）的预卡西米尔元 C_2、C_3 和 C_4（从左至右） $_{L_4}$.



F图4：完整秩箭图 $Q_\square$（对应 $\mathcal{P}_G$）的预卡西米尔元 C_2、C_3 和 C_4（从左至右） $_{L_4}$.

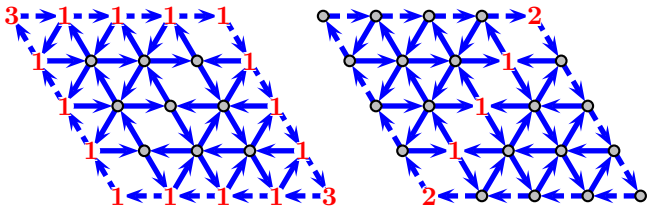


图5：完整秩箭图 $Q_\square$（对应 $\mathcal{P}_{GL_4}$）的两个例外卡西米尔元 C_0 和 C_1（从左至右）。

与钉扎模空间 $\mathcal{P}_{GL_n,\ \square}$ 相关的箭图 $Q_\square$ 因此包含 $(n+1)^2$ 个簇变量。箭图的顶点构成一个斜（菱形）格。我们用对 $(i,j)\ \in [0,n]\times[0,n]$，$i$ 从左向右递增、j 从下向上递增来标记顶点，并用 K_{ij}表示相应的簇变量。

注意，$Q_\square$ 的变量 K_{ij} 并非全部用于传输矩阵 B 的表达式。也就是说，底行的所有变量都不对 B 有贡献。此外，只有顶行所有变量的乘积会作为因子出现在矩阵 B 任意一个元素的表达式中。相应的箭图如图6所示。

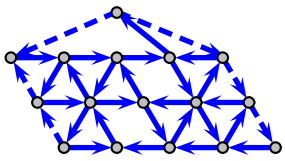


图6：矩阵 $B \in GL_n$、$n=4$ 的因式分解参数箭图（B 系统的箭图）。顶部顶点处的簇变量是乘积 $\prod_{j=0}^{n} K_{n,\ j}$。在箭图的其余部分，顶点（$i,\ j$）$\in [1,n-1]\times[0,n]$ 携带变量 $K_{i,\ j}$。

定理 3.1. 卡西米尔元素的完整列表如下：

~(i) $Q_\square$（见图 3、4、5）恰有 $n+1$ 个 Casimir 元：C_0、C_1 和 C_iC_i，其中 $i=2,\ .....,\ n$。(ii) 归一化为行列式等于 1（$\det B=1$）的传输矩阵 B 对应的箭图恰好包含~$n-1$ 个 Casimir 元 C_i/C_j。(iii) 通过对上~行和下行中的变量进行莫比乌斯式粘合，由箭图 $Q_\square$ 得到的 $\mathcal{A}_n$ 包含 $n\ (n+1)$ 个簇变量，并且恰有 $2n$ 个 Casimir 元：C_0、C_1 以及所有 C_i 和C_i，其中 $i=2,\ .....,\ n$。

~证明。(i) 从图 3、4 和 5 可以直接看出，单项式 C_0、 C_1 和 C_iC_i（其中 $i=2$，.....， n）是泊松-李括号的 Casimir 元；根据单项式的定义，只需计算将该单项式与箭图任意顶点相连的有向行的带符号数量。容易观察到， $\{\log(C_0)$、$\log(C_1)$、$\log(C_i)+\widetilde{\ }\log(C_i)\}$ 是线性无关函数，因此 $\{C_0, C_1\} \cup \{C_iC_i\}_{i=2.....,\ n}$ 构成超越独立生成元集。最后，由于 FGS 参数的对数之间的泊松括号为常数，其余秩可直接计算，并且等于斜对称系数矩阵的零空间维数 $n+1$，这意味着 Casimir 函数域恰有 $n+1$ 个生成元。

(ii) 用 K_i 表示 i 行中所有变量的乘积 $K_i = \prod_{j=0}^{n} K_{i,j}$, $i \in [1,n]$。显然，$\{K_i, K_j\} = 0$。传输矩阵的行列式 $\det(B) = K_n^n \cdot K_{n-1}^{n-1} \cdot \cdots \cdot K_2^2 \cdot K_1$。因此，条件 $\det(B) = 1$ 可改写为 $K_n = \dfrac{1}{\prod_{j=1}^{n-1} K_j^{j/n}}$。容易看出， $\{\det(B) B_{k,\ell}\} = 0$。事实上，我们将证明 $\{\det(B)\, K_{i,j}\} = 0\ \forall (i,j) \in [1,n-1] \times [0,n]$。对于满足 $j \neq 0$, $j \neq n$, $j \neq i$ 的 (i,j)，我们注意到 $\{K_a, K_{i,j}\} = 0\ \forall a \in [1,n]$。注意， $\{K_{0,j}, \det(B)\} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{j+1}{n} - \frac{j}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{j-1}{n}\right) K_{0,j} \det(B) = \left(\frac{j}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{j}{n} + \frac{j}{2n} - \frac{1}{2n}\right) K_{0,j} \det(B) = 0$。类似的论证表明，在其余所有情形下，$\det(B)$ 都与 $K_{i,j}$ 泊松对易。因此，条件 $\det(B) = 1$ 定义了 GL_n 的一个泊松子流形 SL_n。矩阵 B 的因子化参数 $K_{i,j}$ 上的泊松括号由箭图的结构记录（图 6）。~箭图的结构直接表明， C_i/C_i 是 $i = 2, \ldots, n$ 的一个卡西米尔元。众所周知，在 SL_n 上诱导的泊松括号与标准泊松-李括号一致。此外，~标准泊松-李括号的余秩为 $n-1$，这意味着函数 C_i/C_i 生成有理 Casimir 函数的域。

(iii) 回顾一下，粘合网络上的泊松括号在对数坐标 $\log K_{i,j}$ 中为常数，且所有函数 $\log C_0, \log C_1, \log C_i, \log C_i$ 都是 $\log K_{i,j}$的线性函数，并且线性无关。直接观察箭图可知，这些函数中的每一个都是卡西米尔元，因此 $\sim C_0, C_1, C_i, C_i$, $i = 2, \ldots, n$ 构成了粘合网络上一组 $2n$ 个独立的 Casimir 函数。为证明这组 Casimir 元的完备性，我们考察粘合网络上泊松张量的秩。陈述 (i) 指出，粘合前泊松张量的余秩为 $n+1$。在对数坐标中，粘合将网络权重空间投影到一个维数小 $n+1$ 的新的空间，其线性纤维维数为 $(n+1)$。根据相应的箭图 7，很容易计算出泊松张量的余秩，结果为 $2n$。这一事实完成了定理第 (iii) 部分的证明。

□

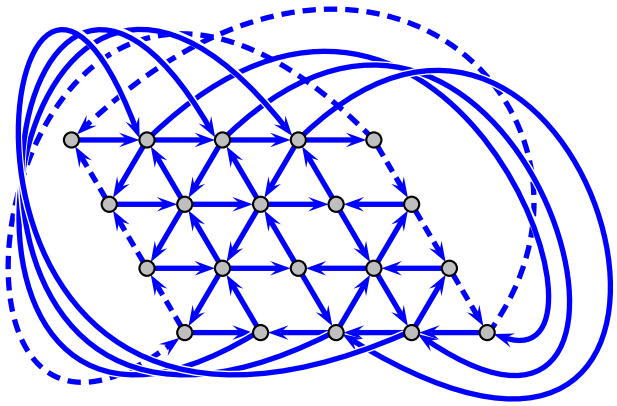


图 7： 拼合箭图 $[1,n] \times [0,n]$。

引理 3.2. $\mathbb{A}$ 和 $\widetilde{\mathbb{A}} := B\mathbb{A}B^T$ 都是幺幂的条件意味着 $C_0 = C_1 = C_i = \widetilde{C}_i = 1$。这意味着 B 的所有中心元素都等于单位元。

证明。直接计算。 □

4 模空间 标记曲面上带框架的旗标构型空间的 i, s

在本节中 ，我们描述了非定向曲面上平坦联络的增强装饰空间 .

一般来说， Σ 是一个带有孔和标记点的不可定向二维拓扑曲面。我们假设 Σ 的每个边界分支上至少有一个标记点。设 T 是 Σ 的一个三角剖分，其顶点位于标记点处。 T 的每个三角形 Δ 都是可缩的。因此，我们可以通过将每个三角形的顶面和底面分别涂成绿色和蓝色，为所有三角形指定共定向。沿边粘合的三角形构成曲面 Σ。我们不假设粘合与着色相容（即，穿过两个已粘合三角形的公共边时，可以从一种颜色变为另一种颜色，见图8）。每个标记点 p 在绿色面上都有一个点（称为绿色点，记作 p^g），并且在蓝色面上有一个相应的点（称为蓝色点，记作 p^b）。所有绿色标记点都配备了带框架的完备旗标 [25], ，即GL_n/N的一个元素，其中 N 是幂零上三角矩阵子群。我们用 N_- 表示幂零下三角矩阵子群。

引理 4.1. 一个带框架的旗标 $x \in GL_n/N$ 确定唯一的对偶带框架旗标 $x^* \in N_- \setminus GL_n$。

证明。令 $V = \mathbb{R}^n$， ω_ℓ 是赋予 ℓ-空间的 ℓ-形式， x^ℓ， ω_ℓ^* 是赋予 ℓ-空间 $(x^*)^\ell$的 ℓ-形式。注意，$\omega_k \in \wedge_k V^*$，$(\omega^*)_k \in \wedge^k V$，标准映射 $\wedge^k V \oplus \wedge^{n-k} V \to \wedge^n V \simeq \mathbb{R}$ 确定非退化配对 π ： $\wedge^k V \simeq \wedge^{n-k} V^*$。定义 x^* 如下：空间 $(x^*)^k = Ann(x^{n-k})$以及限制在 $(x^*)^k$上的形式 $(\omega^*)_k = \pi^{-1}(\omega_{n-k})$。根据构造， k-形式的限制是非退化的。□

略微滥用记号，我们用 π 定义框架旗与对偶框架旗之间的同构。一个框架构形为每个白色顶点 p_i 指定一个框架旗 f(p_i)，并为相应的黑色顶点 p^b 指定对偶框架旗 π(f(p_i))，使得所有旗都两两处于一般位置。

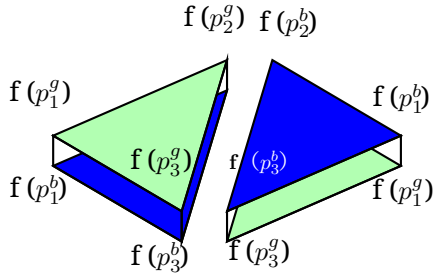


图8: 双侧曲面：绿色面承载框架旗；蓝色面承载对偶框架旗。

设 $\vec{e} = (t, h)$ 是三角形 Δ 的一条定向边，其端点配备了一般位置的框架旗； t 是 $\vec{e}$ 的尾端点， h 是 $\vec{e}$ 的头端点。设 ϕ 是从框架旗到无框架旗的遗忘映射，即忘掉相应的形式； ϕ^* 是从对偶框架旗到无框架对偶旗的遗忘映射。二元组 (ϕ(f)(t), f (h)) 为定向边 $\vec{e}$ 指定基 b($\vec{e}$)。该基按如下方式构造。首先，旗 ϕ(f)(t) ϕ(f)(h) 确定 n 条直线，它们位于 V 中，其中第 k 条直线 ℓ_k 是第二个旗的 k 维子空间与第一个旗的 $n-k+1$ 维子空间的交。设 ω_k^h 是旗 f(h) 的 k 维子空间上的 k 型。选取向量 $v_k \in \ell_k$，使得 $\omega_k^h(v_1 \wedge \ldots v_k) = 1$。这些条件依次唯一确定 v_1、 v_2 等。沿边 (t, h) 粘合两个方向相同的三角形，我们得到两组基 v_1, ..., v_n 和 v'_1, ..., v'_n，其中 v_k 与 v'_{n-k} 成比例。从一组基变换到另一组基，会额外乘上反对角矩阵 S 和一个对角矩阵。沿边 (t, h) 粘合两个方向相反的三角形，我们得到沿此边的两组基（每个三角形中各一组），一组位于 V（绿色三角形）中，另一组位于 V^* 中。我们假定粘合对应于一个算子$V \to V^*$，它将 V 中的基变换为 V^* 中对应的基。因此，无向环会导出一个双线性型。

~5 表示 $\mathbb{A}, \mathbb{A}$

~5.1 $\mathbb{A}, \mathbb{A}$的箭图

~现在，我们利用引理 3.2 为矩阵 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}$的元素构造一个特殊的箭图。从表达式 (2.8) 和 (2.9) 出发，我们首先注意到，由于转置运算，上、下两行的（冻结）簇变量以“莫比乌斯式”的方式合并，同时像第4节中那样反转方向。然后，我们将新得到的合并变量（与图的角点处的变量不同）定义为新的动力变量，并利用所有剩余的 $2n$ 冻结变量（包括通过合并箭图对角角点得到的两个变量）表示为动力变量，

因为所有 $2n$ 卡西米尔元素都必须等于单位元。由于冻结变量在这些卡西米尔元中以二次幂出现，所得表达式中动力簇变量的幂只会是 0、 $1/2$和 $-1/2$ 。计算细节与 [17], 中的相同，因此我们只给出结果。

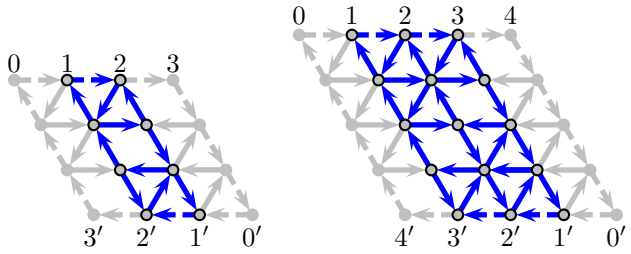


图 9： SL_3 和 SL_4的合并箭图。被移除的冻结簇变量以浅灰色表示；新的成对合并变量已编号（第 i 个变量与第 i' 个变量合并）。

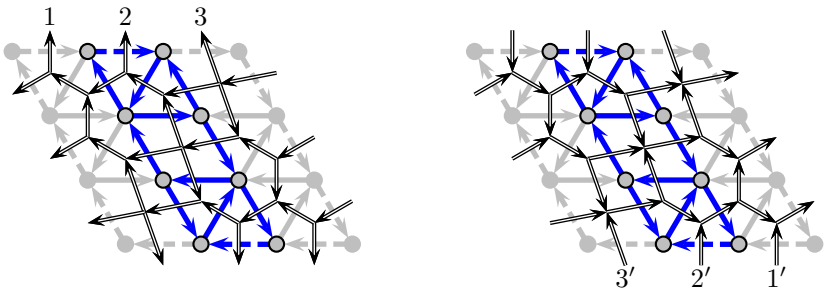
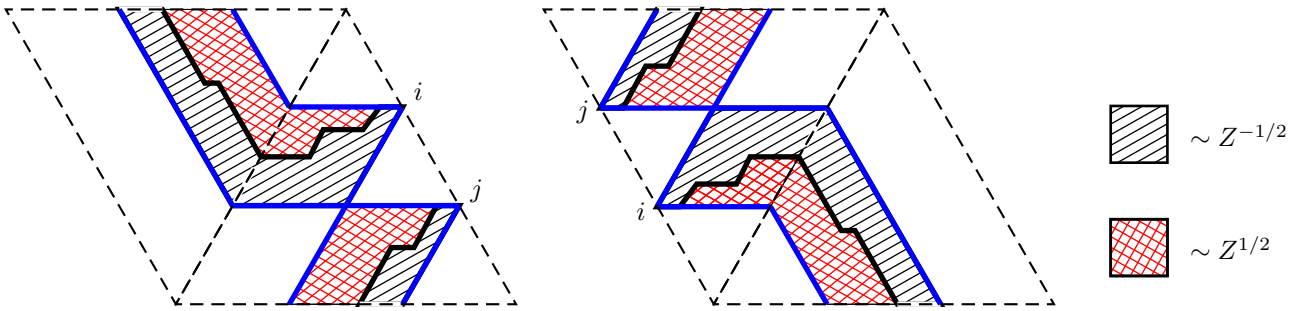


