arXiv:2304.05663v1 [math.RT] 12 Apr 2023

HEISENBERG 厄米李群的抛物诱导表示，第二部分：次极小表示与分支法则

JAN FRAHM、Clemens Weiske 和 Genkai Zhang

摘要。每个单 Hermitian 李群都有一个唯一的球表示族，它们由一个极大抛物子群诱导而来，该子群的幺幂根基是一个海森堡群。对于大多数 Hermitian 群，这个表示族包含一个互补系列，并且在其端点处有一个真可酉化子表示。我们证明，这个子表示是次极小的，即其关联簇是一个次极小幂零余伴随轨道。此外，对于 Hermitian 群 $\mathrm{SO}_0(2,n)$ 和 $E_{6(-14)}$，我们研究这些次极小表示的一些分支问题。

引言

单李群的最小表示已得到充分研究，并有若干种等价的描述。最自然的描述是通过轨道哲学，将其与最小幂零余伴随轨道联系起来。它们往往是唯一的，并自然地出现在 theta 对应、幺幂表示以及幂零余伴随轨道量子化等问题中。此外，它们还作为某些整体域上约化群的自守表示的局部阿基米德分量出现。实群的最小表示已从多个不同角度得到广泛研究，例如经典调和分析、偏微分方程、复分析或共形几何（参见 [1, 9, 14, 19, 23, 24, 26]）。从表示论的角度来看，此处一个特别重要的问题是：将最小表示限制到某些子群时，它们如何分解。如果子群来自一个对偶对，这个问题便属于著名的 theta 对应框架（参见 [16, 18, 25, 27]）。另一方面，限制到对称子群也已揭示出一些有趣的新结果（参见 [22, 28]）。

次极小表示受到的研究要少得多；它们应当对应于这样的幂零余伴随轨道：其闭包是该轨道本身与平凡轨道和最小轨道的并集，具体定义见下文。对于某些群，已有研究表明，某些次极小表示也会作为全局自守表示的局部阿基米德分量出现（见 [13]），而它们的自守实现似乎正受到越来越多的关注，尤其是

2010年数学主题分类。17B15、17B60、22D30、43A80、43A85。关键词和短语：Hermitian 李群、Heisenberg 抛物子群、诱导表示、互补系列、可酉化子表示。第一位作者获 Villum基金会研究资助（资助编号：00025373）；第二位作者获 Knut and Alice Wallenberg基金会研究资助（KAW 2020.0275）；第三位作者获瑞典研究理事会部分资助（VR，资助编号：2018-03402、2022-02861）。

对于例外群（见 [3, 11, 12, 29]）。因此，无论是在整体层面还是局部层面，深入理解次极小表示都是有益的。本文旨在研究 Hermitian 李群的次极小表示的一些分支定律。

尽管 Hermitian 李群的最小表示最终被证明是酉最高权或最低权表示，但确实存在既非最高权表示、也非最低权表示的次极小表示。这使得它们更难以构造和理解。在我们先前的工作 [8], 中，我们研究了 Hermitian 群的海森堡抛物诱导表示，展示了一些在互补系列末端出现的有趣酉表示。我们证明，这些表示可以实现为海森堡群上分布的希尔伯特空间，其韦尔变换作为福克空间上的算子具有秩一。因此，它们与 Wallach 集中标量酉最高权表示的最后一点具有相似性质，后者是使用欧几里得傅里叶变换 [6, 15, 17]描述的。

在本文中，我们证明它们实际上是次极小表示。对于 Hermitian 群 $\mathrm{SO}_0(2,n)$ 和 $E_{6(-14)}$，当将这些次极小表示限制到某些对称子群时，我们进一步研究相应的分支问题。

下面我们更详细地阐述我们的结果。

次极小表示。设 $\mathfrak{g}$ 是复单李代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的一个实形式，且 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的对偶空间。$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$ 中的幂零锥分解为有限个幂零余伴随轨道，其中恰有一个维数最小的轨道 $\mathrm{O}_{\min}$。注意，$\mathrm{O}_{\min}$ 的闭包等于 $\mathrm{O}_{\min}\cup\{0\}$。以下定义沿袭了 [12, 13] 的思路：

定义。若幂零余伴随轨道 $\mathrm{O}\subseteq(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$ 的闭包等于 $\mathrm{O}\cup\mathrm{O}_{\min}\cup\{0\}$，则称其为次极小轨道。若李群 G 的一个不可约酉表示 π 的李代数为 $\mathfrak{g}$，且其在 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$ 中的关联簇是某个次极小幂零余伴随轨道的闭包，则称该表示为次极小表示。

现在设 G 是一个单赫尔曼李群，其李代数为 $\mathfrak{g}\neq\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$，即 $\mathfrak{g}$ 是以下李代数之一：

$$\mathfrak{su}(p,q),\quad \mathfrak{so}(2,n),\quad \mathfrak{so}^*(2n),\quad \mathfrak{e}_{6(-14)},\quad \mathfrak{e}_{7(-25)}.$$

在共轭意义下，G 有唯一的极大抛物子群 $P=MAN$，其幺幂根基 N 是一个海森堡群。我们考虑退化主系列表示

$$\pi_\nu=\mathrm{Ind}_P^G(1\otimes e^\nu\otimes 1)\qquad(\nu\in(\mathfrak{a}^{\mathbb{C}})^*),$$

其中 $\mathfrak{a}$ 表示 A 的李代数。这里，对 π_ν 的规范化使得当 $\nu=\rho$ 时，π_ν 包含平凡表示作为商；当 $\nu=-\rho$ 时，则包含平凡表示作为子表示。ρ 是相对于 $\mathfrak{a}$ 的正根半和，而 π_ν 在 $\nu\in i\mathfrak{a}^*$ 时为酉的。除去 $p-q$ 为奇数时的情形 $\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{su}(p,q)$，根据 [8, 定理 4.1]，存在一个区间 $(-\nu_0,\nu_0)\subseteq\mathfrak{a}^*$，使得 $\pi_\nu,\nu\in\mathfrak{a}^*$ 当且仅当 $\nu\in(-\nu_0,\nu_0)$ 时不可约且可酉化。令 $A_\nu:\pi_\nu\to\pi_{-\nu}$ 表示 Knapp–Stein 标准交织算子。

定理 A（见第 2 节）。$\pi_{\mathrm{ntm}}=\mathrm{Ker}\,A_{-\nu_0}=\mathrm{Im}A_{\nu_0}\subseteq\pi_{-\nu_0}$是一个真不可约且酉化的子表示，具有球表示性质并且次极小。其 K-型分解见定理 1.1。

对于 $\min(p,q)\geq 4$ 的 $G=\mathrm{O}(p,q)$，[35], 中构造了一个次极小表示，但他们的构造无法推广到 $\min(p,q)=2$ 的情形。原因是 $\mathrm{O}(p,q)$ 具有

两个不同的次极小幂零余伴随轨道。对于 $\min(p,q) = 2$， [35] 中考虑的次极小轨道没有实点，因此不存在关联簇等于该轨道的酉表示。我们的次极小表示的关联簇是另一个次极小轨道。

我们进一步指出，只要 G 的秩至少为 3， G 的标量型全纯离散系列的解析延拓就包含一个次极小表示，即对应于 Wallach集中次极小离散点的表示。我们的表示与此不同，因为它既不是最高权模，也不是最低权模。

限制分支 $G \searrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times M$。如果 $P = MAN$是 G的海森堡抛物子群 P的朗兰兹分解，那么 G 中 M 的中心化子是一个局部同构于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的子群。事实上，子群 M和 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 在 G中构成一对对偶对。对于两种情形 $G = \mathrm{SO}_0(2,n)$ 和 $G = E_{6(-14)}$，我们研究 π_{ntm}对 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times M$的限制。

让我们首先考虑 $G = \mathrm{SO}_0(2,n)$，然后是 $M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(n-2)$。事实上， M的子群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 与 M 的中心化子共轭，因此我们直接将 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times M$写作 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(n-2)$，而不区分 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的两个副本。为陈述 π_{ntm} 的分解，令 $\eta_k^{\mathrm{SO}(n-2)}$ 表示 $\mathrm{SO}(n-2)$ 在空间 $\mathrm{H}^k(\mathbb{R}^{n-2})$ 上的不可约表示，其中 $\mathrm{H}^k(\mathbb{R}^{n-2})$ 是 $\mathbb{R}^{n-2}$ 上次数为 k 的调和齐次多项式空间。此外，对于$\mu \in i\mathbb{R}$和 $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，令 $\tau_{\mu\,\varepsilon}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),}$为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的酉主系列；对于 $\varepsilon = 0$，它是球面的，而对于 $\varepsilon = 1$，它是非球面的；对于 $\ell \in \mathbb{Z}, |\ell| \geq 2$，令 $\tau_\ell^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ 为参数为 ℓ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的离散系列。

定理 B（参见定理 3.6）。次极小表示 π_{ntm} of$G = \mathrm{SO}_0(2,n)$ 对 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(n-2)$ 的限制由下式给出

$$\pi_{\mathrm{ntm}}\big|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{SO}(n-2)} \simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Bigg(\int_{i\mathbb{R}_{\geq 0}} \tau_{\mu,\mathrm{par}(\mu)}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} \boxtimes \tau_{\mu,\mathrm{par}(\mu)}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}\, d\mu \oplus \bigoplus_{\substack{2\leq|\ell|\leq k \\ \ell\equiv k \mod 2}} \tau_\ell^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} \boxtimes \tau_\ell^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} \Bigg) \boxtimes \eta_k^{\mathrm{SO}(n-2)}.$$

