arXiv:2304.05629v1 [math.AG] 12 Apr 2023

一个 SL$(3,\mathbb{C})$-等变的有理平面四次曲线的光滑紧化

Kiryong Chung 和 Jeong-Seop Kim

摘要。设$\mathbf{R}_d$ 为满足希尔伯特多项式$\chi(F(m)) = dm + 1$ 且支集于射影平面中的有理曲线上的稳定层 F 的空间。则$\mathbf{R}_1$ （分别为$\mathbf{R}_2$）同构于$\mathbf{R}_1 \cong \mathbb{P}^2$ （分别为 $\mathbf{R}_2 \cong \mathbb{P}^5$）。此外，众所周知，$\mathbf{R}_3$ 同构于 $\mathbb{P}^2$上的一个 $\mathbb{P}^6$-向量丛。在特殊情况下，$\mathbf{R}_d$ 对于 $d \leq 3$是光滑的。但对于 $d \geq 4$的情形，可以想象，由于边界曲线的复杂性，空间$\mathbf{R}_d$ 不再光滑。在本文中，我们获得了$\mathbf{R}_4$对于 $d = 4$的一个 SL(3, $\mathbb{C}$)-等变光滑解消，它是 Kronecker 模空间的吹起上的一个 $\mathbb{P}^5$-向量丛。

1. 动机与结果

我们在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行研究。

1.1. 有理曲线及其模空间。 众所周知，有两种紧化有理曲线空间的方法。设 X 是一个带有固定嵌入 $X \subset \mathbb{P}^r$的光滑射影簇。

- ([FP97]) 令 $\mathcal{M}_d(X)$ 为稳定映射 $[f : C \to X]$ 在 X 中的模空间，其次数为 $\deg(f) = d$，亏格为 $g(C) = 0$。
- ([Sim94]) 令$\mathbf{M}_d(X)$ 为稳定层 F 在 X 中的模空间，其希尔伯特多项式为 $\chi(F(m)) = dm + 1$。

第一个（分别地，第二个） $\mathcal{M}_d(X)$（分别地，$\mathbf{M}_d(X)$）通常被称为康斯坦茨空间（分别地，Simpson空间）。对于凸簇 X，第一个模空间 $\mathcal{M}_d(X)$至多具有有限群商奇点（即轨形奇点）（[FP97，定理 2]）。这两个空间在曲线数量的计数中都发挥着至关重要的作用，因为它们分别对应于众所周知的Gromov–Witten（GW）不变量和Donaldson–Thomas（DT）不变量（以及后代不变量）。除这一方面之外，它还在双有理几何（尤其是对数极小模型纲领或Fano/超凯¨勒几何）中发挥了重要作用，第一作者研究了这些空间 $\mathcal{M}_d(X)$与$\mathbf{M}_d(X)$之间的双有理关系， $d \leq 3$ 在各种情形下（[CK11、CHL18、Chu22]）。为了分析高维簇 X （以及次数 d）上的Simpson空间$\mathbf{M}_d(X)$的几何结构，有必要研究最基本的情形，即 $X = \mathbb{P}^2$。例如，正如.....中所示

2020 数学主题分类。 14E05,14D20, 14N10.关键词与短语。 有理四次曲线，射影丛，等变 Kodaira-Spencer 映射，初等修改。

[FT04, CCM16], 模空间 $M_d(\mathbb{P}^3)$ $d \leq 4$ 由（多个）不可约分支组成，其交集部分一般是纤维化结构，基底为 $\mathbb{P}^3$ 中平面的格拉斯曼流形 Gr(3,4)。从枚举几何的角度来看，模空间 $\mathcal{M}_d(\mathbb{P}^2)$ 为一个长期悬而未决的问题提供了解答，该问题由 Kontsevich 公式（[FP97]）提出。具体而言，令 N_d 表示通过 $\mathbb{P}^2$ 中一般位置的 $3d-1$ 个给定点的次数为 d 的有理曲线数。1995 年，通过 Kontsevich 的工作（[Kon95]），人们发现了一个用于计算 N_d 的递推公式:

$$N_d = \sum_{d_1+d_2=d} N_{d_1} N_{d_2} d_1^2 d_2 (d_2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1 \binom{3d-4}{3d_1-1}).$$

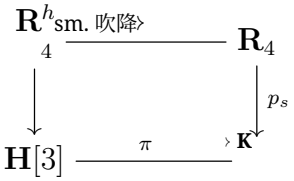
显然， $N_1 = N_2 = 1$。即使是较低次数的情形，也有着非常悠久的研究历史。19世纪中叶，Steiner（分别地，Zeuthen）证明了 $N_3 = 12$ （分别地， $N_4 = 620$）（[Ste54，Zeu73]）。此外，N_5 也在1980年年中得到了计算。

另一方面，在Kontsevich的工作之前，平面曲线几何的研究主要集中于Severi簇$V_{d\text{的研究},\ \delta}$ （即具有指定次数 d 和节点数 δ 的曲线空间）；J. Harris在这一领域作出了重要贡献并指明了研究方向。他的一项重要成就是证明了Severi簇$V_{d\text{的}\delta}$ 不可约性（[Har86]）。与此相关， [DH88], 中的作者提到，需要一个具有模空间意义点的光滑空间。正如所料，平面曲线空间的边界点可能具有尽可能糟糕的奇点，因此要在全局范围内构造一个光滑模空间非常困难。

尽管对 Kontsevich空间的轨形奇点的处理推动了丰富理论的发展（即所谓的 完美障碍 理论 [BF97]）在枚举几何中，关于光滑紧化$V_{d,\ \delta}$ 一直是核心问题，这得益于Hironaka的里程碑式工作（[Hir64]）。沿着这一思路，我们提出了次数 4 的有理平面曲线空间的光滑紧化，这是 $\mathbb{P}^2$中的第一个非平凡情形。

1.2. 主要结果。作为 [Chu21], 后续工作的延续，我们从奇点消解的角度回顾已有结果和未解决的问题。根据次数-亏格公式，一般的平面有理四次曲线 C 有三个节点 Z ，因此我们考虑次数为 4 的完全线性系上三点相对希尔伯特概形中的对 (C, Z) 的空间。记 R_4^h 为该相对希尔伯特概形中有理四次曲线轨迹的闭包。于是存在一个典范投影映射 $R_4^h \to H[3]$ ，将其映至 $\mathbb{P}^2$上三点的希尔伯特概形。另一方面，将 R_4^h 视为稳定对 $(s, \mathcal{E}xt^1(I_{Z|C}(1)\ \omega_{\mathbb{P}^2}) := F)$ 的空间，并 $s \in H^0(F)$，再按照几何不变量商的变化的意义进行墙穿越 ([Tha96, He98])，我们得到对具有三个共线点的有理四次曲线轨迹的光滑收缩。事实上，令 R_4 为 Simpson空间 $M_4(\mathbb{P}^2)$ 中有理四次曲线轨迹的闭包，则

我们有如下交换图。



这里，K 是一个 Kronecker 模空间，它是 H[3] 沿着由共线三点构成的轨迹 D_3 进行双有理压缩所得的空间（明确的定义见第2.1节）。令 D_3 为 D_3 在映射 $\pi : H[3] \to K$ 下的像。本文的主要结果 [Chu21]是描述映射 $p_s : R_4 \to K$ 在 D_3上的纤维。也就是说， p_s 在 D_3 上的每个纤维都参数化了一个完全由其支集确定的稳定层（详见命题 2.8 的 (2)）。值得注意的是，我们的证明使用了泛族 $\mathcal{M}_4(\mathbb{P}^2)$ 的直像层的初等修改。由此可得，在子空间 D_5之外， p_s 是 K 上的一个 $\mathbb{P}^5$-纤维化。这里，$D_5 \subset \widetilde{K} \setminus D_3 = H[3] \setminus D_3$ 参数化了 $\mathbb{P}^2$ 中所谓的非曲线型点（定义 4.1）。在 D_5，上， p_s 的纤维参数化了支集为具有 D_4-奇点的有理四次曲线的稳定层（图 1），因此 $p_s|_{p_s^{-1}}(D_5)$ 是 D_5 上的一个 $\mathbb{P}^8$-纤维化（命题 2.8 的 (1)）。本文旨在通过子概形的平坦化来消解这个奇点轨迹。

定理 1.1（定理 4.7）。 设 $\mathbf{R}_4$ 是模空间中有理四次曲线空间的闭包 $\mathbf{M}_4(\mathbb{P}^2)$ 中的稳定层 $\mathbb{P}^2$，其希尔伯特多项式为 $4m+1$。存在一个$\widetilde{\mathrm{SL}}(3, \mathbb{C})$-等变光滑解消 $\mathbf{R}_4$，其对应于 $\mathbf{R}_4$。

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$事实上，$\mathbf{R}_4$ 是沿着 $\mathbf{D}$ 对 $\mathbf{K}$ 进行 $\mathbf{D}_5$。作为推$\widetilde{}$论，我们建立了计算空间 $\mathbf{R}_4$ 的 Chow环的公式（命题4.8），并确认了 Maruyama（[Mar73]）所提出的翻转图景（推论 4.9）。

