arXiv:2304.05616v1 [math.GT] 12 Apr 2023

¨源自莫比乌斯带的一种新格拉姆行列式

Dionne Ibarra 和 Gabriel Montoya-Vega

摘要。E. Wien 推测存在一种与琼斯多项式相关的 3维流形不变量，此后格拉姆行列式逐渐受到结理论学家的关注。N. Reshetikhin 和 V. Turaev 构造出这种不变量，促使许多数学家从此深入探索这一研究方向。W. B. Raymond Lickorish 对该不变量采用的缨理论方法使格拉姆行列式得以应用。通过改变 Kauman 括号 skein 模的环境曲面，可以构造不同的双线性型。因此，多年来纽结理论中出现了不同类型的格拉姆行列式；本文将讨论其中一些。本文介绍一种源自莫比乌斯带的此类行列式新版本，并证明关于其结构的一些重要结果。特别是，我们探讨它与环带情形的联系，以及其闭式公式中的因子。

目录

致谢1. 引言 2. 纽结理论中的Gram行列式 2.1. 型的Gram行列式 B2.2. 型的Gram行列式 Mb3. 型的Gram行列式 $(Mb)_1$3.1. 白色标记 3.2. 棒棒糖方法 4. 未来研究方向 参考文献 1 1 2 3 4 5 9 11 14 15

致谢

第一作者感谢澳大利亚研究理事会资助项目 DP210103136 的支持。第二作者感谢美国国家科学基金会通过资助项目 DMS-2212736 提供的支持。

1. 引言

格拉姆行列式以丹麦数学家 Jørgen Pedersen Gram 的名字命名，出现在数学的多个领域中，包括黎曼几何、有限元和机器学习。在纽结理论中，Edward Wien 思考一种与琼斯多项式相关的三维流形不变量后，格拉姆行列式开始受到关注 [Wit]。1991 年，Nicolai Reshetikhin 和 Vladimir Turaev 提出了一种构造此类不变量的方法 [RT]。不久之后，W. B. Raymond Lickorish 宣布了一种更简单的不变量构造方法，这被视为格拉姆行列式与纽结数学理论相关的首批现代研究之一 [Lic1]。Lickorish 构造的格拉姆行列式称为 A 型格拉姆行列式，并已得到广泛研究；例如参见 [KS、DiF、Cai、BIMP1]。值得指出的是，在纽结理论中，有若干矩阵与格拉姆行列式显然相关。例如，亚历山大矩阵

2020数学学科分类。 主要分类：57K10。次要分类：57K31。 关键词和短语。 Gram行列式、纽结理论、相对考夫曼括号琐结模、纽结和链环。

链环的 L 其行列式给出亚历山大多项式；戈里茨矩阵则给出链环的行列式。

通过改变 Kauman 括号 skein 模的环境曲面，可以构造不同的双线性形式。Rodica Simion 在研究色多项式连接时，考察了以下类型的双线性形式 B 。[Sim、Sch]。Paul Martin 和 Hubert Saleur 最早考虑了以下类型的 Gram行列式 B ；他们的研究还具有统计力学等方面的应用 [MS1、MS2]。2008年，J´ozef H. Przytycki 创造了以下类型的 Gram行列式这一概念 Mb ，它源于在 M¨obius 带上定义双线性型 [Prz2]。尽管 Qi Chen 在同年提出了一个猜想，但这条研究路线直到约十年后才得到严格推进；例如参见 [BIMP1、BIMP2、PBIMW]。

本文组织如下。在第2 节中，我们给出相对 Kauman 括号 skein 模的定义。此外，还定义了 B 型和 Mb 型的 Gram行列式。在第（Mb）$_1$, 节中，我们介绍 Mb型 Gram行列式的一个变体3。在该节中，我们提出棒棒糖方法这一创新工具，它有助于证明关于这种新 Gram行列式结构的一些重要结果。最后，在第4节中，我们提出针对该行列式对 Chen 猜想所作的改编。

2. 结理论中的格拉姆行列式

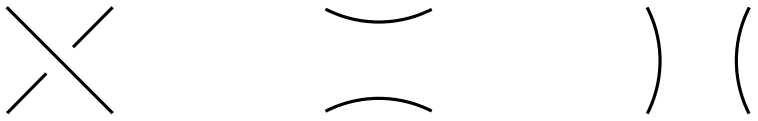
为了研究纽结理论中的Gram行列式，我们需要用带边流形来描述含幺交换环上的自由模的基元素。也就是说，我们需要相对 skein 模的概念。可以说，研究得最为广泛的 skein 模是 Kauman 括号 skein 模。尤其是，它的结构揭示了该模与 3维流形的几何和拓扑之间的联系 [Prz1]。在本文中，相对 Kauman 括号 skein 模发挥着重要作用，并在定义 2.1 中给出。

定义 2.1.令 M 为一个定向的3流形，并令$\{x_i\}_1^{2n}$为 ∂M上的 $2n$ 框架点集合。令$I=[-1,1]$，并令$\mathcal{L}^{fr}(2n)$ 为所有相对框架链环的集合（其中包括 M 中的所有带框架的链环以及所有框架弧、 $I\times I$，其中 $I\times\partial I$与 M边界上的框架点相连），模去在保持边界固定的环境同伦，其中$\{x_i\}_1^{2n}$。令 R 为含幺交换环， $A\in R$为可逆元，并令 $S^{sub}_{2\,\infty,}(2n)$ 为 $R\mathcal{L}^{fr}(2n)$ 的由卡夫曼括号 ***skein*** 关系生成的子模：

(i) $L_+ - AL_0 - A^{-1}L_\infty$, *and*
(ii) $L\sqcup\bigcirc + (A^2+A^{-2})L$,

其中 $\bigcirc$ 表示带框架的平凡结，而缠结三元组 (L_+, L_0, L_∞) 表示 M 中的三个带框架链环，它们除3球内的一小块区域外 M 均相同，其差异如图*2.1*所示。于是，***Kauman*** 括号 ***skein*** 模 *(RKBSM)* M 是如下商模：

$$\mathcal{S}_{2,\infty}(M,\{x_i\}_1^{2n};R,A)=R\mathcal{L}^{fr}(2n)/S^{sub}_{2,\infty}(2n).$$



(a) $L_{+\circ}$ (b) $L_{0\circ}$ (c) $L_{\infty\circ}$

图2.1. 缠结三元组。

定理 2.2。 [Prz1] 设 F是一个具有 $\partial F \neq \varnothing$ 的曲面。若 F 可定向，则令 $M = F \times I$；否则令 $M = F\tilde{} \times I$。设 $\{x_i\}_1^{2n}$中的所有点都是位于 $\partial F \times \{0\}$上的标记点。于是 $\mathcal{S}_{2,\infty}(M, \{x_i\}_1^{2n}; R, A)$ 是一个自由的 R-模，其基由 F 中不含平凡分支的相对链环组成。当 $n = 0$时，空链环也是一个生成元。

以下推论2.2 使用相对 skein 模的语言，这些模用于纽结理论中 Gram行列式的定义。

推论 2.3。 [证明1]

(a) $\mathcal{S}_{2,\infty}(D^2 \times I, n) := \mathcal{S}_{2,\infty}(D^2 \times I, \{x_i\}_1^{2n}; R, A)$ 是一个自由 R-模，具有 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 个基元素。

(b) $\mathcal{S}_{2,\infty}$(环带 $Ann \times I, n$) := $\mathcal{S}_{2,\infty}$(环带 $Ann \times I, \{x_i\}_1^{2n}; R, A$) 其中 $\{x_i\}_1^{2n}$位于环带的外边界分支，是一个自由的 $R[z]$-模，具有 $D_n = \binom{2n}{n}$ 个基元素，其中 z 表示环带中的同伦非平凡曲线，$d = -A^2 - A^{-2}$ 表示环带中的同伦平凡曲线。基记作$B_{n,0}$，是环带中所有不含平凡分支或边界平行曲线的无交叉连接的集合。