现在令 $G = E_{6(-14)}$，则 $M = \mathrm{SU}(5,1)$。令 $P_M = M_M A_M N_M$为 M的一个极小抛物子群。则 M_M 是 $\mathrm{U}(4)$ 的一个双覆盖，其不可约表示由元组 $(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)$ 参数化，其中 $\nu_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$且对所有 $1 \leq i < j \leq 4$都有 $\nu_i - \nu_j \in \mathbb{N}$。此外， A_M 的不可约酉特征由 $\mu \in i\mathbb{R}$ 参数化。我们将 $\mathrm{SU}(5,1)$ 的相应抛物诱导表示记为 $\tau^{\mathrm{SU}(5,1)}{}_{(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)\,\mu}$。沿用前面关于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的表示的记号，我们可以确定 π_{ntm} 限制到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(5,1)$ 后的分解中部分谱：

定理 C（见定理3.9）。次极小表示 π_{ntm} of$E_{6(-14)}$ 到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(5,1)$的限制，对每个 $k > 0$ 和每个 $0 < m \leq k$ 都包含一个如下形式的表示

$$\int_{i\mathbb{R}_{\geq 0}} \tau_{-l}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} \boxtimes \tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2}-m,-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}),\mu}\, d\mu \oplus \int_{i\mathbb{R}_{\geq 0}} \tau_{l}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} \boxtimes \tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2},m-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}),\mu}\, d\mu$$

作为直和项的某个 $l \geq 1$。

定理 B 和 C 的证明都利用了通过海森堡群傅里叶变换对 π_{ntm} 的实现。事实上，由于限制问题主要属于分析性质，傅里叶变换是一种有效工具。它将 $\pi_{\mathrm{ntm}|M}$ 的分解与 M 的某些最低 / 最高权表示的张量积分解联系起来；这些表示出现在将振荡表示限制到 M 时。在这两种情形下，这个张量积都可以完全分解。最后，通过在 G 内共轭 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，使其成为 M 的一个子群，并将其与把 π_{ntm} 限制到 M 时的分解进行比较，便可得到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 因子的贡献。对于 $G = \mathrm{SO}_0(2,n)$，我们可以明确地确定 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 因子的作用；而对于 $G = E_{6(-14)}$，我们只能描述其限制到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的一个抛物子群的情形。

本文结构如下。我们首先在第 1 节回顾前期工作 [8] 的主要结果。在第 2 节中，我们利用 K 型分解计算 π_{ntm} 的 Gelfand–Kirillov 维数，并据此说明 π_{ntm} 的关联簇确实是 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$ 中的一个次最小幂零余伴随轨道。最后，第 3 节讨论 G 的次最小表示 π_{ntm} 限制到子群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times M$ 上的情形。第 3.1 节对如何将海森堡傅里叶变换用于这一问题作了一些一般性探讨；第 3.2 节讨论 $G = \mathrm{SO}_0(2,n)$ 的情形，第 3.3 节则讨论 $G = E_{6(-14)}$ 的情形。

记号。对于一个可酉化的Casselman–Wallach 表示 π，我们滥用记号，也用 π表示其酉闭包，同时通常省略底层Fr´echet空间或希尔伯特空间的记号。在此意义下，除非另有说明，表示的所有直和与张量积均应视为在希尔伯特空间范畴中进行。

1. 预备知识

我们回顾文献 [34] 中关于 Hermitian 李群的海森堡抛物诱导表示的结果，以及文献 [8] 中利用海森堡群傅里叶变换得到的这些表示的实现。

1.1. 海森堡抛物诱导表示。设 G 是一个单赫尔曼李群，其李代数 $\mathfrak{g}$ 不同构于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$。则 G 存在唯一的共轭类抛物子群，其幺幂根基是海森堡群。设 $P = MAN$ 是其中一个子群的 Langlands 分解，并用 $\mathfrak{m}$、$\mathfrak{a}$、$\mathfrak{n}$ 表示 M、A、N 的李代数。

一维子代数 $\mathfrak{a}$ 由元素 $H \in \mathfrak{a}$ 张成，使得

$$\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{n}}_2 \oplus \bar{\mathfrak{n}}_1 \oplus (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$$

是由 $\mathrm{ad}(H)$ 的特征值为 -2、-1、0、1、2 和 $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ 的特征空间构成的分解。¯我们进一步用 $\bar{\mathfrak{n}} = \bar{\mathfrak{n}}_1 \oplus \bar{\mathfrak{n}}_2$ 表示反幺幂根基 N 的李代数。注意，$\mathfrak{n}_2$ 和 $\bar{\mathfrak{n}}_2$ 分别等于 $\mathfrak{n}$ 和 $\bar{\mathfrak{n}}$ 的中心，因此是一维的；我们选择 $E \in \mathfrak{n}_2$ 和 $F \in \bar{\mathfrak{n}}_2$ 使得 $[E,F] = H$。因此，$\{E,H,F\}$ 构成一个 $\mathfrak{sl}(2)$ 三元组。我们通过 $\nu \mapsto \nu(H)$ 将 $(\mathfrak{a}^{\mathbb{C}})^*$ 识别为 $\mathbb{C}$，于是正根半和为 $\rho = d_1 + 1$，其中 $d_1 = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_1 \in \mathbb{N}$（见表 1）。考虑退化主系列表示（光滑归一化抛物诱导）

$$\pi_\nu = \mathrm{Ind}_P^G(1 \otimes e^\nu \otimes 1) \qquad (\nu \in (\mathfrak{a}^{\mathbb{C}})^* \simeq \mathbb{C}),$$

在空间上

$$I(\nu) = \{f \in C^\infty(G);\ f(gman) = a^{-\nu-\rho} f(g)\ \forall man \in MAN\}.$$

为了描述 π_ν 的 K 型结构，令 θ 为 G 上的一个 Cartan 对合，它保持 MA 不变，并将 E 映至 $-F$，记 $K \subseteq G$ 为相应的极大紧子群。其李代数 $\mathfrak{k}$ 分解为 $\mathfrak{k} = \mathfrak{z}(\mathfrak{k}) \oplus \mathfrak{k}'$，其中 $\mathfrak{k}' = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ 是半单部分，而 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ 是中心。

李代数 $\mathfrak{k}'$ 具有一个秩为 2 的 Hermitian 对称对（$\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{l}'$）。令 $2\alpha_1 > 2\alpha_2$ 为 Harish-Chandra 强正交根，并注意到对（$\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{l}'$）的限制根系属于 C_2 型或 BC_2 型:

$$\{\pm 2\alpha_1, \pm 2\alpha_2\} \cup \{\pm\alpha_1 \pm \alpha_2\} \quad \Big[\cup \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2\}\Big].$$

$\pm 2\alpha_1$ 和 $\pm 2\alpha_2$ 的重数均为 1，我们用 a_1 （分别用 $2b_1$ ）表示 $\pm\alpha_1 \pm \alpha_2$ （分别表示 $\pm\alpha_1$ 和 $\pm\alpha_2$）的根重数。不同 Hermitian 群的 a_1 和 b_1 的取值列于表 1。

进一步地，我们令 α_0 为中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})$上的线性泛函，并将其归一化，使其在 $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ 上特征值为 ± 1 的中心元处取值为 1。使用记号 $W_{\mu_1,\ \mu_2,\ \ell} = W_{\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\ell\alpha_0}$，$\pi_\nu$ 的 K- 型分解可写如下:

$$\pi_\nu|_K \simeq \bigoplus_{\substack{\mu_1 \geq \mu_2 \geq |\ell| \\ \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \ell \mod 2}} W_{\mu_1,\mu_2,\ell} \qquad \text{if } \mathfrak{g} \neq \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}), \mathfrak{su}(p,q),$$

$$\pi_\nu|_K \simeq \bigoplus_{\substack{\mu_1,\mu_2 \geq |\ell|, \\ \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \ell \mod 2}} W_{\mu_1,\mu_2,\ell} \qquad \text{if } \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{su}(p,q).$$

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{m}$	(a_1, b_1)	d_1
$\mathfrak{su}(p,q)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) + \mathfrak{u}(q))$	$\mathfrak{u}(p-1, q-1)$	$(0, p-2)$, $(0, q-2)$	$p+q-2$
$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\mathfrak{u}(n)$	$\mathfrak{so}^*(2n-4) + \mathfrak{su}(2)$	$(2, n-4)$	$2n-4$
$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{u}(n)$	$\mathfrak{sp}(n-1,\mathbb{R})$	$(0, n-2)$	$n-1$
$\mathfrak{so}(n, 2)$	$\mathfrak{so}(n) + \mathfrak{so}(2)$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) + \mathfrak{so}(n-2)$	$(n-4, 0)$	$n-2$
$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{spin}(10) + \mathfrak{so}(2)$	$\mathfrak{su}(5, 1)$	$(4, 2)$	10
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_6 + \mathfrak{so}(2)$	$\mathfrak{so}(10, 2)$	$(6, 4)$	16

表 1. HermitianLie 代数 $\mathfrak{g}$ 及其子代数 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{m}$，以及结构常数 a_1、b_1 和 d_1

1.2. 交织算子。设

$$w_0 = \exp\left(\frac{\pi}{2}(E - F)\right) \in K,$$

那么 $\mathrm{Ad}(w_0)P = \bar{P} = MA\bar{N}$ 是与 P 相对的抛物子群。令 $A_\nu : I(\nu) \to I(-\nu)$ 为标准交织算子，当 $\mathrm{Re}(\nu) > \rho$ 时，由收敛积分给出 $f \in I(\nu)$ 和 $g \in G$

$$A_\nu f(g) = \int_{\bar{N}} f(gw_0\bar{n})\, d\bar{n}$$

并亚纯延拓至所有 $\nu \in \mathbb{C}$。对于 $\nu \in \mathbb{R}$，相应的厄米形式定义在$I(\nu)$ 上，由下式给出

$$\langle f_1, f_2\rangle_\nu = \langle A_\nu f_1, f_2\rangle_{L^2(\bar N)} = \int_{\bar N} A_\nu f_1(\bar n)\overline{f_2(\bar n)}\, d\bar n \tag{1.1}$$