图 10： SL_3的有向网络：左侧是 $T_1^{-1}S\widetilde{T}_2$ 的有向网络，右侧是 $\widetilde{T}_1^{\mathrm{T}}S$的有向网络。被移除的冻结簇变量以浅灰色表示；成对合并的源点和汇点已编号（第 i 个汇点与第 i' 个源点连接）。



~图 11： 计算 $\mathbb{A}$ 的归一化元素 $a_{i,j}$ （左侧）以及 $\mathbb{A}$ 的归一化元素$\widetilde{a}_{i,j}$ （右侧）的示意图：对第 i 个源点和第 j 个源点之间的所有可容许路径求和；阴影区域中的变量以 $-1/2$ 次幂出现；交叉阴影区域中的变量以 $1/2$ 次幂出现。

ij项的 $\mathbb{A}$ 读作 $(-1)^{i+j}a_{i,\ j}$ 其中正$a_{i,\ j}$ 由从 i 到j 的所有可容许路径上的簇变量乘积之和给出（如图 11 左侧所示）：交叉阴影区域中的簇变量的幂为 $1/2$，阴影区域中的簇变量的幂为 $-1/2$；$a_{i,\ j}$ 是非负项之和，其中始终包括两个互为倒数的项，且其中一个项的阴影区域或交叉阴影区域为空，因此对于任意取实值的簇变量，我们有

$$a_{i,j} > 2 \text{ and } \widetilde{a}_{i,j} > 2.$$

这与.....一致 ~在下一节中，将 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}$ 的矩阵元与测地函数对应起来。

例5.1。计算 $a_{i,j}$，其中 $n=4$。

我们首先通过将右三角形子网络的镜像副本附加到图11中左三角形的顶部，重新绘制图10和图11中的图案。所得网络如图12所示；簇变量对应于面（只有内部面对归一化矩阵元 $a_{i,\ j}$有贡献），变量 s_i 和 f_i 通过融合得到，而变量 $\{a,b,c\}$ 和 $\{p,q,r\}$ 分别是右三角形和左三角形的内部变量。所有水平双箭头均从右指向左，所有垂直双箭头均从上指向下。为简化图示，我们不标出表示簇变量之间泊松关系的箭图边。

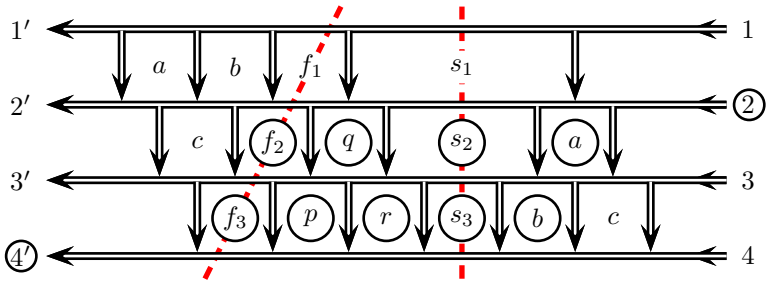


图12： 用于计算 $a_{i,j}$ （其中 $n=4$）的网络：它包含两个右三角形副本（其中一个是另一个的镜像反射）和一个左三角形副本；虚线表示三角形的融合边界；由虚线隔开的各面对应的簇变量，通过融合先前的冻结变量得到。矩阵元 $a_{i,j}$ 通过对从第 i 个源点到第 j' 个汇点的所有路径求和得到；只有“位于” $i-j'$ 矩形“内部”的簇变量会产生贡献：路径上方面的变量以 $1/2$ 次幂出现，路径下方面的变量以 $-1/2$ 次幂出现。图中圈出的变量对 $a_{2,4}$ 有贡献。

为得到归一化矩阵元 $a_{i,j}$，我们取从第 i个源点到第 j' 个汇点的所有路径；这些路径都位于最上方路径与最下方路径之间；我们取被最上方和最下方路径夹住的各面的簇变量，并为每条路径对应一个由这些变量构成的乘积：路径上方面对应的变量以 $1/2$ 次幂出现，路径下方面对应的变量以 $-1/2$ 次幂出现。然后对所有路径求和。对角矩阵元 $a_{i,i}=1$。我们有

$$a_{1,2}=(s_1f_1ab)^{1/2}+s_1^{-1/2}(f_1ab)^{1/2}+(s_1f_1)^{-1/2}(ab)^{1/2}+(s_1f_1a)^{-1/2}b^{1/2}+(s_1f_1ab)^{-1/2}$$
$$a_{2,3}=(as_2qf_2c)^{1/2}+a^{-1/2}(s_2qf_2c)^{1/2}+(as_2)^{-1/2}(qf_2c)^{1/2}+(as_2q)^{-1/2}(f_2c)^{1/2}+(as_2qf_2)^{-1/2}c^{1/2}+(as_2qf_2c)^{-1/2},$$

等等。最长的条目，$a_{2,\ 4}$，包含 17 个术语：

$$\begin{aligned}a_{2,4}=(f_2qs_2a)^{1/2}&\big((f_3prs_3b)^{1/2}+(f_3prs_3)^{1/2}b^{-1/2}+(f_3pr)^{1/2}(s_3b)^{-1/2}\\&\qquad+(f_3p)^{1/2}(rs_3b)^{-1/2}+f_3^{1/2}(prs_3b)^{-1/2}+(f_3prs_3b)^{-1/2}\big)\\+(f_2qs_2)^{1/2}(ab)^{-1/2}&\big((f_3prs_3)^{1/2}+(f_3pr)^{1/2}s_3^{-1/2}+(f_3p)^{1/2}(rs_3)^{-1/2}+f_3^{1/2}(prs_3)^{-1/2}+(f_3prs_3)^{-1/2}\big)\\+(f_2q)^{1/2}(s_2ars_3b)^{-1/2}&\big((f_3p)^{1/2}+f_3^{1/2}p^{-1/2}+(f_3p)^{-1/2}\big)\\+f_2^{1/2}(qs_2aprs_3b)^{-1/2}&(f_3^{1/2}+f_3^{-1/2})+(f_2qs_2af_3prs_3b)^{-1/2}\end{aligned}$$

6 三角形形式的群胚与黎曼曲面的 Teichm¨uller 空间

群胚结构与亏格为 g、带有 $s=1$ 个孔的黎曼曲面的 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}_{g,\ s}$ 密切相关。

众所周知（见 [12]），对于一组特殊的测地线环路 $\gamma_{i,j}$，我们可以将 $\mathbb{A}\in SL_n$ 的元素 $a_{i,j}$ 识别为测地函数 $a_{i,j}=G_{i,j}$；这些环路在亏格为 $g=\lfloor(n-1)/2\rfloor$ 的庞加莱一致化黎曼曲面上具有长度 $\ell_{i,j}$，该曲面在 n 为奇数时有一个孔（$s=1$），在 n 为偶数时有两个孔（$s=2$）。于是，辫群变换 $\mathbb{A}\mapsto B_{i,i+1}\mathbb{A}B_i^{\mathrm{T}},_{i+1}$ 可解释为沿测地线 $\gamma_{i,i+1}$ 进行的德恩扭转，并作用于相应的测地函数 $G_{k,l}$。

一个众所周知的微妙之处是， $\mathcal{A}_n$ 的维数与相关的 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}_{g,\ s}$ 的维数仅在 $n=3$ 和 $n=4$ 时相同；从 $n=5$, $\mathcal{T}_{g,\ s}$ 开始，它们作为非最大维数的泊松叶嵌入 $\mathcal{A}_n$ 中。因此，我们倾向于保留测地函数的记号 $G_{i,\ j}$，尽管只有在 $n=3$ 时，它们才与实正簇变量对应的矩阵元素 $a_{i,\ j}$ 相同，4。

测地函数满足经典编织关系和半经典泊松关系（Goldman 括号）；利用这两种关系，我们可以从 $2g+1$ 条特别选取的测地线构造出亏格为$g>1$的光滑黎曼曲面上的任意其他测地函数。[1]例如，已知 $n-1$ 个测地函数$G_{i,i+1}$, $i=1,\dots,n-1$，我们^可以构造出所有$G_{i,j}$：因为$\gamma_{i,i+1}$和$\gamma_{i+1,i+2}$有一个交点，$G_{i,i+1}G_{i+1,i+2}=G_{i,i+2}+G_{i,i+2}$，其中$\widehat{G}_{i,i+2}$是列表中没有的测地函数，但$\{G_{i,i+1},G_{i+1,i+2}\}=\frac{1}{2}(G_{i,i+2}-\widehat{G}_{i,i+2})$，因此

$$G_{i,i+2}=\frac{1}{2}G_{i,i+1}G_{i+1,i+2}+\{G_{i,i+1},G_{i+1,i+2}\}.$$

我们可以继续这一过程，构造出所有$G_{i,j}$。

已在 [45] 中证明，几何叶的 $\mathbb{A}$ 满足条件 $\mathrm{rank}(\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}})\le 4$。曲面上绕孔的环路所对应的测地函数构成了$\mathcal{T}_{g,s}$上 Goldman 泊松括号的完备 Casimir 函数集。反射泊松括号的完备 Casimir元集由多项式 $\det(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{A}^{\mathrm{T}})$ 的 λ次幂的系数组成，或者等价地，由 $\mathbb{A}^{-\mathrm{T}}\mathbb{A}$的特征值组成。根据定理 4.4 [14],，对于几何叶中的 $\mathbb{A}$， $\mathbb{A}^{-\mathrm{T}}\mathbb{A}$ 的谱由 λ、λ^{-1}、μ、μ^{-1} 以及 -1（当 n为偶数时）和 λ、λ^{-1} 以及 -1（当n为奇数时）组成。因此，当 n 为偶数时最多有两个相互独立的特征值，而当 n为奇数时有一个相互独立的特征值。由此可得，在几何情形下，当 n 为偶数时，Casimir 函数代数由两个生成元生成；当 n为奇数时，则由一个生成元生成。这些生成元分别由双曲曲面上两个孔（当 n为偶数时）和一个孔（当 n为奇数时）所对应的测地函数描述。

7 闭合亏格二黎曼曲面的簇变量描述。

~现在我们利用 $\mathbb{A}$ 的元素与 $\mathbb{A}$ 之间的对应关系：它们满足反射方程 (2.14)、(2.15) 和对易关系 (2.13)；同时，利用黎曼曲面上满足 SL_2 Goldman 括号和编织关系的测地线的测地函数。

簇变异 μ_f 是对有向图（箭图）以及与箭图顶点相关联的变量所进行的操作；突变以标准方式变换箭图，而变量则按如下方式变换：对于本文中的四种典型情况，

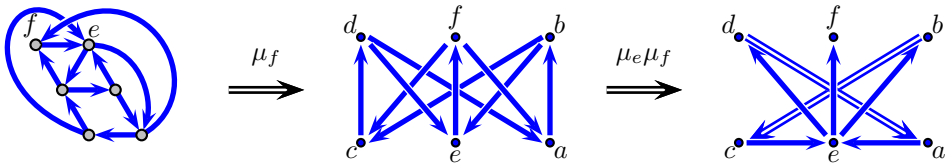


我们有，在顶点 f 处进行突变 μ_f 会产生变换。

$$\mu_f\{f,a,b,c,d\}=\left\{f^{-1},\ a(1+f^{-1})^{-1},\ b(1+f^{-1})^{-2},\ c(1+f),\ d(1+f)^2\right\}.$$

对于更高阶的箭头，规则很明确。

以下是表示 SL_3 的箭图的几种便捷方式：



“原始” $K_{3,\ 3}$，或“对称的” “蝴蝶”

这里最右侧的箭图称为 X_6，它是少数几个变异有限非几何箭图之一。（回想一下，几何箭图是与（开）黎曼曲面的理想三角剖分对偶的箭图$\Sigma_{g,\ s}$其孔数为 $s>0$ 和 $2g+s-2>0$。）

我们来引入由字母 a、b、c、d、e、f构成的特殊有序组合（“望远镜和”），记作 $\langle\dots\rangle$：例如

$$\langle defa\rangle:=(defa)^{1/2}\left(1+\frac{1}{d}+\frac{1}{de}+\frac{1}{def}+\frac{1}{defa}\right).$$

[1]，至于 $\mathbb{Z}_2$-对称性方面的细微问题，见下文第 8.2 节。

那么在中间的箭图 ($K_{3,\,3}$) 中，我们有

$$G_{1,2}=\langle defa\rangle,\quad G_{1,3}=\langle bcde\rangle,\quad G_{2,3}=\langle fabc\rangle$$
$$\widetilde{G}_{1,2}=\langle befc\rangle,\quad \widetilde{G}_{1,3}=\langle dabc\rangle,\quad \widetilde{G}_{2,3}=\langle fcda\rangle.$$

经过突变：先对 f，然后对 e，我们得到右侧的箭图（“蝴蝶”）。引入以下记号很方便

$$\hat{e}:=e(abcdf)^{1/2}.$$

那么，与$\hat{e}$不对易的唯一变量是 f；规则是 $\{\hat{e},f\}=2\hat{e}f$。

上述突变后，所讨论的测地函数变为

$$\begin{aligned}
G_{1,2}&=(da)^{1/2}\left(1+\frac{1}{d}+\frac{1}{da}\right)=\langle da\rangle\\
G_{1,3}&=a^{-1/2}\hat{e}+(df)^{1/2}\widetilde{G}_{1,2}+\frac{a^{1/2}}{\hat{e}}(1+f)(1+d)\\
G_{2,3}&=d^{-1/2}\hat{e}\left(1+\frac{1}{a}\right)+(f/a)^{1/2}\widetilde{G}_{1,2}+\frac{d^{1/2}}{\hat{e}}(1+f)
\end{aligned}\tag{7.16}$$

and

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_{1,2}&=(bc)^{1/2}\left(1+\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}\right)=\langle bc\rangle\\
\widetilde{G}_{1,3}&=c^{-1/2}\hat{e}+(bf)^{1/2}G_{1,2}+\frac{c^{1/2}}{\hat{e}}(1+f)(1+b)\\
\widetilde{G}_{2,3}&=b^{-1/2}\hat{e}\left(1+\frac{1}{c}\right)+(f/c)^{1/2}G_{1,2}+\frac{b^{1/2}}{\hat{e}}(1+f),
\end{aligned}\tag{7.17}$$

我们对 X_6 箭图的全新诠释是，它参数化了亏格为二、带有一条特殊分离测地线（马尔可夫元素）的光滑黎曼曲面的 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}_{2,\,0}$；我们验证了~簇突变对应于沿着 $G_{i,\,j}$ 或 $G_{i,\,j}$ 的德恩扭转，并保持马尔可夫元素不变。

我们的下一个目标是由 X_6 的元素构造 $\Sigma_{2,0}$ 的完整模群。由于 $\{a,b,c,d,e,f\}$ 的总泊松维数为六，因此我们拥有不与马尔可夫元素 $\mathfrak{M}$对易的元素，这项任务看似是可行的。我们需要找到测地函数 G_B （见图13），使得与 $\ell_{\mathfrak{M}}$ 对偶的扭转 τ_B 由以下表达式给出（见 [47], [9]）

$$e^{\tau_B}+e^{-\tau_B}=\frac{\mathfrak{M}G_B-2G_{1,2}\widetilde{G}_{1,2}}{\sqrt{\left(\mathfrak{M}+G_{1,2}^2\right)\left(\mathfrak{M}+\widetilde{G}_{1,2}^2\right)}},\tag{7.18}$$