定理 1.1的证明的主要思想如下。受平面有理四次曲线的典范形式启发，我们考虑一个秩3 向量丛 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbf{K}$上，其纤维由三个点在 $\mathbb{P}^2$上的定义方程的次数为 2 部分生成。通过对第二对称幂进行射影化$\mathrm{Sym}^2\mathcal{F} =: \mathcal{V}$，我们得到一个双有理映射

$$\Phi : \mathbb{P}(\mathcal{V}) \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{U})$$

（由包含映射 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ 诱导）在 $\mathbf{K}$ 上，其中向量丛$\mathcal{U}$ 的一般纤维由经过 $\mathbb{P}^2$ 中三个点的四次形式生成。我们证明，商层 $\mathcal{U}/\mathcal{V}$ 的非挠自由轨迹恰好是非曲线型点的轨迹 $\mathbf{D}_5(\cong \mathbb{P}^2)$。现在，考察 $\mathbb{P}^2$ 中三个点的平方理想族，我们看到 $\mathbf{D}_5$ 参数化了 $\mathbb{P}^2$ 中子概形非平坦族的轨迹。沿 $\mathbf{D}_5$ 吹起 $\mathbf{K}$ 并对子概形进行平坦化后，我们将映射 Φ 延拓为双有理态射。上述所有结论都处于 $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ 中：

SL_3-等变情形。此外，值得注意的是，命题 4.5 证明中的 Kodaira-Spencer 映射是等变的，因此我们可以轻松地检测到由~吹起空间参数化的$\mathbf{K}$的平坦极限。

1.3. **论文结构**。 在第 2节中，我们汇集了有关点的希尔伯特概形、Bridgeland 稳定性以及相干层的对称幂的众所周知的事实。在第 3节中，作为热身，我们研究 $\mathbb{P}^2$中有理三次曲线空间的紧化。最后，在第 4节中，我们给出定理 1.1的证明。

记号与约定。

- 设 W_{n+1} 为一个（$n+1$）维复向量空间。简记为 $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}W_{n+1}$。
- 定义 X 上局部自由层 $\mathcal{F}$ 的射影丛为

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}) := \operatorname{Proj}\left(\operatorname{Sym}^\bullet(\mathcal{F}^*)\right) \to X,$$

  因此， $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 的一维子空间所构成的空间。
- $\mathbf{M}_4 := \mathbf{M}_d(\mathbb{P}^2)$：希尔伯特多项式为 $F\ \chi(F(m)) = 4m+1$的稳定层的模空间。
- $\mathbf{K} := \mathbf{K}(3; 2,3)$：维数向量为3-克罗内克箭图$(2,3)$ 的箭图表示的模空间（记号2.1）。
- $\mathbf{Q}_4 := \mathbb{P}(\mathcal{U})$，其中 $\mathcal{U}$ 是定义在12 秩向量丛，基底为$\mathbf{K}$ （定义2.4）。
- $\mathbf{H}[n] := \mathbf{Hilb}^n(\mathbb{P}^2)$： $\mathbb{P}^2$上长度为n的零维子概形的希尔伯特概形。
- $\Rightarrow$（分别地， $\hookrightarrow$ 和 $\twoheadrightarrow$）表示簇或局部自由层之间的向量丛态射（分别为单态射、满态射）。
- 沿态射拉回局部自由层（或向量丛）时，我们常省略拉回符号。

致谢。 本文的主题最初由 D. Chen 在 K. Chung 毕业时提出（[Chu11，第 6]章），这为探索有理曲线空间的各种紧化提供了契机。K. Chung 对 D. Chen 深表感激。论文完成后，作者注意到第4.2 节与 [LFV21的第 6]节 [LFV21], 。对于与其内容的重复之处，我们深表歉意，尽管我们的结果与 [Chu21]中的结果基于相同的视角。

2. 预备知识

本节汇集有关点的希尔伯特概形、稳定对象模空间的翻转以及相干层的对称幂的众所周知的事实。

2.1. 克罗内克与希尔伯特概形。 克罗内克模的模空间由如下几何不变理论（GIT）商给出。令 **K**(3; 2,3) 表示 3-克罗内克箭图的表示模空间



维数向量为 (2,3)。它可识别为稳定层同态的同构类空间。

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 3}$$

在自同构群的作用下 $G := \mathrm{GL}_{d-2} \times \mathrm{GL}_{d-1}/\mathbb{C}^*$。因此，对于两个分别具有维数 E 和 F 的向量空间2 和3，以及 $W_3^* = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$，Kronecker 模的模空间由 GIT 商（[Kin94]）给出。

$$\mathbf{K}(3; 2, 3) := \mathrm{Hom}(F, W_3^* \otimes E)//G.$$

记号 2.1. 令 $\mathbf{K} := \mathbf{K}(3; 2,3)$.

空间 $\mathbf{K}$ 带有两个丛 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$，其秩分别为 $\mathcal{E} = 2$ 和 $\mathcal{F} = 3$，满足 $\wedge^2\mathcal{E} \cong \wedge^3\mathcal{F}$。此外，向量丛 $\mathcal{F}$ 提供了一个嵌入映射 $i : \mathbf{K} \subset \mathrm{Gr}(3, \mathrm{Sym}^2 W_3^*)$，通过包含映射

$$\mathcal{F} \subset \mathrm{Sym}^2 W_3^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{K}}. \tag{1}$$

另一方面，存在一个万有复形

$$\mathbb{K}^\bullet : \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathbf{K}} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \tag{2}$$

在 $\mathbf{K} \times \mathbb{P}^2$ 上，使得 ϕ 是单射。复形 ϕ 中的第一个映射 $\mathbb{K}^\bullet$ (2) 给出了希尔伯特概形 $\mathbf{H}[3]$ 中三点的理想的通用解消，其中 $\mathbb{P}^2$ 不包括$\widetilde{\ }$共线三点的轨迹 $\mathbf{D}_3$。注意，$\mathbf{D}_3$ 同构于一个在空间 $\mathbb{P}^3$上的向量丛 $\mathrm{Gr}(1, W_3^*)$，该空间 参数化直线的纤维 $\mathbb{P}^3$，每个纤维参数化直线上的三重点。事实上，该映射的像为

$$\pi : \mathbf{H}[3] \to \mathrm{Gr}(3, \mathrm{Sym}^2 W_3^*), \quad [Z] \mapsto \mathrm{H}^0(I_Z(2))$$

$\widetilde{\ }$是 $\mathbf{K}$，且映射 π 是一个光滑的吹落，其例外除子为 $\mathbf{D}_3$ ([LQZ03])。$\widetilde{\ }$此外，π 沿 $\mathbf{D}_3$ 的限制映射收缩纤维 $\mathbb{P}^3$。

$\widetilde{\ }$记号 2.2。 令$\mathbf{D}_3$ 在$\mathbf{K}_3$中的像记为$\mathbf{D}_3(\cong \mathrm{Gr}(1, W_3^*))$。

对于每个闭点 $[Z] \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{D}_3$，局部自由层 $\mathcal{E}$和 $\mathcal{F}$在 $[Z]$ 处的纤维为

$$\mathcal{F}_{[Z]} = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2, I_Z(2)) \subset \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)) = \mathrm{Sym}^2 W_3^*,$$
$$\mathcal{E}_{[Z]} = \ker \left\{ \mathcal{F}_{[Z]} \otimes \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \xrightarrow{m} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \right\},$$

其中 m 是典范乘法映射 $m:\mathrm{Sym}^2W_3^*\otimes W_3^*\to\mathrm{Sym}^3W_3^*$ 的限制。但（$\mathbb{K}^\bullet$ 在（2）中的复形并非无环（即 $h^0\neq 0$）在 $\mathbf{D}_3$ 上。对于每个闭点 $[l]\in\mathbf{D}_3$，，令 $\mathbf{coker}(\phi)_{[l]}:=E_{[l]}$ 为 $\phi_{[l]}$ 的余核。那么 $E_{[l]}$ 属于以下短正合列：

$$0\to\mathcal{O}_l(-1)\to E_{[l]}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\to 0. \tag{3}$$

此外，映射 $\psi_{[l]}$ 在复形 $\mathbb{K}^\bullet$ 中分解为

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{[l]}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} & \xrightarrow{\quad\psi_{[l]}\quad} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \\ & \searrow \quad \nearrow & \uparrow \\ & E_{[l]} \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1). \end{array} \tag{4}$$

注 2.3。 (2) 中的复形是以下复形的一个特例。设 $\phi:\ \mathcal{E}_0\to\mathcal{E}_1$是光滑射影簇 X 上的局部自由层 $\mathcal{E}_0$ 与 $\mathcal{E}_1$ 之间的态射，其中秩$\mathcal{E}_0+1=$秩 $\mathcal{E}_1=n$。存在一个与对偶映射相关联的 *Eagon-Northcott* 复形 $\phi^t\colon\mathcal{E}_1^*\to\mathcal{E}_0^*$([EN62])。利用同构 $\wedge^{n-1}\mathcal{E}_1\cong\mathcal{E}_1^*\otimes\wedge^n\mathcal{E}_1$，可以得到一个复形

$$\mathcal{E}_0\xrightarrow{\phi}\mathcal{E}_1\xrightarrow{\wedge^{n-1}\phi^t}(\wedge^n\mathcal{E}_1)\otimes\wedge^{n-1}\mathcal{E}_0^*.$$