具有 G不变性。在 [8] 中，我们利用算子 A_ν研究了表示π_ν 的可酉化性及其合成列。下面回顾主要结果。

定理 1.1（[8] 定理 4.1 和定理 4.3）。设 $\mathfrak{g} \ncong \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$，并令

$$\nu_0 = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{su}(p,q) \text{ and } p-q \text{ is even,} \\ a_1 + 1 & \text{if } \mathfrak{g} \ncong \mathfrak{su}(p,q). \end{cases}$$

(i) 对于 $\nu \in \mathbb{R}$，表示 π_ν 属于互补系列，也就是说，它不可约且可酉化，当且仅当 $|\nu| < \nu_0$。

(ii) 在互补系列的端点 $-\nu_0$ 处，存在一个真可酉化子表示 $\pi_{\mathrm{ntm}} := \operatorname{Ker} A_{-\nu_0} = \operatorname{Im} A_{\nu_0}$，其具有 K-型分解

$$\pi_{\mathrm{ntm}}|_K \simeq \bigoplus_{\substack{\mu \ge |\ell| \\ \mu \equiv \ell \mod 2}} W_{\mu,\mu,\ell} \qquad \text{if } \mathfrak{g} \ncong \mathfrak{su}(p,q),$$

$$\pi_{\mathrm{ntm}}|_K \simeq \bigoplus_{\substack{\mu_1,\mu_2 \ge |\ell|, \\ \mu_1-\mu_2 = q-p, \\ \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \ell \mod 2}} W_{\mu_1,\mu_2,\ell} \qquad \text{if } \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{su}(p,q),\ p-q \text{ even.}$$

1.3. 海森堡群傅里叶变换。由于 $NMAN$在 G中是开且稠密的，从 G 到 N 的限制定义了一个从 $I(\nu)$到 $C^\infty(N)$的嵌入，这就是所谓的 π_ν非紧模型。

在 [8] 之后，我们进一步采用记号 $V_1 = \bar{\mathfrak{n}}_1$，并注意到 V_1 具有一个典范复结构，该结构由（$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$）的厄米对称子对（$\mathfrak{m}$，$\mathfrak{m}\cap\mathfrak{k}$）的复结构给出。我们可以通过.....将 $\bar{\mathfrak{n}} = \bar{\mathfrak{n}}_1 \oplus \bar{\mathfrak{n}}_2 = V_1 \oplus \mathbb{R}F$与 $V_1 \times \mathbb{R}$ 等同起来。

$$(v,t) \mapsto v + tF \qquad (v \in V_1, t \in \mathbb{R}).$$

无限维不可约酉表示由其在 $i\bar{\mathfrak{n}}_2^*$中的中心特征进行参数化。我们通过 $\lambda \mapsto \lambda(F)$将 $\mathfrak{n}_2^*$ 与 $\mathbb{R}^\times$进行识别。记 σ_λ为具有中心特征 $-i\lambda$ 的表示，我们在福克空间 $\mathrm{F}_\lambda(V_1)$上实现该表示，其中的函数是 V_1 上的（反）全纯函数（取决于 λ的符号），并且关于高斯测度平方可积。

海森堡群傅里叶变换是酉同构

$$\mathcal{F} : L^2(\bar N) \to \int_{\mathbb{R}^\times} \mathcal{F}_\lambda(V_1) \otimes \mathcal{F}_\lambda(V_1)^*\, d\lambda$$

由

$$\mathcal{F}u(\lambda) = \sigma_\lambda(u) = \int_{\bar N} u(\bar n)\sigma_\lambda(\bar n)\, d\bar n \qquad (u \in L^1(\bar N) \cap L^2(\bar N)),$$

其中，我们将希尔伯特空间张量积 $\mathrm{F}_\lambda(V_1) \otimes \mathrm{F}_\lambda(V_1)^*$ 与 $\mathrm{F}_\lambda(V_1)$ 上的希尔伯特–施密特算子空间相对应。更确切地说，利用希尔伯特–施密特范数 $\|T\|_{\mathrm{HS}} = \operatorname{tr}(TT^*)^{\frac{1}{2}}$，我们有

$$\|u\|^2_{L^2(\bar N)} = \mathrm{const} \times \int_{\mathbb{R}^\times} \|\sigma_\lambda(u)\|^2_{\mathrm{HS}} |\lambda|^{d_1}\, d\lambda \qquad (u \in L^2(\bar N)), \tag{1.2}$$

该常数仅取决于测度的归一化方式和维数 $d_1 = \dim_{\mathbb{C}} V_1$。根据 [7, 推论 3.5。3] 傅里叶变换可以延拓为一个连续线性映射

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\bar{N}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^\times) \hat{\otimes} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_\lambda(V_1)^\infty, \mathcal{F}_\lambda(V_1)^{-\infty})$$

它在 $I(\nu)$ 上是单射，其中 $\mathrm{Re}\,\nu > -\rho$。

1.4. 振荡表示。实空间 V_1 自然是一个辛向量空间，其辛形式 ω 定义为

$$[v, w] = \omega(v, w)F \qquad (v, w \in V_1 = \bar{\mathfrak{n}}_1).$$

令 $\mathrm{Sp}(V_1, \omega)$ 表示其辛群，其李代数为 $\mathfrak{sp}(V_1, \omega)$。对于 $\lambda \in \mathbb{R}^\times$，令 $\omega_{\mathrm{met},\lambda}$ 为 $\mathrm{Sp}(V_1, \omega)$ 在 $\mathrm{F}_\lambda(V_1)$ 上的唯一射影表示，使得

$$\sigma_\lambda(gv, t) = \omega_{\mathrm{met},\lambda}(g) \circ \sigma_\lambda(v, t) \circ \omega_{\mathrm{met},\lambda}(g)^{-1}.$$

此表示称为振荡表示，其等价类仅取决于 λ 的符号。令 $d\omega_{\mathrm{met},\lambda}$ 为导出 $\mathfrak{sp}(V_1, \omega)$-表示。特别地，$d\omega_{\mathrm{met},\lambda}$ 由 $\lambda > 0$ 时作用在 V_1 上的斜对称全纯微分算子，或 $\lambda < 0$ 时作用在 V_1 上的斜对称反全纯微分算子给出。其底层的 Harish-Chandra 模是 $\mathrm{P}(V_1)$，即 V_1 上的全纯或反全纯多项式空间。我们回顾 [8], 的主要结果，该结果给出了 $d\omega_{\mathrm{met},\lambda}$ 限制到 $\mathfrak{m}$（M 的李代数）上的显式分解。因此，令 $L := K \cap M$ 的李代数为 $\mathfrak{l}$，并令 $\mathfrak{t}_\mathfrak{l}$ 为 $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ 的一个 Cartan 子代数。

定理 1.2（[8] 定理 2.2）。设 $\lambda > 0$，并假设 $\mathfrak{g} \not\simeq \mathfrak{su}(p, q)$ $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$。那么，振荡表示 $\mathfrak{sp}(V_1, \omega)$ 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制 $d\omega_{\mathrm{met},\lambda}|_{\mathfrak{m}}$ 分解为

$$d\omega_{\mathrm{met},\lambda}|_{\mathfrak{m}} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \tau_{-k\delta_0 - \frac{1}{2}\zeta_0},$$

其中，τ_μ 表示 $\mathfrak{m}$ 的最高权为 $\mu \in \mathfrak{t}_\mathfrak{l}^*$ 的酉最高权表示，δ_0 是 V_1 的最低根，而 ζ_0 是 $\mathfrak{l}$ 的中心特征，它由 $\mathfrak{u}(V_1) \subseteq \mathfrak{sp}(V_1, \omega)$ 在 V_1 上的定义复线性作用的迹限制到 $\mathfrak{t}_\mathfrak{l}$ 而得。

为简化记号，按照上述定理的意义，我们将 $d\omega_{\mathrm{met},\lambda}|_{\mathfrak{m}}$（分别将 $\omega_{\mathrm{met},\lambda}|_M$）分解中的第 k 部分记作 $d\omega_{\mathrm{met},\lambda,k}$（分别记作 $\omega_{\mathrm{met},\lambda,k}$）。

1.5. 交织算子的傅里叶变换。由定理 1.2 可知，福克空间 $\mathrm{F}_\lambda(V_1)$ 分解为酉最高权表示 $\tau_{-k\delta_0 - \frac{1}{2}\zeta_0}$ 的表示空间的直和，

$$\mathcal{F}_\lambda(V_1) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{F}_{\lambda,k}(V_1). \tag{1.3}$$

我们用 $P_k : \mathrm{F}_\lambda(V_1) \to \mathrm{F}_{\lambda,k}(V_1)$ 表示正交投影。由于当 $\mathrm{Re}(\nu) \in (-\rho, \rho)$ 时，傅里叶变换在 $I(\nu)$ 和 $I(-\nu)$ 上是单射，因此，交织算子 A_ν 的傅里叶变换 $\widehat{A}_\nu$（其定义为 $\widehat{A}_\nu \sigma_\lambda(u) := \sigma_\lambda(A_\nu u)$）相对于分解 (1.3) 是一个对角算子。

定理1.3 ([8] 定理3.1)。对于 $\mathfrak{g} \not\simeq \mathfrak{su}(p, q)$ $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$，算子 $\widehat{A}_\nu$ 由下式给出

$$\widehat{A}_\nu = \mathrm{const} \times |\lambda|^{-\nu} \sum_{k \geq 0} a_k(\nu) \cdot P_k,$$

其中正的常数仅依赖于结构常数 $\rho = d_1 + 1$ 和 a_1 （见表 1），且

$$a_k(\nu) = \frac{2^\nu \left(\frac{-\nu+a_1+1}{2}\right)_k \Gamma(\frac{\nu-\rho+a_1+2}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{-\nu+\rho}{2})\Gamma(\frac{\nu+a_1+1}{2}+k)}.$$