具有适当的泊松关系。这里 $\mathfrak{M}=e^{\ell_{\mathfrak{M}}/2}+e^{-\ell_{\mathfrak{M}}/2}-2$，其中我们将 $\ell_{\mathfrak{M}}$ 与分离测地线的双曲~长度等同；它与所有 $G_{i,\,j}$ 和 $G_{i,\,j}$ 均对易（当然，与 G_B 不对易）。

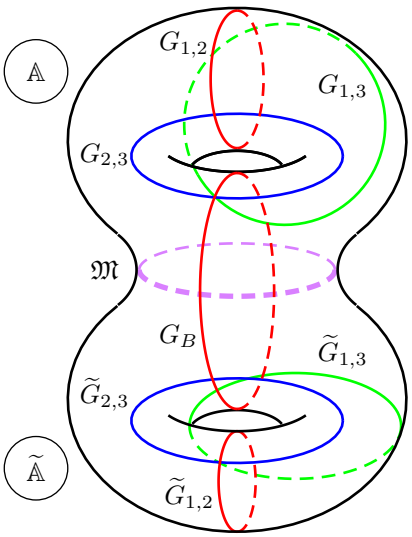


图13：一个具有测地线集合的二genus 光滑黎曼曲面（由相应的测地函数标记）：分隔测地线是马尔可夫元素 $\mathfrak{M}$；与 $\mathbb{A}$ 对应的测地线位于上部~（一个带孔的环面，由马尔可夫元素表示），与 $\mathbb{A}$ 对应的测地线位于下部；这两组测地函数显然可交换。构造与马尔可夫元素 $\mathfrak{M}$ 对偶的扭转变量所遗漏的一条测地线是 G_B。

为了找到 G_B 的候选项，我们考察马尔可夫元素 $\mathfrak{M}$ 的不同表达式。两种原始表达式为

$$\mathfrak{M} = G_{1,2}G_{1,3}G_{2,3} - G_{1,2}^2 - G_{1,3}^2 - G_{2,3}^2 \tag{7.19}$$
$$= \widetilde{G}_{1,2}\widetilde{G}_{1,3}\widetilde{G}_{2,3} - \widetilde{G}_{1,2}^2 - \widetilde{G}_{1,3}^2 - \widetilde{G}_{2,3}^2. \tag{7.20}$$

当我们将（7.16）和（7.17）中的表达式代入此式，并尽可能地收集构成 $G_{1\text{的项，}2}$ 以及 $G_{1\text{的项，}2}$，我们发现其中一个组合起着突出的作用；这个组合是

$$G_B := \frac{1}{f^{1/2}}\left(\hat{e} + \frac{1+f}{\hat{e}}\right). \tag{7.21}$$

那么马尔可夫元素 $\mathfrak{M}$ 可以写成

$$\mathfrak{M} = f\big(G_{1,2}\widetilde{G}_{1,2}G_B + G_{1,2}^2 + \widetilde{G}_{1,2}^2 + G_B^2 - 4\big) - 4, \tag{7.22}$$

~并且由于 G_B 与 $G_{1,\ 2}$ 以及 $G_{1,\ 2}$对易，因此只有 $\mathfrak{M}$ 中的变量 f 才会使 $\mathfrak{M}$ 与 G_B 之间的对易关系非零。将 (7.21) 代入 (7.18)，我们来计算

$$\{e^{\tau_B} + e^{-\tau_B}, e^{\ell_A/2} + e^{-\ell_A/2}\} = \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{(\mathfrak{M}+G_{1,2})(\mathfrak{M}+\widetilde{G}_{1,2})}}\{G_B, \mathfrak{M}\}$$
$$= \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{(\mathfrak{M}+G_{1,2})(\mathfrak{M}+\widetilde{G}_{1,2})}}\left[e(abcd)^{1/2} - \frac{1}{fe(abcd)^{1/2}} - \frac{1}{e(abcd)^{1/2}}\right] f\cdot\big(G_{1,2}\widetilde{G}_{1,2}G_B + G_{1,2}^2 + \widetilde{G}_{1,2}^2 + G_B^2 - 4\big)$$
$$= \sqrt{G_B^2 - 4 - 4/f}\,\frac{(\mathfrak{M}+4)\mathfrak{M}}{\sqrt{(\mathfrak{M}+G_{1,2})(\mathfrak{M}+\widetilde{G}_{1,2})}}$$
$$= \sqrt{G_B^2 - 4 - 4\frac{G_{1,2}\widetilde{G}_{1,2}G_B + G_{1,2}^2 + \widetilde{G}_{1,2}^2 + G_B^2 - 4}{\mathfrak{M}+4}}\,\frac{(\mathfrak{M}+4)\mathfrak{M}}{\sqrt{(\mathfrak{M}+G_{1,2})(\mathfrak{M}+\widetilde{G}_{1,2})}}$$
$$= \frac{\sqrt{\mathfrak{M}(\mathfrak{M}+4)}}{\sqrt{(\mathfrak{M}+G_{1,2})(\mathfrak{M}+\widetilde{G}_{1,2})}}\sqrt{(\mathfrak{M}G_B - 2G_{1,2}\widetilde{G}_{1,2})^2 - 4(\mathfrak{M}+G_{1,2})(\mathfrak{M}+\widetilde{G}_{1,2})}$$

$$= \sqrt{(\mathfrak{M}+2)^2-4}\sqrt{\left[\frac{\mathfrak{M}G_B - 2G_{1,2}\widetilde{G}_{1,2}}{\sqrt{(\mathfrak{M}+G_{1,2})(\mathfrak{M}+\widetilde{G}_{1,2})}}\right]^2 - 4}$$

$$= \sqrt{(e^{\ell_{\mathfrak{M}}/2}+e^{-\ell_{\mathfrak{M}}/2})^2-4}\sqrt{(e^{\tau_B}+e^{-\tau_B})^2-4} = (e^{\ell_{\mathfrak{M}}/2}-e^{-\ell_{\mathfrak{M}}/2})(e^{\tau_B}-e^{-\tau_B}),$$

这意味着 $\{\tau_B, \ell_{\mathfrak{M}}/2\} = 1$。一个 l

onger b但是 ill 通过直接计算即可证明这一点，此处略去。扭转 $\tau_{1,2}$ 和 $\widetilde{\tau}_1$,2

沿着测地线$\gamma_{1,}$ 2 和 $\widetilde{\gamma}_{1,}$ 2 由公式确定

$$(e^{\tau_{1,2}}+e^{-\tau_{1,2}})^2 = -4 + \frac{G_{2,3}^2(G_{1,2}^2-4)}{\mathfrak{M}+G_{1,2}^2}, \qquad (e^{\widetilde{\tau}_{1,2}}+e^{-\widetilde{\tau}_{1,2}})^2 = -4 + \frac{\widetilde{G}_{2,3}^2(\widetilde{G}_{1,2}^2-4)}{\mathfrak{M}+\widetilde{G}_{1,2}^2} \tag{7.23}$$

与 τ_B对易。因此， τ_B 满足所有关于与 $\ell_{\mathfrak{M}}$对偶的扭转变量的判定性质。构造的下一步，也是（几乎）最后一步，是找出对应于沿 G_B扭转的簇变量变换。注意，这些变换不是 X_6 的突变，因为后者保持马尔可夫 ˜元素不变。然而，所有元素$G_{i,j}$ 和 $G_{i,j}$ 在这些变换下仍必须保持为劳朗多项式。对应于沿 G的扭转的新（“扩展”）突变

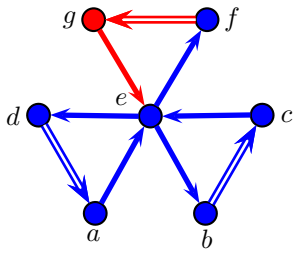
$_B$ 在 X箭图中有

$$e \to e\left(1+\frac{1}{f}\right)^{-1}, \quad f^{1/2} \to \frac{f^{1/2}+f^{-1/2}}{e(abcd)^{1/2}}. \tag{7.24}$$

这些变换保持“蝴蝶”箭图中的交换关系，因此箭图不会改变。

注意， f 在（7.24）中的变换并不是标准的簇突变。然而，以下将箭图 X_6 扩展为有限突变型的箭图 X_7 的方式，为这种“扩展”突变的簇解释提供了一个框架。也就是说，在 X_7 中，变换（7.24）是一个标准的簇突变，条件是 X_7 中的七个簇坐标满足关系式（7.26）。

扩展箭图 X_7。考虑一个新增了顶点的“蝴蝶”箭图：



(7.25)

添加新顶点不会改变泊松维数，因为现在有了一个新的卡西米尔算子。我们施加条件，使该卡西米尔元等于单位元：

$$e^2abcdfg = 1. \tag{7.26}$$

那么，上述“扩展”变换就是在新添加的顶点 g 处进行突变 μ_g，随后执行互换 $f \leftrightarrow g$ 操作 $\mathfrak{S}_{f,\ g}$。事实上，我们有：

$$\mathfrak{S}_{f,g}\mu_g(g, f^{1/2}, e) = \mathfrak{S}_{f,g}\big(g^{-1}, f^{1/2}(1+g), e(1+g^{-1})^{-1}\big) = \big(f^{-1}, g^{1/2}(1+f), e(1+f^{-1})^{-1}\big),$$

and, 代入 $g = e^{-1}(abcdf)^{-1/2}$ 后，我们得到 $f^{1/2}$ 和 e 的变换 (7.24)。

注意，利用 (7.26)，我们总能用其他变量表示 g；例如，上面的$\hat{e}$ 不过就是 $g^{-1/2}$。

现在我们给出定理，它完整地描述了亏格为二的光滑黎曼曲面的 Teichm ¨uller 空间的簇代数。

定理 7.1。在 Poincar ´e 一致化下，亏格为二的光滑黎曼曲面的 Teichm ¨uller 空间 $\mathcal{T}_{2,\ 0}$ 与箭图 (7.25) 的实正簇变量空间 $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ 相对应，并施加限制条件 (7.26)。于是，

- 所有测地函数都是由五个元素生成的、关于 X_7箭图变量的上簇代数（正劳朗多项式）中的元素，利用缠结关系和泊松关系：

$$G_{1,2} = (da)^{1/2}\left(1+\frac{1}{d}+\frac{1}{da}\right), \qquad \widetilde{G}_{1,2} = (bc)^{1/2}\left(1+\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}\right), \qquad G_B = (fg)^{1/2}\left(1+\frac{1}{f}+\frac{1}{fg}\right)$$

$$G_{2,3} = (gd)^{-1/2}\,(1+1/a) + (f/a)^{1/2}\widetilde{G}_{1,2} + (gd)^{1/2}(1+f),$$
$$\widetilde{G}_{2,3} = (gb)^{-1/2}\,(1+1/c) + (f/c)^{1/2}G_{1,2} + (gb)^{1/2}(1+f)$$

- 保持图(7.25) 不变的每个突变序列，都是德恩扭转和对称变换在 $\Sigma_{2,\,0}$中的组合。所有这些突变和德恩扭转，既是 X_7簇代数的泊松态射，也是由测地函数构成的 Goldman泊松代数的泊松态射。

注7.2. 由于 Birman–Hilden，模曲面S_2的模群具有以下表示。令 d_1、 d_2 d_3 d_4 d_5 、.....分别表示图13中所示曲线上的德恩扭转，其测地函数为 $G_{1,2}$、$G_{2,3}$、 G_B、 $G_{2,3}$、 $G_{1,2}$。那么，

$$\begin{aligned}\mathrm{Mod}(S_2) = \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \quad | \quad & d_i d_j = d_j d_i \ \text{ for } \ |i-j|>1,\\ & d_i d_{i+1} d_i = d_{i+1} d_i d_{i+1},\\ & (d_1 d_2 d_3)^4 = d_5^2,\\ & [(d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5), d_1] = 1,\\ & (d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5)^2 = 1\rangle.\end{aligned}$$

等价地，

$$\begin{aligned}\mathrm{Mod}(S_2) = \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \quad | \quad & d_i d_j = d_j d_i \ \text{ for } \ |i-j|>1,\\ & d_i d_{i+1} d_i = d_{i+1} d_i d_{i+1},\\ & (d_1 d_2 d_3 d_4 d_5)^6 = 1,\\ & (d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5)^2 = 1,\rangle.\end{aligned}$$

~ ~引理 7.3. X_7 中对应于德恩扭转 $G_{1,2}$,$G_{1,3}$, G_B, $G_{2,3}$, $G_{1,2}$ 的簇变换满足关系式 (7.2)

证明。我们通过符号计算检验了突变满足关系 $d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 = \mathrm{Id}$。这意味着第一组关系中的最后两个关系成立。第一组关系中的第三个关系通过符号计算直接检验。符号计算还表明，$(d_1 d_2 d_3 d_4 d_5)^2$ 实现了置换 $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ c & f & g & b & e & d & a \end{pmatrix}$，其阶为 3。这证明了第二组关系中的第三个关系。

□

注 7.4. 注意，由于模群变换是泊松态射，卡西米尔算子在此作用下总是保持不变。特别地，在任何其他具有 X_7 形式的簇中，用变换后的变量表示的组合式 (7.26) 将等于单位元。

备注 7.5. 分离测地线的测地函数用簇变量表示时，表达式长得惊人。根据初始簇的选择， $\mathfrak{M}$ 对应的劳朗多项式包含 46 项， X_7 对应的劳朗多项式包含 50 项，而$K_{3,\,3}$ 以及“原始”簇对应的劳朗多项式也各包含 50 项。这与描述带孔曲面的几何簇形成鲜明对比：边界测地函数的表达式始终只有两项，而相应测地线的长度（即卡西米尔元）则是簇变量对数的线性和。

~ ~证明。为了证明定理，对于每一组测地函数 $G_{1,2}$,$G_{2,3}$, G_B, $G_{2,3}$, $G_{1,2}$，我们将构造表示这些元素的 2×2 矩阵集合。我们固定曲面上的两个点 α 和 β，并考虑曲面上的纤维为 $\mathbb{R}^2$的向量丛。令 $\mathbb{R}^2_\alpha$ 为 α上的纤维， $\mathbb{R}^2_\beta$ 为 β上的纤维。一个平坦的 $PSL_2(\mathbb{R})$-连接将连接 α 与 β 的每条路径 γ 关联到一个平行移动算子 $T_\gamma\colon \mathbb{R}^2_\alpha \to \mathbb{R}^2_\beta$。在 $\mathbb{R}^2_\alpha$ 和 $\mathbb{R}^2_\beta$ 中选择基，我们得到矩阵 M_γ。

基变换 $C_\alpha\colon \mathbb{R}^2_\alpha \to \mathbb{R}^2_\alpha$、 $C_\beta\colon \mathbb{R}^2_\beta \to \mathbb{R}^2_\beta$ 导出作用 $M_\gamma \mapsto C_\beta^{-1} M_\gamma C_\alpha$。如果 γ_1、 γ_2 是连接 α 到 β 的两条路径，那么我们将矩阵 $M_{\gamma_1} M_{\gamma_2}^{-1}$ 与一个以 β 为基点的环路关联起来：该环路先沿 γ_2 的相反方向行进，然后沿 γ_1 行进。显然，这一构造定义了曲面基本群的一个表示，其基点为 β。我们将左侧图 15 所示圈所表示的基本群中的元素记为 $\gamma_{1,2}$、$\gamma_{2,3}$、 γ_B、 $\tilde{\gamma}_{2,3}$、 $\tilde{\gamma}_{1,2}$。注意，这些圈并不独立。也就是说，$\gamma_B = \gamma_{1,\,2}\tilde{\gamma}_{1,2}$，因此，$M_{\tilde{\gamma}_{1,2}} = M_{\gamma_1^{-1},2} M_{\gamma_B}$。

