# 通过条形码界定拉格朗日 Hofer 度量

PATRICIA DIETZSCH

arXiv:2304.05628v1 [math.SG] 12 Apr 2023

Abstract. 我们根据持久弗洛尔同调的条形码，给出圆柱中赤道之间拉格朗日霍弗距离的上界。该上界由有限条的长度加权和以及谱距离组成。

## 1. Introduction and main results

设 $(M,\omega = -\mathrm{d}\lambda)$ 为恰当辛流形。考虑紧支撑哈密顿微分同胚群 $\mathrm{Ham}(M)$。任意紧支撑哈密顿函数$H \in C^\infty([0,1]\times M)$ 都生成哈密顿流 $\{\phi_t^H\}$。哈密顿微分同胚 $\phi \in \mathrm{Ham}(M)$ 的 Hofer 范数定义为

$$||\phi||_H = \inf\left\{\int_0^1 \max_{x\in M} H_t(x) - \min_{x\in M} H_t(x)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, \phi_1^H = \phi\right\}.$$

Let $L$ 和 $L'$ 是 $M$ 中哈密顿同伦的闭连通Lagrange子流形 .
Th $L$ 与 $L'$ 之间的拉格朗日霍弗距离定义为

$$d_H(L,L') = \inf\left\{||\phi||_H \,\middle|\, \phi(L) = L'\right\}.$$

对于横截相交且恰当的拉格朗日子流形 $L$ 和 $L'$，我们考虑系数取于 $\mathbb{Z}_2$ 的 Floer 链复形 $\mathrm{CF}(L,L')$。对恰当 1-形式 $\lambda|_L$ 和 $\lambda|_{L'}$ 选取原函数，会得到作用泛函 $\mathcal{A}$，它在 Floer 链复形 $\mathrm{CF}(L,L')$上诱导一个滤过。因此，$\mathrm{CF}(L,L')$ 的同调群 $\mathrm{HF}(L,L')$ 成为一个持久模 $\mathrm{HF}^{\leq\bullet}(L,L')$。与之相关的条形码 $\mathcal{B}(L,L')$为这一对子流形 $(L,L')$带来若干不变量。其中之一是拉格朗日谱度量 $\gamma(L,L')$，它是 $\mathcal{B}(L,L')$ [Vit92, KS21]中两条无限条之间的最大距离。边界深度 $\beta_1(L,L')$在 [Ush13], 中得到研究，是最长有限条形码区间的长度。本文还考虑其他有限条形码区间的长度。我们记为

$$\beta_1(L,L') \geq \beta_2(L,L') \geq \cdots \geq \beta_k(L,L')$$

按长度排列的有限条。虽然条形码 $\mathcal{B}(L,L')$ 实际上取决于 $\lambda|_L$ 和 $\lambda|_{L'}$ 的原函数的选择，但数值 $\gamma(L,L')$ 和 $\beta_i(L,L')$，$i\in\{1,\ldots,k\}$，与此无关。Kislev-Shelukhin [KS21] 证明了以下不等式

$$\beta_1(L,L') \leq \gamma(L,L') \leq d_H(L,L'). \tag{1}$$

在本文中，我们证明了圆柱中赤道的一个逆不等式。从现在起，我们在 $\Sigma := S^1\times(-1,1)$ 中工作。在局部坐标$(q,p)$中，$\Sigma$ 上的标准辛形式是$\omega = \mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}p = -\mathrm{d}\lambda$，其中 $\lambda = p\mathrm{d}q$。令 $L_0 = S^1\times\{0\}\subset\Sigma$ 表示零截面。我们关注集合 $\mathcal{L}(L_0)$，它由所有与 $L_0$ 哈密顿同伦的拉格朗日子流形 $L\subset\Sigma$ 构成。

我们的主要结果是:

定理1.1.假设 $L$ 与 $L'\in\mathcal{L}(L_0)$ 在 $2n$ 个点处横截相交。

$$d_H(L,L') \leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^j\beta_j(L,L') + \gamma(L,L').$$

利用不等式 (1)，我们得到以下界:

推论 1.2。对于任意如上所述的 $L$、$L'$

$$\gamma(L,L') \leq d_H(L,L') \leq 2^n\gamma(L,L').$$

作者的研究部分得到了瑞士国家科学基金会的资助（资助编号：200021 204107）

1.1. 与先前工作的关系。定理 1.1 的灵感来自 Khanevsk 的以下结果 y.

定理 1.3（[Kha11][1]）。存在常数 $k$ 和 $c$，使得对于任意横截相交的 $L$，$L' \in \mathcal{L}(L_0)$，

$$d_H(L, L') \leq k \cdot \#(L \cap L') + c.$$

此外，Khanevsky 证明了，$\mathcal{L}(L_0)$ 上的 Hofer 距离无界 [Kha09]。令 $L \in \mathcal{L}(L_0)$，并考虑一列与 $L$横截的拉格朗日子流形 $\{L_n\} \subset \mathcal{L}(L_0)$，满足$d_H(L, L_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$。由 Khanevsky 的结果可知，$\#(L \cap L_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$。与 Hofer 度量 $d_H$ 相反，谱距离 $\gamma$ 有界 [She22]。因此，推论 1.2 表明，$\mathcal{B}(L, L_n)$ 中的条带数趋于 $\infty$。这重新得到 $\#(L \cap L_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$，因为交点与 $\mathcal{B}(L, L_n)$ 中条带的端点一一对应。

已知 $\gamma$ 是 $C^0$连续的 [BHS22]，，而 $d_H$ 则不是。我们的结果揭示了 Hofer 度量下收敛的如下性质。

推论 1.4. 假设 $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个横截于 $L$ 的拉格朗日子流形序列，并且该序列 $C^0$-收敛到 $L$。如果序列 $k_n := \#(L \cap L_n)$ 有界，那么 $\{L_n\}$ 在拉格朗日 Hofer 度量下收敛到 $L$。

1.2. 证明概要。我们解释证明定理 1.1 的策略。设 $L, L' \in \mathcal{L}(L_0)$ 是两个横截相交的拉格朗日子流形，它们相交于 $2n$ 个点。作用谱 $\{\mathcal{A}(q) | q \in L \cap L'\}$ 与 $\mathcal{B}(L, L')$ 中条带的端点重合。因此，条形码 $\mathcal{B}(L, L')$ 由 $n-1$ 个有限条形码区间和两条无限条组成。我们通过对交点数量进行归纳法来证明该定理。

基例：如果只有两个交点，比如 $q$ 和 $p$，那么 Hofer 距离等于连接 $q$ 和 $p$的某条 Floer 条带的面积。这也等于 $\mathcal{B}(L, L')$中两条无限条的作用值之差，因此 $d_H(L, L') = \gamma(L, L')$。

归纳步骤：假设定理 1.1 对于横截相交于 $2(n-1)$ 个点的拉格朗日子流形成立。设 $L$和 $L'$ 如上所述，并相交于 $2n \geq 4$个点。我们假设任意两个交点 $q \neq p \in L \cap L'$ 都满足 $\mathcal{A}(q) \neq \mathcal{A}(p)$。为了使用归纳假设，我们采用 Khanevsky 构造删除叶 [Kha09]，从而构造一个拉格朗日子流形 $L''$。叶是 $\Sigma \backslash (L \cup L')$的一个连通分支，其边界由 $L' \backslash L$的一个连通分支和 $L \backslash L'$的一个连通分支构成。图 1 展示了示意图，更多细节见第 3 节。

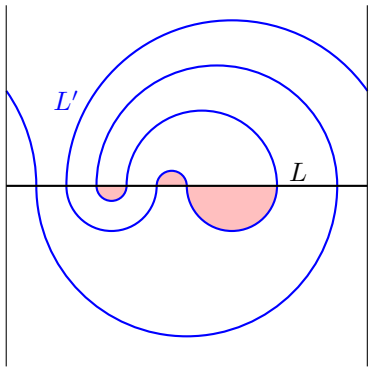



FIGURE 1. 圆柱中的一对赤道（$L, L'$）（左、右两条竖直线相互识别）。三片叶子以红色标出。

在第 4 节中，我们证明如下结果

命题 1.5。设 $[a, b)$ 是 $\mathcal{B}(L, L')$ 中最短的有限条形码区间。设 $\bar{q}, \bar{p} \in L \cap L'$ 是满足 $\mathcal{A}(\bar{q}) = b$ 且 $\mathcal{A}(\bar{p}) = a$ 的交点。则 $\bar{q}$ 和 $\bar{p}$ 由一片叶连通。
此叶的面积为 $\mathcal{A}(\bar{q}) - \mathcal{A}(\bar{p}) = b - a = \beta_{n-1}(L, L')$。

[1]Khanevsky 对更广泛的一类曲面和拉格朗日子流形证明了这一结果，而不仅仅是圆柱体。

因此，我们可以使用用于删除一片叶的Khanevsky 构造来移除交点 $\bar{q}$ 和 $\bar{p}$： 对于任意 $\epsilon > 0$ ，存在一个 Hofer范数为$||\phi||_H \leq \beta_{n-1}(L, L') + \epsilon$ 的哈密顿微分同胚 $\phi$ ，使得 $L'' := \phi(L')$ 与 $L$ 横截相交，且交点数为 2$(n-1)$。