2.2. **稳定对象模空间及其翻转**。 关于 $\mathbb{P}^2$ 的半稳定对象模空间已在双有理几何的背景下得到广泛研究（[BMW14]）。本文简要讨论 Bridgeland 稳定性空间的室结构及其墙穿越。

我们将 $s\in\mathbb{R}$ 和 $t>0$ 的势函数定义如下：

$$Z_{s,t}(E)=-\int_{\mathbb{P}^2}e^{-(s+it)H}\cdot ch(E)=-\left(ch_2-sc_1+\frac{1}{2}r(s^2-t^2)\right)+it(c_1-rs),$$

其中 $(r,c_1,ch_2)=(r(E)\ c_1(E)\ ch_2(E))$ 和 $H=c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$。我们可以利用斜率函数确定 $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2)$ 中某个（仅取决于 s 的） t-结构的心 $\mathcal{A}_s$ 中的对象的稳定性：

$$\mu_{s,t}:\mathrm{K}(\mathbb{P}^2)\to\mathbb{R},\ \mu_{s,t}(E)=-\frac{\mathrm{Re}(Z_{s,t}(E))}{\mathrm{Im}(Z_{s,t}(E))}=\frac{ch_2-sc_1+\frac{1}{2}r(s^2-t^2)}{t(c_1-rs)}.$$

此外，稳定性空间（与上半平面 $\mathbb{H}=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2\mid t>0\}$ 同一）可分解为有限个腔室。令 $\mathbf{M}_{\mu_{s,t}}(v)$ 表示 $\mathcal{A}_s$ 中固定类型 $v=(r,c_1,ch_2)\in\mathrm{A}^*(\mathbb{P}^2)$ 的 Bridgeland 稳定对象的模空间。只有当 (s,t) 从一个腔室移动到另一个腔室时，空间 $\mathbf{M}_{\mu_{s,t}}(v)$ 才会发生变化。

在我们的情形中，令 $v(F)=(0,\ 4,\ -5)\in\mathrm{A}^*(\mathbb{P}^2)$（从而 $\chi(F(m))=4m+1$）。

定义 2.4。 令 $\mathcal{U}:=p_*(\text{余核}(\phi)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ 在 (2) 中为定义在 $\mathbf{K}$ 上的局部自由层，其中$p:\mathbf{Q}_4:=\mathbb{P}(\mathcal{U})\to\mathbf{K}$ 是典范丛态射。

注 2.5。 丛的射影化 $\mathbb{P}(\mathcal{U})$，限制在开子集 $\mathbf{K} \setminus \mathbf{D}_3$,同构于一个相对希尔伯特概形，它参数化平面四次曲线上的三个非共线点，如 [He98第 4 节所示。4]。

命题 2.6([Woo13，引理 6.9])。在上述记号和定义下，

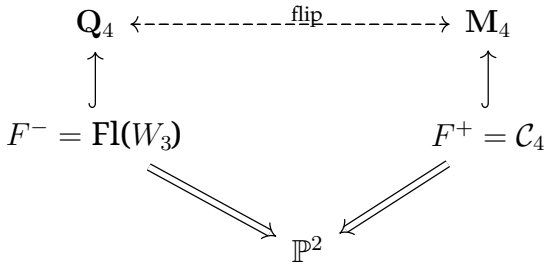
(1) 划分 $\mathbb{H}$ 中各腔室的墙是半圆，且具有共同的圆心 $(-\frac{5}{4}, 0)$。*(2)* 当半圆的半径为 $R = \frac{7}{4}$ 时，只有一条数值墙。*(3)* 稳定对象的模空间有两种不同形式:

$$\mathrm{M}_{\mu_{s,t}}(v) \cong \begin{cases} \mathbf{Q}_4, \ t \ll 1, \\ \mathbf{M}_4, \ t \gg 1. \end{cases}$$

全局子丛同态 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_4}(-1) \hookrightarrow p^*\mathcal{U}$ 确定了稳定复形的一个全局族

$$\mathbb{F}_4 := [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_4 \times \mathbb{P}^2} \to \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_4}(1) \otimes (p \times \mathrm{id})^*(\mathrm{coker}(\phi) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))]. \tag{5}$$

通过修改 $\mathbb{F}$ （见5），存在一个翻转图表，连接$\mathbf{Q}_4$ 和$\mathbf{M}_4$，其翻转轨迹为



- $\mathbf{F}^-$ 同构于普适直线$\mathrm{Fl}(W_3) = \{(q, \ l) \mid q \in l \in \mathbf{Gr}(\mathbf{1}, \ W_3^*)\}$ 和
- $\mathbf{F}^+$ 同构于普适四次曲线 $\mathcal{C}_4 = \{(q, C) \mid q \in C \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)|\}$。

我们注意到，翻转轨迹$\mathbf{F}^+$ 参数化了满足 $h^0(F) = 2$ 的稳定层 F。复形 $F := [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{s} I_{Z|\mathbb{P}^2}(4)] \in \mathbf{Q}_4 \setminus \mathbf{F}^-$ 将其导出对偶$F^\vee \in \mathbf{M}_4 \setminus \mathbf{F}^+$一一对应。

命题 2.7. 设 $[l] \in \mathbf{D}_3 = \mathrm{Gr}(1, \ W_3^*)$ 和

$$s = (s_1, s_2) \in \mathrm{H}^0(E_{[l]}(2)) = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(1)) \oplus \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))$$

使得 $E_{[l]}$ 在(3)。那么，

(1)$\mathbf{F}^-$ 包含于 $p^{-1}(\mathbf{D}_3)$. *(2)* $s_2 = 0$ 当且仅当 $[\mathbb{F}_4|_{([l],s)\times\mathbb{P}^2}] \in \mathbf{F}^-$，其中稳定复形嵌入正合三角

$$0 \to [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{s_1} \mathcal{O}_l(1)] \to \mathbb{F}_4|_{([l],s)\times\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)[1] \to 0.$$

(3) 如果 $s_2 \neq 0$，则导出对偶 $\mathbb{F}_4|^{\vee}{}_{([l],s)\times\mathbb{P}^2}$ 与一个稳定层 F 准同构，该层嵌入正合列

$$0 \to \mathcal{O}_C \to F \to \mathcal{O}_l \to 0 \tag{6}$$

对于三次曲线 $C =$ 支集(余核(s_2))。因此 $h^0(F) = 1$。

证明。（1）和（2）：[CM17，引理 3.9 和引理 3。7]。

(3) 当 [CM17] 中的图表 (9) 反向读取时，可以得到正合列 (6). □

回忆一下，$\mathbf{R}_4$ 是 $\mathbf{M}_4$中有理四次曲线空间的闭包。根据 [Chu21，命题 3.3]，$h^0(F) = 1$对于每个点 $\mathbf{R}_4$，因此存在一个嵌入$\mathbf{R}_4 \subset \mathbf{M}_4 \setminus \mathbf{F}^-$。

命题 2.8 ([Chu21，命题 3.6 和命题 4。1])。设 π 为以下映射的复合

$$\pi : \mathbf{R}_4 \subset \mathbf{M}_4 \setminus \mathbf{F}^- \cong \mathbf{Q}_4 \setminus \mathbf{F}^+ \to \mathbf{K}.$$

于是，映射 π 是一个在$\mathbf{K}$ 上的泛型 $\mathbb{P}^5$纤维化，特殊纤维描述如下。

(1) π 是一个 $\mathbb{P}^8$-纤维化映射，其底空间为轨迹$\mathbf{D}_5$，由非曲线型点构成（明确的定义见定义*4.1*），其纤维 $\mathbb{P}^8$ 参数化了在由$\mathbf{D}_5$参数化的点处奇异的平面四次曲线。*(2)* 对任意$\mathbf{D}_3$，，纤维 $\pi^{-1}([l]) \cong \mathbb{P}^5$ 参数化一个稳定层 F，它适合于一个唯一的如下形式的正合列 $0 \to \mathcal{O}_{C\cdot l} \to F \to \mathcal{O}_l \to 0$，其中 C 是由该纤维参数化的圆锥曲线 $\mathbb{P}^5$ （参见命题*2.7*）。

命题2.8 的（1）中的有理曲线一般具有 D_4-奇点（图1）。关于四次平面曲线奇点的讨论，可参见 [Hui79] 和[CKPU13，第 9]章。本文的主要目标是通过对层（向量丛）进行初等修改来消解这一轨迹。

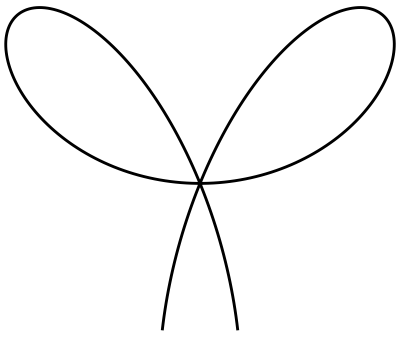


图 1. 具有 D_4-奇点的有理平面四次曲线

2.3. **对称幂及其基础知识：SL_3-表示。设 是光滑射影簇 上的相干层 的张量幂。的第 对称幂记为 Sym，定义为张量幂 模去由所有形如 () () 的元素生成的理想层所得的商，其中 、……、** s_k是 $\mathcal{F}$ 的局部截面，而 σ 是 n个字母的对称群 S_n 中的任意元素。将等价类记为 $s_1 \cdot s_2 \cdot \cdots \cdot s_k := [s_1 \otimes s_2 \otimes \cdots \otimes s_k] \in \mathrm{Sym}^k \mathcal{F}$。