(c) $\mathcal{S}_{2,\infty}(Ann_{n,1} \times I) := \mathcal{S}_{2,\infty}(Ann \times I, \{x_i\}_1^{2n} \cup \{y_1, y_2\}; R, A)$，其中 $\{x_i\}_1^{2n}$位于环带的外边界分支上，而 $\{y_1, y_2\}$位于环带的内边界分支上，是一个自由 R-模。其标准基包含无穷多个元素，具体描述如下。形如 az^i（对于 $i \geq 0$）的元素，其中 z 表示环带的边界平行曲线，而 $a \in A$。集合 A 是一个无交叉连接的有限集合，其中不含平凡分支或边界平行曲线，且 y_1 与 y_2 通过一个相对链环彼此连接。该集合中有 $2\binom{2n}{n}$ 个这样的元素。设 X 是外边界上 $2n-2$ 个点之间的无交叉连接的有限集合，这些连接不会将外边界上剩余的两个点与通往内边界点的路径隔开。标准基的其余部分来自一个无穷的无交叉连接族，该族由 X 获得：对于 $k \in Z$，剩余的外边界点在绕内边界 πk 后与内边界点相连；此类连接的示意图见图 *3.1*。

(d) $\mathcal{S}_{2,\infty}(Mb\tilde{} \times I) := \mathcal{S}_{2,\infty}(Mb\tilde{} \times I, \{x_i\}_1^{2n}; R, A)$ 是一个自由的 R-模。标准基包含无穷多个形如 bz^i，bxz^i 的元素，其中 $i \geq 0$，x 表示与交叉帽相交一次的简单闭曲线，z 表示 *M¨obius* 带的边界平行曲线，而 b 是 *M¨obius* 带中无交叉连接集合的一个元素，其中没有平凡分支或边界平行曲线，且其中的弧不与交叉帽相交。标准基中的其余元素来自有限多个无交叉连接，它们由一组$n-k$ 弧组成，其中 $0 \leq k < n$ 这些弧与交叉帽非平凡相交。在这个有限集合中，有$\binom{2n}{k}$ 个无交叉连接与交叉帽相交 $n-k$ 次。

2.1. **类型 *B* 的 Gram行列式**。 类型 B Gram行列式的起源可见于 [MS1]。这种类型 Gram行列式的构造源自 Blob 代数（见 [MS2]），它与任意晶格上统计力学的转移矩阵表述相关。其结理论方面的研究兴趣源自 R. Simion 关于色多项式连接的工作 [Sim]；Q. Chen 和 J. H. Przytycki 在 [CP1]中展示了它与 Temperley-Lieb 代数的 Gram矩阵及色多项式连接矩阵之间的联系。此外，Q. Chen 和 J. H. Przytycki 在 [CP2,Che] 中运用 skein 模、Jones-Wenzl 幂等元和切比雪夫多项式，证明了类型 B的一个闭式公式。我们给出的定义将采用 skein 模的语言。

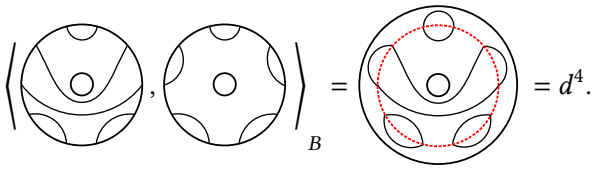
定义 2.4. 令 $B_{n,0} = \{b_1, b_2, \ldots, b_{\binom{2n}{n}}\}$表示 $Ann \times \{0\}$ 中外边界上 $2n$ 个标记点之间的所有无交叉连接图示的集合。定义类型 B 的双线性型 $\langle\ ,\ \rangle_B$ 如下：

$$\langle\ ,\ \rangle_B : \mathcal{S}_{2,\infty}(Ann \times I, \{x_i\}_1^{2n}; R, A) \times \mathcal{S}_{2,\infty}(Ann \times I, \{x_i\}_1^{2n}; R, A) \longrightarrow R[d, z].$$

给定 $b_i, b_j \in B_{n,\ 0}$，我们沿着带标记的外边界，将 b_i 与 b_j 的反演粘合在一起，同时保留标记点的标签。结果是 $Ann\ \times I$ 中的一个元素，其中只包含互不相交的简单闭曲线，这些曲线要么是非平凡同伦的（记为 z），要么是零伦的（记为 d）。于是，$\langle b_i, b_j\rangle_B := z^k d^m$，其中 k 和 m 分别表示这些曲线的数量。

型为 B 的 *Gram*矩阵定义为 $G_n^B = (\langle b_i, b_j\rangle_B)_{1\le i,\ j\le \binom{2n}{n}}$，其行列式 D_n^B 称为型为 B的 *Gram*行列式。

例 2.5。 下面给出了$B_{5,0}$ 中两个元素上的双线性型示例。



$= d^4.$

定理 2.6。 [CP2][MS1] 令 $R = \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$。然后

$$D_n^B = \prod_{i=1}^{n} (T_i(d)^2 - z^2)^{\binom{2n}{n-i}},$$

其中 $T_i(d)$是第一类切比雪夫多项式，其递归定义为 $T_{n+1}(d) = dT_n(d) - T_{n-1}(d)$，初始条件为 $T_0(d) = 2$ 和 $T_1(d) = d$，其中 $d = -A^2 - A^{-2}$。

Q. Chen 和 J. H. Przytycki 对型为 B 的闭式公式的证明涉及在基$B_{n,}0$ 上构造一个线性映射，该映射使用棒棒糖方法用琼斯-温茨尔幂等元装饰内边界分支，随后证明该线性映射在该基下的像是一个维数为 $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-k}$ 的子空间。

2.2. **类型 *Mb* 的 Gram 行列式**。 J´ozef H. Przytycki 于2008年构造了类型 Mb 的 Gram 行列式这一概念。它源于对莫比乌斯带上无交叉连接的研究。这里的双线性型通过沿边界粘合两个莫比乌斯带来定义。该行列式见定义2.7。

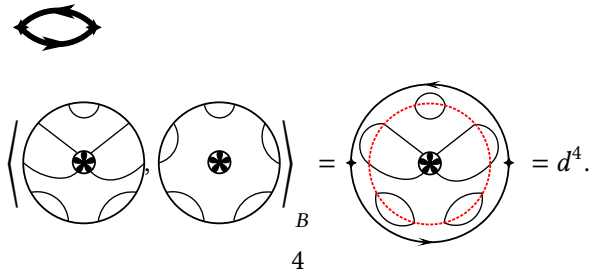
定义 2.7。 设 $Mb_n = \{m_1, \ldots, m_{\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}}\}$ 为 $Mb\ \hat{\times}\ \{0\}$ 中莫比乌斯带边界上$2n$ 个标记点之间所有无交叉连接图示的集合。定义 $Mb\ \hat{\times}\ I$中 Mb_n 各元素上的双线性型 $\langle\ ,\ \rangle_{Mb}$ 如下：

$$\langle\ ,\ \rangle_{Mb} : \mathcal{S}_{2,\infty}(Mb\ \hat{\times}\ I, \{x_i\}_1^{2n}) \times \mathcal{S}_{2,\infty}(Mb\ \hat{\times}\ I, \{x_i\}_1^{2n}) \longrightarrow \mathbb{Z}[d, w, x, y, z].$$