Floer 复形 CF$(L, L')$ 和 CF$(L, L'')$ 可以赋予作用滤过，使得它们的持久同调是 $\frac{\beta_{n-1}(L,L')}{2}+\epsilon$ -交错的。因此

$$|\beta_j(L, L') - \beta_j(L, L'')| \leq \beta_{n-1}(L, L') + \epsilon \tag{2}$$

对所有 $1 \leq j \leq n-2$ 以及

$$|\gamma(L, L') - \gamma(L, L'')| \leq \beta_{n-1}(L, L') + \epsilon. \tag{3}$$

根据归纳假设，定理对 $(L, L'')$ 成立。因此我们得到

$$\begin{aligned}
d_H(L, L') &\leq d_H(L, L'') + d_H(L'', L') \\
&\leq \left( \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \beta_j(L, L'') + \gamma(L, L'') \right) + (\beta_{n-1}(L, L') + \epsilon) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \left(\beta_j(L, L') + \beta_{n-1}(L, L') + \epsilon\right) \\
&\quad + (\gamma(L, L') + \beta_{n-1}(L, L') + \epsilon) + \beta_{n-1}(L, L') + \epsilon \\
&= \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \beta_j(L, L') + \gamma(L, L') + \left( \left( \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \right) + 2 \right) (\beta_{n-1}(L, L') + \epsilon) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} 2^j \beta_j(L, L') + \gamma(L, L') + 2^{n-1}\epsilon,
\end{aligned}$$

在第三个不等式中，我们用到了 (2)、(3)。令 $\epsilon \to 0$ 取极限，即完成归纳步骤。

注 1.6。HF$(L, L')$ 与 HF$(L, L'')$ 之间的交错，以及不等式 (2) 和 (3)，都是众所周知的，并且在很广泛的情形下都成立，这被称为稳定性，参见例如[KS21、Ush13]。我们没有直接将一般理论应用于这一特殊情形，而是在第 3 节中为圆柱上的赤道给出一个组合证明。

1.3. 论文结构。第 2 节中，我们利用 Floer理论的组合框架，介绍圆柱中拉格朗日子流形的持久弗洛尔同调。第 3 节中，我们回顾删除叶的过程，并分析其对持久弗洛尔同调及其条带码的影响。特别地，我们给出不等式 (2) 和 (3) 的组合证明。命题 1.5 最后在第 4 节中证明。

1.4. 致谢。衷心感谢我的导师 Paul Biran 提出这个项目，并进行了许多富有帮助的讨论。我还要感谢 Yusuke Kawamoto 对本文提出的宝贵意见，尤其感谢他向我指出推论 1.4。作者得到瑞士国家科学基金会（资助编号 200021 204107）的部分资助。

## 2. Persistent Floer homology

本节将介绍 $\mathcal{L}(L_0)$ 中横截相交的拉格朗日子流形的过滤弗洛尔复形、其持久同调，以及我们从条形码中提取的不变量。尽管这些概念在更一般的情形下也成立，我们仍将重点讨论感兴趣的对象——圆柱。我们采用 de Silva–Robbin– Salamon [dSRS14] 所发展的曲面中曲线的组合Floer同调。 [2]

[2] [dSRS14] 中的设置并不总能涵盖两条同痕曲线的情形。不过，我们在本文中使用的大多数论述的证明都可以推广到我们的设置中。若不能推广，我们会给出证明。

2.1. 拉格朗日Floer复形。我们紧随 [dSRS14]。设 $L, L' \in \mathcal{L}(L_0)$ 满足$L$ 与 $L'$ 横截相交。对偶 $(L, L')$ 的Floer复形是一个链复形，其底层 $\mathbb{Z}_2$-向量空间由交点生成。更具体地，记$P = L \cap L'$，我们定义

$$\mathrm{CF}(L, L') = \bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}_2 p.$$

Th该微分通过统计连接两个
inte交点的所谓光滑月牙的数量来得到。我们将其形式化如下。设

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z \geq 0, |z| \leq 1\}$$

为标准半圆盘。设 $q, p \in P$。从 $q$到 $p$的光滑月牙是一个保持定向的光滑浸入 $u\colon \mathbb{D} \longrightarrow \Sigma$，满足边界条件

$$u(\mathbb{D} \cap \mathbb{R}) \subseteq L, \qquad u(\mathbb{D} \cap S^1) \subseteq L', \qquad u(-1) = q, \qquad u(1) = p.$$

下图 2 给出了一个从 $q$ 到 $p$的光滑月牙示例。

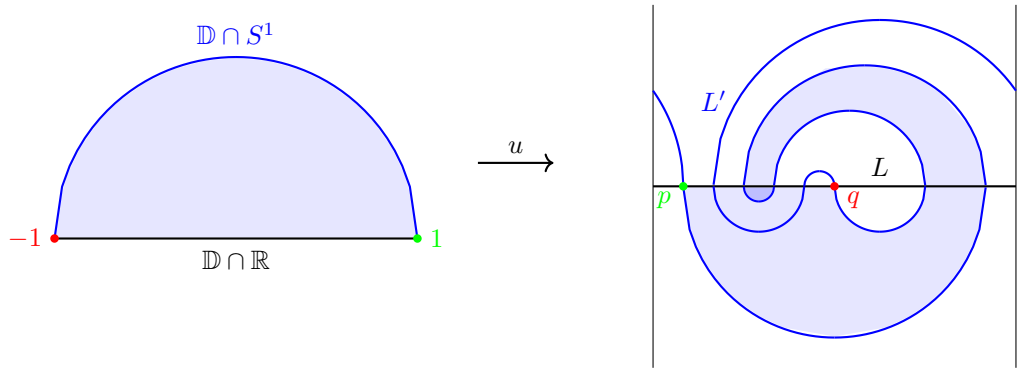



FIGURE 2. 一个从 $q$ 到 $p$的光滑月牙。

若存在保持定向的微分同胚 $\varphi\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$，使得 $\varphi(1) = 1$, $\varphi(-1) = -1$ 且 $u' = u \circ \varphi$，则称两个光滑月牙 $u, u'\colon \mathbb{D} \longrightarrow \Sigma$等价。我们将$n(q, p) \in \mathbb{Z}_2$ 定义为从 $q$ 到 $p$的光滑月牙等价类的模 2 个数。于是，微分定义为

$$\partial(q) = \sum_{p \in P} n(q, p) p.$$

它满足 $\partial^2 = 0$。 [3] 因此，(Floer 链复形$(L, L')$ $\partial$) 是一个链复形。

以下光滑透镜区域的性质将很有用。

引理 2.1. 设 $u\colon \mathbb{D} \to \Sigma$ 是从 $q$ 到 $p$ 的光滑月牙。设 $q = x_0$、$x_1$、$\ldots$、$x_l$、$x_{l+1} = p$ 是 $P \cap u(\mathbb{D} \cap S^1)$ 中的点，按照沿 $u(\mathbb{D} \cap S^1)$ 从 $q$ 朝 $p$ 跟随 $L'$ 时它们在 $L'$ 上的顺序排列（见图3）。假设 $x_1$、$x_l \notin \{q, p\}$。那么 $x_1$ 和 $x_l$ 不包含于 $u(\mathbb{D} \cap \mathbb{R})$。

证明。如果不是这样， $u$ 在 $u^{-1}(x_1)$ 和 $u^{-1}(x_l)$ 处不是浸入。 □

注记 2.2. [dSRS14, 定理 6.7] 根据边界行为刻画了光滑月牙。以下是该定理的一些推论。在足够小的邻域 $U$ 中，我们可以选取坐标（$x$, $y$），使得 $L \cap U$与 $x$-轴重合，且 $L' \cap U$与$y$-轴重合。如果一个光滑月牙 $u$离开 $q$，则 $u$（$\mathbb{D}$）$\cap U$完全位于第一象限（$x \geq 0$, $y \geq 0$）或第三象限（$x \leq 0$, $y \leq 0$）。类似地，如果一个月牙 $u$ 进入 $p$，那么在局部区域内， $u$（$\mathbb{D}$）要么位于第二象限（$x \leq 0$, $y \geq 0$），要么位于第四象限（$x \geq 0$, $y \leq 0$）。对于任意$q$、$p \in L \cap L'$，从 $q$到 $p$的月牙至多有 2 个月牙。图4展示了含有 2 个月牙的示例。

[3] [dSRS14] 中的证明可以推广到这一情形。其依据是研究 *broken hearts*，它们是带有一个非凸角点的浸入圆盘。简要证明见 [Abo08，引理 2。11]。

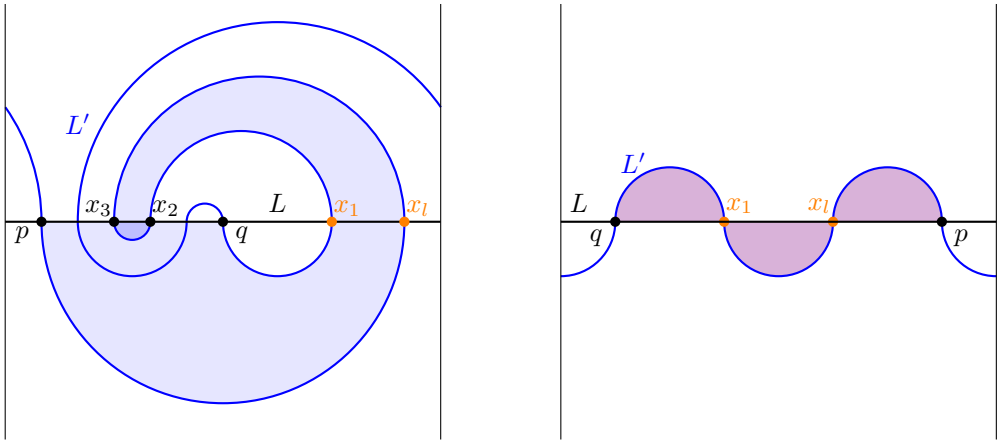



FIGURE 3. 左侧是一个光滑月牙，其中 $x_1$ 和 $x_l$ 不属于 $u(\mathbb{D} \cap \mathbb{R})$。右侧的紫色区域无法由光滑月牙得到。