引理 2.9. 设 $\mathcal{E}$、$\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{H}$ 是 X 上的相干层。考虑正合列 $\mathcal{E} \xrightarrow{\delta} \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{H} \longrightarrow 0$。那么，对于所有 $k \geq 1$，我们得到一个正合列

$$\mathcal{E} \otimes \mathrm{Sym}^{k-1}\mathcal{F} \xrightarrow{s(\delta)} \mathrm{Sym}^k \mathcal{F} \xrightarrow{sym^k(\epsilon)} \mathrm{Sym}^k \mathcal{H} \to 0$$

其中 $s(\delta)$ 定义为

$$e \otimes (f_1 \cdot f_2 \cdots f_{k-1}) \mapsto \sum_{i=1}^{k} (f_1 \cdot f_2 \cdots \delta(e) \cdots f_{k-1}).$$

为了我们的目的，我们需要一种标准的 SL_3-表示论，且与对称幂空间相关。我们总结了第 13.3 节的内容，见 [FH91]。令 V 为一个维数为 $\dim V = 3$的向量空间。那么 $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2 V)$ 的标准表示同构于空间

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2 V) &\cong \mathrm{Sym}^4 V \oplus \mathrm{Sym}^2 V^* \\ &\cong \mathrm{Sym}^4 V \oplus \mathrm{Sym}^2(\wedge^2 V) \end{aligned}$$

其中，乘法映射 $m : \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2 V) \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}^4 V$ 的核，在固定同构 $\wedge^2 V \cong V^* \otimes \wedge^3 V$ 下被识别为 $\ker(m) = \mathrm{Sym}^2(\wedge^2 V) \cong \mathrm{Sym}^2 V^*$。这里的嵌入由

$$\mathrm{Sym}^2(\wedge^2 V) \subset \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2 V),\ (u \wedge v) \cdot (w \wedge z) \mapsto (u \cdot w) \cdot (v \cdot z) - (u \cdot z) \cdot (v \cdot w).$$

例 2.10. 令 $(I_Z)_2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$ 为支集于 $\mathrm{Supp}(Z) = \{[0:0:1]\}$ 的非曲线型点 Z 的理想的二次部分。作为一个 $\mathbb{C}$-向量空间，$(I_Z)_2$ 是由 $V_3 = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x, y, z\}$ 张成的 $\mathrm{Sym}^2 V_3$的子向量空间。可以选取 $\mathrm{Sym}^2(\langle x^2, xy, y^2 \rangle)$ 的一组基如下：

$$\left\{x^2 \cdot x^2,\ x^2 \cdot (xy),\ x^2 \cdot y^2,\ (xy) \cdot (xy),\ (xy) \cdot y^2,\ y^2 \cdot y^2\right\},$$

它是 $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2 V_3)$ 的一个子向量空间。注意，$x^2 \cdot y^2 \neq (xy) \cdot (xy) \in \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2 V_3)$。然而，在典范乘法映射 $m : \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2 V_3) \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}^4 V_3$ 下，它们有相同的像，即 $m(x^2 \cdot y^2) = m((xy) \cdot (xy))$。因此，我们有

$$(x \wedge y) \cdot (x \wedge y) = x^2 \cdot y^2 - (xy) \cdot (xy) \in \ker(m).$$

3. 预备：次数3 情形

本节中，我们将根据 $\mathbf{R}_3$ 的结果，将其描述为一个基于 [CC11] 的射影向量丛。尽管这个结果非常初等，本文的目的是为将在第 4 节讨论的次数4 情形提供动机。

3.1. 有理三次曲线空间及其万有复形。 考虑由三次方程 $f(x,y,z) = 0$定义的三次曲线 C in$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(W_3)$。根据次数-亏格公式，三次曲线 C若有奇点，则为有理曲线。当且仅当 $f(x,y,z)$ 可写成如下形式时，三次曲线 C 经过点 $q = [0:0:1]$

$$f(x,y,z) = g_3(x,y) + zg_2(x,y) + z^2 g_1(x,y), \tag{7}$$

其中 $g_i(x,y)$ 是关于 x,y的齐次多项式，且 deg $g(x,y) = i$。此外，当且仅当 $g_1(x,y) = 0$ 在式（7）中时， C在点 q 处是奇异的。下面说明如何通过典范形式（7）构造有理三次曲线的参数空间。设 $\mathcal{E}_i$ 为局部自由层，其纤维对应于在$\mathbb{P}^2$中某点处至少二重消失的三次形式。设 $\mathbf{D} = \mathbf{Gr}(2, W_3^*)$ 为 $\mathbb{P}^2$中点所构成的格拉斯曼流形。对万有向量丛列 $0 \to \mathcal{D} \to W_3^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}} \to \mathcal{Q} \to 0$取对称幂，可得一个交换图：

(8)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & W_3^* \otimes \mathcal{Q}^{\otimes 2} & = & W_3^* \otimes \mathcal{Q}^{\otimes 2} \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Sym}^3\mathcal{D} & \hookrightarrow & \text{对称}^3 W_3^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}} & \twoheadrightarrow & \mathrm{Sym}^2 W_3^* \otimes \mathcal{Q} \\
\| & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Sym}^3\mathcal{D} & \hookrightarrow & \mathcal{E}_2 & \twoheadrightarrow & \mathrm{Sym}^2\mathcal{D} \otimes \mathcal{Q}
\end{array}$$

使得层 $\mathcal{E}_2$ 位于图表的底行（8）。

命题 3.1. 在上述记号和定义下，

(1) 在$\mathbf{D}$上存在局部自由层的嵌入：

$$\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathrm{Sym}^3 W_3^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}}.$$

此外，模空间$\mathbf{M}_3$ （分别为$\mathbf{R}_3$）同构于

$$\mathbf{M}_3 \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}_1), \ (\textit{resp.}\ \mathbf{R}_3 \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}_2))$$

且商层 $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$ 同构于一个局部自由层 $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2 \cong \mathcal{D} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}}(2)$。

(2) $\mathbf{R}_3$ 上的稳定复形的泛族由导出对偶给出

$$\mathbb{F}_3 := [\mathcal{O}_{\mathbf{R}_3 \times \mathbb{P}^2} \to \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbf{R}_3}(1) \otimes (p \times id)^*(\mathcal{I}_{\mathcal{W}} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))]^\vee \tag{9}$$

其中， $\mathcal{W}$ 是$\mathbf{D}$ 上一个点的万有子概形，而 $p\colon \mathbb{P}(\mathcal{E}_2) \to \mathbf{D}$ 是典范投影映射。

证明。 （1）容易看出，图表(8)中上方中间映射与典范满射 $W_3^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ 经 $\mathcal{Q}^{\otimes 2}$扭曲后的复合映射的核是局部自由层

$$\mathcal{E}_1 = \operatorname{Ker}\left\{\operatorname{Sym}^3 W_3^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}} \twoheadrightarrow W_3^* \otimes \mathcal{Q}^{\otimes 2} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}^{\otimes 3}\right\}.$$

由此我们证明了包含关系。同构来自 [CC11]的第一段。商层 $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$ 最终通过分析(7)中的典范形式得到。

（3）通过对以下嵌套正合列作相对化，可以在$\mathbf{M}_3$ 上构造万有复形

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) = I_{C|\mathbb{P}^2} \to I_{q|\mathbb{P}^2} \to I_{q|C} \to 0$$

针对一对理想 $q \in C$，其中点 q和三次曲线 C属于 $\mathbb{P}^2$。式(9)中所述的万有复形，无非是沿包含映射 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_2)\times\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}_1) \times \mathbb{P}^2$的拉回。 □

4. 次数4 情形

在本节中，我们首先构造 $\mathbf{R}_4$, 的一个双有理模型，它是 Kronecker 模空间上的一个对称化丛的射影化（命题4.4）。其次，通过研究子概形族的未定义轨迹和平坦化（命题4.5），我们修改该向量丛，从而得到到 $\mathbf{R}_4$ 的扩展双有理态射（定理4.7）。最后，我们解释将例外轨迹压缩到 $\mathbf{R}_4$中的过程。所有这些工作都是 SL_3-不变的。

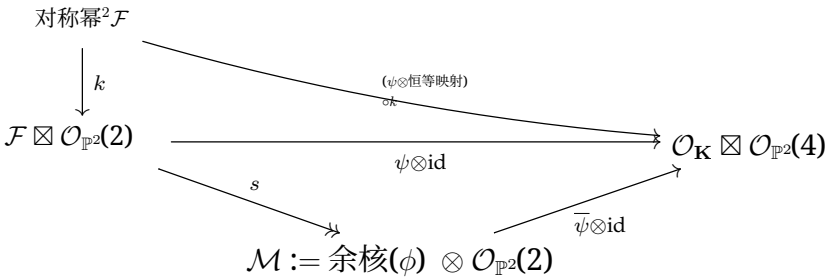
4.1. **万有丛、对称化及其射影化**。在本小节中，我们构造一个双有理映射，它连接 $\mathbb{P}^5$-射影丛，其基底为 $\mathbf{K}$，以及有理曲线空间 $\mathbf{R}_4$ （命题 4.4）。典范形式（[Chu21，第3节。2]）的有理四次平面曲线表明，这样的向量丛的一个自然候选是万有子丛的对称积 $\operatorname{Sym}^2\mathcal{F}$，其中万有子丛 $\mathcal{F}$ 见（1）。令

$$\operatorname{Sym}^2\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \tag{10}$$