下面我们用 M_i 表示矩阵 M_{γ_i}。为了构造这样的表示，我们需要寻找五个 2×2 矩阵 M_i，每个矩阵表示满足 $G_{i,\,j} = \mathrm{tr}\,\left(M_i M_j^{-1}\right)$ 的平行移动 M_{γ_i}（见图 14），对应二 genus。正如上文所述，矩阵集合 M_1、.....、M_5 在非退化 2×2 矩阵的左乘和右乘作用下确定。

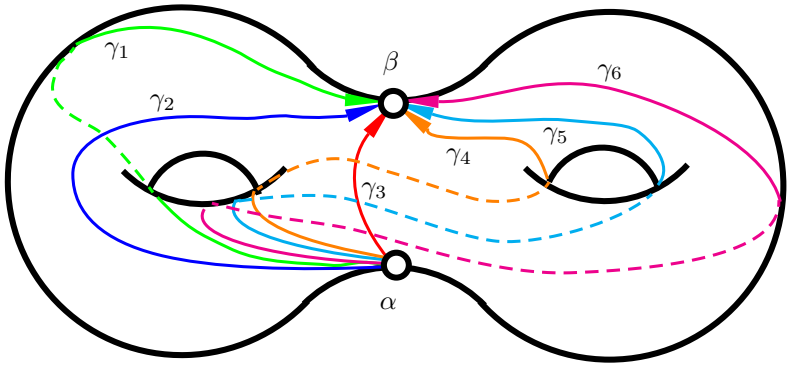


图 14: 双曲二亏格曲面配备了自然的 PSL_2-联络。在二维纤维 $\mathbb{R}^2_\alpha$ 和 $\mathbb{R}^2_\beta$ 中，点 α 和 β 处的基的选择，为连接 α 和 β 的每条路径关联一个 2×2 矩阵。 M_1、……、M_6 是沿连接点 α 和 β 的路径 γ_1、……、γ_6 的平行移动矩阵。对于 $i=1\dots 6$，矩阵 $M_iM_{i+1}^{-1}$ 给出沿环路的平行移动，其测地函数为 $G_{1,\,2}$、$G_{2,\,3}$、G_B、$\widetilde{G}_{2,\,3}$、$\widetilde{G}_{1,\,2}$（见图 13），这些测地函数即为它们的迹。集合 M_1、……、M_5 在对角共轭意义下确定了二亏格曲面上的一个平坦 PSL_2 联络。

我们在 $\mathbb{R}^2_\alpha$ 和 $\mathbb{R}^2_\beta$ 中选择基，使得 $M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$、$M_2=\begin{pmatrix}e^{\ell_{1,\,2}/2}&0\\0&e^{-\ell_{1,\,2}/2}\end{pmatrix}$、$M_3=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$。这些条件穷尽了基的所有选择自由度，因此我们令 $M_4=\begin{pmatrix}d&e\\f&g\end{pmatrix}$、$M_5=\begin{pmatrix}h&e^{-\ell_{1,\,2}}i\\j&k\end{pmatrix}$，其中参数 a、b、c、d、e、f、g、h、i、j、k 满足条件 $ac-b^2=1$、$dg-ef=1$、$kh-ij=1$。注意，参数 $|\ell_{1,\,2}|$ 由 $G_{1,\,2}$ 确定，因此 $\ell_{1,\,2}$ 由 $G_{1,\,2}$ 确定到一个符号。根据定义，测地函数满足

$$G_{1,3}=a+c,\quad G_{1,4}=d+g,\quad G_{1,5}=h+k,\quad G_{2,3}=e^{\ell_{1,2}/2}c+e^{-\ell_{1,2}/2}a,$$
$$G_{2,4}=e^{\ell_{1,2}/2}g+e^{-\ell_{1,2}/2}d,\quad G_{2,5}=e^{\ell_{1,2}/2}k+e^{-\ell_{1,2}/2}h.$$

这些关系为 a、b、c、d、g、h、k 给出一个六元线性方程组，其解 n is

$$c=\frac{G_{2,3}-G_{1,3}e^{-\ell_{1,2}/2}}{e^{\ell_{1,2}/2}-e^{-\ell_{1,2}/2}}\qquad a=\frac{-G_{2,3}+G_{1,3}e^{\ell_{1,2}/2}}{e^{\ell_{1,2}/2}-e^{-\ell_{1,2}/2}}$$
$$g=\frac{G_{2,4}-G_{1,4}e^{-\ell_{1,2}/2}}{e^{\ell_{1,2}/2}-e^{-\ell_{1,2}/2}}\qquad d=\frac{-G_{2,4}+G_{1,4}e^{\ell_{1,2}/2}}{e^{\ell_{1,2}/2}-e^{-\ell_{1,2}/2}}$$
$$k=\frac{G_{2,5}-G_{1,5}e^{-\ell_{1,2}/2}}{e^{\ell_{1,2}/2}-e^{-\ell_{1,2}/2}}\qquad h=\frac{-G_{2,5}+G_{1,5}e^{\ell_{1,2}/2}}{e^{\ell_{1,2}/2}-e^{-\ell_{1,2}/2}}$$

现在，我们利用关系式表示其余参数 b、e、f、i、j

$$G_{3,4}=trM_3M_4^{-1}=ag-bf-be+cd$$
$$G_{3,5}=trM_3M_5^{-1}=ak-b(i+j)+ch$$
$$G_{4,5}=trM_4M_5^{-1}=dk-ej-if+gh$$

令 $\mathfrak{M}_{abc}=G_{a,\,b}G_{b,\,c}G_{a,\,c}-G^2_{a,\,b}-G^2_{b,\,c}-G^2_{a,\,c}$。注意

$$b^2=ac-1=\frac{(e^{\ell_{1,2}/2}+e^{-\ell_{1,2}/2})G_{1,3}G_{2,3}-G^2_{2,3}-G^2_{1,3}}{(e^{\ell_{1,2}/2}-e^{-\ell_{1,2}/2})^2}-1=\frac{G_{1,2}G_{2,3}G_{1,3}-G^2_{1,2}-G^2_{2,3}-G^2_{1,3}+4}{(e^{\ell_{1,2}/2}-e^{-\ell_{1,2}/2})^2}=\frac{\mathcal{M}_{123}+4}{G^2_{1,2}-4}$$

因此，$b=\left[\frac{\mathfrak{M}_{123}+4}{G^2_{1,\,2}-4}\right]$。同理，

$$ef=\frac{\mathfrak{M}_{124}+4}{G^2_{1,2}-4}$$

and

$$(f+e)b=ag+cd-G_{3,4}=\frac{2G_{2,3}G_{2,4}-G_{1,2}G_{1,3}G_{2,4}-G_{1,2}G_{2,3}G_{1,4}+G_{1,3}G_{1,4}(G^2_{1,2}-2)-G_{3,4}G^2_{1,2}+4G_{3,4}}{G^2_{1,2}-4}$$

参数 f 可由后一个方程求得， e 可由前一个方程求得。参数 i、 j 可由方程求得。

$$ij = \frac{\mathfrak{M}_{125} + 4}{G_{1,2}^2 - 4}$$

and

$$(i+j)b = \frac{2G_{2,3}G_{2,5} - G_{1,2}G_{1,3}G_{2,5} - G_{1,2}G_{2,3}G_{1,5} + G_{1,3}G_{1,5}(G_{1,2}^2 - 2) - G_{3,5}G_{1,2}^2 + 4G_{3,5}}{G_{1,2}^2 - 4}$$

这些方程可以求出所有参数 $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$。通过计算机模拟检验的最后一个方程 $dk + gh - ej - if = G_4$,5 给出了 G_1,2, G_1,3, G_1,4, G_1,5, G_2,3, G_2,4, G_2,5,G_3,4, G_3,5, G_4,5 的一致性条件。我们还检验了沿着 A 圈与 B 圈的交换子复合路径的单值化平凡条件；在本例中，该条件由以下矩阵乘积给出：

$$M_5^{-1}M_4M_3^{-1}M_2M_1^{-1}M_5M_4^{-1}M_3M_2^{-1}M_1 = I,$$

由此完成证明。 □

8 高亏格闭黎曼曲面的簇变量描述

本节讨论如何将我们的构造推广到高亏格曲面。注意，对于三阶亏格，我们得到了 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}_{3,\ 0}/\mathbb{Z}_2$ 的有限商的描述。对于亏格 $g > 3$ ，该构造需要进行哈密顿约化，文中将以 $n = 3$ （作为一个玩具示例）和 $n = 5$ 为例讨论。

在图 15 中，我们展示了属为 2、3 和 4 的曲面模式。

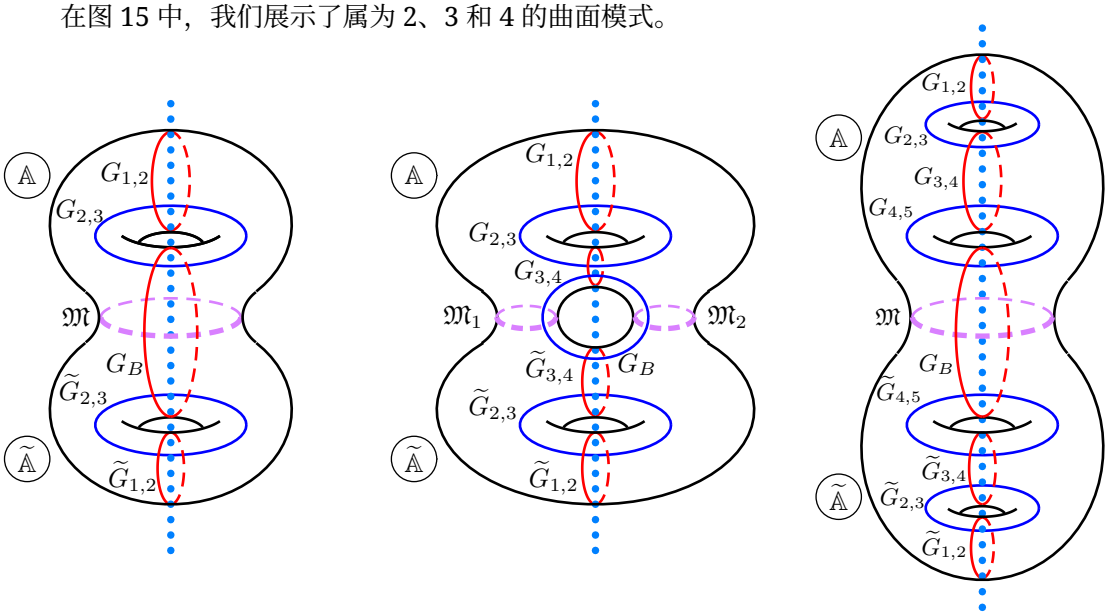


图 15：亏格为二、三和四的光滑黎曼曲面，以及由测地线 $\gamma_{i,\ i+1}$ 和 $\widetilde{\gamma}_{i,\ i+1}$ （˜以相应的测地函数标记）构成的集合；这些测地线生成相应的测地函数子集 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}$ ；相应的卡西米尔元将这两个子集区分开来。在每种情况下，我们都必须再添加一条测地线，其测地函数为 G_B ，以得到一组完整的代数元素，从而利用 Goldman 括号和编织关系生成所有其他测地函数。竖直虚线轴为 $\mathbb{Z}_2$-对称轴。

8.1 三阶亏格

本节给出三亏格曲面的测地函数的簇表达式。˜矩阵元 $a_{i,i+1}$, $\widetilde{a}_{i,i+1}$，我们将其认作测地函数 $G_{i,i+1}$, $G_{i,i+1}$ 】【。

$$G_{1,2} = \langle b_3a_3d_2c_3\rangle, \quad G_{2,3} = \langle c_3c_2b_2a_2d_3\rangle, \quad G_{3,4} = \langle d_3d_2d_1c_1b_1a_1\rangle,$$
$$\widetilde{G}_{1,2} = \langle d_1a_3b_2c_1\rangle, \quad \widetilde{G}_{2,3} = \langle c_1c_2d_2a_2b_1\rangle, \quad \widetilde{G}_{3,4} = \langle b_1b_2b_3c_3d_3a_1\rangle,$$

与 $|G_{1,\ 2}| = 5$、 $|G_{2,\ 3}| = 6$ 和 $|G_{3,\ 4}| = 7$。例如，突变对 $G_{1,\ 2}$ 的作用给出

$$\begin{aligned}
\mu_{a_1} G_{1,2} &= G_{1,2} = \langle b_3 a_3 d_2 c_3 \rangle, & \mu_{a_2} G_{1,2} &= \langle b_3 a_3 a_2 d_2 c_3 \rangle, \\
\mu_{a_3} G_{1,2} &= \langle b_3 d_2 c_3 \rangle, & \mu_{b_1} G_{1,2} &= G_{1,2} = \langle b_3 a_3 d_2 c_3 \rangle, \\
\mu_{b_2} G_{1,2} &= \langle b_3 b_2 a_3 d_2 c_3 \rangle, & \mu_{b_3} G_{1,2} &= \langle a_3 d_2 c_3 b_3 \rangle, \\
\mu_{c_1} G_{1,2} &= G_{1,2} = \langle b_3 a_3 d_2 c_3 \rangle, & \mu_{c_2} G_{1,2} &= \langle b_3 a_3 d_2 c_2 c_3 \rangle, \\
\mu_{c_3} G_{1,2} &= \langle c_3 b_3 a_3 d_2 \rangle, & \mu_{d_1} G_{1,2} &= \langle b_3 a_3 d_1 d_2 c_3 \rangle, \\
\mu_{d_2} G_{1,2} &= \langle b_3 a_3 c_3 \rangle, & \mu_{d_3} G_{1,2} &= \langle b_3 a_3 d_2 d_3 c_3 \rangle.
\end{aligned}$$

现在我们将原始箭图变换为一个更具对称性的箭图：为此，我们进行四次突变：$\mu_{d_1}\mu_{c_2}\mu_{b_3}$ 和 μ_{a_1}（顺序任意，因为它们彼此可交换）。所得箭图具有右侧图 16 所示的莫比乌斯带状结构。

右侧箭图中的同一测地函数的表达式变得更加对称：

$$\begin{aligned}
G_{1,2} &= \langle a_3 d_1 d_2 c_2 c_3 b_3 \rangle, \quad G_{2,3} = \langle c_3 b_3 b_2 a_2 a_1 d_3 \rangle, \quad G_{3,4} = \langle a_1 d_3 d_2 c_2 c_1 b_1 \rangle, \\
\widetilde{G}_{1,2} &= \langle a_3 b_3 b_2 c_2 c_1 d_1 \rangle, \quad \widetilde{G}_{2,3} = \langle c_3 d_3 d_2 a_2 a_3 b_3 \rangle, \quad \widetilde{G}_{3,4} = \langle a_1 b_1 b_2 c_2 c_3 d_3 \rangle,
\end{aligned}$$

以及所有 $|G_{i,i+1}| = 7$.