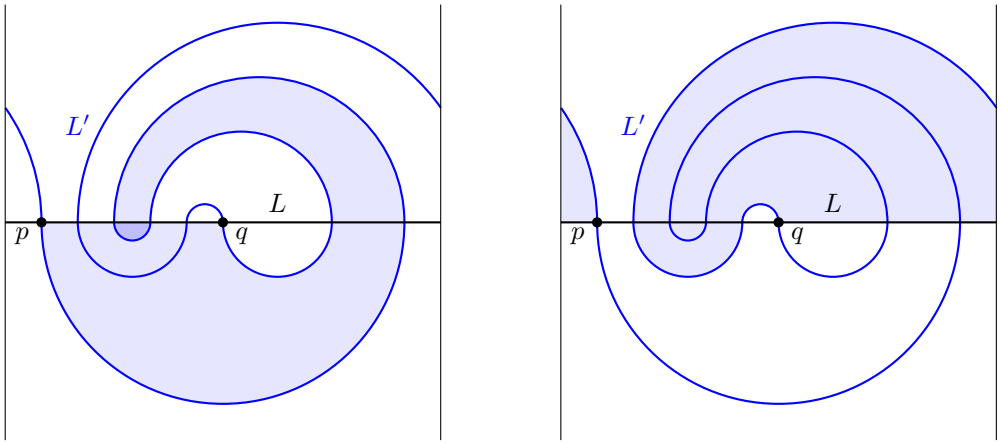



FIGURE 4. 从 $q$ 到 $p$的两个月牙。

2.2. 滤过。任意 $L \in \mathcal{L}(L_0)$ 都是恰当的，这意味着 1-形式 $\lambda|_L \in \Omega^1(L)$ 是恰当的。我们称一个函数

$$h_L \colon L \longrightarrow \mathbb{R}$$

使得 $\mathrm{d}h_L = \lambda|_L$ 是 $L$的一个标记。由于 $L$ 是连通的，标记 $h_L$ 在加法常数意义下唯一。我们将在下文引入的 Floer 链复形 $\mathrm{CF}(L, L')$ 上的滤过将取决于对 $L$ 和 $L'$所选的标记。

分别固定 $L$ 和 $L'$ 的两个标记 $h_L$ 和 $h_{L'}$。考虑从 $L$ 到$L'$的路径空间，即

$$\Omega_{L,L'} := \{\gamma \in C^\infty([0,1]) \,|\, \gamma(0) \in L, \gamma(1) \in L'\}.$$

我们将 $\Omega_{L,L'}$ 在 $\gamma \in$处的切向量 $\xi$ 视为沿着 $\gamma$ 的向量场 $\xi(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$。作用泛函 $\mathcal{A}\colon \Omega_{L,L'} \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{A}(\gamma) = h_L(\gamma(1)) - h_{L'}(\gamma(0)) - \int_0^1 \lambda_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\,\mathrm{d}t.$$

$\mathcal{A}$ 的外微分为

$$\mathrm{d}\mathcal{A}_\gamma(\xi) = \int_0^1 \omega(\dot{\gamma}(t), \xi(t))\,\mathrm{d}t$$

对任意的 $\xi \in T_\gamma \Omega_{L,\ L'}$。我们将 $P$ 视为 $\Omega_{L,\ L'}$ 的子集，方法是将 $p \in P$ 视为一条常值路径。令$q$、$p \in P$，并令 $u$ 为从 $q$ 到 $p$的一条光滑月牙。由此可得

$$\int_{\mathbb{D}} u^* \omega = \mathcal{A}(q) - \mathcal{A}(p). \tag{4}$$

注 2.3. 任意两个相邻的交点之间都有一个光滑月牙。更确切地说，在 $L$ 上选取一个定向，并按照交点在 $L$上的顺序将交点排列为 $s_1, s_2, \ldots, s_{2n}$。那么，对每个 $1 \leq i \leq 2n$，都存在一个从 $s_i$ 到 $s_{i+1}$的光滑月牙，或一个从 $s_{i+1}$ 到 $s_i$的光滑月牙。（这里，指标采用循环记法，即 $s_{2n+1} = s_1$。）我们将在第 3.3 节说明这些光滑月牙。由此可知，方程 (4) 将 $P$ 上的作用泛函唯一确定到一个加法常数。

由于 $u$ 是保向浸入，因此我们有 $\int_{\mathbb{D}} u^* \omega \geq 0$。由此可得

$$\mathcal{A}(q) - \mathcal{A}(p) \geq 0,$$

只要存在一个从 $q$ 到 $p$的月牙，就有上述结论。特别地，微分会降低滤过:

$$\mathcal{A}(\partial q) < \mathcal{A}(q).$$

因此，对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{CF}^{\leq \alpha}((L, h_L), (L', h_{L'})) := \bigoplus_{p \in P, \mathcal{A}(p) \leq \alpha} \mathbb{Z}_2 p$$

是 Floer 链复形 CF($L, L'$) 的子复形。此外，对于每个 $\alpha \leq \beta$，都有包含映射

$$\mathrm{CF}^{\leq \alpha}((L, h_L), (L', h_{L'})) \subseteq \mathrm{CF}^{\leq \beta}((L, h_L), (L', h_{L'})).$$

这一集合

$$\mathrm{CF}^{\leq \bullet}((L, h_L), (L', h_{L'})) = \left\{\mathrm{CF}^{\leq \alpha}((L, h_L), (L', h_{L'}))\right\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$$

称为有序对 $((L, h_L), (L', h_{L'}))$ 的过滤弗洛尔复形。

2.3. 持久弗洛尔同调及其条形码。关于持久同调理论及其在辛拓扑中的应用概述，参见 [PRSZ20]。我们主要遵循 [PRSZ20]的第 1 章和第 2 章。 [4]

在 $\mathbb{Z}_2$ 上的持久模由一个以 $\mathbb{R}$ 为指标的 $\mathbb{Z}_2$-向量空间族 $\{V_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 和线性映射 $f_{s,\ t}\colon V_s \longrightarrow V_t$ 组成，其中对任意满足以下条件的 $s \leq t$

(1) $f_{t,\ t}$ =对任意 $t \in \mathbb{R}$ 均为恒等映射，(2) $f_{s,\ t} \circ f_{r,\ s} = f_{r,\ t}$ 对任意 $r \leq s \leq t$ 均成立。

任意过滤链复形都可以通过对子复形取同调而得到一个持久模。在我们的情形中，我们考虑这一族

$$\left\{\mathrm{HF}^{\leq \alpha}((L, h_L), (L', h_{L'}))\right\}_{\alpha \in \mathbb{R}} = \left\{\mathrm{H}_*\left(\mathrm{CF}^{\leq \alpha}((L, h_L), (L', h_{L'}))\right)\right\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$$

$\mathbb{Z}_2$向量空间以及映射

$$i_{\alpha,\beta}\colon \mathrm{HF}^{\leq \alpha}((L, h_L), (L', h_{L'})) \longrightarrow \mathrm{HF}^{\leq \beta}((L, h_L), (L', h_{L'}))$$

这些映射由任意 $\alpha \leq \beta$ 的包含映射诱导。我们将此持久模称为

$$\mathrm{HF}^{\leq \bullet}((L, h_L), (L', h_{L'})).$$

它是一个有限型持久模，具体含义如下。若持久模 $V$ 满足以下条件，则称其为有限型:

(1) 对任意 $t \in \mathbb{R}$，存在 $\epsilon > 0$，使得对于任意 $s \in [t, t + \epsilon)$，$f_{s,\ t}$ 都是同构。(2) 存在 $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$，使得对于所有 $t \in \mathbb{R} \backslash \{t_1, \ldots, t_m\}$，都存在 $\epsilon > 0$，使得对于任意 $s \leq r \in (t - \epsilon, t + \epsilon)$，$f_{s,\ r}$ 都是同构。(3) 存在 $s_-$，使得对于任意 $s < s_-$，$V_s = 0$。

有限型持久模的同构类可由其条形码分类。有限型条形码 $\mathcal{B} = \{I_j\}_{j=1}^n$ 是有限个区间 $I_j$ 组成的多重集，区间有两种可能的类型:

(1) 有限条: $I_j = [a_j, b_j)$，其中 $a_j < b_j$ 是实数。(2) 无限条:

$I_j = [c_j, \infty)$，其中 $c_j$ 是实数。

[4]这里的定义与 [PRSZ20] 中的定义略有不同，区别在于半连续性的约定。由于我们考虑的是 Floer 链复形$^{\leq \alpha}$ 而不是 Floer 链复形$^{< \alpha}$，因此我们需要使用形如 $[a, b)$ 的区间，而不是 $(a, b]$。