是由.....诱导的包含映射$v \cdot w \mapsto \frac{1}{2}(v \otimes w + w \otimes v)$对于 v， $w \in \mathcal{F}$。由于将包含映射（10）与 ψ 中的第二个映射（2）张量积 $\mathcal{F} \boxtimes (-)$进行复合，我们在$\mathbf{K} \times \mathbb{P}^2$上有一个态射：

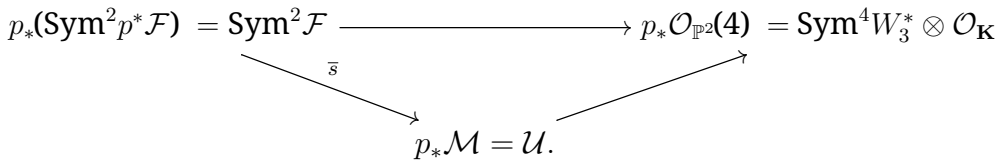
$$k : \operatorname{Sym}^2\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\psi} \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2). \tag{11}$$

现在，通过对万有复形（ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$（2）中的线丛进行张量积（2），并与映射 k （方程（11）中的映射）结合，我们得到一个交换图：



(12)

在 $\mathbf{K}\ \times\mathbb{P}^2$。沿投影映射 $p:\ \mathbf{K}\ \times\mathbb{P}^2\to\mathbf{K}$ 的图表（12）的推前给出



(13)

我们需要在 $\mathbf{K}$ 中引入一个特殊轨迹，以分析诱导态射 s 在（13）中，这最终将成为一个退化轨迹。

定义 4.1. 定义 $\mathbf{D}_5$ 为 $\mathbb{P}^2$ 中非曲线型 点的轨迹（赋予其约化概形结构），这些点是坐标点 $q=[0:0:1]$处理想 $I_q^2=\langle x^2,xy,y^2\rangle$ 的 SL_3-轨道。

从外在角度来看，可以预期$\mathbf{D}_5$同构于 $\mathrm{Gr}(2,W_3^*)$。

引理 4.2。 设$\mathbf{D}:=\mathrm{Gr}(2,W_3^*)$ 为射影平面 $\mathbb{P}^2\ =\mathbb{P}(W_3)$中的点所构成的格拉斯曼流形。则存在一个嵌入 $j:\mathbf{D}\ \hookrightarrow\mathbf{K}$，其像为$\mathbf{D}_5$。

证明。 对格拉斯曼流形$\mathbf{D}$的泛短正合列 $0\to\mathcal{D}\to W_3^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{D}}\to\mathcal{Q}\to0$ 取第二对称幂，我们得到以下正合列：

$$0\longrightarrow\mathrm{Sym}^2\mathcal{D}\longrightarrow\mathrm{Sym}^2W_3^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{D}}\longrightarrow(W_3^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{D}})\otimes\mathcal{Q}\longrightarrow0,\tag{14}$$

其定义了一个映入$\mathrm{Gr}(3,\mathrm{Sym}^2W_3^*)$ 的嵌入映射。逐纤维检查像时，该嵌入映射经过$\mathbf{D}_5\subset\mathbf{K}$。□

注 4.3。 当我们将 $\mathbf{K}$ 与希尔伯特概形$\mathbf{H}[3]$ 中的三个点相识别时，可以得到一个由$\mathbf{D}$参数化的非曲线型点的子概形族。令 $\mathcal{W}$ 为$\mathbf{D}$上 $\mathbb{P}^2$ 中的点的泛族。那么，理想层 $\mathcal{I}_{\mathcal{W}}$ 的相对 Koszul 复形是无环的：

$$0\to\wedge^2\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)\to\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\to\mathcal{I}_{\mathcal{W}}\to0.\tag{15}$$

对正合列（15）取第二对称幂，可得正合列

$$0\to(\wedge^2\mathcal{D}\otimes\mathcal{D})\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)\to\mathrm{Sym}^2\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)\to\mathrm{Sym}^2\mathcal{I}_{\mathcal{W}}=\mathcal{I}_{\mathcal{W}}^2\to0.$$

由于 $\mathcal{I}_{\mathcal{W}}^2 \subset \mathcal{I}_{\mathcal{W}} \subset \mathcal{O}_{\mathbf{D}\times\mathbb{P}^2}$，容易验证 $\mathcal{I}_{\mathcal{W}}^2$ 是非曲线型点的平坦族。

现在我们可以陈述并证明主要命题之一了。回顾一下，$\mathbf{R}_4$ 是在 $\mathbb{P}^2$ 下有理四次曲线空间的闭包$\mathbf{M}_4$。此外，$\mathbf{R}_4 \subset \mathbf{Q}_4 \setminus \mathbf{F}^- = \mathbb{P}(\mathcal{U}) \setminus \mathbf{F}^-$ 其中 $\mathbf{F}^-$ 是 $\mathbf{Q}_4$ (第 2.2 节中的翻转轨迹)。

命题 4.4。设 $\mathcal{V} := 对称^2\mathcal{F}$ 在方程 (13) 中，并且 $\mathcal{V}^\circ$ 是 $\mathcal{V}$ 沿开子集 $\mathbf{K} \setminus \mathbf{D}_5$的限制。那么存在一个嵌入映射

$$\Psi : \mathbb{P}(\mathcal{V}^\circ) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{U}) \setminus \mathbf{F}^-$$

使得 Ψ 的像与空间$\mathbf{R}_4$ 双有理。

证明。注意 $\mathbf{D}_3 \cap \mathbf{D}_5 = \emptyset$根据其定义。对于每个点 $[Z] \in \mathbf{K} \setminus (\mathbf{D}_3 \sqcup \mathbf{D}_5)$，映射$s$ 在（13）中不过是典范同构映射

$$\mathcal{V}_{[Z]} = \mathrm{Sym}^2\mathrm{H}^0(I_Z(2)) \cong \mathrm{H}^0(I_Z^2(4)) \subset \mathrm{H}^0(I_Z(4)) = \mathcal{U}_{[Z]},$$

其中第二个映射来自包含映射 $I_Z^2 \subset I_Z$。由于我们可以容易地检验，对于 SL_3-轨道的每个代表元 $[Z]$，$h^0(I_Z^2(4)) = 6$，因此 s 是单射的。

对于闭点 $[l] \in \mathbf{D}_3 (= \mathrm{Gr}(1, W_3^*))$，则 $\mathcal{U}_{[l]} = \mathrm{H}^0(E_{[l]}(2))$ 的纤维（参见（3））适合如下正合列

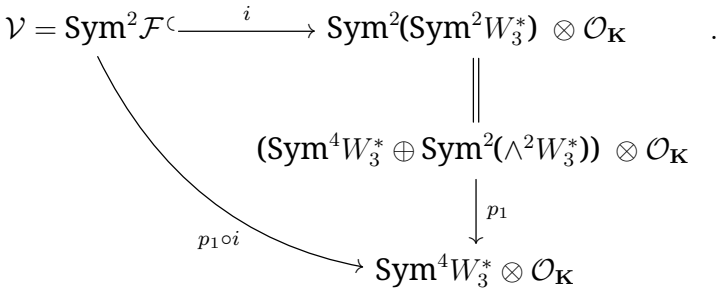
$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(1)) \to \mathcal{U}_{[l]} \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \to 0.$$

此外，（13）中的映射 $\mathcal{U}_{[l]} \to p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)_{[l]}$ 可经由乘法映射 $l \cdot (-) : \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)) \cong \mathrm{Sym}^4 W_3^*$（参见（4））分解。相差一个 SL_3-等价变换，不妨设 $l = \langle x \rangle$。此外，我们假设 $\mathrm{H}^0(\mathcal{F}_{[l]}) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(x^2, xy, xz)$。映射 $s_{[l]}$ 在 $\mathrm{Sym}^4 W_3^*$ 中的像 $\mathcal{V}_{[l]}$ 为 $x^2 \cdot \mathrm{Sym}^2 W_3^*$，因此该映射是单射。此外，该像的三次部分非零，因而它位于命题 2.8 的补集 $\mathbb{P}(\mathcal{U}) \setminus \mathrm{F}^-$ ((2) 中。

最后，对于理想 $I_q = \langle x, y \rangle \in \mathbf{D} (\cong \mathbf{D}_5)$，其在 s 下的像由 $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2, I_q^4(4)) \cong \mathrm{Sym}^4\langle x, y \rangle$ 给出，因此它不是单射。由于 $\mathbf{D}_5$ 在 SL_3-作用下是传递的，该性质对$\mathbf{D}_5$中的每一点都成立。□

由命题4.4的证明可知，映射 s （在13）中一般是单射（因此作为层同态也是单射）。此外，映射 s 可分解为以下形式

方式。对方程（1）取对称幂，并投影到第一分量（第 2.3 节），可得



根据其构造，映射 s 在（13）下中只是映射 p_1 与包含映射 i的复合，后者紧随其后。命题 4.4 的证明告诉我们，映射 $s = p_1 \circ i$ 在 $\mathbf{D}_5$之外是单射。