测地函数 $\mathfrak{M}_1$ 和 $\mathfrak{M}_2$ 对应于两个分离圈由代数关系确定

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = G_{1,3}G_{2,4} - G_{1,2}G_{3,4} - G_{2,3}G_{1,4} \tag{8.27}$$

$$\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 = G_{1,2}G_{2,3}G_{3,4}G_{1,4} - G_{1,2}G_{2,3}G_{1,3} - G_{2,3}G_{3,4}G_{2,4} - G_{1,2}G_{1,4}G_{2,4} - G_{3,4}G_{1,4}G_{1,3} + \sum_{1\le i<j\le 4} G_{i,j}^2 - 4 \tag{8.28}$$

第一个关系式是矩阵 $\mathbb{A} - \mathbb{A}^{\mathrm{T}}$ 的帕夫方（或者，$\sqrt{\mathbb{A} + (-1)\mathbb{A}^{\mathrm{T}}}$）。第二个关系式是 λ 在 $\mathbb{A} + \lambda\mathbb{A}^{\mathrm{T}}$ 中的负系数。它们在替换 $G_{i,j} \to \widetilde{G}_{i,j}$ 后保持不变，并且与 $\widetilde{\ }$ 所有测地函数 $G_{i,j}$ 和 $G_{i,j}$ 对易。

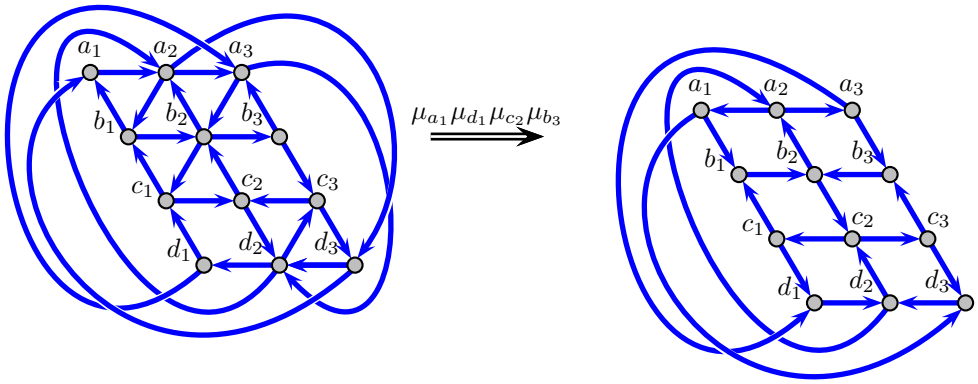


图 16：左侧的原始 SL_4：箭图经由一系列突变（从右向左）$\mu_{a_1}\mu_{d_1}\mu_{c_2}\mu_{b_3} := \mu_{a_1 d_1 c_2 b_3}$ 变换为右侧的对称箭图。我们用相同的字母表示原始和变换后的簇变量，希望这不会造成混淆。

引理 8.1. 每个 SL_n 箭图都可以变换为一个“规则”箭图，其顶点为 $s_{i,\ j}$、 $i = 1$、……、 $n-1$、$j = 1$、 $\ldots n$，并且箭头连接 $s_{i,\ j}$ 与 $s_{i\pm1,\ j}$ 以及 $s_{i,\ j\pm1}$，其中我们设 $s_{i,\ n+1} = s_{n-i,\ 1}$ 和 $s_{i,\ 0} = s_{n-i,\ n}$（莫比乌斯型粘合）；箭头方向如图 16 所示交替排列。新顶点 a_t 的阶为 $2n$，并与所有顶点 $a_{1,\ j}$ 和 $a_{n-1,\ j}$ 相邻；箭头的排列方式使得每个顶点 $a_{i,\ j}$ 的阶均为四，且恰有两条入边和两条出边。这样修改后的箭图的卡西米尔元为 $a_t \prod_{i,\ j} a_{i,\ j} = 1$。

证明。与图 16 所示类似的一系列突变即可证明该结论 . □

现在我们来处理构造尚缺少的测地函数 G_B 的问题；尤其是，它与 $\mathfrak{M}_1$ 和 $\mathfrak{M}_2$ 不对易。为此，我们参考图 16 左侧的原始 SL_4 箭图。

先在 a_3 处突变，再在 a_2 处突变，得到一个 a_1 顶点阶数为 1 的箭图（右侧的图 17）。接着，我们仿照 SL_3 情形，添加一个新顶点（并与之关联变量 a_t ），且只将它与 a_1 和 a_2 相连（从而得到一只“蝴蝶之翼”）；同时引入卡西米尔元 $C = a_t a_1 a_2^2 a_3^2 b_1 \cdots d_3$，其取值将在下文根据相容性条件确定。

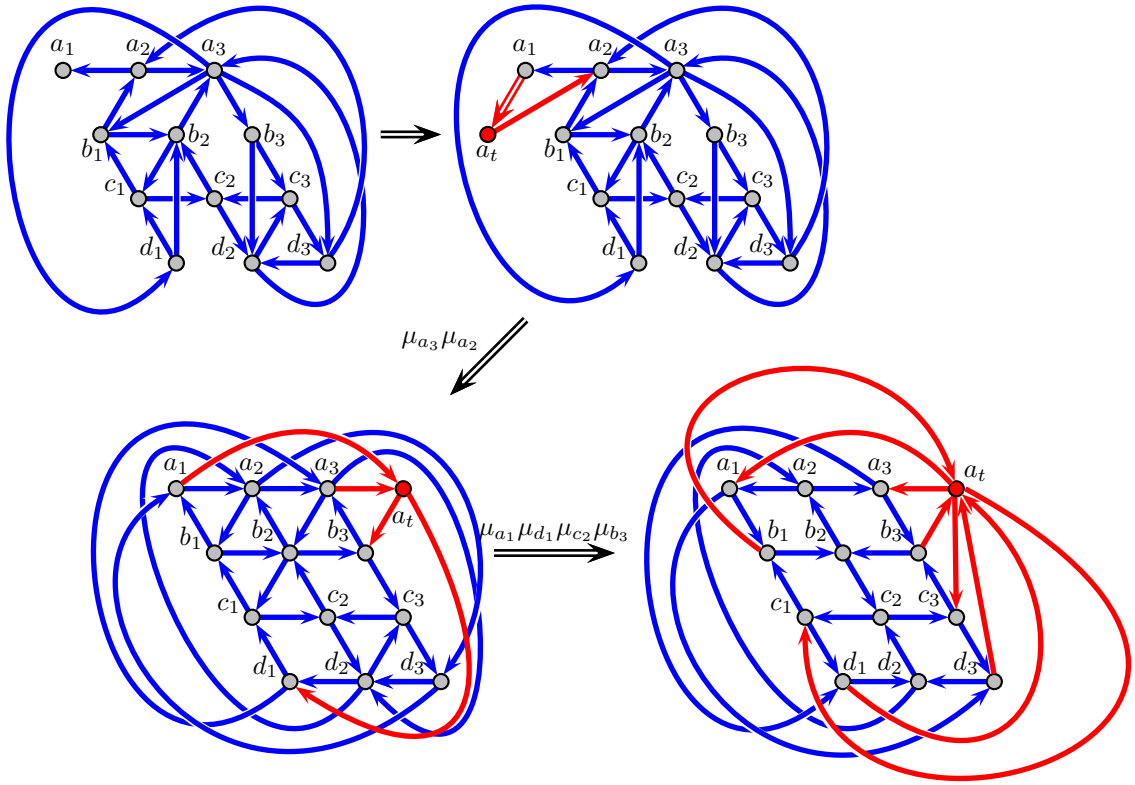


图 17： 先在 a_3 处、再在 a_2 处进行突变，将 SL_4 的原始箭图变为左侧所示的形式；在中间图中，我们添加新的顶点 a_t 以及两条有向边；新的测地函数（记为 G_B）为 $\langle a_1 a_t \rangle$。通过先在 a_2 处、再在 a_3处进行突变，将该箭图变回原始箭图后，我们得到添加了四阶顶点 a_t 的原始箭图；注意，添加边后，箭图的全部十三个顶点的入边数和出边数现在相同。若通过先在 d_1、 c_2、 b_3 处、再在 a_1处进行突变，将原始箭图变为一个“对称”箭图，则得到一个八阶顶点 a_t 以及其余顶点均为四阶的箭图（这是图中变换链的最后一个箭图）。

在变换后的箭图中（图 17 的第二幅图），我们将新的测地函数与缺失的环 B对应，其表达式为

$$G_B = \langle a_1 a_t \rangle = (a_1 a_t)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_t}\right).$$

容易看出， G_B 与$G_{1,2}$ 和$G_{2,3}$对易。为此，我们来考察图 17 中右上方箭图的测地函数：

$$\mu_{a_3}\mu_{a_2} G_{1,2} = \langle b_3 d_2 c_3 \rangle, \qquad \mu_{a_3}\mu_{a_2} \widetilde{G}_{1,2} = \langle d_1 b_2 c_1 \rangle,$$
$$\mu_{a_3}\mu_{a_2} G_{2,3} = \langle c_3 c_2 b_2 a_3 d_3 \rangle, \qquad \mu_{a_3}\mu_{a_2} \widetilde{G}_{2,3} = \langle c_1 c_2 d_2 a_3 b_1 \rangle,$$
$$\mu_{a_3}\mu_{a_2} G_{3,4} = \langle d_3 a_2 d_2 a_3 d_1 c_1 b_1 a_2 a_1 \rangle, \qquad \mu_{a_3}\mu_{a_2} \widetilde{G}_{3,4} = \langle b_1 (b_2 a_2) a_3 b_3 c_3 d_3 a_2 a_1 \rangle.$$

前两个表达式不含变量 a_1 和 a_2 ，因此 $G_B = \langle a_1 a_t \rangle$ 与经过$\widetilde{\ }$ 变换的$G_{1,2}$ 和$G_{2,3}$ 以及$G_{1,2}$ 和$G_{2,3}$ 对易（但不与$G_{3,4}$ 和$G_{3,4}$对易）。

变回原来的 SL_4 箭图后，我们得到图 17 中链上的第三个箭图：新增的顶点 a_t 变为四阶顶点，且每个顶点的入边数和出边数相同，因此卡西米尔元就是所有变量各取一次幂后的乘积：

$$C = a_t a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 c_1 c_2 c_3 d_1 d_2 d_3. \tag{8.29}$$

在修正后的原始 SL_4 箭图中， G_B 变为

$$G_B = \langle a_1 a_2 a_3 a_t \rangle. \tag{8.30}$$

如果我们继续进行，在 d_1、 c_2、 b_3 和 a_1 处执行突变，就会得到图 17 中链条末端的“对称”箭图。此时顶点 a_t 的阶变为八，所有其他顶点的阶都将为四，而 G_B 测地函数变为 $\langle a_2 a_3 (d_1 b_3) a_t a_1 \rangle$，其中 $\ldots (xy) \ldots$ 表示相应表达式中含有 $\ldots \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}\right) \ldots$ 项。例如， G_B 的这个表达式包含八项：

$$G_B = (a_2 a_3 d_1 b_3 a_t a_1)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 d_1} + \frac{1}{a_2 a_3 b_3} + \frac{1}{a_2 a_3 d_1 b_3} + \frac{1}{a_2 a_3 d_1 b_3 a_t} + \frac{1}{a_2 a_3 d_1 b_3 a_t a_1} \right]$$

我们希望识别所构造的量

$$\{G_{12}, G_{23}, G_{34}, G_B, \widetilde{G}_{34}, \widetilde{G}_{23}, \widetilde{G}_{12}\} \tag{8.31}$$

与三亏格曲面上环路相关的测地函数（见图 15）。注意，这些环路构成一条链，相邻两个环路的交数为一，其余环路对的交数为零。我们构造矩阵$U \in \mathcal{A}_8$ ，其中 $U_{i,\ i+1},\ i = [1,7]$ 由序列 (8.31) 中对应的元素给出，其余所有项均通过斯基因关系和泊松关系计算得出。

$$U_{i,j} = \frac{1}{2} U_{i,k} U_{k,j} + \{U_{i,k}, U_{k,j}\},\ \text{here } i < k < j.$$

为了将条目 $U_{i,j}$ 识别为三亏格曲面上相应环路的测地函数，矩阵 U 必须满足秩条件：$\mathrm{rank}(U + U^{\mathrm{T}}) \leq 4$。Maple 上的符号计算表明，只有卡西米尔元 (8.29) $C = -1$满足秩条件。

8.2 $\mathbb{Z}_2$对称性

现在我们来讨论文献中关于 $\mathcal{A}_n$ 中辫群变换时大多被忽视的问题：这些变换是否生成 $\mathcal{T}_{g,s}$ $(s = 1, 2)$ 的整个模群？或者说，对 $G_{i,i+1}$,~$G_{i,i+1}$ 和 G_B 执行扭转，是否能生成 $\mathcal{T}_{n-1,0}$ 的整个模群？对于 $\mathcal{T}_{1,1}$ 和 $\mathcal{T}_{2,0}$，答案是肯定的；但对于更高亏格，我们会遇到 $\mathbb{Z}_2$ 对称性问题：事实上，暂且将 $\Sigma_{g,s}$ 上的度量结构搁置一旁，只考虑 $\Sigma_{n-1,0}$ 的拓扑以及该曲面上闭路径的同伦类型。

~让我们考察图 15 中闭路径的结构。注意，对应于 $G_{i,i+1}$, $G_{i,i+1}$ 和 G_B 的所有路径都具有关于旋转 180°（或关于垂直轴反射）的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性。由此立即可知，若我们对 $\mathbb{Z}_2$-对称对象进行求和、乘法或泊松括号等任何二元运算，那么所得结果本身也将具有 $\mathbb{Z}_2$ 对称性。这意味着，在这些关系的右边，我们永远无法得到对应于非 $\mathbb{Z}_2$ 对称曲线的单个测地函数（例如，在 $n = 4$ 情形下的 $\mathfrak{M}_1$ 或 $\mathfrak{M}_2$ ）；所有此类函数都只会以 $\mathbb{Z}_2$-对称组合的形式出现（例如 $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ 或 $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$）。

值得一提的是，亏格为二的情形不存在这一微妙之处，因为所有闭曲线都是 $\mathbb{Z}_2$-对称的（这反映了一个众所周知的事实：亏格为二的曲线都存在双曲椭圆一致化）。

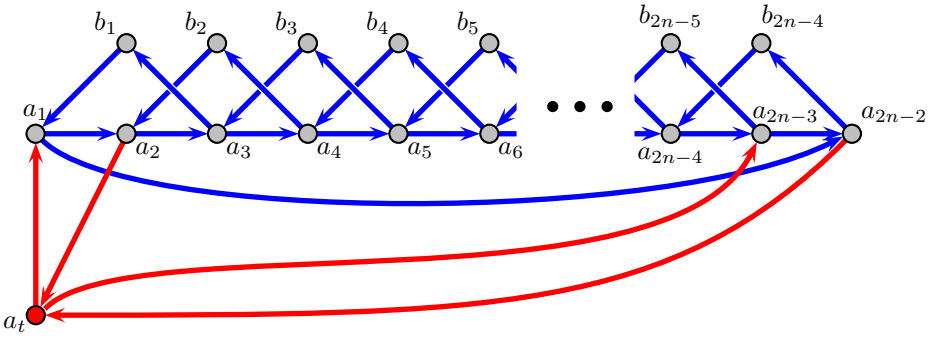
请注意，对于带有 $n \geq 5$ 的 $\mathcal{A}_n$ 代数，也存在同样的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性问题：如果我们不局限于与相应黎曼曲面的理想三角剖分相关的几何泊松叶$\Sigma_{g,\ s}$，那么代数中非 $\mathbb{Z}_2$ 对称元素的表达式通常不再是劳朗多项式。

猜想 8.2. 对于 GL_4 的扩展粘合箭图，在第 8.1 节中构造的簇代数给出了亏格为三的光滑黎曼曲面上平坦 SL_2 (ℂ)-联络的 Teichmuller 空间 $\mathcal{T}_{3,\ 0}$ 的 $\mathbb{Z}_2$ 商的描述，且满足