条带 $[a,b)$ 对应于持久模 $V^{[a,b)}$ 所定义的

$$V_t^{[a,b)} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{if } t \in [a,b), \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

其中内映射 $f_{s,t}\colon V^{[a,b)}{}_s \longrightarrow V^{[a,b)\,t}$ 对于 $a \le s \le t < b$ 为恒等映射，对于任意其他数对 $s \le t$ 则为 0。

定理2.4（结构定理，[ZC05]）。对于一个有限型持久模，存在一个持久模的同构

$$V \cong \bigoplus_{I \in \mathcal{B}} V^I$$

对于唯一的有限型条形码 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(V)$。

关于该定理的证明，我们推荐 [PRSZ20，第 2] 章。[5]

将结构定理应用于 $\mathrm{HF}^{\le \bullet}((L,h_L),(L',h_{L'}))$，得到一个条形码，记作 $\mathcal{B}((L,h_L),(L',h_{L'}))$。$\mathcal{B}((L,h_L),(L',h_{L'}))$ 中条带的端点恰好是 $\mathrm{CF}(((L,h_L),(L',h_{L'}))$ 的生成元的作用值。此外，无限条对应于 $\mathrm{HF}(L,L') \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ 中的类。若 $L$ 与 $L'$ 相交于 $2n$ 个点，则条形码 $\mathcal{B}((L,h_L),(L',h_{L'}))$ 因此由 $n-1$ 个有限条和两条无限条组成。

在计算条形码时，使用适用于 $\mathrm{CF}(L,L')$ 的基很有帮助，这些基由 [Bar94] 和 [UZ16] 引入并研究。若 $\mathrm{CF}((L,h_L),(L',h_{L'}))$ 的一组基 $e_1,\dots,e_{2n}$ 满足对所有 $\lambda_i \in \mathbb{Z}_2$

$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i e_i\right) = \max\left\{\mathcal{A}(e_i) \,\middle|\, \lambda_i \neq 0\right\}.$$

沿用 [PRSZ20] 的说法，我们称满足以下条件的正交基 $e_1,\dots,e_{n-1},f_1,\dots,f_{n-1},g_1,g_2$

$$\partial e_i = f_i \text{ for } 1 \le i \le n-1$$
$$\partial g_1 = \partial g_2 = 0$$

为 $\partial$ 的约当基。这种基的存在性已在 [Bar94] 中证明。[6] 通过 $\partial$ 的正交约当基的作用值可以读出条形码：$\mathcal{B}((L,h_L),(L',h_{L'}))$ 由有限条 $[\mathcal{A}(f_i)\ \mathcal{A}(e_i))$ 和无限条 $[\mathcal{A}(g_i)\ \infty)$ 组成。

条形码取决于 $h_L$ 和 $h_{L'}$，但不同的标记选择所得的条形码在平移意义下相同。因此，每个条带的长度都与标记无关。我们记

$$\beta_1(L,L') \ge \beta_2(L,L') \ge \cdots \ge \beta_{n-1}(L,L')$$

有限条形码区间的长度。同样，若 $[c_1,\infty)$ $[c_2,\infty)$ 是无限条，其中 $c_1 \le c_2$，则

$$\gamma(L,L') = c_2 - c_1$$

与标记无关。量 $\gamma(L,L')$ 称为 $L$与 $L'$之间的谱距离。

## 3. Deletion of a leaf

在本节中，设 $L \in \mathcal{L}(L_0)$ 为一个与 $L_0$ 横截相交的拉格朗日子流形。为简单起见，本文余下部分只研究这一对 $(L_0,L)$。这并不构成限制，因为 Hofer 距离和持久弗洛尔同调在哈密顿同伦下保持不变。本节研究 [Kha09] 中引入的删除叶过程。[7] 回顾这一构造后，我们将研究它对持久弗洛尔同调及其条形码的影响。

[5]关于不一定是有限型的持久模，还有更一般的版本，参见 [BCB20]。[6]在 [UZ16] 中，这样的基来自 $\partial$的 *singular value decomposition*：$C \to \ker(\partial)$，对应于一个 Floer 型链复形 $C$。[7]我们只考虑圆柱 $\Sigma$中的零截面 $L_0$，而 Khanevsky 构造适用于更一般的曲线和曲面。

3.1. 哈密顿微分同胚。固定 $L_0$ 上的一个定向，并将 $s_1, \ldots, s_{2n}$ 记为 $L_0 \cap L$ 的交点，使其顺序与它们在 $L_0$ 上的顺序相对应。我们对指标采用循环记法（例如 $s_{2n+1} = s_1$）。记 $[s_i, s_j]$ 为 $L_0$ 上左端点为 $s_i$、右端点为 $s_j$ 的区间。Khanevsky 将一个图 $T(L)$ 与 $L$ 联系起来；该图由两棵有根树组成，其顶点带有权重，边则带有定向和顺序。我们紧随 [Kha09] 回顾这一构造。

图 $T(L)$ 由以下部分构成：

- $\Sigma \backslash (L_0 \cup L)$ 的每个连通分支对应一个顶点，
- 每个顶点 $v$ 的权重 $a(v) \in (0, \infty]$ 等于 $\Sigma$ 中相应区域的面积，
- 当两个相应区域沿着 $L_0 \backslash L$ 的一条线段有公共边界时，在 $v_1$ 和 $v_2$ 之间连一条边，
- 边的定向从对应于 $\Sigma$ 上半部分区域的顶点指向对应于 $\Sigma$ 下半部分区域的顶点，
- 通过给对应于 $L_0$ 上线段 $[s_j, s_{j+1}]$ 的边赋予编号 $j \in \{1, \ldots, 2n\}$，对边进行排序。

在下文中，我们通常不区分顶点及其在 $\Sigma \backslash (L_0 \cup L)$ 中对应的分支。将编号为 $j$ 的边记为 $e_j$。图 5 展示了 $T(L)$ 的一个示例。

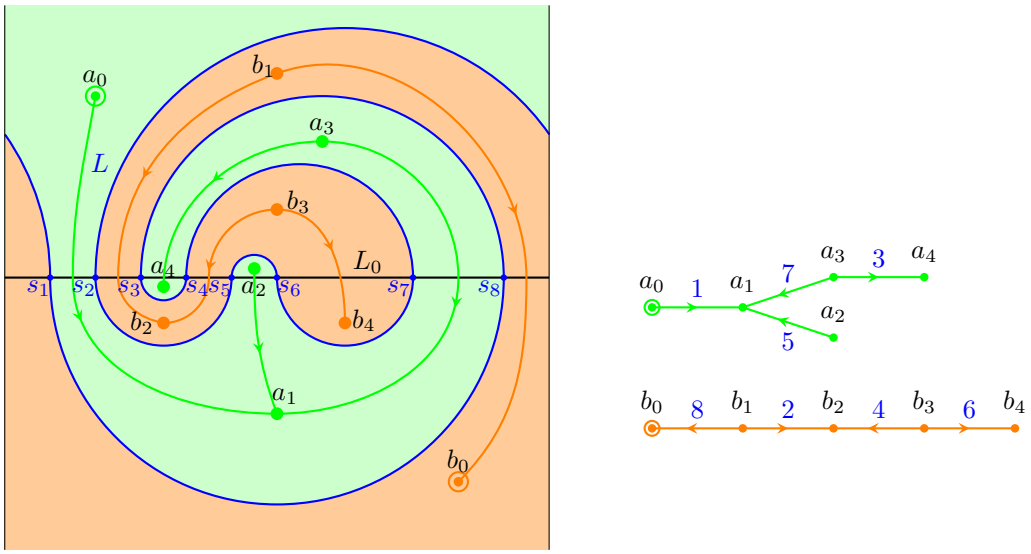



FIGURE 5. 与拉格朗日子流形 $L$ 相关联的图 $T(L)$。

该图由两个连通分支组成，分别对应于 $\Sigma \backslash L$的两个区域。对于这两个连通分支中的每一个，将对应于无界区域的顶点设为根。因此，每个连通分支都是一棵有根树。$T(L)$ 的一个叶（若不同于根）对应于 $\Sigma \backslash (L_0 \cup L)$ 中的一个区域，该区域由 $L_0 \backslash L$ 的一个连通分支和 $L \backslash L_0$ 的一个连通分支围成。它在两个相邻的交点处有角点。用组合Floer理论的语言来说，该区域对应于一个极小光滑月牙 $v$：$\mathbb{D} \longrightarrow \Sigma$ 对于$(L_0, L)$，其含义是不存在光滑月牙 $u$：$\mathbb{D} \longrightarrow \Sigma$，使得 $\mathrm{Im}(u) \subsetneq \mathrm{Im}(v)$。将光滑月牙 $v$ 的角点记为 $\bar{q}, \bar{p} \in L_0 \cap L$。我们将 $v$ 称为从$\bar{q}$ 到 $\bar{p}$ 的一个叶，并将其与树中的叶对应起来。

注记 3.1. 引理 1.5 表明，最短条带会产生一个叶：如果 $[\mathcal{A}(\bar{p}) \; \mathcal{A}(\bar{q}))$ 是 $\mathcal{B}(L_0, L)$ 中的最短条带，那么 $\bar{q}$ 和 $\bar{p}$ 由一个叶连接。反之，如果 $\bar{q}$ 和 $\bar{p}$ 是所有叶中面积最小的一个叶的角点，那么区间 $[\mathcal{A}(\bar{p}) \; \mathcal{A}(\bar{q}))$ 是 $\mathcal{B}(L_0, L)$ 中的一个条带。然而，一般而言，一个（非最小的）叶并不对应于一个条带。