给定 m_i， $m_j \in Mb_n$，将 m_i的边界分支与 m_j的反演的边界分支对应起来，同时保留标记点的标签。结果是 $Kb\ \hat{\times}\ I$ 中的一个元素，其中仅包含互不相交的简单闭曲线。*Klein* 瓶中的五条同伦意义下不同的简单闭曲线（包括平凡曲线）记作 x、 y、 z、 w、 d，如图 *2.2*所示。然后，$\langle m_i, m_j\rangle_{Mb} := d^m x^n y^k z^l w^h$，其中 m、 n、 k、 l和 h 分别表示这些曲线的数量。

eMb 型 *Gram*矩阵定义为 $G_n^{Mb} = (\langle m_i, m_j\rangle_{Mb})_{1\le i,j\le \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}}$，其行列式 D_n^{Mb}被称为 Mb 型 *Gram*行列式。

例 2.8。下面给出了 Mb_4 中两个元素的双线性型示例，其中表示一个通常记作的交叉帽



$= d^4.$

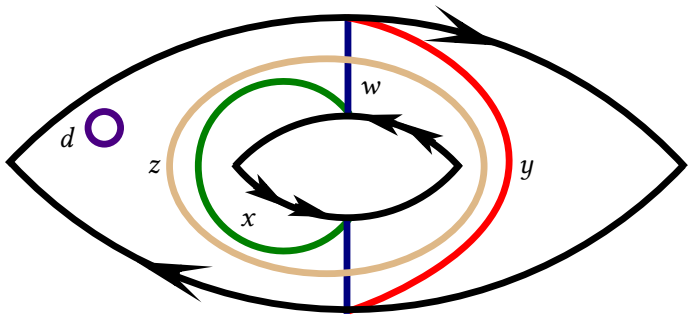


图 2.2. 克莱因瓶及其五条同伦意义上不同的简单闭曲线。

Q. Chen 对 Mb型的 Gram行列式提出了如下猜想。支持这一猜想的一些研究见 [BIMP1、BIMP2、PBIMW]。

猜想2.9(Chen)。

令 $R = \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, w, x, y, z]$. *en* 对于 $n \geq 1$的 Mb 型格拉姆行列式，记为 $D_{(}Mb)_n$，是 :

$$\begin{aligned} D_n^{(Mb)}(d,w,x,y,z) \quad = \quad & \prod_{k=1}^{n} (T_k(d) + (-1)^k z)^{\binom{2n}{n-k}} \\ & \prod_{\substack{k=1 \\ k\ odd}}^{n} \Big((T_k(d) - (-1)^k z) T_k(w) - 2xy \Big)^{\binom{2n}{n-k}} \\ & \prod_{\substack{k=1 \\ k\ even}}^{n} \Big((T_k(d) - (-1)^k z) T_k(w) - 2(2-z) \Big)^{\binom{2n}{n-k}} \\ & \prod_{i=1}^{n-1} D_{n,i}, \end{aligned}$$

其中 $D_{n,i} = \prod^{n} (T_{2k}(d) - 2)^{\binom{2n}{n-k}}$，而 i表示穿过交叉帽的曲线数量。$k=1+i$

命题 2.10。 [BIMP2] D_n^{Mb}可被 $(d-z)$ $\binom{2n}{n-1}$ 整除。

命题 2.11。 [BIMP1] D_n^{Mb}可被 $(w(d+z) - 2xy)$ $\binom{2n}{n-1}$ 整除。

命题 2.12。 [PBIMW] D_n^{Mb}可被 $((d^2-2-z)$ $(w^2-2) - 2(2-z))$ $\binom{2n}{n-2}$ 整除。

3. 类型为$(Mb)_1$的 Gram行列式

相对 Kauman 括号 skein 模的基 I扭曲¨带的2.3推论中所述，其基是无限的。若只考虑没有 z 和 x 曲线的基元素，就能得到这个基的一个有限子集。由这个有限子集构造出了 Mb 型 Gram矩阵。然而，这种构造有一些缺点。首先，元素的数量会随着 n的增加而呈指数增长。具体而言，由于矩阵规模过大，尚无法计算 $n \geq 5$ 的行列式。其次，在交叉帽上装饰琼斯-温茨尔幂等元的棒棒糖技巧，不再像 B型的情形那样简单。事实上，采用这一技巧的尝试迄今尚未取得严格意义上的成功。本节提出一种新的 Gram行列式

由 Mb_n的一个子集构造，直接联系到一种新型 B，并说明棒棒糖方法如何应用于这种情形，以及它在 Mb 型情形下的局限。

定义 *3.1*。令 $(Mb_n)_1 = Mb_{n,0} \cup Mb_{n,1}$，其中 $Mb_{n,0} = \{m_1, \ldots, m^{\binom{2n}{n}}\}$ 是所有在 $Mb \hat{\times} \{0\}$ 的边界上 $2n$ 个标记点之间、不与交叉帽相交的无交叉连接图示的集合；$Mb_{n,1} = \{m_1, \ldots, m^{\binom{2n}{n-1}}\}$ 是所有在 $Mb \hat{\times} \{0\}$ 的边界上 $2n$ 个标记点之间、恰有一条曲线与交叉帽相交的无交叉连接图示的集合。利用与 Mb 型相同的双线性型，定义 $(Mb_n)_1$ 上元素的双线性型 $\langle , \rangle_{Mb}$，如下：

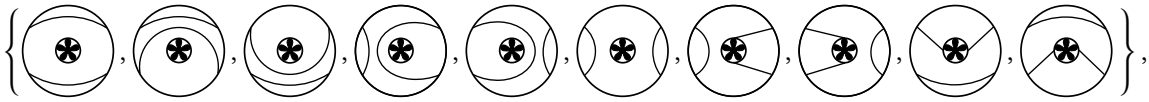
$$\langle , \rangle_{Mb} : \mathcal{S}_{2,\infty}(Mb \hat{\times} I, \{x_i\}_1^{2n}) \times \mathcal{S}_{2,\infty}(Mb \hat{\times} I, \{x_i\}_1^{2n}) \longrightarrow \mathbb{Z}[d, w, x, y, z].$$

给定 $m_i, m_j \in (Mb_n)_1$，，将 m_i 的边界分支与 m_j 的反演的边界分支对应识别，并使标记点的标签保持一致。所得结果是一个仅包含互不相交的简单闭曲线的 $Kb \hat{\times} I$ 中的元素。则 $\langle m_i, m_j \rangle_{Mb} := d^m x^n y^k z^l w^h$，其中 m、n、k、l 和 h 分别表示这些曲线的数量。

类型$(Mb)_1$的*Gram*矩阵定义为 $G(Mb)_n{}^{1} = (\langle m_i, m_j \rangle_{Mb})_{1 \le i,j \le \binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}}$，其行列式$D_n^{(Mb)_1}$称为类型$(Mb)_1$的*Gram*行列式。

在例 3.2 中，我们给出了与类型$(Mb)_1$ 不同的最小Gram矩阵 Mb。

例3.2。 对于 $n = 2$，集合$(Mb_n)_1$ 由下式给出



且 *Gram*矩阵如表*1*所示。

$\langle , \rangle$										
	d^2	dz	z^2	z	d	z	dy	y	yz	y
	dz	d^2	dz	d	z	d	dy	y	dy	y
	z^2	dz	d^2	z	d	z	yz	y	dy	y
	z	d	z	d^2	dz	z^2	y	yz	y	dy
	d	z	d	dz	d^2	dz	y	dy	y	dy
	z	d	z	z^2	dz	d^2	y	dy	y	yz
	dx	dx	xz	x	x	x	dw	w	xy	w
	x	x	x	xz	dx	dx	w	dw	w	xy
	xz	dx	dx	x	x	x	xy	w	dw	w
	x	x	x	dx	dx	xz	w	xy	w	dw