结合(1.2)，定理1.3对 (1.1)中的不变厄米形式 $\cdot,\cdot_\nu$ from 表明了如下恒等式:

$$\langle u,u\rangle_\nu = \text{const} \times \sum_{k\geq 0} a_k(\nu) \int_{\mathbb{R}^\times} \|P_k \circ \sigma_\lambda(u)\|^2_{\mathrm{HS}} |\lambda|^{d_1-\nu}\, d\lambda \qquad (u \in I(\nu)). \tag{1.4}$$

特别地，在互补系列 $\nu = \nu_0 = a_1 + 1$ 我们有 $a_k(\nu_0) = 0$ 对所有 $k \neq 0$，因此

$$\langle u,u\rangle_{\nu_0} = \text{const} \times a_0(\nu_0) \int_{\mathbb{R}^\times} \|P_0 \circ \sigma_\lambda(u)\|^2_{\mathrm{HS}} |\lambda|^{d_1-\nu_0}\, d\lambda \qquad (u \in I(\nu)). \tag{1.5}$$

注 1.4. 对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p,q)$，在 [8,定理 2.3] 中得到了与定理 1.2 类似的分解，并且该分解也由重数为一的酉最高权表示直和给出。参数化略有不同，因此我们省略其陈述。此时交织算子的特征值见 [8, 定理 3.1]。

在辛情形 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ 中，我们有 $\mathfrak{m} = \mathfrak{sp}(V_1,\omega)$，且福克空间分解为两个不等价的不可约子表示，即元辛表示的偶部和奇部。标准交织算子的特征值由 [8,定理 3.8] 给出。

然而，本文不会使用关于 $\mathfrak{su}(p,q)$ 和 $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ 的结果。

2. 关联簇

我们计算表示 π_{ntm} 在互补系列的端点处作为真子表示出现的关联簇。回忆一下，不可约酉表示 π of G 的关联簇V(π)，其湮灭子Ann(π) $\subseteq$ U($\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$)，是 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$ 中与分次理想对应的子簇

$$\operatorname{gr}\operatorname{Ann}(\pi) \subseteq \operatorname{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \simeq S(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C}[(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*].$$

根据 [32, 推论 4.7], , V(π) 是单个幂零余伴随轨道的闭包。此外，根据 [2, 命题 3.2 (b) 和推论 5.4]，其维数等于 U ($\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$)/ Ann($\pi$) 的 Gelfand–Kirillov 维数，而后者又根据 [31, 推论 4.7], 等于 π 的 Gelfand–Kirillov 维数的两倍。

其策略是通过研究 K-型的维数增长来计算 π_{ntm} 的 Gelfand–Kirillov 维数，并将其与幂零余伴随轨道的维数进行比较。事实证明，关联簇总是幂零余伴随轨道 $\mathrm{O}_{\text{ntm}} \subseteq (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$ 的闭包。π_{ntm} 的 Gelfand–Kirillov 维数计算对所有情形统一进行，但在与余伴随轨道比较时，我们逐一分析各个情形。

2.1. Gelfand–Kirillov 维数。假设 $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ $\mathfrak{su}(p,q)$，情形 $\mathfrak{su}(p,q)$ 将在第 2.6 节单独讨论。根据定理 1.1， π_{ntm} 的 K-类型为 $W_{\mu,\mu,\ell}$，其中 $\mu \geq |\ell|, \mu \equiv \ell \mod 2$。注意，dim $W_{\mu,\mu,\ell}$ 与 ℓ 无关，因为 ℓ 仅用于参数化 $\mathfrak{k}$ 中心的作用，而该作用是标量作用。根据 Weyl 维数公式，函数 $\mu \mapsto \dim W_{\mu,\mu,\ell}$ 是一个多项式。我们先计算它的次数。

引理 2.1。多项式 $\mu \mapsto \dim W_{\mu,\mu,\ell}$ 的次数为 $a_1 + 4b_1 + 2$。

证明。回顾 Weyl 维数公式

$$\dim W_{\mu,\mu,\ell} = \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}},\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})} \frac{\langle \lambda+\rho,\alpha\rangle}{\langle \rho,\alpha\rangle},$$

其中 $\mathfrak{t}\subseteq\mathfrak{k}$ 是一个 Cartan 子代数，而 $\lambda\in(\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^*$ 表示 $W_{\mu,\ \mu,\ \ell}$ 相对于正根系 $\Delta^+(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}},\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ 的最高权。因此，$\dim W_{\mu,\ \mu,\ \ell}$ 是关于 μ 的多项式，其次数等于与 λ 不正交的正根的数目。转到限制根系

$$\{\pm 2\alpha_1, \pm 2\alpha_2\} \cup \{\pm\alpha_1 \pm \alpha_2\} \quad \Big[\cup \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2\}\Big]$$

重数分别为 1、a_1 和 $2b_1$ 时，我们可以将 λ 表示为 $\mu(\alpha_1+\alpha_2)+\ell\alpha_0$。与 $\alpha_1+\alpha_2$ 不正交的正限制根为 $2\alpha_1$ 和 $2\alpha_2$，它们的重数各为 1，$\alpha_1+\alpha_2$ 的重数为 a_1，此外还可能有 α_1 和 α_2，它们的重数各为 $2b_1$。将重数相加即可得出所述结论。□

命题 2.2。π_{ntm} 的 Gelfand–Kirillov 维数为 $a_1 + 4b_1 + 4$。

证明。令 $V_0 = W_{0,\ 0,\ 0}$ 且 $V_n = \mathrm{U}_n(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})V_0$，其中 $\{\mathrm{U}_n(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})\}_{n\geq 0}$ 是泛包络代数$\mathrm{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ 的自然滤过。由 [34, 定理 3.1] 可知

$$V_n = \bigoplus_{\substack{|\ell|\leq\mu\leq n\\ \mu\equiv\ell \mod 2}} W_{\mu,\mu,\ell},$$

因此

$$\dim V_n = \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\substack{\ell=-\mu\\ \ell\equiv\mu \mod 2}}^{\mu} \dim W_{\mu,\mu,\ell} \sim \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\substack{\ell=-\mu\\ \ell\equiv\mu \mod 2}}^{\mu} \mu^{a_1+4b_1+2} = \sum_{\mu=0}^{n} (\mu+1)\mu^{a_1+4b_1+2} \sim n^{a_1+4b_1+4}. \quad \square$$

现在我们知道，π_{ntm} 的关联簇是有限个维数为 $2\cdot\mathrm{GKDIM}(\pi_{\text{ntm}}) = 2(a_1+4b_1+4)$的幂零余伴随轨道之并的闭包。在每种情况下，我们都证明存在唯一的幂零轨道$\mathbb{O}_{\text{ntm}}$，其维数在所有次极小轨道中是最小的，并且等于 $2(a_1+4b_1+4)$。由此可知，$\mathbb{O}_{\text{ntm}}$ 是唯一维数为 $2\cdot\mathrm{GKDIM}(\pi_{\text{ntm}})$ 的幂零余伴随轨道，因此 π_{ntm} 的关联簇等于$\overline{\mathbb{O}_{\text{ntm}}}$。

2.2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,n)$ 的情形。我们有 $a_1 = n-4$ 和 $b_1 = 0$，因此

$$\mathrm{GKDIM}(\pi_{\text{ntm}}) = a_1 + 4b_1 + 4 = n.$$

根据 [4, 定理 6.2.5], , $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{so}(n+2,\mathbb{C})$ 中有两个次极小幂零余伴随轨道，分别对应分拆 $(2_4, 1^{n-6})$ 和 $(3_1, 1^{n-1})$。利用 [4, 推论 6.1.4], , 我们发现，与 $(2_4, 1^{n-6})$ 对应的轨道维数为 $2(2n-6)$，而与 $(3_1, 1^{n-1})$ 对应的轨道维数为 $2n$。由此可得，π_{ntm} 的关联簇是与分拆 $(3_1, 1^{n-1})$ 对应的次极小幂零余伴随轨道。

注2.3。在 [35], 中，假设 $\min(p,q) \geq 4$，构造了$\mathrm{O}(p,q)$ 的一个次极小表示。该表示的关联簇对应于分拆$(2_4, 1^{p+q-8})$。假设$\min(p,q) \geq 4$ 对此类表示的存在是必要的，因为这等价于与 $(2_4, 1^{p+q-8})$ 对应的幂零轨道具有

实点。这意味着，当 $\min(p,q) = 2$ 时，不存在 $G = \mathrm{O}(p,q)$的不可约酉表示，其关联簇等于与分拆$(2_4, 1^{n-6})$ 相关联的次极小轨道。从这个意义上说，我们的表示 π_{ntm} 为 $\min(p, q) = 2$的情形提供了 [35] 次极小表示的替代方案。

2.3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}^*(2n)$ 的情形。这里 $a_1 = 2$ 以及 $b_1 = n-4$，因此

$$\mathrm{GKDIM}(\pi_{\mathrm{ntm}}) = a_1 + 4b_1 + 4 = 4n - 10.$$

由于 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$，第 2.2 节的讨论表明，恰好存在两个次极小幂零余伴随轨道，其维数分别为 $2(4n-10)$ 和 $2(2n-2)$。第一个对应于分拆 $(2_4, 1^{2n-8})$，其闭包是 π_{ntm} 的关联簇。

2.4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(-14)}$ 的情形。在此情形下，$a_1 = 4$ 以及 $b_1 = 2$，因此

$$\mathrm{GKDIM}(\pi_{\mathrm{ntm}}) = a_1 + 4b_1 + 4 = 16.$$

根据第 129], 页的 [4, 表，在 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{e}_6(\mathbb{C})$ 中存在唯一的次极小幂零余伴随轨道，其维数为 $32 = 2 \cdot 16$，Bala–Carter 标记为 $2A_1$。这表明 π_{ntm} 的关联簇等于该轨道的闭包。