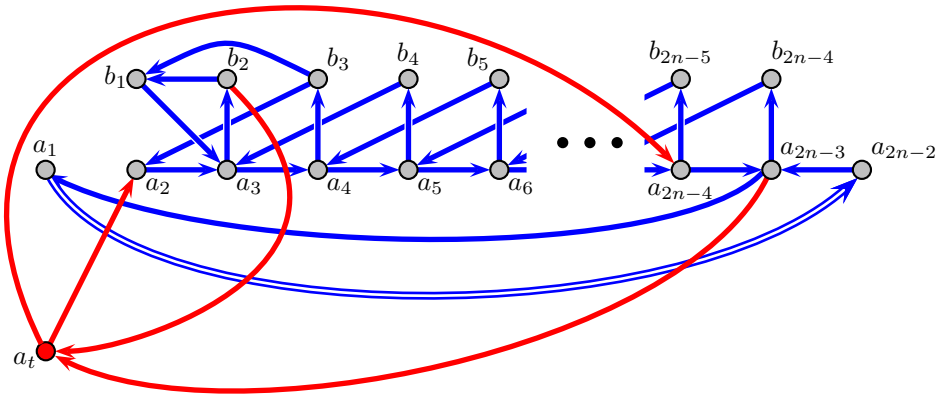
(A)对每条 Z_2-不变测地线 γ，我们建立对应关系，将测地函数 $G_\gamma \in Z_+[a_1^{\pm 1/2}, \ldots, a_t^{\pm 1/2}]$与之对应，该函数是上簇代数的一个元素。(B)所有如此构造的 G_γ 都满足编织关系和泊松-戈德曼括号。(C) 为了满足秩条件——这是 $U_{i,j} = \mathrm{tr}\ M_i^{-1} M_j$ 与 $M_i \in SL_2$(ℂ) 的必要条件——我们必须设定卡西米尔元 $C = -1$。

8.3 $n > 3$ 时的辫群变换

考虑“对称”箭图中的一个子图：它沿着一条“之”字形路径延伸，经过 $2n-2$ 个顶点，其中前两个顶点 a_1 和 a_2 以及最后两个顶点 a_{2n-3} 和 a_{2n-2} 位于箭图的外边界上。我们还包括顶点 a_t 以及所有与顶点 a_i 相邻的顶点 b_1、……、b_{2n-4}；在对称箭图中（例如图 16），这些顶点交替位于“之”字形路径的右侧和左侧。我们得到的模式如下：



我们为该子图对应地赋予一个矩阵元（测地函数）$\langle a_1 a_2 \cdots a_{2n-3} a_{2n-2} \rangle$。现在我们依次在顶点 a_2、a_3、……、a_{2n-4}、a_{2n-3} 处进行突变。所得子图为



并且它包含一个“蝴蝶翅膀”子图，其顶点为 a_1、a_{2n-2} 和 a_{2n-3}。经过相同的突变链后，矩阵元 $\langle a_1 \cdots a_{2n-2} . \rangle$ 变为 $\langle a_1 a_{2n-2} \rangle$。接着，在 a_1 或 a_{2n-2} 处突变会产生辫群变换（正向或逆向）。因此，在“对称”箭图中对应这一扭转的突变链为

$$\mu_{a_2}\mu_{a_3}\cdots\mu_{a_{2n-3}}\mu_{a_{2n-2}}\mu_{a_{2n-3}}\cdots\mu_{a_3}\mu_{a_2}, \tag{8.32}$$

或者是将 $\mu_{a_{2n-2}}$ 替换为 μ_{a_1} 的类似链条。

经过突变序列 (8.32) 后，我们得到相同的箭图，其中变换后的变量 a'_i 和 b'_j 为

$$a'_i = a_i \frac{\eta_{i+1}}{\eta_{i-1}},\ i = 2, \ldots, 2n-3, \quad a'_1 = \frac{\eta_2}{a_{2n-2}a_{2n-3}\cdots a_2}, \quad a'_{2n-2} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_{2n-3} a_{2n-2}^2}{\eta_1 \eta_{2n-3}}, \tag{8.33}$$

$$b'_j = b_j \frac{\eta_j}{\eta_{j+2}},\ j = 1, \ldots, 2n-4 \quad \left(a'_t = a_t \frac{\eta_1 \eta_{2n-3}}{\eta_2 a_1 a_{2n-2}} \right), \tag{8.34}$$

其中

$$\begin{aligned} \eta_{2n-2} &= 1, \\ \eta_{2n-3} &= 1 + a_{2n-2}, \\ \eta_{2n-4} &= 1 + a_{2n-2} + a_{2n-2}a_{2n-3}, \\ &\vdots \\ \eta_1 &= 1 + a_{2n-2} + a_{2n-2}a_{2n-3} + \cdots + a_{2n-2}a_{2n-3}\cdots a_3 a_2, \end{aligned} \tag{8.35}$$

（注意，η_i 的公式中没有 a_1。）

引理 8.3. 变换 (8.33)、(8.34)，其中 η_k 由 (8.35) 定义，对应于矩阵元为 $G_{i,\ i+1}=\langle a_1a_2\cdots a_{2n-2}\rangle$ 的辫群变换。

证明。我们首先证明 $G_{i,\ i+1}$ 在变换 (8.33) 下保持不变：

$$\begin{aligned}
G'_{i,i+1} =&(a'_1\cdots a'_{2n-2})^{1/2}\left(1+\frac{1}{a'_1}+\frac{1}{a'_1a'_2}+\cdots+\frac{1}{a'_1a'_2\cdots a'_{2n-3}}+\frac{1}{a'_1a'_2\cdots a'_{2n-3}a'_{2n-2}}\right)\\
=&(a_1\cdots a_{2n-2})^{1/2}\frac{1}{\eta_1}\left(1+\frac{a_{2n-2}\cdots a_2}{\eta_2}+\frac{a_{2n-2}\cdots a_3\eta_1}{\eta_2\eta_3}+\frac{a_{2n-2}\cdots a_4}{\eta_1\eta_2}\eta_2\eta_3\eta_4+\right.\\
&\left.+\frac{a_{2n-2}\cdots a_5}{\eta_1\eta_2\eta_3}\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5+\cdots+\frac{a_{2n-2\eta_1}}{\eta_{2n-3}\eta_{2n-2}}+\frac{\eta_1^2\eta_{2n-3}}{a_1a_2\cdots a_{2n-2}\eta_{2n-3}\eta_{2n-2}}\right)\\
=&(a_1\cdots a_{2n-2})^{1/2}\left(\frac{\eta_2+a_{2n-2}\cdots a_2}{\eta_1\eta_2}+\frac{a_{2n-2}\cdots a_3}{\eta_2\eta_3}+\cdots+\frac{a_{2n-2}}{\eta_{2n-3}}+\frac{\eta_1}{a_1a_2\cdots a_{2n-2}}\right)\\
=&(a_1\cdots a_{2n-2})^{1/2}\left(\left[\frac{1}{\eta_2}+\frac{a_{2n-2}\cdots a_3}{\eta_2\eta_3}\right]+\cdots+\frac{a_{2n-2}}{\eta_{2n-3}}+\frac{\eta_1}{a_1a_2\cdots a_{2n-2}}\right)\\
=&(a_1\cdots a_{2n-2})^{1/2}\left(\left[\frac{1}{\eta_3}+\frac{a_{2n-2}\cdots a_4}{\eta_3\eta_4}\right]+\cdots+\frac{a_{2n-2}}{\eta_{2n-3}}+\frac{\eta_1}{a_1a_2\cdots a_{2n-2}}\right)\\
=&\cdots=(a_1\cdots a_{2n-2})^{1/2}\left(\left[\frac{1}{\eta_{2n-3}}+\frac{a_{2n-2}}{\eta_{2n-3}}\right]+\frac{\eta_1}{a_1a_2\cdots a_{2n-2}}\right)\\
=&(a_1\cdots a_{2n-2})^{1/2}\left(1+\frac{\eta_1}{a_1a_2\cdots a_{2n-2}}\right)\\
=&(a_1\cdots a_{2n-2})^{1/2}\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+\cdots+\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{2n-2}}\right)=G_{i,i+1}.
\end{aligned}$$

接下来，由于变换 (8.33)、(8.34) 是泊松同构，它保持乘积和泊松~代数，因此只需考察生成元 $G_{l,\ l+1}$、 $G_{l.l+1}$ 和 G_B的变换。

一个重要的观察是，对于任意一条与路径 $a_1\to a_2\to\cdots\to a_{2n-2}$相交的路径 $\cdots\to b_k\to a_k\to a_{k+1}\to b_{k-1}\to\cdots$，乘积 $b_ka_ka_{k+1}b_{k-1}$和组合 $\frac{1}{b_k}+\frac{1}{b_ka_k}+\frac{1}{b_ka_ka_{k+1}}$都保持不变。$b_ka_ka_{k+1}b_{k-1}$ 的不变性显而易见，可留作简单练习；而 $\frac{1}{b_k}+\frac{1}{b_ka_k}+\frac{1}{b_ka_ka_{k+1}}$ 的不变性则可由以下等式链推出，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b'_k}+\frac{1}{b'_ka'_k}+\frac{1}{b'_ka'_ka'_{k+1}}=\frac{\eta_{k+2}}{\eta_kb_k}+\frac{\eta_{k+2}\eta_{k-1}}{b_ka_k\eta_k\eta_{k+1}}+\frac{\eta_{k-1}}{b_ka_ka_{k+1}\eta_{k+1}}\\
&=\frac{\eta_{k+2}}{\eta_kb_k}\frac{a_k\eta_{k+1}+a_k\cdots a_{2n-2}+\eta_k}{a_k\eta_{k+1}}+\frac{a_k\cdots a_{2n-2}+a_{k+1}\cdots a_{2n-2}+\eta_{k+1}}{b_ka_ka_{k+1}\eta_{k+1}}\\
&=\frac{a_{k+2}\cdots a_{2n-2}}{b_k\eta_{k+1}}+\frac{a_{k+2}\cdots a_{2n-2}+\eta_{k+2}}{b_ka_k\eta_{k+1}}+\frac{\eta_{k+2}(\eta_{k+1}+a_{k+1}\cdots a_{2n-2})}{b_k\eta_k\eta_{k+1}}+\frac{1}{b_ka_ka_{k+1}}\\
&=\frac{a_{k+2}\cdots a_{2n-2}}{b_k\eta_{k+1}}+\frac{1}{b_ka_k}+\frac{\eta_{k+2}}{b_k\eta_{k+1}}+\frac{1}{b_ka_ka_{k+1}}\\
&=\frac{a_{k+2}\cdots a_{2n-2}+\eta_{k+2}}{b_k\eta_{k+1}}+\frac{1}{b_ka_k}+\frac{1}{b_ka_ka_{k+1}}\\
&=\frac{1}{b_k}+\frac{1}{b_ka_k}+\frac{1}{b_ka_ka_{k+1}}
\end{aligned}$$

这意味着 $G_{l,l+1}$ 对于所有 l 以及$G_{l,l+1}$，带有 $|l-i|\geq 2$ 的对象在这一系列突变下是不变的。接下来需要检查变换律

$$G_{i-1,i}=\langle b_2x_3b_4x_5\cdots x_{2n-5}b_{2n-4}b_1a_1a_2\rangle \tag{8.36}$$

并且对于

$$G_{i+1,i+2}=\langle a_{2n-3}a_{2n-2}b_{2n-4}b_1x_2b_3x_3\cdots x_{2n-6}b_{2n-5}\rangle, \tag{8.37}$$

其中， x_k 表示不受上述突变序列影响的变量（为简便起见，以下计算中我们常省略 x变量的下标）。经过一些代数运算，我们得到变换后的$G_{i-1,\ i}$ 和

$G_{i+1,\ i+2}$:

$$G'_{i-1,i} = \frac{(b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4} b_1 a_1 a_2)^{1/2}}{(a_1 a_2 \cdots a_{2n-2})^{1/2}} \left(\eta_2 + \frac{\eta_4}{b_2} + \frac{\eta_4}{b_2 x} + \frac{\eta_6}{b_2 x b_4} + \frac{\eta_6}{b_2 x b_4 x} + \cdots + \frac{1}{b_2 x b_4 x \cdots b_{2n-4}} \left[1 + \frac{1}{b_1} \right] \right), \tag{8.38}$$

and

$$G'_{i+1,i+2} = \frac{(a_{2n-3} a_{2n-2} b_{2n-4} b_1 x b_3 x \cdots x b_{2n-5})^{1/2}}{(a_1 a_2 \cdots a_{2n-2})^{1/2}} \left((a_1 a_2 \cdots a_{2n-2}) \left[1 + \frac{1}{a_{2n-3}} \right] + \frac{\eta_{2n-4} \eta_1}{a_{2n-2} a_{2n-3}} + \frac{1}{a_{2n-2} a_{2n-3} b_{2n-4}} \left[\eta_1 + \frac{\eta_3}{b_1} + \frac{\eta_3}{b_1 x} + \frac{\eta_5}{b_1 x b_3} + \frac{\eta_5}{b_1 x b_3 x} + \cdots + \frac{\eta_{2n-3}}{b_1 x b_3 x \cdots x b_{2n-5}} \right] \right).$$

我们仅给出 $G'_{i-1,i}$ 的变换律，$G'_{i+1,i+2}$ 的变换律可用类似方法得到。我们从泊松关系开始:

$$\left\{ b_k, \langle a_1 \cdots a_{2n-2} \rangle \right\} = - b_k (a_1 \cdots a_{2n-2})^{1/2} \left(\frac{1}{a_1 \cdots a_k} + \frac{1}{a_1 \cdots a_k a_{k+1}} \right), \ k = 1, \ldots, 2n-4, \tag{8.39}$$

$$\left\{ a_1, \langle a_1 \cdots a_{2n-2} \rangle \right\} = a_1 (a_1 \cdots a_{2n-2})^{1/2} \left(1 + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 \cdots a_{2n-2}} \right), \tag{8.40}$$

$$\left\{ a_2, \langle a_1 \cdots a_{2n-2} \rangle \right\} = a_2 (a_1 \cdots a_{2n-2})^{1/2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} \right). \tag{8.41}$$