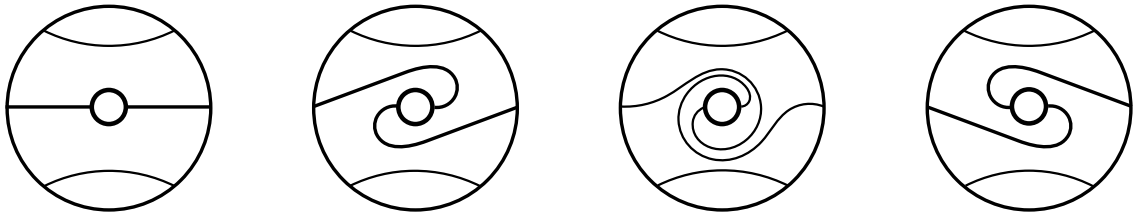
表1. Gram矩阵 $G_2^{(Mb)_1}$.6

$$\begin{aligned} D_2^{(Mb)_1} &= (-2+d)d^2(2+d)(d-z)^4(-2+d^2-z)(-2+d^2+z)(-dw+2xy-wz)^4 \\ &= (d-z)^4((d^2-2)+z)((d+z)w-2xy)^4((d^2-2)-z)(d^2(d^2-4)+2-2) \\ &= (T_1(d)-z)^4(T_2(d)^2-z^2)((d+z)w-2xy)^4(T_4(d)-2). \end{aligned}$$

以下命题直接源自 [BIMP1] 中针对类型 M给出的证明 b.

命题 3.3。 [BIMP1] $D_{(}Mb)_n$ ^{1}可被$(w(d+z)-2xy)(\binom{2n}{n-1}$整除。

考虑一个环带，其 $2n$ 个点位于外边界，2 个点位于内边界。固定一种无交叉连接，将 $2n-2$ 个外边界点连接起来，且不会将外边界上剩余的两个点隔绝，使它们无法通过路径连接到内边界点。此时，将剩余的外边界点连接到内边界点而不引入交叉的方法有无穷多种。例如，如果我们先连接两条弧，每条弧都位于外边界上，那么在连接内边界点之前，可以让这些弧沿着环带边界缠绕 πk 其中 $k \in \mathbb{Z}$ 圈。图3.1给出了一个示例。



(a) $k = 0$. (b) $k = -1$。 (c) $k = -2$。 (d) $k = 1$。

图 3.1. 无限族中不同无交叉连接的示例，其中两条连接内边界和外边界的弧绕环带边界缠绕$k/2$ 次， $k \in$ Z。

固定一条线段，它连接外边界上的 1st 和 $2n^{th}$ 标记点以及两个内边界点。称这条线段为**棒棒糖**。与之前一样，考虑外边界上 $2n-2$ 个点之间的一个固定无交叉连接，该连接不会将其余四个点隔离开来。如果围住其余四个标记点的两条弧不允许与棒棒糖相交，那么在不引入交叉的前提下，将外边界点处的弧连接到内边界点处，除同位变形外只有一种方式。

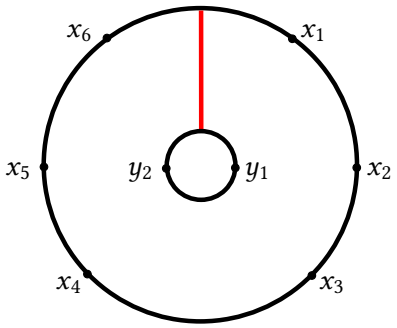


图 3.2. 环带中的一个棒棒糖示意图，外边界上有 6 个标记点，内边界上有两个标记点。

以下引理是对《 [Prz1] 中给出的儿童玩游戏证明的推广，并在 [PBIMW]中作了解释。此外，还可以在 [Iba]中找到该引理的详细证明。

引理 3.4。 [PBIMW，Prz1] 考虑一个环带，其外边界上有 $2n$ 个标记点，内边界上有 2 个标记点，并假设其中包含一个棒棒糖。令 $B_{n,\ 1} = \{b'_1, \cdots\ b'_N\}$ 为满足以下性质的无交叉连接（按同位分类）的集合：

(1) 有 $n-1$ 条弧连接到外边界上的标记点。*(2)* 这些 $n-1$ 条弧不会将外边界上剩余的两个标记点与内边界上的标记点隔开。*(3)* 剩余的两条弧与棒棒糖不相交；*(4)* 它们分别连接到环带的内边界分支和外边界分支。

因此 $N = \binom{2n}{n-1}$，$B_{n,\ 1}$ 与$Mb_{n,\ 1}$之间存在一一对应关系。

定义 *3.5*。考虑 $S2,\infty(Ann \times I, \{x_i\}_1^{2n}) \oplus S2,\infty(Ann \times I, \{x_i\}_1^{2n} \cup \{y_1^{inn}, y_2^{inn}\})$ 及其子模，$S((B_n)_1) = S(B_n,0) \oplus S(B_n,1)$，其中 *skein* 模 $S(B_n,0)$ 和 $S(B_n,1)$ 分别由 $B_n,0$ 和 $B_n,1$ 生成。特别地，$(B_n)_1 = B_{n,0} \sqcup B_n,1$。此外，令 $S((Mb_n)_1)$ 为 $S2,\infty(Mb \hat{\times} I, \{x_i\}_1^{2n})$ 的一个子模，其由 $(Mb_n)_1$ 的元素生成。定义一个线性映射 $\varphi: S((Mb_n)_1) \mapsto S(B_n,1)$，在基上如下：

(1) 若$m \in Mb_{n,0}$，则在 $B_{n,0}$ 中存在唯一元素，记为 $b_{n,0}$，它由 m 将交叉帽替换为桌子得到。在此情形下 $\varphi(m) = b_{n,0} \in B_{n,0}$。*(2)* 若$m \in Mb_{n,1}$，则在 $B_{n,1}$ 中存在唯一元素，记为 $b_{n,1}$，它由匹配边界与内边界不相交的弧得到。在此情形下 $\varphi(m) = b_{n,1} \in B_{n,1}$。

下一个引理给出了类型 $(Mb)_1$ 与一种新型 Gram行列式之间的直接联系，其类型为 B由集合 $(B_n)_1$ 构造，并使用与类型 B相同的双线性型。类型 $(Mb_n)_1$ 是其一个特殊情形：如图3.3所示，忽略连接于环带内边界（或外边界）的两条曲线之间的区别。

引理 3.6。 映射 φ 是基底 $(Mb_n)_1$ 与 $(B_n)_1$之间的一个双射。此外，在对元素进行适当标记后，*Gram* 行列式保持不变。

证明。 根据构造， φ 是$(Mb_n)_1$ 与$(B_n)_1$之间的双射。要证明 φ 保持Gram行列式，只需证明双线性型得到保持。由于 $\langle \varphi(m_i)\ \varphi(m_j) \rangle_B$属于

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{2,\infty}(Ann \times I) \quad &\oplus \quad \mathcal{S}_{2,\infty}(Ann \times I, \{y_1^{inn}, y_2^{inn}\}) \\ &\oplus \quad \mathcal{S}_{2,\infty}(Ann \times I, \{y_1^{out}, y_2^{out}\}) \ \oplus \ \mathcal{S}_{2,\infty}(Ann \times I, \{y_1^{inn}, y_2^{inn}\} \cup \{y_1^{out}, y_2^{out}\}), \end{aligned}$$