2.5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(-25)}$的情形。这里 $a_1 = 6$ 和 $b_1 = 4$，因此

$$\mathrm{GKDIM}(\pi_{\mathrm{ntm}}) = a_1 + 4b_1 + 4 = 26.$$

根据第 130], 页的 [4, 表， $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{e}_7(\mathbb{C})$ 中存在唯一一个次极小幂零余伴随轨道，其维数为 $52 = 2 \cdot 26$，Bala–Carter 标记为 $2A_1$。这表明 π_{ntm} 的关联簇等于该轨道的闭包。

2.6. $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p,q)$ 的情形。此情形与其他情形略有不同，因为 $W_{\mu_1,\mu_2,\ell}$ 对 ℓ 的依赖并非仅由中心特征决定。根系 $\Delta(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ 属于 $A_{p-1} \times A_{q-1}$ 型，我们记

$$\Delta(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}) = \{\pm(e_i - e_j) : 1 \le i < j \le p\} \cup \{\pm(f_i - f_j) : 1 \le i < j \le q\}.$$

关于正系

$$\Delta^+(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}) = \{e_i - e_j : 1 \le i < j \le p\} \cup \{f_i - f_j : 1 \le i < j \le q\}$$

$W_{\mu_1,\mu_2,\ell}$ 的最高权为

$$\left(\frac{\mu_1 + \ell}{2} e_1 - \frac{\mu_1 - \ell}{2} e_p\right) + \left(\frac{\mu_2 + \ell}{2} f_1 - \frac{\mu_2 - \ell}{2} f_q\right)$$

其维数等于

$$\frac{(\mu_1 + p - 1)(\mu_2 + q - 1)}{(p-1)(q-1)} \binom{\frac{\mu_1+\ell}{2} + p - 2}{p-2} \binom{\frac{\mu_1-\ell}{2} + p - 2}{p-2} \binom{\frac{\mu_2+\ell}{2} + q - 2}{q-2} \binom{\frac{\mu_2-\ell}{2} + q - 2}{q-2}$$
$$\sim \mu_1 \mu_2 (\mu_1^2 - \ell^2)^{p-2} (\mu_2^2 - \ell^2)^{q-2}.$$

K型的 π_{ntm} 由$W_{\mu_1,\ \mu_2,\ \ell}$ 给出，其中 $\mu_1 - \mu_2 = q - p$ 且 $|\ell| \le \mu_1$、μ_2、$\mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \ell$模 2。以类似前面各情形的方法，对$W_{\mu,\ \mu,\ \ell}$在 $|\ell| \le \mu_1$、$\mu_2 \le n$ （其中 $\mu_1 - \mu_2 = q - p$）上的维数求和，可得

$$\mathrm{GKDIM}(\pi_{\mathrm{ntm}}) = 2p + 2q - 4.$$

根据 [4, 定理 6.2.5], , $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C})$ 中唯一的次极小幂零余伴随轨道对应于分拆 $(2_2, 1^{p+q-4})$; 根据 [4, 推论 6.1.4]，其维数为 $4(p+q)-8 = 2(2p+2q-4)$。这意味着 π_{ntm} 的关联簇等于该轨道的闭包。

3. Restriction from G to $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times M$

回顾一下，元素 $E \in \mathfrak{n}_2$、$F \in \bar{\mathfrak{n}}_2$ 和 $H \in \mathfrak{a}$ 构成一个与 $\mathfrak{m}$ 对易的 $\mathfrak{sl}(2)$ 三元组。写作 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_A = =\mathrm{span}\{E,F,H\}$，我们得到子代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_A \oplus \mathfrak{m}$，以及相应的子群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A \times M$。本节的目标是理解 π_{ntm} 限制到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A \times M$ 上的情形。在具体讨论 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,n)$ 和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(-14)}$ 这些情形之前，我们先作一些一般性观察。

3.1. 次极小表示的傅里叶变换模型。为研究 π_{ntm} 限制到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A \times M$，我们使用海森堡傅里叶变换。以下假设 $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})\ \mathfrak{su}(p,q)$。

引理 3.1. 将 π_{ntm} 视为 $I(\nu_0)$ 的商后，海森堡群傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 诱导出一个酉同构（相差一个标量）

$$\mathcal{F} : \pi_{\text{ntm}} \to L^2(\mathbb{R}^\times, \mathcal{F}_{\lambda,0}(V_1)^* \otimes \mathcal{F}_\lambda(V_1), |\lambda|^{2b_1+1}\, d\lambda), \quad \mathcal{F}u(\lambda) = \sigma_\lambda(u).$$

这里，空间 $L^2(\mathbb{R}^\times, \mathrm{F}_{\lambda,0}(V_1)^* \otimes \mathrm{F}_\lambda(V_1)\ |\lambda|^{2b_1+1}\, d\lambda)$ 应作如下理解。以振子表示的 Schr¨odinger 模型为例，通过选取一个希尔伯特空间 H，可以对每个 $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ 找到一个酉同构 $\mathrm{F}_\lambda(V_1) \simeq \mathrm{H}$，使得 $\mathrm{F}_{\lambda,0}(V_1)$ 映射到一个子空间 H_0。于是，$L^2(\mathbb{R}^\times, \mathrm{F}_{\lambda,0}(V_1)^* \otimes \mathrm{F}_\lambda(V_1)\ |\lambda|^{2b_1+1}\, d\lambda)$ 对应于空间 $L^2(\mathbb{R}^\times, \mathrm{H}_0^* \otimes \mathrm{H}\ |\lambda|^{2b_1+1}\, d\lambda)$，即关于测度 $|\lambda|^{2b_1+1}\, d\lambda$、取值于希尔伯特空间 $\mathrm{H}_0^* \otimes \mathrm{H}$ 的 L^2-函数空间，其定义域为 $\mathbb{R}^\times$。不过，对我们来说，使用在 $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ 处取值落在 $\mathrm{F}_{\lambda,0}(V_1)^* \otimes \mathrm{F}_\lambda(V_1)$ 中的函数更方便，因此在下文中我们省略同构 $\mathrm{F}_\lambda(V_1) \simeq \mathrm{H}$。

引理 3.1 的证明。按照 [8, 第 4], 节，表示 π_{ntm} 是 $\nu_0 = a_1 + 1$的主系列 $(\pi_{\nu_0}, I(\nu_0))$ 的商。具体而言，它是由交织算子 $A_{\nu_0} : I(\nu_0) \to I(-\nu_0)$ 的核取商得到的。按照 [8, 第 1.5], 节，傅里叶变换

$$\mathcal{F} : I(\nu_0) \to \bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{R}^\times} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_\lambda(V_1), \mathcal{F}_\lambda(V_1))$$

是关于参数 λ呈分布依赖定义的。商$I(\nu_0)/\ \mathrm{Ker}\ A_{\nu_0} = \pi_{\text{ntm}}$上的内积由 (1.5) 明确给出，对于 $f_1, f_2 \in \pi_{\text{ntm}}$有

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\nu_0} = \text{const} \times \int_{\mathbb{R}^\times} \mathrm{tr}\,(\sigma_\lambda(f_1) \circ P_0 \circ \sigma_\lambda(f_2)^*)\, |\lambda|^{d_1-\nu_0}\, d\lambda,$$

其中 $P_0 : \mathrm{F}_\lambda(V_1) \to \mathrm{F}_{\lambda,\,0}(V_1)$ 是正交投影。由于 $d_1 = a_1 + 2b_1 + 2$和 $\nu_0 = a_1 + 1$，结论得证。□

为了运用海森堡群傅里叶变换来分解 π_{ntm} 到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A \times M$ 的限制，我们需要了解它在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A$ 和 M 的作用下如何变化。一般元素在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A$ 中的作用相当复杂，但 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A$ 的抛物子群 $B := \exp(\mathbb{R}H)\exp(\mathbb{R}F) \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A$ 的作用则相当简单：

引理 3.2（见 [7, 命题 3.5.5]）。令 $u \in I(\nu)$。

(1) (B-作用) 对于 $t \in \mathbb{R}$ 我们有

$$\sigma_\lambda(\pi_\nu(e^{tH})u) = e^{(\nu-\rho)t}\delta_{e^t} \circ \sigma_{e^{-2t}\lambda}(u) \circ \delta_{e^{-t}},$$
$$\sigma_\lambda(\pi(e^{tF})u) = e^{-i\lambda t}\sigma_\lambda(u),$$

其中 $\delta_s\zeta(z) = \zeta(sz)$。

(2)（M-作用）对于 $m \in M$ 我们有

$$\sigma_\lambda(\pi_\nu(m)u) = \omega_{\mathrm{met},\lambda}(m) \circ \sigma_\lambda(u) \circ \omega_{\mathrm{met},\lambda}(m)^{-1}.$$

根据引理 3.2 中的最后一个公式，$\pi_{\mathrm{ntm}}|_M$ 的分解与张量积表示 $\omega^*_{\mathrm{met},\lambda,0} \otimes \omega_{\mathrm{met},\lambda}|_M$ 的分解有关。为此，我们专门取 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,n)$ 或 $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(-14)}$。注意，由于 $\omega_{\mathrm{met},\lambda}$ 和 $\omega_{\mathrm{met},-\lambda}$ 互为对偶表示，因此 $\omega^*_{\mathrm{met},\lambda,0} \simeq \omega_{\mathrm{met},-\lambda,0}$。

3.2. $G = \mathrm{SO}_0(2,n)$ 的情形。设 $G = \mathrm{SO}_0(2,n)$，$n > 4$，则 $\mathfrak{m} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(n-2)$。为区分 M 中的 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ 副本与 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_A$，我们将其记为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_M$；在群层面上也类似。