以下结果归功于 Khanevsky：

命题 3.2([Kha09])。设存在一条从 $\bar{q}$ 到 $\bar{p}$ 的叶 $v$，其面积为 $a(v)$。令 $w$ 为 $T(L)$中与 $v$ 距离为2的一个顶点。那么对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个哈密顿微分同胚$\phi \in$Ham(Σ)，使得 $||\phi||_H < a(v)+\epsilon$，并通过将其权重$a(v)$从 $v$ 移动到顶点 $w$，从 $T(L)$中移除 $v$。$\phi$ 的支撑包含于 $v$ 的一个邻域以及如图6 右侧所示的一条曲线中。特别地，$L_0 \cap \phi(L) = (L_0 \cap L)\setminus\{\bar{q},\bar{p}\}$，且 $\phi(x) = x$，对于$x \in (L \cap L_0)\setminus\{\bar{q},\bar{p}\}$。

我们将这种哈密顿同伦称为删除叶。图 6 示意了删除叶的过程。

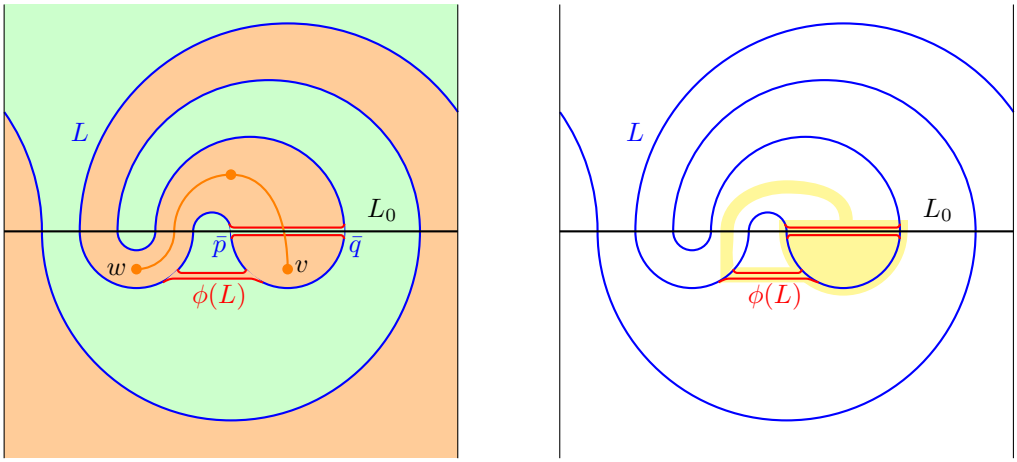



FIGURE 6. 删除一片叶的过程。黄色区域示意了 $\phi$的支撑。

注3.3.Khanevsky 仅将此过程应用于距离 $\geq 2$ 根的叶，方法是将权重移至距离为2且更靠近根的顶点。这对我们而言无关紧要。我们允许删除不同于根的叶，方法是将其权重移至距离为 2 的任意其他叶。$\phi$ 的构造方式相同。

3.2. 对 Floer 复形的影响。我们将 $L$ 和 $L_0$ 的交点集合记为 $P$，并将 Floer 复形记为 $C := \mathrm{CF}(L_0, L)$。假设我们按照命题 3.2 中 $L' = \phi(L)$ 所解释的方式，通过从 $\bar{q}$ 删除一个叶来得到 $L'$ 到 $\bar{p}$。那么 $L_0$ 和 $L'$ 的交点集合为 $P' = P\setminus\{\bar{q},\bar{p}\}$，我们将对 $(L_0, L')$ 的 Floer 复形记为 $C' := \mathrm{CF}(L_0, L')$。根据 [dSRS14，附录 C]，链复形 $C'$ 可以用 $C$ 表示如下。回顾一下，$C$ 和 $C'$ 中的微分由以下公式给出

$$\partial(q) = \sum_{p\in P} n(q,p)p, \qquad \partial(q) = \sum_{p'\in P'} n'(q',p')p'$$

其中，$n(q,p) \in \mathbb{Z}_2$ 表示从 $q$到 $p$的 $(L_0, L)$ 的光滑透镜区域的模 2 计数，而 $n'(q',p') \in \mathbb{Z}_2$ 表示从 $q'$ 到 $p'$的 $(L_0, L')$ 的光滑透镜区域的模 2 计数。$n'$ 可以由$n$ 计算得出。

$$n'(q',p') = n(q',p') + n(q',\bar{p})n(\bar{q},p').$$

Ind事实上，唯一的变化发生在 $n(q',\bar{p}) = n(\bar{q},p') = 1$时。下方图7展示了此情形。
situation.

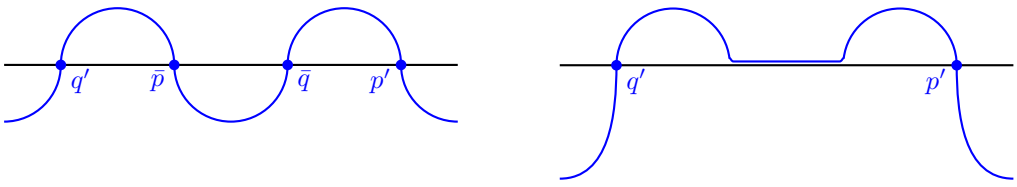



FIGURE 7. 从 $\bar{q}$ 到 $\bar{p}$删除叶后出现一个新的月牙形区域。

存在链映射。

$$\Psi\colon C \longrightarrow C' \quad \text{and} \quad \Phi\colon C' \longrightarrow C$$

由.....给出

$$\Psi(q) = \begin{cases} q & q \neq \bar{q}, \bar{p}, \\ 0 & q = \bar{q}, \\ \sum_{p' \in P'} n(\bar{q}, p')p' & q = \bar{p} \end{cases}$$

and

$$\Phi(q') = q' + n(q', \bar{p})\bar{q}.$$

这些链映射互为链同伦逆： $\Psi\circ\Phi = \mathrm{Id}$ 和 $\Phi\circ\Psi - \mathrm{Id}$；链同伦 $T$ 为： $C \longrightarrow C$ 由.....给出

$$T(q) = \begin{cases} \overline{q} & q = \overline{p}, \\ 0 & q \neq \overline{p}. \end{cases}$$

3.3. 对滤过的影响。我们首先研究图 $T = T(L)$ 变为图$T' = T(L')$时的变化。有两种情况：一种是叶位于 $L_0$ 上方（情况 1），另一种是叶位于$L_0$下方（情况 2），如图8所示。在情况 1 中，设 $j \in \{1, \ldots, 2n\}$为满足 $\bar{q} = s_j$且 $\bar{p} = s_{j+1}$的指标。类似地，在情况 2 中，设 $j \in \{1, \ldots, 2n\}$为满足 $\bar{p} = s_j$且 $\bar{q} = s_{j+1}$的指标。 $L_0$与 $L'$的交点为 $s_1$、.....、 $s_{j-1}$、 $s_{j+2}$、 $\ldots s_{2n}$。对于图 $T(L')$ 的边的排序，我们采用编号 1、.....、 $j-1$、 $j+2$、.....、 $2n$。设 $k$为与 $w$ 相邻且位于从 $w$ 到 $v$的路径上的边的指标。必要时重新编号，即可使$j+2 \leq k \leq 2n$。图9展示了情况 1 中图的变化。情况 2 类似，但箭头方向相反。

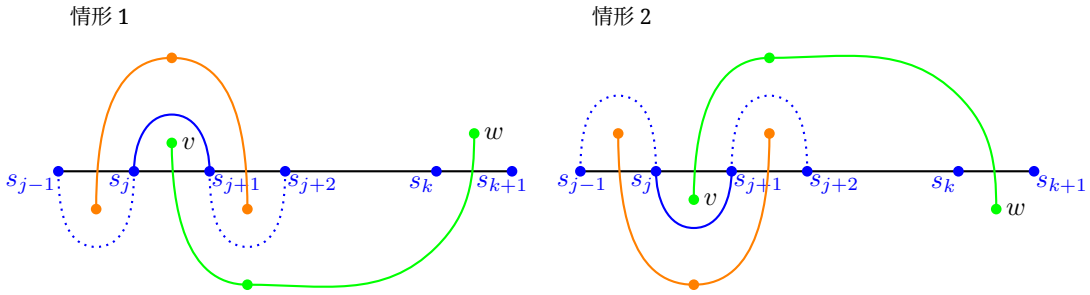



FIGURE 8. 叶的两种情形。

令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 分别表示 $C$ 和 $C'$的作用泛函。回顾一下，它们的定义都只确定到一个加法常数。

引理 3.4。在对 $\mathcal{A}'$可能加上一个整体常数后，两个作用泛函 $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{A}'$ 的关系如下：在情形 1 中

$$\mathcal{A}'(s_l) = \begin{cases} \mathcal{A}(s_l) + \frac{a(v)+\epsilon}{2} & j+2 \leq l \leq k, \\ \mathcal{A}(s_l) - \frac{a(v)+\epsilon}{2} & else, \end{cases}$$