4.2. **通过理想平坦化修改对称化丛**。在本小节中，通过沿 $\mathcal{V} = \mathrm{Sym}^2\mathcal{F}$ 在 $\mathbf{K}$ 上的 $\mathbf{D}_5$, 进行修改，我们得到一个子丛 $\mathcal{V}'$，它属于 $\mathcal{U}$，使得商层 $\mathcal{U}/\mathcal{V}'$ 局部自由（定理 4.7）。由此，我们可以推导出存在一个态射 $\mathbb{P}(\mathcal{V}') \to \mathbb{P}(\mathcal{U})$，从而存在一个到空间 $\mathbf{R}_4$的态射。

令 $\mathrm{im}((\psi \otimes \mathrm{id}) \circ k)$ 为 $\mathrm{Sym}^2\mathcal{F}$ 在（12）中的像。由于我们的修改将在 $\mathbf{D}_3 = \mathrm{Gr}(1, W_3^*)$ 在 $\mathbf{K}$ (第 2.1节）中的补集上进行，因此可假设 $\mathrm{im}((\psi \otimes \mathrm{id}) \circ k) \subset \mathcal{M} \cong \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}(4)$ 其中 $\mathcal{Z}$ 是 $\mathbf{K}$ 上的万有子概形，因此该像成为一个扭曲理想层

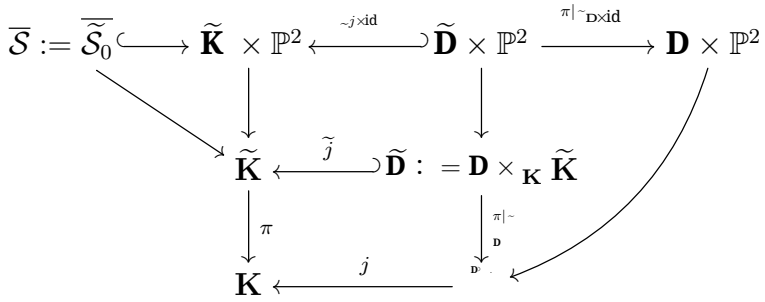
$$\mathrm{im}((\psi \otimes \mathrm{id}) \circ k) \cong \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(4) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}(4) \subset \mathcal{O}_{\mathbf{K}} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)$$

对于子概形 $\mathcal{S} \subset \mathbf{K} \times \mathbb{P}^2$。如命题 4.4的证明所示，$\mathbf{K}$上的纤维由以下内容决定：

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}}|_{[Z]\times\mathbb{P}^2} = \begin{cases} I_Z^2, \ [Z] \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{D}_5, \\ I_q^4, \ [Z] = [q^2] \in \mathbf{D}_5. \end{cases} \tag{16}$$

从现在起，我们将用 q^k 表示由理想 I_q^k 定义的子概形，其中点为 $q \in \mathbb{P}^2$。由于 (16) 中的第一种情形（分别为第二种情形）具有常数希尔伯特多项式 10（分别为 9），$\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中在 $\mathrm{K} \setminus \mathrm{D}_5$ 上的子概形平坦族。我们将沿 D_5 吹起 K，并如下延拓该平坦族：设 $\pi : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ 是沿 D_5 吹起 K 所得的吹起。沿映射 $\pi \times \mathrm{id} : \mathrm{K} \times \mathbb{P}^2 \to \mathrm{K} \times \mathbb{P}^2$ 拉回 $\sim$ $\sim$ $\mathcal{S}$，并将所得概形记为 $\mathcal{S}$。设 D_5 $\sim$ $\sim$ $\sim$ 为 D_5, 的例外除子，并设 $\mathcal{S}_0$ 为 $\mathcal{S}$ 在 $\mathrm{K} \setminus \mathrm{D}_5$ 上的限制。最后，令

~ ~我们将 $\mathcal{S}$ 记作<衣id='3'>概形论 像 $\mathcal{S}_0$ 在 $\mathbf{K}\times\mathbb{P}^2$中的。



~令 $\mathcal{Z}=(\pi\times\mathrm{id})^{-1}(\mathcal{Z})$ 为沿映射 $\mathcal{Z}$ 拉回的万有子概形 $\pi\times\mathrm{id}$。回顾一下， $j:\ \mathbf{D}\hookrightarrow\mathbf{K}$ 是嵌入映射（引理4.2）。此外， $\mathcal{W}$ 是由以下对象参数化的 $\mathbb{P}^2$ 中单点的泛族：$\mathbf{D}$ （注4.3 ）。

命题 4. **5.** 在上述记号和定义下，存在一个嵌套的 包含关系

$$\widetilde{\mathcal{Z}}\subset\overline{\mathcal{S}}\subset\widetilde{\mathcal{S}}\subset\widetilde{\mathbf{K}}\times\mathbb{P}^2 \tag{17}$$

~使得 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中以$\mathbf{K}$为基底的子概形平坦族。

证明。 子概形的平坦扩张可以视为层（或~复形）的修改。令 $\mathcal{W}:=(\pi|_{\widetilde{\mathbf{D}}}\times\mathrm{id})^*(\mathcal{W})$。在我们的设定中，令

$$\mathcal{G}=\mathrm{Ker}\left\{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{S}}}\oplus(\widetilde{j}\times\mathrm{id})_*\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{W}}}[1]\twoheadrightarrow\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{S}}}|_{\widetilde{\mathbf{D}}_5\times\mathbb{P}^2}\oplus\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{W}}}[1]\twoheadrightarrow\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{S}}}|_{\widetilde{\mathbf{D}}_5\times\mathbb{P}^2}\right\}$$

是沿着 ~$\mathbf{D}_5\times\mathbb{P}^2\cong$~$\mathbf{D}\times\mathbb{P}^2$，通过 $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{S}}}|$~$_{\mathbf{D}_5\times\mathbb{P}^2}$([Lo13，命题 2.1]) 对复形 $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{S}}}\oplus(\widetilde{j}\times\mathrm{id})_*\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{W}}}[1]$ 进行的初等修改。修改的效果是改变~子层/商层。具体而言，对于每个闭点 $(q^2,v)\in\mathbf{D}_5=\mathbb{P}(\mathcal{N}_{\mathbf{D}_5|\mathbf{K}})$，$[I_q]=[W_2^*=\langle x,y\rangle]\in\mathbf{Gr}(2,W_3^*)$，修改后的复形满足以下正合列：

$$0\to\mathcal{O}_{q^4}\to\mathcal{G}|_{(p^2,v)\times\mathbb{P}^2}\to\mathbb{C}_q[1]\to 0.$$

我们如下分析 Kodaira-Spencer 映射，证明复形 $\mathcal{G}|_{(q^2,v)\times\mathbb{P}^2}$ 同一个非分裂复形（即结构层）同构。

$$\begin{array}{ccc} T_{q^2}\mathbf{K} & \xrightarrow{\mathrm{KS}} & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{q^4}\oplus\mathbb{C}_q[1],\mathcal{O}_{q^4}\oplus\mathbb{C}_q[1]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathbb{C}_q[1],\mathcal{O}_{q^4}\oplus\mathbb{C}_q[1]) \\ & & \downarrow \\ N_{\mathbf{D}_5|\mathbf{K},q^2} & \xrightarrow{\overline{\mathrm{KS}}} & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathbb{C}_q[1],\mathcal{O}_{q^4}). \end{array} \tag{18}$$

容易看出，式（18）中的映射 KS 下降到法空间 $N_{\mathbf{D}_5|\mathbf{K}\,q^2}$。此外，它还诱导出一个线性映射 KS，映至

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathbb{C}_q[1],\mathcal{O}_{q^4})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^2}(\mathbb{C}_q,\mathcal{O}_{q^4})\cong\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathbb{C}_q,I_{q^4})\cong(\wedge^2W_2^*)^{\otimes 2}\otimes\mathrm{Sym}^3W_2^*,$$

其中最后一个同构来自该消解

$$0 \longrightarrow (\wedge^2 W_2^* \otimes \mathrm{Sym}^3 W_2^*) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \longrightarrow \mathrm{Sym}^4 W_2^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4) \longrightarrow I_q^4 \longrightarrow 0$$

通过取理想层 I_q 的 Koszul 复形的第四对称幂得到的 I_q^4（参见注 4.3）。然而，根据下文的引理 4.6，法空间$N_{\mathbf{D}_5|\mathbf{K}}$K $_{q^2}$ 可以与 Sym$^3 W_2$相识别。由于图表 (18) 是 SL(W_2)-等变的，且底行中的两个空间都是 SL$_2$, 的不可约表示，因此只需验证诱导映射 KS 在一个特殊点处非零。例如，考虑趋近于点 I_q^2 的曲线线性曲线 $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}_t} = \langle x^2, xy, y^2 + tzx \rangle$。显然，对所有$t \in \mathbb{C}^* \subset \mathbf{K} \setminus \mathbf{D}_5$ 以及 $v = 2\partial_x^2 \partial_y \in$Sym$^3 W_2$均成立。KS 将 v 的像映为 KS(v) $= \mathbb{C}[x, y, z]/J$，其中 $J = \langle x^4, x^3 y, x^2 y^2, xy^3, y^4 \rangle + \langle zx^2 y \rangle$。由于 $I_p^4 \subset J \subset I_p^2$，借助相对 Quot 概形的存在性，我们得到 (17) 中的子概形包含关系。□