作为抽象的 M-表示，振荡表示 $\omega_{\mathrm{met},\lambda}$ 及其子表示$\omega_{\mathrm{met},\lambda,k}$ 并不依赖于参数 λ，而只取决于其符号。因此，以下内容中如方便，我们可以省略该参数并记作

$$\omega^{\mathrm{sgn}(\lambda)}_{\mathrm{met}} \cong \omega_{\mathrm{met},\lambda} \qquad \text{and} \qquad \omega^{\mathrm{sgn}(\lambda)}_{\mathrm{met},k} \cong \omega_{\mathrm{met},\lambda,k}.$$

$\omega^+_{\mathrm{met}}|_M$ 的分解在 [8, 命题 B.2]中得到了明确说明。记 $\eta^{\mathrm{SO}(m)}_k$ 为 $\mathrm{SO}(m)$在空间$\mathrm{H}^k(\mathbb{R}^m)$上的不可约表示，其中$\mathrm{H}^k(\mathbb{R}^m)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上次数为 k的齐次调和多项-式空间。此外，令 $\tau^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{\mu,\varepsilon}$，$\mu \in i\mathbb{R}$、$\varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$表示 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的酉主系列，它们对 $\varepsilon = 0$ 是球面的，而对 $\varepsilon = 1$则不是球面的。我们进一步将 τ_k ($k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$)记作参数为 k的$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$的（极限）离散系列，其中记号约定为：$\tau_k$ 分别是 $k \le -2$ 和 $k \ge 2$的全纯及反全纯离散系列。然后

$$\omega^+_{\mathrm{met}}|_M = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \omega_{\mathrm{met},\lambda,k} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \tau^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{-k-(n-2)} \boxtimes \eta^{\mathrm{SO}(n-2)}_k. \tag{3.1}$$

由于 ω^+_{met} 与 ω^-_{met}互为对偶，这也意味着 ω^-_{met}相应的分解。将 $\mathrm{par}(k) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 记为 $k \in \mathbb{Z}$的宇称。

引理3.3。以下关于 $M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_M \times \mathrm{SO}(n-2)$ 的表示的张量积分解成立：

$$\omega^{\mp}_{\mathrm{met},0} \otimes \omega^{\pm}_{\mathrm{met}}|_M \simeq \bigoplus_{k\ge 0} \int^{\oplus}_{i\mathbb{R}_{\ge 0}} \tau^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{\mu,\mathrm{par}(k)} \boxtimes \eta^{\mathrm{SO}(n-2)}_k \, d\mu \oplus \bigoplus_{l\ge 2} \tau^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{\mp l} \boxtimes \left(\bigoplus_{\substack{k\ge l \\ l\equiv k \mod 2}} \eta^{\mathrm{SO}(n-2)}_k \right).$$

证明。由 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的全纯与反全纯离散系列的张量积经典公式（例如参见 [30]）以及分解 (3.1) 可得。□

为了同时获得关于另一因子 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A$ 对各同型分量作用的信息，我们作如下观察：

命题3.4. G 中的$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A$ 和$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_M$ 这两个$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$的副本，通过$\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{S}(\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(n-2)) \subseteq \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(n) \subseteq G$ 中的一个元素共轭。

证明。注意，只需证明$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$中的$\mathfrak{so}(2)$的两个副本是共轭的。例如，明确取$H = E_{1,n+1} + E_{2,n+2} + E_{n+1,1} + E_{n+2,2}$。那么，$\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_A \oplus \mathfrak{m}) = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(n-2)$在$\mathfrak{g}$中按如下方式由对角块实现。其中一个$\mathfrak{so}(2)$副本由$\mathrm{diag}(X, X, 0_{n-2})$张成，另一个则由$\mathrm{diag}(X, -X, 0_{n-2})$张成，其中

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这两个元素通过矩阵$g = \mathrm{diag}(1_2, y, 1_{n-2}) \in \mathrm{O}(2,n)$共轭，其中

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

并且，g的共轭作用在$\mathrm{SO}(n-2)$上是平凡的。由于$n > 2$，将g与$\mathrm{O}(n-2)$中某个行列式为-1的元素相乘即可达到目的。（所有子群的显式矩阵实现也可见 [7, 附录 B.2]。）□

回顾子群$B \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$。根据$B$的不可约酉表示分类（例如参见 [10]），$B$恰有两个互不等价的无限维不可约酉表示。对于任意$\alpha \in \mathbb{C}$，它们都可以通过以下作用实现在$L^2(\mathbb{R}_\pm, |\lambda|^{\mathrm{Re}\,\alpha-1}\,d\lambda)$上。

$$(e^{tH}.\varphi)(\lambda) = e^{(\alpha-2)t}\varphi(e^{-2t}\lambda),$$
$$(e^{tF}.\varphi)(\lambda) = e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda),$$

其中$\varphi \in L^2(\mathbb{R}_\pm, |\lambda|^{\mathrm{Re}\,\alpha-1}\,d\lambda)$和$t \in \mathbb{R}$。我们用$\sigma_B^+$和$\sigma_B^-$表示等价类。

引理 3.5. 酉主系列表示$\tau_{\mu\,\varepsilon}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$,$(\mu \in i\mathbb{R},\ \varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$或$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$的最低/最高权表示$\tau_{\pm k}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$$(k > 0)$在$B$上的限制为

$$\tau_{\mu,\varepsilon}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}|_B \cong \sigma_B^+ \oplus \sigma_B^-, \qquad \tau_{\pm k}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}|_B \cong \sigma_B^\mp.$$

证明。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$的酉主系列可在$L^2(\mathbb{R})$上实现，其中对函数$f \in L^2(\mathbb{R})$的作用为（例如参见 [21, 第二章]）

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix}.f(x) = af(a^2x - ac) \qquad (a \in \mathbb{R}^\times, c \in \mathbb{R}).$$

A在实数轴上应用欧几里得傅里叶变换即可证明该结论 t.

令$\Pi = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\} \subseteq \mathbb{C}$为上半平面。全纯离散系列$\tau_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})-k}, k \geq 2$可在$\Pi$上的加权 Bergman 空间$H_k^2(\Pi)$上实现，其定义为

$$H_k^2(\Pi) = \mathcal{O}(\Pi) \cap L^2(\Pi, y^{k-2}\,dx\,dy).$$

具体而言，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$通过以下方式作用于函数$f \in H_k^2(\Pi)$

$$(\pi_{-k}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}(g)f)(z) = (-bz + d)^{-k} f\left(\frac{az - c}{-bz + d}\right),$$

其中

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

对于任意 $k>1$，考虑定义在 $L^2(\mathbb{R}_+,|\lambda|^{k-1}\,d\lambda)$ 上的拉普拉斯变换 L，其定义为

$$\mathcal{L}g(z)=\int_0^\infty g(\lambda)e^{i\lambda z}\,d\lambda.$$

根据 [6, 定理 XIII.1.1]，拉普拉斯变换给出了到 $H^2_k(\Pi)$ 的满射等距映射，并且很容易验证它与由 σ^+_B 给出的 B 的作用相交织。对于反全纯离散系列，取复共轭即可得到该结论。对于离散系列的极限，我们有 $\pi^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{-1}\oplus\pi^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{1}$ 是一个酉主系列，其限制到 B 后为 $\sigma^+_B\oplus\sigma^-_B$，因此稍作修改上述论证即可得到该结论。□

最后，我们可以综合所有收集到的信息，得到 π_{ntm} 限制到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A\times M=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_M\times\mathrm{SO}(n-2)$ 的完整分解：

定理 3.6. $\mathrm{SO}_0(2,n)$ 的次极小表示限制到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_M\times\mathrm{SO}(n-2)$ 后可表示为

$$\pi_{\mathrm{ntm}}\big|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{SO}(n-2)}\simeq\bigoplus_{k=0}^{\infty}\Bigg(\int_{i\mathbb{R}_{\geq0}}\tau^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{\mu,\mathrm{par}(\mu)}\boxtimes\tau^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{\mu,\mathrm{par}(\mu)}\,d\mu\\ \oplus\bigoplus_{\substack{2\leq|\ell|\leq k\\ \ell\equiv k\mod 2}}\tau^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{\ell}\boxtimes\tau^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{\ell}\Bigg)\boxtimes\eta^{\mathrm{SO}(n-2)}_k.$$

证明。由引理 3.1，我们有

$$\pi_{\mathrm{ntm}}\simeq L^2(\mathbb{R}^\times,\mathcal{F}_{-\lambda,0}(V_1)\otimes\mathcal{F}_\lambda(V_1),|\lambda|\,d\lambda),$$

因此，根据引理 3.2 (2)，π_{ntm} 到 M 的限制可写为

$$\pi_{\mathrm{ntm}}|_M\simeq\big(L^2(\mathbb{R}_+,|\lambda|\,d\lambda)\boxtimes(\omega^-_{\mathrm{met},0}\otimes\omega^+_{\mathrm{met}}|_M)\big)\oplus\big(L^2(\mathbb{R}_-,|\lambda|\,d\lambda)\boxtimes(\omega^+_{\mathrm{met},0}\otimes\omega^-_{\mathrm{met}}|_M)\big),$$

将 $\mathbb{R}^\times$ 分为正负半轴。其中 M 在 $L^2(\mathbb{R}_\pm,|\lambda|\,d\lambda)$ 上平凡作用。由此可知，B 的作用保持这一分解，并通过酉自同构作用于 $\omega^\mp_{\mathrm{met},0}\otimes\omega^\pm_{\mathrm{met}}|_M$ 的每个 M-等型分量。$\varphi\in L^2(\mathbb{R}^\times,|\lambda|\,d\lambda)$ 上的作用在 $\nu=\nu_0=n-3=\rho-2$ 的引理 3.2 (1) 中有明确给出：

$$(e^{tH}\cdot\varphi)(\lambda)=e^{-2t}\varphi(e^{-2t}\lambda),\qquad(e^{tF}\cdot\varphi)(\lambda)=e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda),$$