在情形 2 中

$$\mathcal{A}'(s_l) = \begin{cases} \mathcal{A}(s_l) - \frac{a(v)+\epsilon}{2} & j+2 \leq l \leq k, \\ \mathcal{A}(s_l) + \frac{a(v)+\epsilon}{2} & else. \end{cases}$$

其余部分将用于对此进行证明。

$s_i$ 与 $s_{i+1}$之间始终存在一个光滑月牙：为说明这一点，我们引入一些记号。给定 $T$ 中的一条边 $e$ ，我们用 $v(e)$表示该边上距离根较远的顶点。子树 $T_v$ 是顶点 $v$的所有后代所构成的子树。现在考虑 $T$ 中的边 $e_i$ 以及子树$T_{v(e_i)}$。 $\Sigma$ 中的对应区域是 $s_i$与 $s_{i+1}$之间的一个嵌入光滑月牙 $u^i$ 。如果 $e_i$ 背离根，则这是一个从 $s_{i+1}$ 到 $s_i$的月牙形区域。如果 $e_i$ 指向根，则这是一个从 $s_i$ 到 $s_{i+1}$的月牙形区域。

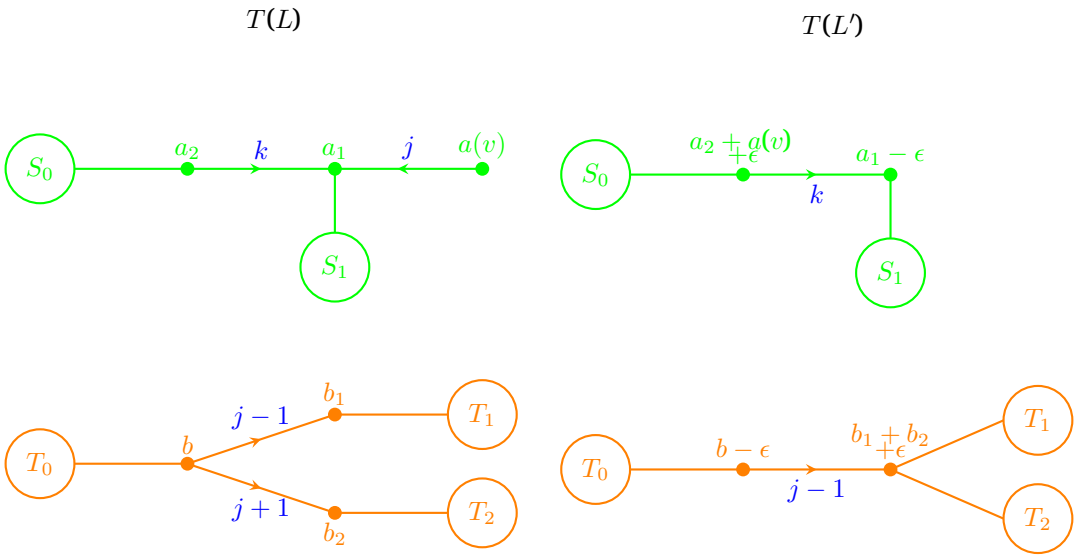



FIGURE 9. 树的变化。权重只会在顶点处发生变化，并在这些顶点处记录。

光滑月牙 $u^i$ 的面积为 $W(T_{v(e_i)})$，其中 $W$ 表示加权树的总权重。由方程（4）可推得以下两个相邻交点之间的作用量差公式：

$$\mathcal{A}(s_{j+1}) - \mathcal{A}(s_j) = s(e_j) W(T_{v(e_j)}), \tag{5}$$

其中符号按如下方式确定：

$$s(e) = \begin{cases} 1 & \text{edge points away from the root} \\ -1 & \text{edge points towards the root.} \end{cases}$$

利用这一形式体系，我们现在可以证明引理 3.4。

引理3.4的证明。根据注记2.3，只需证明由引理3.4中的公式定义的 $\mathcal{A}'$ 对 $T'$满足（5）。我们考虑情形1。首先注意到，对于所有 $l \neq j$、$j+1$，有 $s(e_l) = s(e'_l)$。对于 $l \notin \{j-1, j, j+1, k\}$，我们计算

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(s_{l+1}) - \mathcal{A}'(s_l) &= \mathcal{A}(s_{l+1}) - \mathcal{A}(s_l) \\ &= s(e_l) W\left(T_{v(e_l)}\right) \\ &= s(e'_l) W\left(T'_{v(e_l)}\right). \end{aligned}$$

对于 $l = j-1$，首先注意到 $s(e_{j-1}) = s(e_{j+1}) = s(e'_{j-1}) = 1$，并且正如从图9中可以看出的，我们有

$$W\left(T'_{v(e'_{j-1})}\right) = W\left(T_{v(e_{j-1})}\right) + W\left(T_{v(e_{j+1})}\right) + \epsilon.$$

因此

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(s_{j+2}) - \mathcal{A}'(s_{j-1}) &= \left(\mathcal{A}(s_{j+2}) + \frac{a(v)+\epsilon}{2}\right) - \left(\mathcal{A}(s_{j-1}) - \frac{a(v)+\epsilon}{2}\right) \\ &= \mathcal{A}(s_j) - \mathcal{A}(s_{j-1}) + \mathcal{A}(s_{j+2}) - \mathcal{A}(s_{j+1}) + \epsilon \\ &= s(e_{j-1}) W\left(T_{v(e_{j-1})}\right) + s(e_{j+1}) W\left(T_{v(e_{j+1})}\right) + \epsilon \\ &= s(e'_{j-1}) W\left(T'_{v(e'_{j-1})}\right). \end{aligned}$$

同样地，对于 $l = k$，我们从图9中看到，$s(e_k) = s(e'_k) = 1$，并且

$$W\left(T'_{v(e'_k)}\right) = W\left(T_{v(e_k)}\right) - a(v) - \epsilon.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(s_{k+1}) - \mathcal{A}'(s_k) &= \left(\mathcal{A}(s_{k+1}) - \frac{a(v)+\epsilon}{2}\right) - \left(\mathcal{A}(s_k) + \frac{a(v)+\epsilon}{2}\right)\\ &= s(e_k)W\left(T_{v(e_k)}\right) - a(v) - \epsilon\\ &= s(e'_k)W\left(T'_{v(e'_k)}\right).\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{A}'$ 是 $(L_0, L')$ 的作用泛函。情形 2 的证明类似。 □

3.4. 对条形码的影响。链映射 $\Phi$ 和 $\Psi$ 与 $C$ 和$C'$ 上的滤过之间的关系如下。

命题 3.5. 链映射 $\Phi$ 和 $\Psi$ 使作用值的变化至多为 ${}^{a}{}_{(v)_2}{}^{+\epsilon}$。链同伦$T$使作用值的变化至多为 $a(v) + \epsilon$。

由此可得

$$\Phi_*\colon \mathrm{HF}^{\leq\alpha}(L_0, L') \longrightarrow \mathrm{HF}^{\leq\alpha+\frac{a(v)+\epsilon}{2}}(L_0, L)$$

and

$$\Psi_*\colon \mathrm{HF}^{\leq\alpha}(L_0, L) \longrightarrow \mathrm{HF}^{\leq\alpha+\frac{a(v)+\epsilon}{2}}(L_0, L')$$

满足

$$\Psi_* \circ \Phi_* \colon = i'_{\alpha,\alpha+a(v)+\epsilon}\colon \mathrm{HF}^{\leq\alpha}(L_0, L') \longrightarrow \mathrm{HF}^{\leq\alpha+a(v)+\epsilon}(L_0, L')$$

and

$$\Phi_* \circ \Psi_* \colon = i_{\alpha,\alpha+a(v)+\epsilon}\colon \mathrm{HF}^{\leq\alpha}(L_0, L) \longrightarrow \mathrm{HF}^{\leq\alpha+a(v)+\epsilon}(L_0, L).$$

这在持久模理论中~~称为~~ ${}^{a}{}_{(v)_2}{}^{+\epsilon}$ -交错。由一般持久性理论 [UZ16]，现在可得界 (2) 和 (3)。为方便读者，我们按照 [PRSZ20 第 4 节2]的思路，概述其论证。

我们将 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L_0, L)$、 $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(L_0, L')$ 简记为 $\beta_i, \beta'_i$，表示 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 中有限条的长度；将 $\gamma$ 和 $\gamma'$ 表示为谱度量。代数稳定性定理[8]蕴含，条形码 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L_0, L)$ 与 $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(L_0, L')$ 之间存在一个 ${}^{a}{}_{(v)_2}{}^{+\epsilon}$ -匹配。~~这是~~一个双射 $\mu\colon \mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}'_0$，定义在子集 $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'_0 \subseteq \mathcal{B}'$ 之间，并满足

(1) $\mathcal{B}_0$ 包含来自 $\mathcal{B}$、长度为 $> a(v) + \epsilon$ 的所有条带，(2) $\mathcal{B}'_0$ 包含来自 $\mathcal{B}'$、长度为 $> a(v) + \epsilon$ 的所有条带，(3) 若 $\mu([a, b)) = [a', b')$，则 $|a - a'| \leq {}^{a}{}_{(v)_2}{}^{+\epsilon}$ 且 $|b - b'| \leq {}^{a}{}_{(v)_2}{}^{+\epsilon}$。