因此，未变换矩阵元之间的泊松括号为:

$$\begin{aligned}
\{G_{i-1,i}, G_{i,i+1}\} &= G_{i-1,i} (a_1 \cdots a_{2n-2})^{1/2} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{2n-3}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_1 \cdots a_{2n-2}} \right) \right] \\
&\quad + (b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4} b_1 a_1 a_2)^{1/2} (a_1 a_2 \cdots a_{2n-2})^{1/2} \left\{ \left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_2 x} \right) \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \right) + \right. \\
&\quad + \left(\frac{1}{b_2 x b_4} + \frac{1}{b_2 x b_4 x} \right) \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} \right) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4}} \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{2n-3}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4} b_1} \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{2n-3}} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4} b_1 a_1} \left(-1 + \frac{2}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{2n-3}} + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{2n-3} a_{2n-2}} \right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4} b_1 a_1 a_2} \left(-1 - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{2n-3} a_{2n-2}} \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} G_{i-1,i} G_{i,i+1} + G_{i-1,i} (a_1 a_2 \cdots a_{2n-2})^{1/2} \left(1 + \frac{1}{a_1} \right) \\
&\quad + \frac{(b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4} b_1 a_1 a_2)^{1/2}}{(a_1 a_2 \cdots a_{2n-2})^{1/2}} \left\{ \left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_2 x} \right) (\eta_2 - \eta_4) + + \left(\frac{1}{b_2 x b_4} + \frac{1}{b_2 x b_4 x} \right) (\eta_2 - \eta_6) + \right. \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4}} (\eta_2 - \eta_{2n-2}) + \frac{1}{b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4} b_1} (\eta_2 - \eta_3 + \eta_1 - 1) \\
&\quad + \frac{1}{b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4} b_1 a_1} (-a_1 \cdots a_{2n-2} + 2 a_3 \cdots a_{2n-2} + a_4 \cdots a_{2n-2} + \cdots + a_{2n-2} + 1) \\
&\quad \left. + \frac{1}{b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4} b_1 a_1 a_2} (-a_1 \cdots a_{2n-2} - a_2 \cdots a_{2n-2} + a_3 \cdots a_{2n-2} + a_4 \cdots a_{2n-2} + \cdots + a_{2n}{}^{-2} + 1) \right\} \\
&= [\text{cf. (8.38)}] \quad - \frac{1}{2} G_{i-1,i} G_{i,i+1} - G'_{i-1,i} + \frac{(b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4} b_1 a_1 a_2)^{1/2}}{(a_1 a_2 \cdots a_{2n-2})^{1/2}} \left\{ \eta_2 + \frac{1}{b_2 x b_4 x \cdots x b_{2n-4} b_1} + \right.
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_2x}+\cdots+\frac{1}{b_2x\cdots xb_{2n-4}b_1}\right)\eta_2$$
$$+\left(1+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_2x}+\cdots+\frac{1}{b_2x\cdots xb_{2n-4}b_1}+\frac{1}{b_2x\cdots xb_{2n-4}b_1a_1}+\frac{1}{b_2x\cdots xb_{2n-4}b_1a_1a_2}\right)(a_1\cdots a_{2n-2}+a_2\cdots a_{2n-2})$$
$$+\frac{1}{b_2xb_4x\cdots xb_{2n-4}b_1}(\eta_1-\eta_3-1)$$
$$+\frac{1}{b_2xb_4x\cdots xb_{2n-4}b_1a_1}(-a_1\cdots a_{2n-2}+2a_3\cdots a_{2n-2}+a_4\cdots a_{2n-2}+\cdots+a_{2n-2}+1)$$
$$+\frac{1}{b_2xb_4x\cdots xb_{2n-4}b_1a_1a_2}(-a_1\cdots a_{2n-2}-a_2\cdots a_{2n-2}+a_3\cdots a_{2n-2}+a_4\cdots a_{2n-2}+\cdots+a_{2n-2}+1)\Big\}$$
$$=-\frac{1}{2}G_{i-1,i}G_{i,i+1}-G'_{i-1,i}+G_{i-1,i}G_{i,i+1}+\frac{(b_2xb_4x\cdots xb_{2n-4}b_1a_1a_2)^{1/2}}{(a_1a_2\cdots a_{2n-2})^{1/2}}\left\{\eta_2-\left(1+\frac{1}{b_2\cdots b_1a_1}+\frac{1}{b_2\cdots b_1a_1a_2}\right)\eta_2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{b_2\cdots b_1}(\eta_1-\eta_3)+\frac{1}{b_2\cdots b_1a_1}(-a_1\cdots a_{2n-2}+a_3\cdots a_{2n-2}+\eta_2)+\frac{1}{b_2\cdots b_1a_1a_2}(-a_1\cdots a_{2n-2}-a_2\cdots a_{2n-2}+\eta_2)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}G_{i-1,i}G_{i,i+1}-G'_{i-1,i}+\frac{(b_2xb_4x\cdots xb_{2n-4}b_1a_1a_2)^{1/2}}{(a_1a_2\cdots a_{2n-2})^{1/2}}\left\{\frac{1}{b_2\cdots b_1}(a_2\cdots a_{2n-2}+a_3\cdots a_{2n-2})\right.$$
$$\left.-\frac{a_2\cdots a_{2n-2}}{b_2\cdots b_1}+\frac{a_3\cdots a_{2n-2}}{b_2\cdots b_1a_1}-\frac{a_3\cdots a_{2n-2}}{b_2\cdots b_1}-\frac{a_3\cdots a_{2n-2}}{b_2\cdots b_1a_1}\right\}=\frac{1}{2}G_{i-1,i}G_{i,i+1}-G'_{i-1,i}.$$

因此我们得到

$$G'_{i-1,i}=\frac{1}{2}G_{i-1,i}G_{i,i+1}-\{G_{i-1,i},G_{i,i+1}\}=G_{i-1,i}G_{i,i+1}-G_{i-1,i+1},\tag{8.42}$$

这就是辫群变换下正确的变换律。证明完毕。 W

e d0 不验证 fy the 扭转 a long G_B; 而不是 d, 我们在 t 中使用它 he 下一节到 s how the preservation o f the

当 $n=5$ 的情形下的哈密顿约化条件。

因此，沿着 $G_{i,i+1}$, $G_{i,i+1}$ 和 G_B 的所有辫群变换都可以实现为（扩展） SL_n 箭图中的一系列突变。

注8.4.注意，上述扭转（以及相应的辫群作用）不会生成 $n>3$的整个模群：所有这些扭转都保持 $\mathbb{Z}_2$ 对称性（对于 $g=2$ 曲面而言，这种对称性自然成立，因为它们允许超椭圆一致化）。对于更高的亏格，我们只能生成整个模群的一个 $\mathbb{Z}_2$ 商。

对于相应的测地函数，那些具有 $\mathbb{Z}_2$ 对称性的测地线，其测地函数仍是关于 $Z_i^{\pm1/2}$ 的劳朗多项式；为了使这些具有 $\mathbb{Z}_2$ 对称性的测地函数构成的乘积代数和泊松代数封闭，我们需要加入非对称测地函数的对称组合（例如马尔可夫元素 $\mathfrak{M}_1$ 和 $\mathfrak{M}_2$，它们相对于 $n=4$ 的 $\mathbb{Z}_2$ 变换互为镜像对称：它们的和 $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$ 及其积 $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ 是 $\mathbb{Z}_2$ 对称函数，且为劳朗多项式。然而 $|\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2|=62$ 和 $|\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2|=417$，因此不可能让每个 $\mathfrak{M}_i$ 都是多项式。

8.4 哈密顿约化

8.4.1 $n=3$

我们首先给出一个通过施加条件 det($\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}}$) $=0$ in $n=3$ 情形来实现哈密顿约化的“玩具”示例。对于马尔可夫元素 $\mathfrak{M}$, 我们有 det($\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}}$) $=8+2\mathfrak{M}$，将其写成三种不同的形式（7.19）、（7.20）和（7.22）后，该条件分别表示为

$$G_{1,2}G_{1,3}G_{2,3}-G_{1,2}^2-G_{1,3}^2-G_{2,3}^2+4=0\tag{8.43}$$
$$\widetilde{G}_{1,2}\widetilde{G}_{1,3}\widetilde{G}_{2,3}-\widetilde{G}_{1,2}^2-\widetilde{G}_{1,3}^2-\widetilde{G}_{2,3}^2+4=0,\tag{8.44}$$
$$f\cdot\left(G_{1,2}\widetilde{G}_{1,2}G_B+G_{1,2}^2+\widetilde{G}_{1,2}^2+G_B^2-4\right)=0.\tag{8.45}$$

前两个条件在物理文献中关于流形 $\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{T}^2$ 平坦度量二维环面 [7] 上的 (2 + 1) 引力的 $SL(2,\mathbb{R})$-联络描述中广为人知：诱导出辫群和泊松关系的解是

$$G_{1,2}=e^{X/2}+e^{-X/2},\quad G_{2,3}=e^{Y/2}+e^{-Y/2},\quad G_{1,3}=e^{X/2+Y/2}+e^{-X/2-Y/2},\quad \{X,Y\}=2\tag{8.46}$$

$$\widetilde{G}_{1,2}=e^{\widetilde{X}/2}+e^{-\widetilde{X}/2},\quad \widetilde{G}_{2,3}=e^{\widetilde{Y}/2}+e^{-\widetilde{Y}/2},\quad \widetilde{G}_{1,3}=e^{\widetilde{X}/2+\widetilde{Y}/2}+e^{-\widetilde{X}/2-\widetilde{Y}/2},\quad \{\widetilde{X},\widetilde{Y}\}=2, \tag{8.47}$$

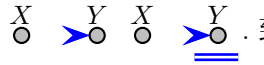
其中，连接的总体代数分解为彼此对易的手征–反手征子代数 $SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$，每个子代数都是标准 $SL(2,\mathbb{R})$ 代数的一个副本。我们关注表示哈密顿约化条件的第三种方式（8.45）：解 $f=0$ 看起来不可行，因此我们转而采用第二种选择，即

$$G_{1,2}\widetilde{G}_{1,2}G_B+G_{1,2}^2+\widetilde{G}_{1,2}^2+G_B^2-4=0. \tag{8.48}$$

这个方 程与（8.43）或（8.44）仅在 G_B 的符号上不同，因此我们立即求解:

$$G_B=-e^{X/2+\widetilde{X}/2}-e^{-X/2-\widetilde{X}/2}. \tag{8.49}$$

由于表达式（8.48）与 G_B 泊松对易，因此它在沿 G_B 扭转时保持不变，所以该约化是哈密顿的。

~ ~与该约化对应的箭图由两个互不相连的部分组成， 

. 到目前为止，我们还无法确定元素 G_B 在相应的 $(2+1)$ 维几何中的含义。

8.4.2 $n=4$—三阶亏格

在这种情况下，计算机模拟表明，当卡西米尔元（8.29） $C=-1$时，条件 $\det(\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}})=0$ 是哈密顿的。注意，我们得到的条件与第 8.1 节秩条件所要求的相同。

8.4.3 $n=5$—亏格四

从亏格四($n=5$)开始，箭图的总维数 $n(n-1)$ 大于相应模空间的维数$6g-6=6n-12$，也就是说，我们遇到了与$\Sigma_{g,s}$ 相同的问题：如何区分与几何系统相对应的辛群胚的泊松叶？自 Nelson、Regge和Zertuche 的工作 [44], [46], [45] 以来，众所周知，条件是$rank(\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}})\leq 4$。对于 $n=5$，当.....时满足这一条件

$$\det(\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}})=0. \tag{8.50}$$

我们有如下引理

引理 8.5。在 $n=5$ 的情形下，条件 (8.50) 在所有辫群变换下保持不变，即它是哈密顿的。

证明。表达式 $\det(\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}})=\det(\widetilde{\mathbb{A}}+\widetilde{\mathbb{A}}^{\mathrm{T}})$ 在由 $G_{i,i+1}$ 和 $G_{i,i+1}$ 生成的辫群变换下保持不变，因此只需检验沿 G_B 的扭转是否保持条件 (8.50)。为此，我们先将 $n=5$ 对应的箭图变换为图 18 中的箭图，在该箭图中 G_B 具有最简单的形式。在此箭图中，

$$\begin{aligned}
&G_B=\langle a_1a_t\rangle,\\
&G_{1,2}=\langle b_4e_2d_3c_4\rangle,\\
&G_{2,3}=\langle c_4c_3b_3a_4e_3d_4\rangle,\\
&G_{3,4}=\langle d_4d_3d_2c_2b_2a_3e_4\rangle,\\
&G_{4,5}=(e_4e_3a_2a_3e_2a_4e_1d_1c_1b_1a_2a_1)^{1/2}\Big[1+\frac{1}{e_4}+\frac{1}{e_4e_3}+\frac{1}{e_4e_3e_2}\\
&\quad+\frac{1}{e_4a_2}+\frac{1}{e_4e_3a_2}+\frac{1}{e_4e_3e_2a_2}+\frac{1}{e_4e_3a_2a_3}+\frac{1}{e_4e_3e_2a_2a_3}+\frac{1}{e_4e_3e_2a_2a_3a_4}\\
&\quad+\frac{1}{e_4e_3e_2a_2a_3a_4e_1}+\frac{1}{e_4e_3e_2a_2a_3a_4e_1d_1}+\frac{1}{e_4e_3e_2a_2a_3a_4e_1d_1c_1}+\frac{1}{e_4e_3e_2a_2a_3a_4e_1d_1c_1b_1}\\
&\quad+\frac{1}{e_4e_3e_2a_2a_3a_4e_1d_1c_1b_1a_2}+\frac{1}{e_4e_3e_2a_2a_3a_4e_1d_1c_1b_1a_2a_1}\Big],\\
&a_ta_1a_2^2a_3^2a_4^2b_1b_2b_3b_4c_1c_2c_3c_4d_1d_2d_3d_4e_1e_2e_3e_4=1.
\end{aligned} \tag{8.51}$$

注意，$G_{1,\ 2}$、 $G_{2,\ 3}$和$G_{3,\ 4}$ 不依赖于 a_1 和 a_2 ，因此与 a_1 和 a_t对易。

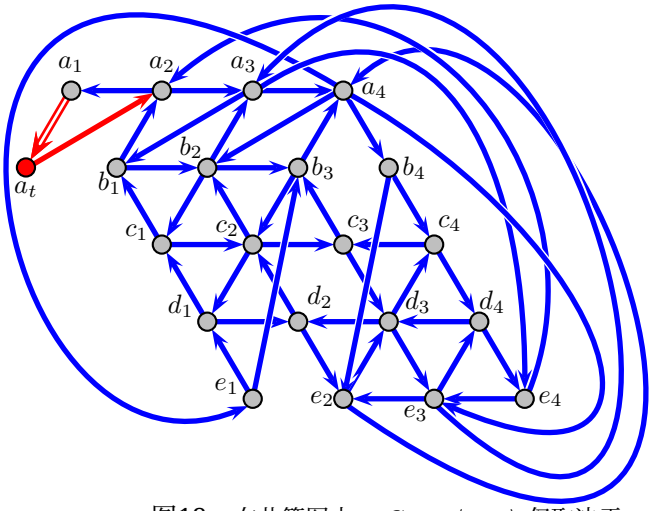


图18：在此箭图中， $G_B = \langle a_1 a_t \rangle$ 仅取决于 a_1 和 a_t。

由表达式（8.51）可知，$G_{4,5}$ 具有如下结构

$$G_{4,5} = s_1 a_2 (a_1)^{1/2} + s_2 (a_1)^{1/2} + s_3 a_2^{-1} \big((a_1)^{1/2} + (a_1)^{-1/2} \big), \tag{8.52}$$

其中，我们令 s_i 表示与 a_1 和 a_t 对易的组合（因此不依赖于 a_1 和 a_2）。对于括号 $\{G_B, G_{4,5}\}$ ，我们有

$$\begin{aligned} \{G_B, G_{4,5}\} = &-\frac{1}{2}\big((a_1 a_t)^{1/2} - (a_1 a_t)^{-1/'2}\big)\big(s_1 a_2 (a_1)^{1/2} + s_2 (a_1)^{1/2} + s_3 a_2^{-1}(a_1^{1/2} - a_1^{-1/2})\big) \\ &+ \left(\frac{a_t}{a_1}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} s_1 a_2 (a_1)^{1/2} - \frac{1}{2} s_2 (a_1)^{1/2} - \frac{3}{2} s_3 a_2^{-1} a_1^{1/2} - \frac{1}{2} s_3 (a_1)^{-1/2}\right), \end{aligned}$$

并且我们有大小规律。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} G_B G_{4,5} + \{G_B, G_{4,5}\} &= (a_1 a_t)^{-1/'2}\big(s_1 a_2 (a_1)^{1/2} + s_2 (a_1)^{1/2} + s_3 a_2^{-1} a_1^{1/2}\big) + (a_1 a_t)^{1/'2} s_3 a_2^{-1} a_1^{-1/2} \\ &\quad + \left(\frac{a_t}{a_1}\right)^{1/2} \big(s_1 a_2 (a_1)^{1/2} - s_3 a_2^{-1} a_1^{1/2}\big) \\ &= (a_t)^{-1/2} a_2 (1 + a_t) s_1 + (a_t)^{-1/2} s_2 + (a_t)^{-1/2} a_2^{-1} s_3 = G_{4,5}\big(a_1 \to 1/a_t;\ a_2 \to a_2(1 + a_t)\big) \end{aligned} \tag{8.53}$$