以便

$$\pi_{\mathrm{ntm}}|_{B\times M}\simeq\big(\sigma^+_B\boxtimes(\omega^-_{\mathrm{met},0}\otimes\omega^+_{\mathrm{met}}|_M)\big)\oplus\big(\sigma^-_B\boxtimes(\omega^+_{\mathrm{met},0}\otimes\omega^-_{\mathrm{met}}|_M)\big).\tag{3.2}$$

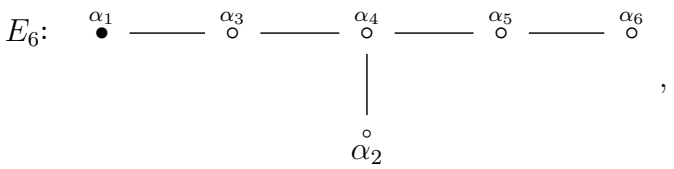
由于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 中 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的两个副本的子群 B 根据命题 3.4 共轭，我们由引理 3.5 得到

$$\pi_{\mathrm{ntm}}\big|_{B\times B\times\mathrm{SO}(n-2)}\simeq\bigoplus_{k\geq0}\int_{i\mathbb{R}_{\geq0}}\Big((\sigma^+_B\oplus\sigma^-_B)\boxtimes(\sigma^+_B\oplus\sigma^-_B)\boxtimes\eta^{\mathrm{SO}(n-2)}_k\Big)\,d\mu\\ \oplus\bigoplus_{|k|\geq2}\sigma_B^{-\mathrm{sgn}(k)}\boxtimes\sigma_B^{-\mathrm{sgn}(k)}\boxtimes\Bigg(\bigoplus_{\substack{l\geq|k|\\ l\equiv k\mod 2}}\eta^{\mathrm{SO}(n-2)}_l\Bigg).$$

由于整个两个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 副本甚至彼此共轭，而且根据 (3.2) 和引理 3.3，我们已知左侧副本的作用，因此由引理 3.5 可得定理。□

3.3. $G = E_{6(-14)}$ 的情形。现在我们研究 $G = E_{6(-14)}$ 的同一分支问题。为此，我们先为例外李代数 $\mathfrak{e}_{6(-14)}$ 固定一些记号。

3.3.1. 子代数 $\mathfrak{su}(5,1) \subseteq \mathfrak{e}_{6(-14)}$。再次回顾我们在 [8, 34] 中的约定：Heisenberg 抛物子代数是利用最低的 Harish-Chandra 根 γ_1构造的。更确切地说，在当前情形下，令 $\gamma_1 < \gamma_2$ 为对称对 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) = (\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{so}(2) + \mathfrak{spin}(10))$ 的 Harish-Chandra 强正交根，令 $e_{\pm 1}$为 $\pm\gamma_1$的根向量，其中 $[e_1, e_{-1}]$为相应的余根。那么我们在第 1 节中的 H 即为 $H = e_1 + e_{-1}$。Levi 子代数为 $\mathfrak{m} = \mathfrak{su}(5,1)$，其极大紧子代数为 $\mathfrak{l} = \mathfrak{u}(5) = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}$。为明确相关根，我们使用 $\mathfrak{e}_6$ 和 $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$的 Dynkin 图。该图为



其中，带圆圈的根 $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_6\}$是紧致根，而黑色根 $\gamma_1 = \alpha_1$ 是非紧致最低根。紧致正根和非紧致正根为（例如参见 [5]）

$$\Delta_c^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j; 5 \geq i > j \geq 1\},$$
$$\Delta_n^+ = \Big\{\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu_i}\varepsilon_i - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8); \sum_{i=1}^{5}\nu_i \text{ is even}\Big\},$$

with

$$\gamma_1 = \alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8), \quad \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \alpha_j = \varepsilon_{j-1} - \varepsilon_{j-2}, (3 \leq j \leq 6).$$

Harish-Chandra 强正交根为 $\gamma_1 < \gamma_2$，其中

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8).$$

我们将需要从最高者开始的相反 Harish-Chandra 根。这是对$\tilde{\gamma}_2 > \tilde{\gamma}_1$，其中

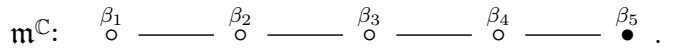
$$\tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8), \qquad \tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8).$$

由于与最高根 $\tilde{\gamma}_2$正交的非紧正根有五个，而按我们给定的排序，$\tilde{\gamma}_1$ 是其中最高的一个，因此很容易验证这些公式。

$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})$ 的正根是

$$\Delta_c^+(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}) = \{\varepsilon_j - \varepsilon_i; 5 \geq j > i \geq 2\} \cup \{\varepsilon_i + \varepsilon_1; 5 \geq i \geq 1\},$$
$$\Delta_n^+(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}) = \Big\{\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu_i}\varepsilon_i - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8) \in \Delta_n^+; (-1)^{\nu_1} - \sum_{i=2}^{5}(-1)^{\nu_i} + 3 = 0\Big\}.$$

根 $\beta_1 = \alpha_2$、$\beta_2 = \alpha_4$、$\beta_3 = \alpha_5$、$\beta_4 = \alpha_6$构成一组简单紧根，与 $\beta_5 = \gamma_2$ 一起构成 $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$的一组简单根，它们都与 γ_1正交。此时，$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ 的 Dynkin 图为



令 λ_2 和 λ_5 为相应的基本权，它们分别与作为 $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(5,\mathbb{C})$ 表示的 β_2 和 β_5 对偶。那么

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}(2\beta_1 + 4\beta_2 + 3\beta_3 + 2\beta_4 + \beta_5), \qquad \lambda_5 = \frac{1}{6}(\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 4\beta_4 + 5\beta_5).$$

视为 $\mathfrak{l}$ 和 $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$的特征时， λ_5 是 $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$的基本中心特征，记作 $\mathbb{C}^{\mathfrak{l}}_{\lambda_5}$。

$\mathfrak{m} = \mathfrak{su}(5,1)$ 的 Harish-Chandra 强正交根为 $\beta_3 = \alpha_5$，而最高非紧根为 $\tilde{\gamma}_2$；这里 $\mathfrak{m}$ 不是管型，因此 $\beta_5 = \gamma_2$ 是与 γ_1 正交的最低非紧根，并且 $\beta_5 = \gamma_2$ 与 $\tilde{\gamma}_2$之间有三个非紧根，它们是

$$\beta_5 + \beta_4, \quad \beta_2 + (\beta_4 + \beta_3), \quad \beta_2 + (\beta_4 + \beta_3 + \beta_2).$$

$\mathfrak{m} = \mathfrak{su}(5, 1)$ 的 Harish-Chandra分解为

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(6,\mathbb{C}) = \bar{\mathbb{C}}^5 + \mathfrak{gl}(5,\mathbb{C}) + \mathbb{C}^5.$$

空间 V_1 的最低权为

$$\delta_0 = \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8),$$

并且 $\mathfrak{gl}(5,\mathbb{C})$ 的 $\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{V_1}$ 中心特征容易求得为

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{V_1} = 3\lambda_5 = \frac{1}{2}(5\beta_5 + 4\beta_4 + 3\beta_3 + 2\beta_2 + \beta_1).$$

3.3.2. $\mathfrak{su}(5, 1)$ 的最高权与最低权表示的张量积。振荡表示 ω^+_{met} 在 $M = \mathrm{SU}(5, 1)$ 上的限制分支已在 [8]，中明确求得，它是 $\mathfrak{su}(5, 1)$ 的全纯表示 $\omega^+_{\mathrm{met},\ k} = \pi_{-k\delta_0-3\lambda_5}$ 之和，其最高权为 $-k\delta_0 - 3\lambda_5, k \geq 0$。与上一节一样，我们首先求出张量积表示 $\omega^-_{\mathrm{met},\ 0} \otimes \omega^+_{\mathrm{met}}|_M \simeq \pi^*_{-3\lambda_5} \otimes \pi_{-k\delta_0-3\lambda_5}$ 的分解。

命题3.7. (1) 最高权表示 $(\pi_{-k\delta_0-3\lambda_5}, \mathfrak{su}(5, 1))$ 不属于离散系列。它们包含在离散系列解析延拓的连续范围内，即它们不是约化点。

(2) 张量积 $\pi^*_{-3\lambda_5} \otimes \pi_{-k\delta_0-3\lambda_5}$ 与诱导表示酉等价。

$$L^2(\mathrm{SU}(5,1)/\mathrm{U}(5), -k\delta_0) := \mathrm{Ind}^{\mathrm{SU}(5,1)}_{\mathrm{U}(5)}(-k\delta_0).$$

证明。(1) 通过计算与简单根的内积，我们发现对偶表示 V_1' 的最高权$-\delta_0$ 是 $-\delta_0 = -\lambda_5 + \lambda_2$。（也就是说，它是 $\mathfrak{u}(5) = \mathfrak{u}(1) + \mathfrak{su}(5)$ 的表示 $\det^{-1} \boxtimes \wedge^2 \mathbb{C}^5$，每个因子作用于张量积中相应的因子。）离散系列条件很容易验证；例如参见 [5]。

(2) 我们将 $\pi_{-k\delta_0-3\lambda_5}$ 实现为 SU(5, 1)/ U(5) 上由最高权为 $-k\delta_0$ 的 U(5) 表示 $W_{-k\delta_0}$ 所诱导的齐性向量丛的全纯截面。类似地，我们将 $\pi^*_{-3\lambda_5}$实现为 SU(5, 1)/ U(5) 上的反全纯函数。考虑限制算子

$$R : \pi_{-k\delta_0-3\lambda_5} \otimes \pi^*_{-3\lambda_5} \to C^\infty(\mathrm{SU}(5,1)/\mathrm{U}(5); -k\delta_0), RF(z) = (1 - |z|^2)^3 F(z, z),$$