$[c_1, \infty) \supseteq [c_2, \infty)$ 是 $\mathcal{B}$ 的两条无限条，而 $[c'_1, \infty) \supseteq [c'_2, \infty)$ 是 $\mathcal{B}'$ 的两条无限条。那么，要么 $\mu([c_1, \infty)) = [c'_1, \infty)$ 且 $\mu([c_2, \infty)) = [c'_2, \infty)$，要么 $\mu([c_1, \infty)) = [c'_2, \infty)$ 且 $\mu([c_2, \infty)) = [c'_1, \infty)$。在第一种情况下，立即可见

$$\gamma - \gamma' = (c_2 - c_1) - (c'_2 - c'_1) = (c_2 - c'_2) + (c'_1 - c_1) \leq \frac{a(v)+\epsilon}{2} + \frac{a(v)+\epsilon}{2} = a(v) + \epsilon.$$

对于第二种情况，类似地计算可得

$$\gamma - \gamma' = (c_2 - c_1) - (c'_2 - c'_1) = (c_2 - c'_2) + (c'_1 - c_1) \leq (c_2 - c'_1) + (c'_2 - c_1) \leq a(v) + \epsilon.$$

由对称性可知，$|\gamma - \gamma'| < a(v) + \epsilon$。

有限条的论证类似。我们需要证明 $\beta_k - \beta'_k \leq a(v) + \epsilon$。若$\beta_k \leq a(v)+\epsilon$，则无需证明。若 $\beta_k > a(v)+\epsilon$，考虑对应于 $\beta_1, \ldots, \beta_k$ 的条带 $b_1, \ldots, b_k$。它们全都通过匹配 $\mu$ 与来自 $\mathcal{B}'$ 的某些条带 $\mu(b_1) \ldots, \mu(b_k)$ 匹配，其长度为 $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k$。根据匹配的第三个性质，对于 $i \in \{1, \ldots, k\}$，有 $|\beta_i - \alpha'_i| \leq a(v) + \epsilon$。令 $\sigma\colon \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ 为按长度排列这些条带的置换：$\alpha'_{\sigma(1)} \geq \cdots \geq \alpha'_{\sigma(k)}$。于是

$$\max_i |\beta_i - \alpha'_{\sigma(i)}| \leq \max_i |\beta_i - \alpha'_i| \leq a(v) + \epsilon,$$

whe关于第一个不等式，这是因为一个数列的最佳匹配
s 是 th
e单调的一个（[PRSZ20，引理 4.1。1]）。由此可得

$$a(v) + \epsilon \geq |\beta_k - \alpha'_k| \geq |\beta_k - \alpha'_k| \geq \beta_k - \alpha'_k \geq \beta_k - \beta'_k.$$

[8]代数稳定性定理是等距定理的一部分，该定理指出，持久模上的交错距离与其条形码上的瓶颈距离相等。

由对称性，我们得出 $|\beta_k - \beta'_k| \le a(v) + \epsilon$。这说明了命题 3.5 如何推出不等式 (2) 和 (3)。

证明命题 3.5 需要以下

引理 3.6。假设情形 1。那么对于任意两个交点 $q, p \in P \backslash \{\bar{q}, \bar{p}\}$

(1) $n(q, \bar{p}) = 1$ 推出 $q = s_i$ 对于 $j + 2 \le i \le k$。(

2) $n(\bar{q}, p) = 1$ 推出 $p = s_i$ 对于 $k + 1 \le i \le j - 1$。

证明。令 $\bar{q} \ne s_l \in P$ 为从 $L$ 上观察时与 $\bar{p}$ 相邻的交点。那么$j+1 \le l \le k$。根据引理 2.1，任何从右侧进入 $\bar{p}$ 的月牙形区域 $u$ 都必须满足 $s_l \notin u(\mathbb{D} \cap \mathbb{R}) = [\bar{p}, s_i]$。特别地，$j + 2 \le i \le l \le k$。这证明了（1）。第（2）部分的证明类似。□

命题 3.5 的证明。我们只证明情形 1，另一种情形类似。令 $q = s_i$，其中 $i \ne j$、$j + 1$。假设 $n(q, \overline{p}) = 1$。那么由引理 3.6 $q = s_i$ 的第 (1) 部分可知，存在 $j + 2 \le i \le k$。因此 $\mathcal{A}(q) = \mathcal{A}'(q) - {}^{a_{(v)}}{}_2{}^{+\epsilon}$。所以对于任意 $q \in P$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\Phi q) &= \mathcal{A}(q + n(q, \overline{p})\overline{q}) \\
&= \begin{cases} \mathcal{A}(q) & \text{if } n(q, \overline{p}) = 0 \\ \max\{\mathcal{A}(q), \mathcal{A}(\overline{q})\} & \text{if } n(q, \overline{p} \ne 0 \end{cases} \\
&\le \begin{cases} \mathcal{A}'(q) + \frac{a(v)+\epsilon}{2} & \text{if } n(q, \overline{p}) = 0 \\ \max\{\mathcal{A}'(q) + \frac{a(v)+\epsilon}{2}, \mathcal{A}(q) + a(v) + \epsilon\} & \text{if } n(q, \overline{p}) \ne 0 \end{cases} \\
&= \mathcal{A}'(q) + \frac{a(v) + \epsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

这表明 $\Phi$ 对作用值的偏移至多为 ${}^{a_{(v)}}{}_2{}^{+\epsilon}$。类似地，$\Psi$ 对作用值的偏移至多为 ${}^{a_{(v)}}{}_2{}^{+\epsilon}$。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}'(\Psi\overline{p}) &= \max\{\mathcal{A}'(p) \,|\, n(\overline{q}, p) \ne 0\} \\
&\le \max\left\{\mathcal{A}(p) - \frac{a(v) + \epsilon}{2} \,\middle|\, n(\overline{q}, p) \ne 0\right\} \\
&\le \mathcal{A}(\overline{q}) - \frac{a(v) + \epsilon}{2} \\
&= \mathcal{A}(\overline{p}) + \frac{a(v) + \epsilon}{2},
\end{aligned}
$$

其中，第一个不等式由引理 3.6 的第 (2) 部分推出。

显然，链同伦 $T$ 对作用值的偏移至多为 $a(v) + \epsilon$。 □

## 4. The shortest bar.

本节的目标是证明命题 1.5。与上一节一样，我们只考虑 $L \in \mathcal{L}_0$ 对应的点对 $(L_0, L)$。我们假设 $L_0$ 与 $L$ 至少有 $2n \ge 4$ 个交点。此外，假设作用值 $\mathcal{A}(q)$、$q \in L_0 \cap L$ 彼此不同。令 $[a, b)$ 为 $\mathcal{B}(L_0, L)$ 中最短的（有限）条带，并令 $\bar{q}$、$\bar{p} \in L_0 \cap L$ 为满足 $\mathcal{A}(\bar{q}) = b$ 和 $\mathcal{A}(\bar{p}) = a$ 的交点。目标是证明存在一条从 $\bar{q}$ 到 $\bar{p}$ 的叶。证明基于以下两个引理，其证明将在稍后给出。

引理 4.1. 设 $x, y \in L_0 \cap L$ 满足 $n(x, y) = 1$。那么 $\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y) \ge b - a$.

引理 4.2. 设 $u\colon\ \mathbb{D} \longrightarrow \Sigma$ 是 $(L_0, L)$ 的一个光滑月牙。那么存在一条叶 $v\colon\ \mathbb{D} \longrightarrow \Sigma$，使得 $\mathrm{Im}(v) \subseteq \mathrm{Im}(u)$。

设 $\mathcal{S} \subset \mathrm{CF}(L_0, L)$ 是 $\partial$ 的一个约当基（定义见第 2.3 节）。我们将说明，假设前两个引理成立，命题 1.5 如何得出。

命题 1.5 的证明。作为证明的第一步，我们证明 $n(\bar{q}, \bar{p}) = 1$：令

$$
e = \bar{q} + \sum_{\mathcal{A}(q) < \mathcal{A}(\bar{q})} n_q q \in \mathcal{S}
$$

为满足 $\mathcal{A}(e) = b$ 的基底元素，并且

$$f = \bar{p} + \sum_{\mathcal{A}(p)<\mathcal{A}(\bar{p})} m_p p \in \mathcal{S}$$

是满足 $\mathcal{A}(f) = a$ 的基底元素。由于 $\partial e = f$，存在满足 $\mathcal{A}(q') \leq \mathcal{A}(\bar{q}) = b$ 的 $q' \in L_0 \cap L$，使得 $n(q', \bar{p}) = 1$。由引理 4.1 可得 $\mathcal{A}(q') = \mathcal{A}(\bar{q})$。在所有作用值互不相同的假设下，我们得出 $\bar{q} = q'$，因此 $n(\bar{q}, \bar{p}) = n(q', \bar{p}) = 1$。特别地，存在唯一的光滑月牙 $u_{\bar{q},\ \bar{p}}$ 从 $\bar{q}$ 到 $\bar{p}$。

反设光滑月牙 $u_{\bar{q},\ \bar{p}}$ 不是一片叶。由引理 4.2，存在一片叶，譬如从 $x$ 到 $y$，其像严格包含于 $\mathrm{Im}(u_{\bar{q},\ \bar{p}})$。如果 $n(x, y) = 1$，那么不等式

$$\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y) < \mathcal{A}(\bar{q}) - \mathcal{A}(\bar{p}) = b - a$$