也就是说，沿 G_B 的扭转由对 a_t 进行突变给出，随后在G_4的表达式中交换 $a_1 \leftrightarrow 1/a_t$ ，$_5$。由于所有其他 $G_{i,\ 5}$ 都由 $G_{4,\ 5}$ 以及其他$G_{i,\ i+1}$的乘积关系和泊松关系生成，所有这些关系关于 $G_{4,\ 5}$都是线性的，并且由于 a_t 与所有其他 $G_{i,\ i+1}$交换，我们得出，沿 G_B 的扭转对 $\det(\mathbb{A} + \mathbb{A}^{\mathrm{T}})$的作用，正好由对变量 a_1 和a_2进行相同的替换给出。接下来，由于 $G_{4,\ 5}$ 具有结构 (8.52)，并且 $\det(\mathbb{A} + \mathbb{A}^{\mathrm{T}})$包含的项要么不依赖于 $G_{i,\ 5}$ ，要么关于 $G_{i,\ 5}$是二阶的，我们得到

$$\det(\mathbb{A} + \mathbb{A}^{\mathrm{T}}) = \alpha \xi a_1 a_2^2 + \beta a_1 + \gamma \xi^{1/2} a_2 a_1 + \delta \xi^{1/2} \frac{1 + a_1}{a_2} + \rho \xi \frac{(1 + a_1)^2}{a_1 a_2^2} + \omega,$$

其中令

$$a_t = 1/(a_1 a_2^2 \xi) \text{ with } \xi = a_3^2 a_4^2 b_1 b_2 b_3 b_4 c_1 c_2 c_3 c_4 d_1 d_2 d_3 d_4 e_1 e_2 e_3 e_4.$$

记

$$a_1' = 1/a_t = \xi a_1 a_2^2 \text{ and } a_2' = a_2(1 + a_t) = a_2 \left(1 + \frac{1}{\xi a_1 a_2^2}\right), \tag{8.54}$$

我们有以下关系。

$$\det(\mathbb{A} + \mathbb{A}^{\mathrm{T}})(a_1', a_2') - \xi a_2^2 \det(\mathbb{A} + \mathbb{A}^{\mathrm{T}})(a_1, a_2) = (2\alpha - \xi\omega) a_2^2 + \left(\frac{\alpha}{\xi} - \xi\rho\right) \frac{1}{a_1} + (\gamma - \xi\delta) a_2 + (\omega - 2\xi\rho).$$

现在很容易看出，当且仅当.....时，代入式 (8.54) 后 $\det(\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}}) = 0$ 这一条件保持不变。

$$\alpha = \xi^2\rho, \quad \omega = 2\xi\rho, \text{ and } \gamma = \xi\delta,$$

这可以通过计算机模拟进行检验。在满足这些等式后，我们可以将 $\det(\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}})$ 重写为以下形式

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}}) &= \alpha\left(\xi a_1 a_2^2 + 2 + 2a_1 + \frac{(1+a_1)^2}{\xi a_1 a_2^2}\right) + (\beta-2)a_1 + \gamma\left(\xi^{1/2}a_2 a_1 + \frac{1+a_1}{\xi^{1/2}a_2}\right)\\ &= a_1\big(\alpha G_B^2 + \gamma G_B + \beta - 2\big),\end{aligned} \tag{8.55}$$

其中 α、 β和 γ仅依赖于 a_3、...、 e_4。

备注 8.6。请注意，在 $n=5$ 的情形下，表达式 (8.55) 与 $n=3$ 的情形下的 (7.22) 惊人地相似：这两个表达式中都有一个单独的簇变量（对于 $n=3$ 是 f，对于 $n=5$ 是 a_1），使得 $\det(\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}})$ 与这个变量成比例（注意，对于 $n=3$，$\det(\mathbb{A}+\mathbb{A}^{\mathrm{T}}) = 2(\mathfrak{M}+4)$）；比例系数是关于 G_B 的二次多项式，并且在沿 G_B 扭转下保持不变；我们不禁想知道，能否将 (8.55) 中的 $\widetilde{\ }$ 系数函数 α、 β 和 γ 识别为关于 $G_{i,j}$ 和 $G_{i,j}$ 的某些多项式表达式，其中 $1 \le i < j \le 4$，以及类似结论对于更高的奇数 n 是否成立。我们检查后发现，对于 $n=4$ 并非如此。

9 结论

在结论中 w　　我们想指出几个可以用相同技巧来处理的问题。　　e.

- 量子化：本文所描述的构造允许直接进行量子化，这将在未来的出版物中加以描述；

- 辛结构：由于（非扩展） SL_n 箭图是满维的，因此可以将它们的泊松关系求逆，从而得到相应的辛结构。以 $n=3$ 为例，辛结构是

$$\frac{\mathrm{d}d}{d}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}e}{e}+\frac{\mathrm{d}a}{a}\right)+\frac{\mathrm{d}f}{f}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}c}{c}+\frac{\mathrm{d}a}{a}\right)+\frac{\mathrm{d}b}{b}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}c}{c}+\frac{\mathrm{d}e}{e}\right),$$

  并且它必须与标准的芬切尔–尼尔森辛结构重合

$$\mathrm{d}\ell_{1.2}\wedge\mathrm{d}\tau_{1,2}+\mathrm{d}\widetilde{\ell}_{1.2}\wedge\mathrm{d}\widetilde{\tau}_{1,2}+\mathrm{d}\ell_{\mathfrak{M}}\wedge\mathrm{d}\tau_B,$$

  采用（7.23）中定义的扭转 $\tau_{1,2}$, $\widetilde{\tau}_{1,2}$。我们预计更高阶的 n 也满足类似关系；

- 使用基于扭转变换的 Bowditch 式方法计算模空间的体积 $V_{g,0}$；这些体积可由 Mirzakhani 型递归关系 [20] 以及拓扑递归关系 [22]得知。例如，$V_{2,0} = \dfrac{43\pi^6}{2160}$。

- 探究与链环/结不变量的联系（例如参见 [1]）。

致谢

特别感谢 Gus Schrader 和 Alexander Shapiro 提供的宝贵讨论。M.S. 的研究部分由 NSF 研究基金 DMS-1702115 资助。在开展此项目期间，M.S. 得到了以下机构和项目的支持：海法大学（2022 年夏季）、海德堡大学数学研究所（2022 年夏季）。第二位作者感谢这些机构的盛情接待，以及它们提供的优越工作条件。L.Ch. 的研究部分由斯捷克洛夫国际数学中心（协议编号：075-15-2019-1614）资助。

参考文献

[1] V.Bazier-Matte 和 R. Schiffler, *Knot theory and cluster algebras*, *Adv. Math.* **408** B (2022), 文章 108609。[2] A. Berenstein 和 A. Zelevinsky, *Quantum cluster algebras Advances Math.* **195**(2005) 405–455; math/0404446。[3] P. P.Boalch, *Stokes Matrices*, *Poisson Lie Groups and Frobenius Manifolds*, *Invent. Math.* **146** (3) (2001) 479–506。doi:10.1007/s002220100170。[4] A.I.Bondal, *A symplectic groupoid of triangular bilinear forms and the braid groups*, 《数学 Izvestiya》, 68:4 (2004), 659-708[5] F. Bonahon 和 H. Wong, *Quantum traces for representations of surface groups in* $SL_2(\mathbb{C})$, 《几何与拓扑》, 15 (2011), 第1569–1615 页。[6] Bowditch, B.H., *A proof of McShane's identity via Markoff triples*, *Bull. London Math. Soc.* **28**(1) (1996) 73–78[7] S. Carlip和J.E. Nelson, *Comparative quantizations of* $(2+1)$*-dimensional gravity*, *Phys. Rev. D***51** (1995)5643-5653 (gr-qc/9411031)。[8] V. Chari和A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*。剑桥大学出版社, 1994。[9] Chekhov, L. O., *Fenchel-Nielsen coordinates and Goldman brackets*, *Russian Math. Surveys* **75** (2020), 第 5期, 929–964[10] Chekhov L., Fock V., *A quantum Techmüller space*, *Theor. Math. Phys.* **120** (1999), 1245–1259, math.QA/9908165。[11] Chekhov L., Fock V., *Quantum mapping class group*, *pentagon relation*, *and geodesics*, *Proc. Steklov Math. Inst.* **226** (1999), 149–163。[12] Chekhov L., FockV., *Observables in 3d gravity and geodesic algebras*, *Czech. J. Phys.* **50** (2000) 1201–1208。[13] Chekhov L.O., Mazzocco M., *Isomonodromic deformations and twisted Yangians arising in Teichmüller theory* Advances , ( )( ) *Math.* **226 6** 2011 4731 4775, 0909 5350 - arXiv: . 。[14] L.Chekhov, M.Mazzocco 作为 Dubrovin–Ugaglia 泊松流形中退化辛叶的 Teichm ¨ *Physica D* **241** 2012 2109 2121 uller 空间, ( )–[15] L. Chekhov 和M. Mazzocco, *On a Poisson space of bilinear forms with a Poisson Lie action*, *Russ. Math. Surveys* **72**(6)(2017) 1109–1156; arXiv:1404.0988v2。[16] ChekhovL.O.、MazzoccoM. 和 Rubtsov V., *Algebras of quantum monodromy data and decorated character varieties*, *arXiv:1705.01447* 2017 ( )。[17] Chekhov,L., Shapiro, M. *Log-Canonical Coordinates for Symplectic Groupoid and Cluster Algebras* International Mathe- , , ; *matics Research Notices* 2022 10 1093 101 rnac101, https://doi.org/ 。 /imrn/rnac[18] Chekhov, L., Shapiro,M., 以及 Shibo,H., *Characteristic equation for symplectic groupoid and cluster algebras*, arXiv:2101.10323, 14 页[19] Coman,I.、GabellaM和 TeschnerJ. 2015 *Line Operators in Theories of Class* $\mathcal{S}$ *Quantized Moduli Space of Flat Con-* 。 , , *nections* 10 10 1007 10 2015 143 *and Toda Field Theory*, *Journal of High Energy Physics* 2015 ()。施普林格出版社。doi: 。 /JHEP( )。(ArXiv: 1505.05898)[20] Do, N., 以及 Norbury, P., *Weil–Petersson volumes and cone surfaces*, *Geometriae Dedicata* **141**(2009)93–107; arXiv: math/0603406。[21] Dubrovin B., 《二维拓扑场论的几何》, 《可积系统与量子群》（MontecatiniTerme, 1993）, *Lecture Notes in Math.*, 1620, 施普林格, 柏林, (1996) 120–348。[22]Eynard,B.和 Orantin,N., *Weil-Petersson volume of moduli spaces*, *Mirzakhani's recursion and matrix models*, arXiv:0705.3600。[23] FockV.V., *Combinatorial description of the moduli space of projective structures*, hep-th/9312193。[24] FockV.V., *Dual Teichmüller spaces* arXiv:dg-ga/9702018v3, (1997)。[25] V.V. Fock 和 A. B. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*, *Publ. Math. Inst. HautesÉtudes Sci.* 103 (2006), 1-211, math.AG/0311149 v4。[26] V.V. Fock 和 A. B. Goncharov, *The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties* Inventiones , ( )( ) *Math.* **175** 2 2008 223 286, 0702397 6 – math.AG/ v。[27] V.Fock, A.Goncharov。 *Cluster X-varieties*, *amalgamation*, *and Poisson-Lie groups.* 《代数几何与数论》。(2006): 27-68。[28] V.V. Fock和A. A. Rosly, *Moduli space of flat connections as a Poisson manifold*, 《量子场论与统计力学进展》: 2 1996 *Internat. J. Modern Phys. B* **11** 1997 26 27, 第二 3195 3206 届意大利-俄罗斯合作（Como, ）, ( ), 第 - 期– 。[29] Felikson, A.、Shapiro, M.、Tumarkin, P., *Skew-symmetric cluster algebras of finite mutation type* *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* , ( ), **14** 2012 4, 1135 1180 第 – 期。[30]S. Fomin 和 A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations.* 《美国数学学会杂志》15 (2002), 497-529, DOI: https://doi.org/10.1090/S0894-0347-01-00385-X[31] Fomin S.、ShapiroM. 和 Thurston D., *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I: Cluster complexes* *Acta Math.* , ( ), **201** 2008 146 第 1 期, 83– 。[32] A.M. Gavrilik 和 A. U. Klimyk, *q-Deformed orthogonal and pseudo-orthogonal algebras and their representations Lett. Math. Phys.* **21** 1991 215 220 , ( ) – 。

[33] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *Cluster algebra and Poisson geometry*, *Moscow Math. J.* **3**(3) (2003) 899-934.
[34] Goldman W.M.,
Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations Invent. Math. , ( ) – **85** 1986 263 302
.[35] A. Goncharov 、 L. Shen *Quantum geometry of moduli spaces of local systems and representation theory*,*arXiv:1904.10491*
[36] Henneaux M. 和 Teitelboim Cl., *Quantization of Gauge Systems*, *Princeton University Press*, 1992.[37] M. V. Karasev,
Analogues of objects of Lie group theory by nonlinear Poisson brackets, *Math. USSR Izvestia* **28**(1987) 497–527.[38] R. M. Kashaev, *On the spectrum of Dehn twists in quantum Teichmüller theory*, 载于: *Physics and Combinatorics*, （名古屋, 2000年）。新泽西州里弗埃奇：世界科学出版社，2001，63–81；math.QA/0008148.[39] R. M. Kaufmann 和 R. C. Penner,
Closed/open string diagrammatics, *Nucl. Phys.* B748 (2006) 335–379.[40] Korotkin D. 和 Samtleben H., 《与二维引力耦合的余集空间 σ *Comm. Math. Phys.* **190** 2 1997 411 457
模型的量子化》, ( ) ( ) – .[41] Machacek, J. 和 Ovenhouse, N.
Log-canonical coordinates for Poisson brackets and rational changes of coordinates 《几何与物理杂志》121 (2017), 第 288–296 页。
[42] K. Mackenzie, 《李群胚与李代数丛的一般理论》, *LMS Lect. Note Series* **213**(2005).[43] A. Molev、E. Ragoucy、P. Sorba,
Coideal subalgebras in quantum affine algebras, *Rev. Math. Phys.*, 15 (2003) 789–822.[44] Nelson J.E.、Regge T., 同伦群与(2+1)维量子引力, *Nucl. Phys. B* **328** (1989), 190–199.[45] Nelson J.E.、Regge T., *Invariants of* 2+1 *quantum gravity*,
Commun. Math. Phys. **155** (1993) 561–568.[46] Nelson J.E.、Regge T.、Zertuche F., 同伦群与(2 + 1)维量子德西特引力,
Nucl. Phys. B **339** (1990), 516–532.[47] Nekrasov, N.、Rosly, A.、Shatashvili, S.,
Darboux coordinates Yang-Yang functional and gauge theory. *Nuclear Phys. B Proc.* , , ( ), *Suppl.* **216** 2011 69 93
– .[48] Postnikov A., 全正性、格拉斯曼流形与网络, arXiv:math/0609764[49] Postnikov, A. 、 Speyer, D. 、 Williams, L., 《匹配多面体、环面几何与格拉斯曼流形的非负部分》, 《代数组合学杂志》30 (2009), 第 2 期, 173-191.[50] A. Reyman 和 M. Semenov-Tian-Shansky, *Group-theoretical methods in the theory of finite-dimensional integrable systems*。《数学科学百科全书》第16卷，施普林格，柏林，1994年，第116–225页。[51] G. Schrader 和 A. Shapiro,
Continuous tensor categories from quantum groups I: algebraic aspects, arXiv:1708.08107。[52] G. Schrader 和 A. Shapiro,
private communication。[53] Ugaglia M., *On a Poisson structure on the space of Stokes matrices*, 《国际数学研究论文集》1999 (1999), 第 9 期, 473–493.[54] A. Weinstein, *Coisotropic calculus and Poisson groupoids*, *J. Math. Soc. Japan* **40**(4) (1988) 705–727.[55] M. Yakimov, *Symplectic leaves of complex reductive Poisson–Lie groups*, *Duke Math. J.* **112**(2002) 453–509.