引理 4.6. $\mathbf{D}_5$ 在 $\mathbf{K}$ 中的法向量丛为

$$\mathcal{N}_{\mathbf{D}_5|\mathbf{K}} \cong \mathrm{Sym}^3 \mathcal{D}^*,$$

其中，$\mathcal{D}$ 是$\mathbf{D}_5 \cong \mathbf{D} = \mathrm{Gr}(2, W_3^*)$ 的万有子丛。

证明。令 $[W_2^*] \in$Gr$(2, W_3^*) = \mathbf{D} \cong \mathbf{D}_5$ 表示由理想 $\langle x, y \rangle^2$ 定义的子概形所对应的点。由于$\mathbf{K}$ 在$\mathbf{D}_5$ 附近与$\mathbf{H}$[3], 同构，我们可以应用点的希尔伯特概形的变形理论。众所周知，

$$\begin{aligned} T_{[\langle x,y\rangle^2]}\mathbf{K} &\cong T_{[\langle x,y\rangle^2]}\mathbf{H}[3] \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[x,y,z]}(\langle x^2, xy, y^2\rangle, \mathbb{C}[x,y,z]/\langle x^2, xy, y^2\rangle). \end{aligned}$$

由于$\mathbf{D}_5$ 在 SL$_3$ 下具有传递不变性，通过改变空间 W_2^*，我们得到一个典范同构

$$\mathcal{T}_{\mathbf{K}}|_{\mathbf{D}_5} \cong \mathcal{H}om_{\mathbf{D}_5}(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{D}, \mathcal{D} \otimes \mathcal{Q}) \cong (\mathrm{Sym}^2 \mathcal{D}^*) \otimes (\mathcal{D} \otimes \mathcal{Q}).$$

另一方面，由泛短正合列 $0 \to \mathcal{D} \to W_3^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}_5} \to \mathcal{Q} \to 0$ 可得$T_{\mathbf{D}_5} \cong \mathcal{D}^* \otimes \mathcal{Q}$。结合这两者，我们可以构造一个交换图表

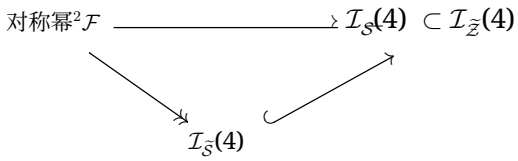
$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{T}_{\mathbf{D}_5} & \hookrightarrow & \mathcal{T}_{\mathbf{K}}|_{\mathbf{D}_5} & \twoheadrightarrow & \mathcal{N}_{\mathbf{D}_5|\mathbf{K}} \\ \| & & \| & & \| \\ \mathcal{D}^* \otimes \mathcal{Q} & \hookrightarrow & (\mathrm{Sym}^2 \mathcal{D}^* \otimes \mathcal{D}) \otimes \mathcal{Q} & \twoheadrightarrow & \mathrm{Sym}^3 \mathcal{D}^*. \end{array}$$

这里下面的水平序列是与 $\mathcal{Q}$ 张量积后的正合列 $0 \to \mathcal{D}^* \to$Sym$^2 \mathcal{D}^* \otimes \mathcal{D} \to$Sym $^3 \mathcal{D}^* \otimes \mathcal{Q}^* \to 0$，其中第一个映射为

$$\begin{aligned} \partial_x &\mapsto \partial_x^2 \otimes y - \partial_x \cdot \partial_y \otimes x, \\ \partial_y &\mapsto \partial_y^2 \otimes x - \partial_y \cdot \partial_x \otimes y \end{aligned}$$

使得 x（分别地，y）的对偶记为 ∂_x（分别地，∂_y）。 □

根据包含关系 命题 4.5的表述中，我们有一个交换图 ：



~ ~ ~

在$\mathbf{K}\times\mathbb{P}^2$上。沿投影映射 $p:\ \mathbf{K}\ \times\mathbb{P}^2\to\mathbf{K}$下推此图表，我们得到以下结果。

定理 4.7。 直接像层 $\mathcal{V}':=p_*\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(4)$ 是局部自由的。此外， $\mathcal{V}'$ 可嵌入一个短正合列

$$0\to\mathcal{V}'\to p_*\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{Z}}}(4)=\pi^*\mathcal{U}\to\pi^*\mathcal{U}/\mathcal{V}':=\mathcal{Q}\to 0$$

其中商层 $\mathcal{Q}$ 也是局部自由的。这意味着存在一个单射态射

$$\mathbb{P}(\mathcal{V}')\subset\mathbb{P}(\pi^*\mathcal{U})$$

~在$\mathbf{K}$ 上，因此得到一个到$\mathbf{R}_4$的态射。

~证明。 的局部自由性 $\mathcal{V}'$ 是由于族 $\mathcal{S}$ 在 $\mathbf{K}$ 上是平坦的，并且$R^ip_*\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(4)=0$对所有 $i\geq 1$均成立。此外，由嵌套理想序列 $0\to\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(4)\to\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{Z}}}(4)\to\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{Z}}|\mathcal{S}}(4)\to 0$((17) 于命题 4.5) 以及 $-R^ip_*\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{Z}}}(4)=0$对所有 $i\geq 1$均成立可知，商层 $\mathcal{Q}$是局部自由的。 □

为了计算 $\mathbb{P}(\mathcal{V}')$的Chow环，我们参考以下命题。

命题 4.8。存在一个正合列

$$0\to\mathcal{V}\to\mathcal{V}'\to\mathcal{V}'/\mathcal{V}=:\mathcal{A}\to 0,$$

其中 $\mathcal{A}$ 同构于

$$\mathcal{A}\cong\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{D}}_5}(\widetilde{\mathbf{D}}_5)\otimes\pi|^*_{\widetilde{\mathbf{D}}_5}\mathcal{O}_{\mathbf{D}_5}(-2)$$

~对于限制映射 $\pi|_{\widetilde{\mathbf{D}}_5}:\ \mathbf{D}_5\to\mathbf{D}_5$ （爆破映射 π 的）】 【。

~ ~ ~ ~ ~ ~证明。 注意到 支集$(\mathcal{A})\subset j(\mathbf{D})=\mathbf{D}_5$ 对于包含映射 $j:\mathbf{D}\ \hookrightarrow\mathbf{K}$。沿着投影映射 p∴~ ~$\mathbf{K}\times\mathbb{P}^2\to\mathbf{K}$对正合列 $\mathrm{Sym}^2\mathcal{F}\to\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(4)\to\mathcal{I}_{S|\widetilde{S}}(4)\to 0$ 进行下推，我们得到一个正合列

$$0\to\mathcal{V}\to\mathcal{V}'\to p_*\mathcal{I}_{\widetilde{S}|\widetilde{S}}(4),$$

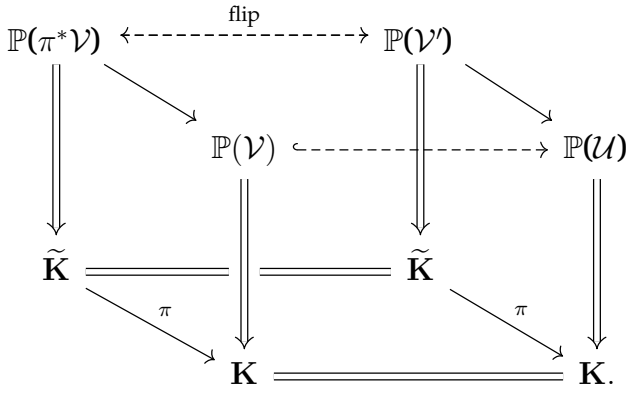
其中，单射来自局部自由层的构造。另一方面，由命题 4.5，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{K}}}(\widetilde{\mathbf{D}}_5)|_{\widetilde{\mathbf{D}}_5}\otimes\mathcal{A}\cong\mathcal{T}or^1_{\widetilde{\mathbf{K}}}(\mathcal{A},\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{D}}_5}) & \hookrightarrow & \mathcal{V}|_{\widetilde{\mathbf{D}}_5} & \longrightarrow & \mathcal{V}'|_{\widetilde{\mathbf{D}}_5} & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}|_{\widetilde{\mathbf{D}}_5} \\
\| & & \| & & \uparrow & & \\
\mathcal{O}_{\mathbf{D}}(-2)\cong\mathrm{Sym}^2(\wedge^2\mathcal{D}) & \hookrightarrow & \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2(\mathcal{D})) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Sym}^4\mathcal{D}, & &
\end{array}$$

~其中底行对应于沿 j_* 对$\mathbf{D}$上对称幂标准正合~列的推前。因此，证明完成。□

~**推论 4.9**。 该向量丛 $\pi^*\mathcal{V}$ 是由 $\mathcal{V}'$ 沿着除子 $\mathcal{A}$ 作出的初等变换 $\mathbf{D}_5$。~因此，根据 *Maruyama* 的一般结果，存在一个翻转，连接 $\mathbb{P}(\pi^*\mathcal{V})$ 与 $\mathbb{P}(\mathcal{V}')$，且定义在 $\mathbf{K}$ 上[Mar 73]。

由定理 4.7和推论 4.9，可得交换图表



4.3. 收缩映射的描述 $\mathbb{P}(\mathcal{V}') \to \mathbf{R}_4$。 在本小节中，我们分析诱导映射 $\mathbb{P}(\mathcal{V}') \to \mathbf{R}_4 \subset \mathbb{P}(\mathcal{U})$ 的压缩。