那么我们只需选择图3.3所示的以下标记方式。也就是说，例如，如果一条弧连接内边界和外边界，那么就存在一条相应的弧也与内边界和外边界相交；我们用 w 标记包含这对弧的元素。它对应于 $S2,\infty(Kb\hat{}x\ I)$ 中与两个交叉帽各相交一次的元素，即 w曲线。此外，如果一条弧连接外边界，我们就用 y 标记它；这对应于克莱因瓶中与外部交叉帽相交的 y 曲线。如果它只连接内边界，我们就用 x标记它。特别地，由两条弧组成、其中一条只连接内边界而另一条只连接外边界的元素，标记为 xy。

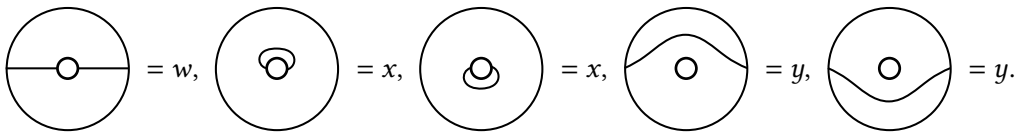


图 3.3. 环带边界上曲线的一种标记。

□

注 3.7。 尽管双射 φ 可以扩展到 Mb_n 但它将不再保持双线性型。事实上，这一点可以从例 *2.8*中看出；当两条弧与交叉帽相交时，对于克莱因瓶，可能得到 d 或 z，而对于环带的情况，则只会得到 x^2。

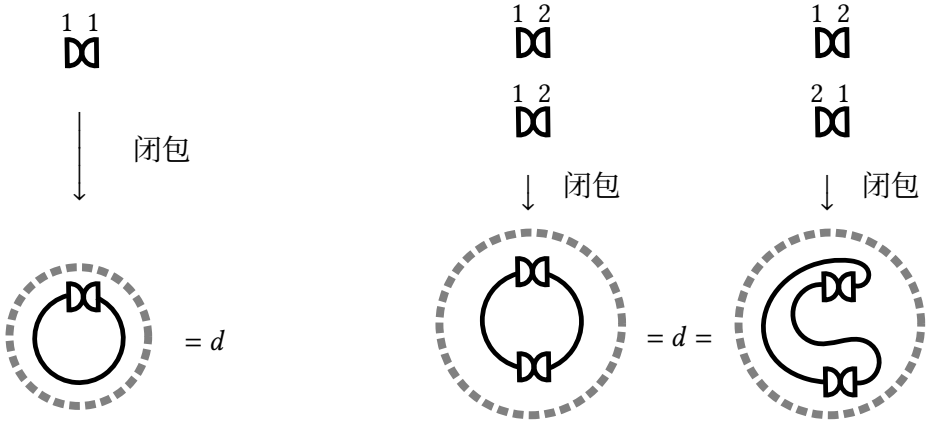
3.1. **白色标记**。 我们引入这样一些元素，它们的闭包与 $\times I$ 中的所有简单闭曲线或弧均保持无链环关系。这些元素将用于改写 Chen 和 Przytycki 在 [CP2] 中的证明，以证明类型 B 的 Gram行列式的一个因子整除类型 $(Mb)_1$。

定义 *3.8*。设 $I=[-1,1]$, $M=Ann\times I$，其外边界上附有 $2n$ 框架标记点，且 $\times\{0\}$ 的 M 装饰有一个棒棒糖。考虑 $L\sqcup\{w_j\}_{j=1}^k\subset M$；一个相对框架链环 L，以及一对白色标记框架点 $\{w_j\}_{j=1}^k$，它们与 L 不相交，且不同于 $2n$ 标记点，称为白色标记。白色标记要么附着并固定在M的 $Ann\times\{0\}$ 边界上，要么附着在 M内部的另一个白色标记上。若在 M 中，带标签的白色标记根据其标签与框架弧对应，则称它们被识别；也就是说，在环境同伦意义下，存在一组两两不相交的 k 曲线 $\{\gamma_j\}_{j=1}^k$，使得对于每个 j， γ_j 与框架点 $pt_{1,j}$ 的核心以及一对白色标记 $w_j=\{pt_{1,j},pt_{2,j}\}$ 的 $pt_{2,j}$ 相连，并满足以下条件：对于每条弧 γ_j, U，存在其邻域 $(\gamma_j)\subset Ann\times\{0\}$，使得 $(\cup_{i=1}^k U(\gamma_j)\times I)\cap(L\cup S)=\varnothing$。若不满足该条件，则白色标记仍作为白色标记框架点保留，其附着信息不变，但不附着任何弧。此外，分配给每个白色标记的标签符号在反演操作下会改变。

例 3.9。

(a) 令 $I=[-1,1]$, $M=Ann\times I$ 带有附着在 $Ann\times\{0\}$ 外边界上的带框架标记点 $2n$，并令 M 由棒棒糖 S装饰。假设 L 仅由没有交叉的相对框架链环构成，且假设 $L\cup w_1\subset M$，其中一对白色标记 $w_1=pt_{1,1}\sqcup pt_{2,1}$ 在 M内部彼此相连。那么存在一个圆盘 $D\subset Ann\times\{0\}$，使得 $w_1\subset D$且 $(D\times I)\cap(L\cup S)=\varnothing$。在这种情况下，通过 γ_1 在 D 中将这对白色标记点识别，从而得到一条简单闭曲线。图 *3.4a* 给出了示意图。

(b) 现在假设 $L\cup\{w_1,w_2\}\subset M$，其中 w_1 中的每个白色标记都与 w_2 中的一个白色标记在 M 内部相连。那么存在一个圆盘 $D\subset Ann\times\{0\}$，使得 $\{w_1\cup w_2\}\subset D$ 且 $(D\times I)\cap(L\cup S)=\varnothing$。在这种情况下，通过 D 中的弧来识别这对白色标记。图 *3.4b* 给出了示意图。

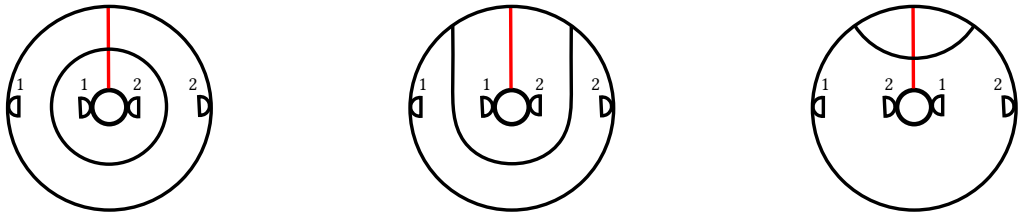


（a）一组白色标记的闭包。　　（b）两组白色标记的闭包。

图 3.4。通过将附着于具有相同标签的白色标记的弧进行识别，得到 $D\times\{0\}\subset Ann\times[-1,1]$ 中弧的闭包的局部示意图。

到目前为止，这种记号很简单。然而，如果我们考虑附着在 M边界上的白色标记，如图3.5所示，我们会发现存在阻碍白色标记闭包的相对框架链环

。此外，无论相对链环如何，我们都能从白色标记的位置发现障碍。



（a）来自 z的障碍分隔内侧和外边界点的曲线。

（b）来自分隔内侧的弧以及外边界点。

(c) 一个阻碍来自从白方的位置标记。

图 3.5. 白色标记点的闭包所遇到的障碍示例。

定义*3.10*。令 $I=[-1,1]$, $k \le n$, $M=Ann\times I$带有附着于$Ann\times\{0\}$ 外边界的 $2n$ 带框架标记点，并令 M装饰有一个棒棒糖 S。令$L^{fr}(2n,k)$表示所有固定在$Ann\times\{0\}$边界上的 k白色标记以及所有与白色标记不相交的相对框架链环L的集合，$L \sqcup\{w_j\}_{j=1}^{k}$，按环境同伦取等价类，同时保持所有标记点在边界上的位置不变。此外，我们将 k 白色标记限制为内边界上有限多个可能的位置，并且还限制在框架点之间，以及外边界上的 1st 和 $2n^{th}$ 框架点与棒棒糖之间，至多允许一个白色标记。令 R 为含幺交换环，$A\in R$ 为可逆元，并令$S_{2,\infty}^{sub}$、$(2n,k)$ 为 $RL^{fr}(2n,k)$的子模，该子模由卡夫曼括号$skein$ 关系生成。带有白色标记的 M 的相对卡夫曼括号 $skein$ 模是该商

$$\mathcal{S}_{2,\infty}(Ann\times I,\{x_i\}_1^{2n}\cup\{w_j\}_{j=1}^{k};R,A)=R\mathcal{L}^{fr}(2n,k)/S_{2,\infty}^{sub}(2n,k).$$