这与引理 4.1矛盾。如果 $n(x, y) = 0$，那么从 $x$ 到 $y$有两个光滑透镜区域，其中一个是叶。由引理 2.1可知，这种情况唯一可能发生在 $L_0 \cap L = \{x, y\}$时。这里并非如此，因为至少有4 个交点。我们得出结论，$u_{\bar{q},\ \bar{p}}$ 是从 $\bar{q}$ 到 $\bar{p}$的一片叶。□

引理 4.1 的证明。设 $x' \in L_0 \cap L$ 是 $CF(L_0, L)$ 的一个生成元，满足

$$\mathcal{A}(x') = \min\{\mathcal{A}(x'') | n(x'', y) = 1\}.$$

由 $\mathcal{A}(x')$ 的极小性可知，$\partial x'$ 不是 Floer 链复形$^{<\mathcal{A}(x')}(L_0, L)$ 中的边界。因此，$\mathcal{A}(x')$ 是有限条形码区间 $[\tilde{a}, b)$ 的上端˜。由于 $n(x, y) = 1$，有 $b = \mathcal{A}(x') \leq \mathcal{A}(x)$。令

$$e' = x' + \sum_{\mathcal{A}(x'')<\mathcal{A}(x')} l_{x''} x'' \in \mathcal{S}$$

˜是满足 $\mathcal{A}(e') = b$的基底元素。那么 $\partial e'$ 包含 $y$ 作为加项，因为 $n(x', y) = 1$，但对于所有满足 $\mathcal{A}(x'') < \mathcal{A}(x')$的 $x''$，$n(x'', y) = 0$。特别地，$\tilde{a} = \mathcal{A}(\partial e) \geq \mathcal{A}(y)$。由条带 $[a, b)$ 的极小性可知，

$$b - a \leq \tilde{b} - \tilde{a} \leq \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y).$$

□

引理 4.2 的证明。一般性不失，我们可以假设 $u$ 是从 $s_1$ 到 $s_l$、$3 \leq l \leq 2n$ 的一个光滑月牙，且 $u(\mathbb{D} \cap \mathbb{R}) = [s_1, s_l]$。直观地说，如果 $\mathrm{Im}(u)$ 中没有包含任何叶，那么每当图 $T(L)$ 的某一部分进入月牙形区域，它也会离开月牙。进入和离开只会发生在 $[s_1, s_l]$ 上，图的两个分支沿着该处交替出现。这是不可能的。

为了使此论证严谨，我们假设 $\mathrm{Im}(u)$ 不包含任何叶。我们将 $\Sigma \backslash L$ 的上方分支记为 $C_1$，下方分支记为 $C_2$。考虑 $C_k$ 在 $u$ 下针对 $k = 1$ 的原像$R_k := u^{-1}(C_k) \subset \mathbb{D}$，2。有关这些集合的示意图，请参见图10。

然后 $R_1 \cap R_2 = \emptyset$。令 $0 = \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_l = 1$ 为 $\mathbb{D} \cap \mathbb{R}$ 上满足 $u(\lambda_i) = s_i$的点。则 $[\lambda_i, \lambda_{i+1}] \subset \overline{R_1}$（当 $i$ 为奇数时）且 $[\lambda_i, \lambda_{i+1}] \subset \overline{R_2}$（当 $i$为偶数时）。此外，$[\lambda_1, \lambda_2]$ 与 $[\lambda_{l-1}, \lambda_l]$位于 $\overline{R_1}$ 的同一个连通分支中。我们令 $j_1 = l - 1$。注意，$j_1 \geq 3$。我们断言存在 $4 \leq j_2 < j_1$，使得 $[\lambda_2, \lambda_3]$ 与 $[\lambda_{j_2}, \lambda_{j_2+1}]$ 位于 $\overline{R_2}$的同一个连通分支中。若不然，考虑 $\overline{R_2}$中 $[\lambda_2, \lambda_3]$ 的连通分支 $R$。由于 $\mathrm{Int}(R) \cap R_1 = \emptyset$，故 $R \cap \partial\mathbb{D} = [\lambda_2, \lambda_3]$。因此，$u$ 限制为从 $R$ 到 $u(R)$ 的微分同胚。$\partial R \backslash [\lambda_2, \lambda_3] \subset L$，于是 $u(R)$ 是 $\Sigma \backslash (L_0 \cup L)$ 中由 $[s_2, s_3]$ 和 $L$ 的一部分围成的区域。因此，$u(R)$ 恰好是与子树 $T_{v(e_j)}$ 对应的区域。但 $u(R)$ 含有一个叶，这与我们的假设矛盾。因此，我们找到了所需的 $j_2$。

照此进行，我们得到一个无限的自然数序列 $\{j_k\}_{k \in \mathbb{N}}$，满足

$$1 < j_k < j_{k-1} < l.$$

这是不可能的。我们得出结论，$u$ 确实包含一片叶。 □

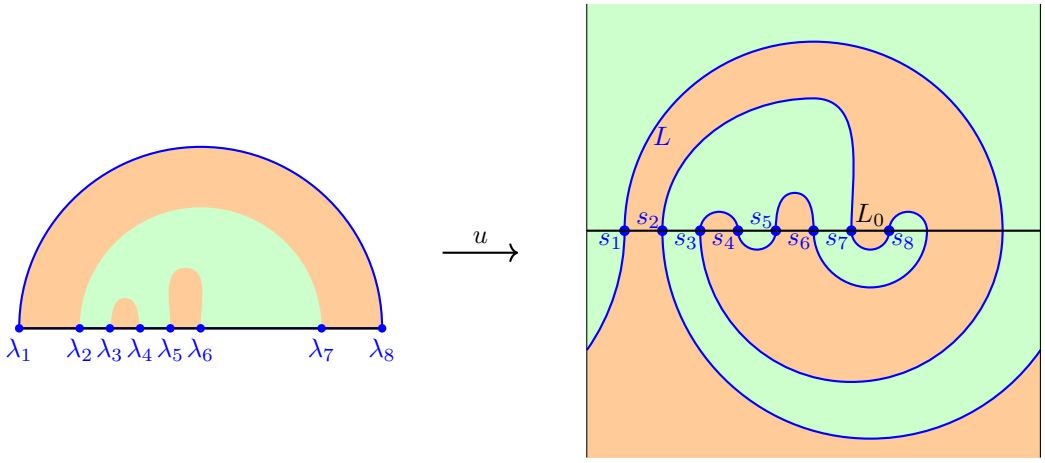



FIGURE 10. 在右侧， $C_1$ 被涂为绿色， $C_2$ 被涂为橙色。在左侧，对于从 $s_1$ 到 $s_8$的上方光滑月牙， $R_1$ 为绿色， $R_2$ 为橙色。

## REFERENCES


[Abo08] M. ABOUZAID, 《高亏格曲面上的Fukaya范畴》, *Adv. Math.* **217** 第3期（2008）, 1192–1235。[Bar 94] S. A. BARANNIKOV, 《带框Morse复形及其不变量》, 载于 *Singularities and bifurcations*, *Adv. Soviet Math.* **21** 1994, 93 115 , 美国数学学会, 罗德岛州普罗维登斯, 第–页。[BCB20] M. B. BOTNAN 和 W. CRAWLEY-BOEVEY *Proc. Amer. Math.*, 《持久模 *Soc.* **148** 11 2020 4581 4596 的分解》, 第（）期, –。[BHS22] L. BUHOVSKY、V. HUMILIÈRE S. SEYFADDINI J. 和, 《非光 *Fixed Point Theory Appl.* **24** 2 2022 24, 22 滑对象的Arnold型原理》, 第（）期, 论文编号。[Kha09] M. KHANEVSKY, 《直径空间上的Hofer度量》, *J. Topol. Anal.* **1** 第4期（2009）, 407–416。[Kha11] M. KHANEVSKY, 《拉格朗日子流形的几何学与拓扑方面——交、直径与Floer理论》, *PhD thesis*, *Tel-Aviv University*（2011）。[KS21] A. KISLEV 和 E. SHELUKHIN, 《谱范数与条形码的界》, *Geom. Topol.* **25** 第7期（2021）, 3257–3350。[PRSZ20] L. POLTEROVICH、D. ROSEN、K. SAMVELYAN和 J. ZHANG, 《几何学与分析学中的拓扑持久性》, *University Lecture Series*, *American Mathematical Society*, *Providence*, *RI* **74**（2020）, xi+128。[She22] E. SHELUKHIN, 《Zoll对称空间的Viterbo猜想》, *Invent. Math.* **230** 第1期（2022）, 321–373。[dSRS14] V. DE SILVA、J. W. ROBBIN D. A. SALAMON *Mem. Amer. Math.* 和, 《组合 *Soc.* **230** 1080 2014 +114 Floer同调》, 第（）期, v。[Ush13] M. USHER, 《Hofer度量与边界深度》, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **46** 第1期（2013）, 57–128。[UZ16] M. USHER 和 J. ZHANG, 《持久同调与Floer-Novikov理论》, *Geom. Topol.* **20** 第6期（2016）, 3333–3430。[Vit92] C. VITERBO, 《作为生成函数几何学的辛拓扑》, *Math. Ann.* **292** 第4期（1992）, 685–710。[ZC05] A. ZOMORODIAN和 G. CARLSSON, 《计算持久同调》, *Discrete Comput. Geom.* **33** 第2期（2005）, 249–274。



DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ETH ZÜRICH, RÄMISTRASSE 101, 8092 ZÜRICH, SWITZERLAND

*Email address*: patricia.dietzsch@math.ethz.ch