命题 4.10。 双有理态射 $\mathbb{P}(\mathcal{V}') \to \mathbf{R}_4$ 将例外除子（即一个~$\mathbb{P}^5$-向量丛）压缩到 $\mathbf{D}_5$的子轨迹上，该子轨迹是 $\mathbf{R}_4$, 中的一个 $\mathbb{P}^8$-纤维化，其上的 $\mathbf{D}_5$ 由命题 *2.8* 的 *(1)* 给出）。

~证明。 固定一点 $[I_q^2] = [\langle x, y\rangle^2] \in \mathbf{D}_5$。例外除子 $\mathbf{D}_5$ 在 $[I_q^2]$ 上具有如下描述。令 t_0, t_1, t_2, t_3 为点 $[I_q^2] \in \mathbf{D}_5$ 上例外纤维$\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^3 W_2)$ 的局部坐标。另令 u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 以及 k 为纤维 $\mathbb{P}^5(\mathcal{V}'|_{[I_q^2, t_i]})$ 的坐标。那么，由纤维 $\pi|^{-1}_{\sim \mathbf{D}_5}([I_q^2])$ 参数化的四次形式由第一行给出

$$\begin{aligned} &u_0x^4 + u_1x^3y + u_2x^2y^2 + u_3xy^3 + u_4y^4 + k(t_0zx^3 + t_1zx^2y + t_2zxy^2 + t_3zy^3) \\ &= u_0x^4 + u_1x^3y + u_2x^2y^2 + u_3xy^3 + u_4y^4 + u_5zx^3 + u_6zx^2y + u_7zxy^2 + u_8zy^3. \end{aligned} \tag{19}$$

另一方面，设 u_0、u_1、$\cdots$、u_7和 u_8 是射影空间 $\mathbb{P}^8$的齐次坐标，该空间参数化了（19）第二行中的四次形式。令 $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^8$为由 $u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = 0$定义的线性空间。那么，沿线性子空间 $\mathbb{P}^4$ 吹起 $\mathbb{P}^8$ 与有理映射 $\mathbb{P}^8 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$，$[u_0 : u_1 : \ldots : u_8] \mapsto [u_5 : u_6 : u_7 : u_8]$的图的闭包同构。也就是说，该闭包是如下子簇：

$$\mathcal{C} := \left\{ [u_0 : u_1 : \ldots : u_8] \times [t_0 : t_1 : t_2 : t_3] \;\middle|\; \mathrm{rk} \begin{bmatrix} u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} = 1 \right\} \subset \mathbb{P}^8 \times \mathbb{P}^3.$$

到第二个分量的投影 $\mathcal{C} \to \mathbb{P}^3$ 具有射影丛结构，其纤维为 $\mathbb{P}^5$，恰好就是纤维 $\pi|_{\tilde{}}^{-1}$ $\mathrm{D}_5([I_q^2])$。这证明了（19）与$\tilde{}$的等式，并描述了收缩映射$\mathrm{D}_5 \to \mathrm{R}_4$，其像是 $\mathbb{P}^8$纤维化在 $[I_q^2] \in \mathrm{D}_5$之上。注意，$\mathcal{U}$在 $[I_q^2]$ 上的纤维为 $\mathbb{P}(\mathcal{U}_{[I_q^2]}) = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(I_q^2(4)))$。□

参考文献

[BF97] Kai Behrend 和 Barbara Fantechi。内禀正规锥。Invent. Math., 128(1):45–88，1997。2[BMW14] Aaron Bertram、Cristian Martinez 和 Jie Wang。射影平面上层的模空间的双有理几何。Geom. Dedicata, 173:37–64，2014。6[CC11] Dawei Chen 和 Izzet Coskun。迈向稳定映射模空间的森重文纲领。Amer. J. Math., 133(5):1389–1419，2011。10, 11[CCM16] JinwonChoi、Kiryong Chung 和 Mario Maican。支撑在四次空间曲线上的层的模空间。Michigan Mathematical Journal, 65(3):637 – 671，2016。2[CHL18] Kiryong Chung、Jaehyun Hong 和 SangHyeon Lee。格拉斯曼流形 gr(2,5) 的线性截面中有理曲线模空间的几何。Journal of Pure and Applied Algebra, 222(4):868 – 888，2018。1[Chu11] Kiryong Chung。射影簇中有理曲线的紧化模空间。博士论文，首尔国立大学，2011。4[Chu21] Kiryong Chung。平面有理四次曲线空间的层论紧化。Taiwanese Journal of Mathematics, 25(3):463 – 476，2021。2, 3, 4, 8, 11[Chu22] Kiryong Chung。V_5中扭三次曲线的 Kontsevich紧化的消奇点。manuscripta mathematica，2022。1[CK11] Kiryong Chung 和 Young-Hoon Kiem。通过稳定映射构造有理三次曲线的希尔伯特概形。Amer. J. Math., 133(3):797–834，2011。1[CKPU13] David Cox、Andrew R. Kustin、Claudia Polini 和 Bernd Ulrich。通过上同调关系研究有理曲线上的奇点。Mem. Amer. Math. Soc., 222(1045)，2013。8[CM17] Kiryong Chung 和 Han-Bom Moon。支撑在四次曲线上的稳定层模空间的 Chow 环。The Quarterly Journal of Mathematics, 68(3):851–887，2017年2月。8[DH88] Steven Diaz 和 Joe Harris。Severi簇的几何，II：除子类的独立性与实例。载于 Algebraic Geometry Sundance 1986，第23–50页，柏林、海德堡，1988。Springer Berlin Heidelberg。2[LFV21] Andrea D. Lorenzo、Damiano Fulghesu 和 Angelo Vistoli。三次非超椭圆光滑曲线叠的整 Chow 环。Transactions of the American Mathematical Society, 374(8):5583–5622，2021。4[EN62] John A. Eagon 和 Douglas G. Northcott。由矩阵定义的理想及与之相关的某个复形。Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 269(1337):188–204，1962。6[FH91] William Fulton 和 Joe Harris。表示论，Graduate Texts in Mathematics 第129卷。Springer-Verlag，纽约，1991。入门课程，数学读本。9[FP97] William Fulton 和 Rahul Pandharipande。关于稳定映射与量子上同调的笔记。载于 Algebraic geometry—Santa Cruz 1995，Proc. Sympos. Pure Math. 第62卷，第45–96页。Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，1997。1, 2[FT04] Hans Georg Freiermuth 和 G¨unther Trautmann。关于支撑在三次空间曲线上的稳定层模概形。Amer. J. Math., 126(2):363–393，2004。2

[Har86] Joe Harris。《关于塞韦里问题》。Inventionesmathematicae，84(3):445–461，1986。2[He 98] MinHe。《相容系统的模空间》。Internat.J.Math.，9(5):545–598，1998。2，7[Hir64] Heisuke Hironaka。《特征为零的域上代数簇的奇点消解：I》。Annals ofMathematics，79(1):109–203，1964。2[Hui79] Chung-Man Hui。《平面四次曲线》。博士论文，利物浦，1979。8[Kin94] Alastair D. King。《有限维代数表示的模空间》。Quart. J. Math.OxfordSer. (2)，45(180):515–530，1994。5[Kon95] Maxim Kontsevich。《通过环面作用枚举有理曲线》。载于 Robbert H. Dijkgraaf、Carel F. Faber和 Gerard B.M. vanderGeer 编，《曲线的模空间》，第335–368页，波士顿，马萨诸塞州，1995。Birkh¨ auser Boston。2[Lo13] Jason Lo。《PT-半稳定对象的模空间II》。Trans. Amer.Math. Soc.，365(9):4539–4573，2013。15[LQZ03] Wei-PingLi、Zhenbo Qin和Qi Zhang。《曲面上点的希尔伯特概形中的曲线》。载于《向量丛与表示论》（哥伦比亚，密苏里州，2002），Contemp. Math.第322卷，第89–96页。Amer.Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，2003。5[Mar73] MasakiMaruyama。《代数向量丛族》。载于《数论、代数几何与交换代数》，第95–149页，1973。3，18[Sim94] Carlos T.Simpson。《光滑射影簇基本群表示的模空间。I》。Inst. Hautes ´Etudes Sci.Publ. Math.，(79):47–129，1994。1[Ste54] Jakob Steiner。《代数曲线的一般性质》。Journal f¨ur die reine und angewandteMathematik（Crelles Journal），1854(47):1–6，1854。2[Tha96] Michael Thaddeus。《几何不变理论与翻转》。J. Amer.Math. Soc.，9(3):691–723，1996。2[Woo13] Matthew Woolf。《射影平面上扭层模空间的nef 锥与有效锥》。arXiv:1305.1465，2013。7[Zeu73] HieronymusG. Zeuthen。《平面曲线系统的一般性质，以及在确定四阶初等系统的特征中的应用》。Det Kongelige Danske videnskabernes selskabs skrifter。5te Række：Naturvidenskabelig ogmathematisk afdeling。Luno，1873。2

庆北国立大学数学教育系，韩国大邱北区大鹤路80号，邮编41566

电子邮件地址：krchung@knu.ac.kr

韩国高等研究院数学学院，韩国首尔东大门区回基路85号，邮编02455

电子邮件地址：jeongseop@kias.re.kr