为简便起见，我们将此 $skein$ 模记为$\mathcal{S}(Ann_k^n)$。

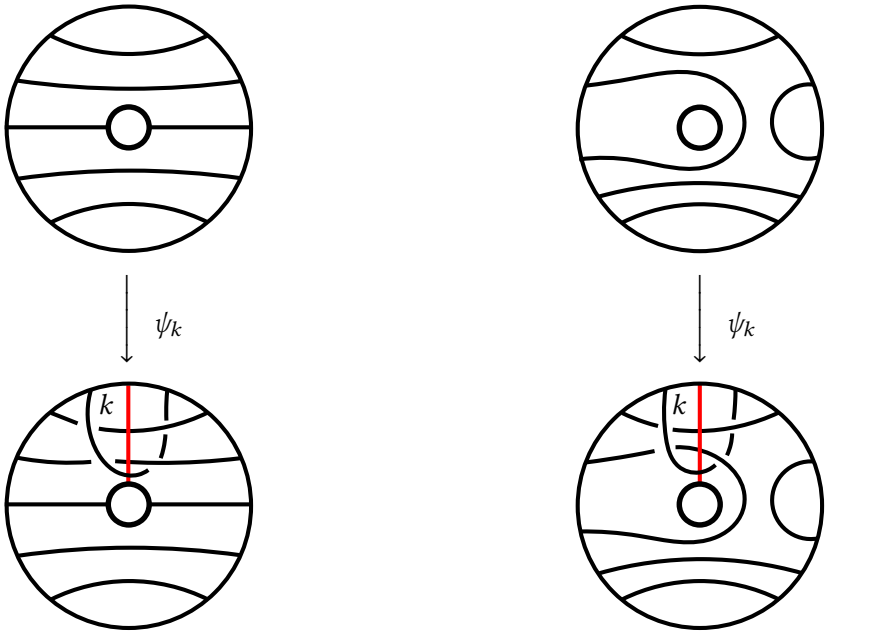
推论 3.11。带白色标记的 $Ann\times I$相对 $Kauman$ 括号 $skein$ 模$\mathcal{S}(Ann_k^n)$是一个自由 R 模。其基包含无穷多个元素，具体如下。

(1) Ann 的外边界上 $2n+2k$ 个框架点之间的无交叉连接，以及 $\times I$ 条边界平行曲线，其中 $i\ge 0$。*(2)* $\partial(Ann\times\{0\})$ 中 $2n+2k$ 个框架点之间的无交叉连接，以及 i 条边界平行曲线，其中 $i\ge 0$，当 $l\le k$ 时，$2l$ 个框架点位于内边界，且连接到这些 $2l$ 个框架点的弧不与外边界相连。*(3)* $\partial(Ann\times\{0\})$ 中 $2n+2k$ 个框架点之间的无交叉连接，其中当 $l<2k$ 时，l 个框架点位于内边界，并且至少有一条与某个 l 个框架点相连的弧，也与位于外边界的某个 $2k-l$ 个框架点相连。*(4)* $Ann\times\{0\}$ 的外边界上 $2n$ 个框架点之间的无交叉连接、i 条边界平行曲线（其中 $i>0$），以及 $\partial(Ann\times\{0\})$ 中的 k 个白色标记 $\{w_j\}_{j=1}^{k}$；其中至少有一个白色标记，例如 pt_1，ι属于 $w_l=\{pt_1,\iota,pt_2,\iota\}$，位于 $Ann\times\{0\}$ 的内边界，而 pt_2，ι位于外边界。*(5)* $\partial(Ann\times\{0\})$ 外边界上的 $2n$ 个框架点之间的无交叉连接，以及 $\partial(Ann\times\{0\})$ 中的 k 个白色标记 $\{w_j\}_1^k$；其中至少有一个白色标记，其连接路径受到一条连接一对框架点的弧或棒棒糖的阻挡；见图 *3.5*。对于这个包含白色标记的无交叉连接集合中的每个元素，例如 b，我们还有 bz^i，其中 $i>0$。

3.2. **棒棒糖方法**。本节通过定义类似的映射，使用 [CP2] 中讨论的棒棒糖方法。这些映射通过使用白色标记进行了修改，从而使内边界保持不变，并且x， y，以及 w曲线在这些映射和双线性型下保持不变。

定义 3.12. *D* 定义线性映射 ψ_k:$\mathcal{S}((B_n)_1) \to \mathcal{S}((B_{n+k})_1)$在基上的作用如下。对于 $b \in (B_n)_1$:
(1) 用棒棒糖装饰 b，并令 $\boldsymbol{L}$ 表示与棒棒糖的交点数最少为一的弧。 *(2)* 在 $2n^{th}$ 标记点与棒棒糖之间加入 k 个标记点，记为 ℓ_k。 *(3)* 在棒棒糖与 1st 标记点之间加入 k 个标记点，记为 r_k。 *(4)* 添加平行曲线，记为 $U_{b,k}$，使其连接 ℓ_k 和 r_k，并满足每条曲线都在棒棒糖左侧越过 $\boldsymbol{L}$，与棒棒糖相交一次，并在棒棒糖右侧从 $\boldsymbol{L}$ 下方越过。

图 *3.6* 展示了一个示意图。



(a) ψ_k 在B_5,1中的一个元素下方。 (b) ψ_k 在B_5,0中的一个元素下方。

图 3.6. 映射 ψ_k 作用于 S$((B_5)_1)$ 的两个基元素的示意图。

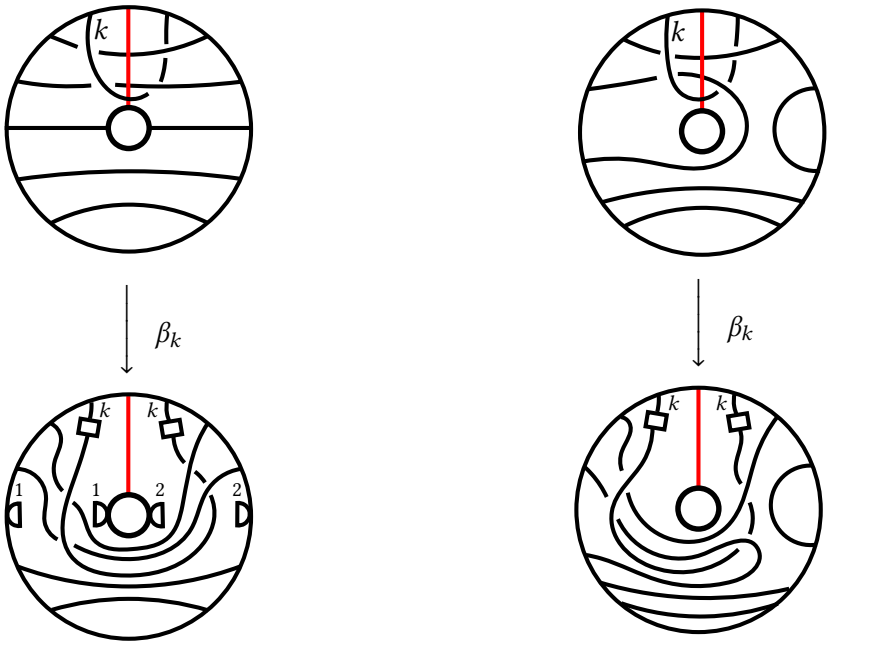
定义 3.13. 定义线性映射 β_k:$\mathcal{S}((B_{n+k})_1) \mapsto \mathcal{S}(B_{n+k,0}) \oplus \mathcal{S}(Ann_4^{n+k})$在基上的定义如下。对于 $b \in (B_{n+k})_1$:

(1) 若$b \in B_{n+k,0}$，则 *(a)* 用一个棒棒糖 S 装饰 b，并令 $\boldsymbol{L}$ 表示与棒棒糖的最小交点数为一的弧。用 ℓ_k 表示棒棒糖左侧起的前 k 个标记点，并用 r_k表示棒棒糖右侧起的前 k 个点。*(b)* 将 $\boldsymbol{L}$ 推到 $Ann \times \{0\}$内边界的另一侧。*(c)* 将一个 k^{th}琼斯-温茨尔幂等元 f_k的副本放入与 ℓ_k相连的弧中，靠近 ℓ_k的位置；再将另一个副本放入与 r_k相连的弧中，靠近 r_n 的位置。

(2) 如果$b \in B_{n+k,1}$，则 *(a)* 在连接到 y_1 的弧上装饰一个标记为1的白色标记。*(b)* 在连接到 y_2 的弧上装饰一个标记为2的白色标记。*(c)* 将 $\boldsymbol{L} \cup U_b$ 推到 $Ann \times \{0\}$的内边界另一侧。

(d) 将两个 k^{th}琼斯-温茨尔幂等元 f_k副本插入$U_{b,k}$中，一个靠近 ℓ_n，另一个靠近 r_n。

图示见图 *3.7*。



(a) β_k 在B_{5+k}中的一个元素下,1.　　(b) β_k 在B_{5+k}中的一个元素下，0。

图 3.7。映射 β_k 在 $(B_{5+k})_1$ 的两个元素作用下的示意图。

下一个引理是前一定义的直接结果。

引理 3.14. 设 $b_i, b_j \in (B_n)_1$。若 $\langle b_i, b_j\rangle_B = x^p y^m w^h d^n z^r$对于 $p, m, h, n, r \geq 0$，则

$$\langle \beta_0 \circ \psi_0(b_i), \beta_0 \circ \psi_0(b_j)\rangle_B = x^p y^m w^h d^{n+r}.$$

也就是说，所有 z 曲线都变得同伦平凡。

定义 3.15. 令 $H(x, y) \in \mathcal{S}_{2,\infty}(S^3)$表示 S^3 中由 x 和 y 装饰的 *Hopf* 链环。我们定义一个线性映射 ξ_k: $\mathcal{S}_{2,\infty}(Kb \hat{\times} I) \to \mathbb{Z}[A^{\pm 1}x, y, w]$，使得 ξ_k 在 x, y, w 和 d 上为恒等映射，并且

$$\xi_k(z) := H(z, f_k),$$

其中第二个分量由琼斯-温茨尔幂等元 f_k 装饰。

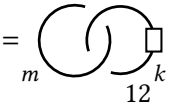
回顾 W. B. R. Lickorish 在 [Lic2] 中指出

(1)　

$= (-A^{2(k+1)} - A^{-2(k+1)})^m \Delta_k = ((-1)^k T_{k+1})^m(d)\Delta_k.$

因此,

$$\xi_k(z^m) = H(z^m, f_k) = \quad = (-A^{2(k+1)} - A^{-2(k+1)})^m \Delta_k.$$



示例3.16. 令 $d = -A^2 - A^{-2}$。 *en*

$$\xi_k\left(\quad\right) = dH(z^3, f_k) = d(-A^{2(k+1)} - A^{-2(k+1)})^3\Delta_k = d((-1)^k T_{k+1}(d))^3\Delta_k,$$

$$\xi_k\left(\quad\right) = yH(z^2, f_k) \ = y((-1)^k T_{k+1}(d))^2\Delta_k,$$

and

$$\xi_k\left(\quad\right) = dxy((-1)^k T_{k+1}(d))^3\Delta_k.$$

定义 3.17. 将矩阵 $F_{n,k}$定义为如下形式，使用 ξ_k。对于 $m_i, m_j \in (Mb_n)_1$,

$$F_{n,k} = (\xi_{k-1}(\langle m_i, m_j\rangle_{Mb}))_{1\le i,j\le\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}}.$$

注释 3.18. 根据定义，如果 $d = -A^2 - A^{-2}$，那么

$$G_n^{(Mb)_1}(d, (-1)^{k-1}T_k(d), x, y, w) = \frac{1}{\Delta_{k-1}}F_{n,k}.$$

此外　　此外，若以类似的方式定义 $F'_{n,k}$*on* Mb_n，则 $F'_{n,k} = (\xi_{k-1}(\langle m'_i, m'_j\rangle_{Mb}))_{1\le i,j\le|}Mb_n|, n$

$$G_n^{Mb}(d, (-1)^{k-1}T_k(d), x, y, w) = \frac{1}{\Delta_{k-1}}F'_{n,k}.$$

以下引理直接由映射 β_k、ψ_k 和 φ 的构造得出。注意，φ 是集合 $(Mb_n)_1$ 与 $(B_n)_1$ 之间保持双线性型的双射；ψ_k 引入 k 个与 z 曲线相链的平凡链环分支，其双线性型为 B 型；而在 B 型双线性型下，$\beta_k \circ \psi_k$ 会将琼斯-温茨尔幂等元 k^{th} 插入这些平凡链环分支中。此外，$\beta_k \circ \psi_k$ 会将所有边界平行曲线推过环带的内边界，同时保持 x, y 和 w 曲线的数量不变。

引理3.19. 设 $\eta_k = \beta_k \circ \psi_k \circ \varphi$。对于 $m_i,\ m_j \in (Mb_n)_1$,

$$\xi_k(\langle m_i, m_j\rangle_{Mb}) = \langle \eta_k(m_i), \eta_k(m_j)\rangle_B.$$

下一个定理是我们关于类型为 $(Mb)_1$ 的 Gram 行列式闭式公式结构的主要结果。

定理 3.20。

$$\prod_{k=1}^{n}(T_k(d) + (-1)^k z)^{\binom{2n}{n-k}} \ divides\ D_n^{(Mb)_1}(d, z, x, y, w).$$

证明。我们修改并扩展了 Chen 和 Przytycki 在 [CP2] 中的证明，证明对于 $k \ge 1$，$G_{(Mb)_n}$ [1]的零度（d，$(-1)^{k-1}T_k(d)$ x，y，w）至少为 $\binom{2n}{n-k}$。

回忆一下，对于 $F_{n,\ k} = (\xi_{k-1}(\langle m_i, m_j\rangle_{Mb}))_{1\le i,\ j\le\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}}$ 我们有

$$G_n^{(Mb)_1}(d, (-1)^{k-1}T_k(d), x, y, w) = \frac{1}{\Delta_{k-1}}F_{n,k}.$$

此外，根据引理3.19，我们有 $\xi_{k-1}(\langle m_i, m_j\rangle_{Mb}) = \langle \eta_{k-1}(m_i)\ \eta_{k-1}(m_j)\rangle_B$其中 $\eta_k = \beta_k \circ \psi_k \circ \varphi$。由于 φ是 $(Mb_n)_1$与$(B_n)_1$,之间的双射，因此只需证明 $\beta_{k-1} \circ \psi_{k-1}((B_n)_1)$ 包含于S2,∞(Ann$_4^{n+k-1}$) ⊕ S2,∞($D^2 \times I, n+k-1$)中一个维数为 $\binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-k}$的子空间内。如 [CP2], 中所示，只需证明

$$\dim(\mathrm{Im}(\beta_{k-1})) \leq \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-k}.$$

回顾，S $((B_n)_1)$ =S $(B_{n,}0)$ ⊕S $(B_{n,}1)$，其中S($B_{n,}0$) 和S($B_{n,}1$) 是自由 R-模，分别由$B_{n,}0$和 $B_{n,}1$ 生成。由于 $B_{n,0} \cap B_{n,1} = \emptyset$，因此

$$\beta_{k-1} \circ \psi_{k-1}(B_{n,0} \oplus B_{n,1}) = \beta_{k-1} \circ \psi_{k-1}(B_{n,0} \oplus \{0\}) \oplus \beta_{k-1} \circ \psi_{k-1}(\{0\} \oplus B_{n,1}).$$

此外，$|B_{n,\ 1}| = \binom{2n}{n-1}$。因此，

$$\dim(\beta_{k-1} \circ \psi_{k-1}((B_n)_1)) \leq \dim(\beta_{k-1} \circ \psi_{k-1}(B_{n,0} \oplus \{0\})) + \binom{2n}{n-1}.$$

集合 $\beta_{k-1} \circ \psi_{k-1}(B_{n,0} \oplus \{0\})$ 可以通过沿棒棒糖切开，视为圆盘中 $2(n+k-1)$ 个点之间的无交叉连接集合。因此，只需证明 $\beta_{k-1} \circ \psi_{k-1}(B_{n,0} \oplus \{0\})$ 包含于 S2,∞($D \times I, n+k-1$) 中一个维数为 $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-k}$ 的子空间内，这一点已在[CP2]中证明。□

4. 未来研究方向

我们给出了一种类型（Mb）$_1$的猜想公式。该猜想已针对 $n \leq 3$得到验证。

猜想 4.1。

令 $R = \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, w, x, y, z]$. en，则类型$(Mb)_1$在 $n \geq 1$下的$Gram$行列式为：

$$D_n^{(Mb)_1} = [(d-z)((d+z)w - 2xy)]^{\binom{2n}{n-1}} \prod_{k=2}^{n} (T_k(d)^2 - z^2)^{\binom{2n}{n-k}} \prod_{k=2}^{n} (T_{2k}(d) - 2)^{\binom{2n}{n-k}},$$

其中，$T_k(d)$ 是第一类 k^{th} 切比雪夫多项式，且 $d = -A^2 - A^{-2}$。

Przytycki提出了棒棒糖方法，认为它适用于类型 Mb，可用于证明与我们的主要定理中相同的因子。事实上，定理证明的总结性论证3.20 表明，本文提出的新技术与棒棒糖方法结合后，可以加以修改并应用于类型 Mb；不过，这并非易事。

引理3.6揭示了类型 $(Mb)_1$ 与通过使用集合 $(B_n)_1$ 以及类型为 B的双线性型所构造矩阵的Gram行列式之间的直接联系。我们将此行列式称为类型$(B)_1$。正如引理证明中所示，类型 $(Mb)_1$ 是类型$(B)_1$ 的特殊情形，其中不区分边界分支均连接到内边界（或外边界）的弧。另一个未来方向是研究类型 $(B)_1$ 的 Gram行列式，并得到一个闭式公式。此外，通过研究 [MS2], 中所讨论的Blob代数，可以探索其与统计力学的潜在联系：将 y 和 x 变量设为相等，从而得到一个对称矩阵的行列式。

参考文献

[BIMP1] R. P. Bakshi、D. Ibarra、S. Mukherjee、J. H. Przytycki，《Mb 型格拉姆行列式的推广》，《拓扑学应用》295（2021），论文编号 107663，共15页。电子预印本：arXiv:1905.07834 [math.GT]。[BIMP2] R. P. Bakshi、D. Ibarra、S. Mukherjee、J. H. Przytycki，《关于 Mb 型格拉姆行列式的一则注记》（即将发表于 AMS 当代数学丛书）。[Cai] X. Cai，《 Lickorish 双线性形式的一个格拉姆行列式》，《剑桥哲学学会数学论文集》 151 （ 2011 ），第 1 期，83–94页。电子预印本：arXiv:1006.1297v3 [math.GT]。[Che] Q. Chen，2009年4月3日与 J. H. Przytycki 的个人通信（电子邮件）。[CP1] Q. Chen、J. H. Przytycki，《Temperley-Lieb 代数的 Gram矩阵与色多项式连接矩阵相似》，《当代数学通讯》（CCM），10，2008，849-855；电子预印本：hp://front.math.ucdavis.edu/ 0806 0878 。 CP Q. Chen、J. H. Przytycki，《Temperley-Lieb 代数的格拉姆行列式》，《应用数学进展》，（），-。arXiv: 。v2 [math.GT]。[DiF] P. Di Francesco，《蜿蜒图行列式》。《数学物理通讯》 191 1998 3，543 583 9612026 [ ]（），第-期。arXiv:hep-th/ math.GT。[Iba] D. Ibarra，《三维流形中的带框架的链环、其应用及纽结理论的代数方法》。博士论文——乔治·华盛顿大学。2022年。163页。ISBN：979-8802-71109-5，Proest LLC。[KS] K. H. Ko、L. A. Smolinsky，《三维流形理论中的组合矩阵》。《太平洋数学杂志》149（1991），第2期，319–336页。[Lic1] W. B. R. Lickorish，《从琼斯多项式的组合学得到的三维流形不变量》，《太平洋数学杂志》149(2)，1991，337-347。[Lic2] W. B. R. Lickorish，《纽结理论导论》。《数学研究生教材》，175。施普林格出版社，纽约，1997年。[MS1] P. Martin、H. Saleur，《高维统计力学的代数方法》。《数学物理通讯》158，1993，155 190-。[MS2] P. Martin、H. Saleur，《Blob 代数与周期Temperley–Lieb代数》。《数学物理快报》30 3，189 1994 206 9302094（），第-期。arXiv:hep-th/。[Prz1] J. H. Przytycki，《考夫曼括号琐结模基础》。《神户数学杂志》，16 1 1999, 45 66 9809113 （），-。[ ]arXiv:math/ math.GT。[Prz2] J. H. Przytycki，2008年11月21日与 Q. Chen 的个人通信（电子邮件）。[PBIMW] J. H. Przytycki、R. P. Bakshi、D. Ibarra、G. Montoya-Vega、D. E. Weeks，《纽结理论讲义：当代主题探究》，Springer Universitext丛书（即将出版）。[RT] N. Yu. Reshetikhin 和 V. G Turaev，《通过链环多项式和量子群得到的三维流形不变量》，inv. math，103(1991)，547-597。[Sch] F. Schmidt，《与色多项式连接的 A 型和 B型矩阵相关的问题》。《Tue多项式》专刊，《应用数学进展》32（2004），第1-2期，380-390。[Sim] R. Simion，《一个B型结合多面体》。形式幂级数与代数组合学（美国亚利桑那州斯科茨代尔，2001）。《应用数学进展》30（2003），第1-2期，2-25。[Wit] E. Wien，量子场论与琼斯多项式，《数学物理通讯》121（1989），351。

澳大利亚维多利亚州3800，莫纳什大学数学学院。电子邮箱：dionne.ibarra@monash.edu

纽约市立大学研究生中心及伊恩斯学院数学系，美国纽约州电子邮箱：gabriel.montoyavega55@gc.cuny.edu –gabrielmontoyavega@gmail.com