其中， C^∞(SU(5, 1)/ U(5); $-k\delta_0$) 是由表示 $W_{-k\delta_0}$ 诱导的向量丛的光滑截面空间。直接计算表明， R是 SU(5, 1)-交织的。接下来考虑相应的 L^2-空间 L^2(SU(5, 1)/ U(5) $-k\delta_0$)。由于$-k\delta_0 = k(-4\lambda_5+\lambda_2)+3k\lambda_5$，这是有界对称域 B_5 = SU(5, 1)/ U(5) 上取值于 $\odot^k(\wedge^3 T_{(1,0)\,0}(B_5)'\otimes\mathbb{C}^{\mathrm{t}}_{3k\lambda_5}$ 的函数空间，其平方范数为

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \int_{B_5}\langle(1-|z|^2)^{-3k}\otimes^k(\wedge^3 B(z,z)^t)f(z),f(z)\rangle\,d\iota(z)\\ &= \int_{B_5}\langle\otimes^k(\wedge^3(I-\bar z z^t))f(z),f(z)\rangle\,d\iota(z),\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中 $B(z,z)^t = (1-|z|^2)(I-\bar z z^t)$ 是 $T_{(1,0)z}(B_5)'$上的度量，它与全纯切空间 $T_{(1,0)z}(B_5)$上的 Bergman 度量所诱导的切丛对偶度量相对应，其中 $T_0^{(1,0)}(B_5)$ 被视为 U(5) 的表示，并且

$$d\iota(z) = \frac{dm(z)}{(1-|z|^2)^6}$$

是 B_5 上的不变测度，其中 $dm(z)$为勒贝格测度；例如参见 [20]。现在，空间 $\pi_{-k\delta_0-3\lambda_5}$ 包含所有 $W_{-k\delta_0}$值全纯多项式 f_1，而 $\pi_{-3\lambda_5}$ 包含所有标量全纯多项式 f_2，因为 $\pi_{-k\delta_0-3\lambda_5}$ 不是全纯离散系列解析延拓中的约化点。我们证明 $F = R(f_1\otimes\overline{f_2})$属于空间 $L^2(G/K,-k\delta_0)$。确实，我们有

$$\begin{aligned}\langle F,F\rangle &= \int_{B_5}\langle\otimes^k(\wedge^3(I-zz^*))(1-|z|^2)^3 f_1(z)\overline{f_2}(z),(1-|z|^2)^3 f_1(z)\overline{f_2}(z)\rangle\,d\iota(z)\\ &= \int_{B_5}\langle\otimes^k(\wedge^3(I-zz^*))f_1(z)\overline{f_2}(z),f_1(z)\overline{f_2}(z)\rangle\,dm(z).\end{aligned}$$

现在，多项式 f_1、f_2 在 B_5 上有界，矩阵 $\otimes^k(\wedge^3(I-zz^*))$ 也有界，且 B_5 的勒贝格测度有限。因此，$F, F < \infty$ 且 $F\in L^2(B_5,-k\delta_0)$。论证的其余部分通过抽象论证完成，具体而言，使用（无界的）稠密定义闭算子 R 的极分解；有关这一技巧的细节，参见例如 [33] 。□

接下来，我们确定 L^2(SU(5,1)/ U(5) $-k\delta_0$) 到SU(5, 1) 的不可约表示的分解。其中出现的表示是SU(5, 1)的酉主系列，因此我们固定 M = SU(5,1) 的一个（极小）抛物子群 $P_M = M_M A_M N_M$。然后 M_M是 U(4) 的一个双覆盖，其不可约表示由元组 $(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)$参数化，其中$\nu_j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$，并且对所有 $1\le i<j\le 4$都有 $\nu_i-\nu_j$。此外， A_M 的不可约酉特征由 $\mu\in i\mathbb{R}$ 参数化。我们将 SU(5, 1) 的相应抛物诱导表示记为 $\tau^{\mathrm{SU}(5,1)}{}_{(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)\,\mu}$。

命题 3.8. 对于每个 $k \geq 0$ 表示 $L^2(\mathrm{SU}(5,1)/\mathrm{U}(5), -k\delta_0)$ 的$\mathrm{SU}(5,1)$及其对偶 $L^2(\mathrm{SU}(5,1)/\mathrm{U}(5), -k\delta_0)^*$ 均分解为不可约表示如下：

$$L^2(\mathrm{SU}(5,1)/\mathrm{U}(5), -k\delta_0) \simeq \bigoplus_{m=0}^{k} \int_{i\mathbb{R}_{\geq 0}} \tau^{\mathrm{SU}(5,1)}_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2}-m,-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}),\mu}\, d\mu,$$

$$L^2(\mathrm{SU}(5,1)/\mathrm{U}(5), -k\delta_0)^* \simeq \bigoplus_{m=0}^{k} \int_{i\mathbb{R}_{\geq 0}} \tau^{\mathrm{SU}(5,1)}_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2},\frac{k}{2}-m,-\frac{k}{2}),\mu}\, d\mu.$$

证明。我们首先证明，最高权 $-k\delta_0$ 不是任何离散系列的最低 K-型。按照 $\mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})$ 的标准记号， $\mathfrak{gl}(5,\mathbb{C})$-最高权 $-k\delta_0$ 为

$$-k\delta_0 = k(-\lambda_5 + \lambda_2) = \frac{k}{2}(1,1,-1,-1,-1,1). \tag{3.4}$$

按照 $\mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})$ 的根的现有排列，$\mathrm{SU}(5,1)$ 的一个离散系列由一个非奇异最高权 $\mu := (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6)$ 确定，其中 $\mu_1 > \cdots > \mu_5 > \mu_6$的最低 K-型为

$$\mu + \rho_{\mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})} - 2\rho_{\mathfrak{gl}(5,\mathbb{C})} = \frac{1}{2}(2\mu_1 - 3, 2\mu_2 - 1, 2\mu_3 + 1, 2\mu_4 + 1, 2\mu_5 + 3, 2\mu_6 - 5).$$

这里 $\mu_1 > \cdots > \mu_5 > \mu_6$均为半整数，且 $\sum_j \mu_j = 0$。 $L^2(\mathrm{SU}(5,1)/\mathrm{U}(5), -k\delta_0)$ 存在离散系列表示，当且仅当权 $-k\delta_0$ 经 Weyl 群元素 $s \in S_6$ 作用后得到一个排列 $s(-k\delta_0)$，从而产生上述最低 K-型：

$$s(-k\lambda_0) = \frac{1}{2}(2\mu_1 - 3, 2\mu_2 - 1, 2\mu_3 + 1, 2\mu_4 + 1, 2\mu_5 + 3, 2\mu_6 - 5).$$

那么唯一可能的选择就是

$$2\mu_1 - 3 = k, 2\mu_2 - 1 = k, 2\mu_3 + 1 = k, 2\mu_4 + 1 = -k, 2\mu_5 + 3 = -k, 2\mu_6 - 5 = -k,$$

即,

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(k+3), \mu_2 = \frac{1}{2}(k+1), \mu_3 = \frac{1}{2}(k-1), \mu_4 = \frac{1}{2}(-k-3), \mu_5 = \frac{1}{2}(-k-5), \mu_6 = \frac{1}{2}(-k+5).$$

但是，此时 μ并非主导，因此 $L^2(\mathrm{SU}(5,1)/\mathrm{U}(5), -k\delta_0)$没有离散谱。

根据 $\mathrm{SU}(5,1)$ 的 Plancherel 公式，这意味着 $L^2(\mathrm{SU}(5,1)/\mathrm{U}(5), -k\delta_0)$ 等价于由 M_M 的那些表示诱导的酉主系列的无重数直积分，而这些表示出现在 $\mathrm{U}(5)$ 的表示 $W_{-k\delta_0}$ 的限制中。结合 (3.4) 以及 $(\mathrm{U}(5), \mathrm{U}(4))$ 这一对的标准分支法则，这便推出了关于 $L^2(\mathrm{SU}(5,1)/\mathrm{U}(5), -k\delta_0)$的结论。转到对偶表示，并利用 $(\tau^{\mathrm{SU}(5,1)}{}_{(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)\,\mu})^* \simeq \tau_{(-\nu_4,-\nu_3,-\nu_2,-\nu_1)\,-\mu}$，即可完成证明。 □

这最终使我们能够证明以下关于将 $G = E_{6(-14)}$ 的次极小表示 π_{ntm} 限制到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(5,1)$ 的结果：

定理 3.9. 将 $E_{6(-14)}$ 的次极小表示 π_{ntm} 限制到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(5,1)$ 后，对每个 $k > 0$ 和每个 $0 < m \leq k$，都包含一个如下形式的表示

$$\int_{i\mathbb{R}_{\geq 0}} \tau^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{-l} \boxtimes \tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2}-m,-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}),\mu}\, d\mu \oplus \int_{i\mathbb{R}_{\geq 0}} \tau^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{l} \boxtimes \tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2},m-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}),\mu}\, d\mu$$

作为某个 $l \geq 1$ 直和项。

证明。回顾子群 $B \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A$ 及其无限维酉不可约表示的等价类 $\sigma_B^{\pm}$。按照第3.2节中相同的论证思路，我们有

$$\pi_{\mathrm{ntm}}|_{B\times M} \simeq \left(\sigma_B^+ \boxtimes (\omega_{\mathrm{met},0}^- \otimes \omega_{\mathrm{met}}^+|_M)\right) \oplus \left(\sigma_B^- \boxtimes (\omega_{\mathrm{met},0}^+ \otimes \omega_{\mathrm{met}}^-|_M)\right)$$

其同构于

$$\bigoplus_{k\geq 0} \left(\sigma_B^+ \boxtimes L^2(\mathrm{SU}(5,1)/\mathrm{U}(5), -k\delta_0)\right) \oplus \left(\sigma_B^- \boxtimes L^2(\mathrm{SU}(5,1)/\mathrm{U}(5), -k\delta_0)^*\right)$$

根据命题3.7。利用命题3.8分解 L^2(SU(5,1)/ U(5) $-k\delta_0$)及其对偶可知，这又同构于

$$\bigoplus_{k\geq 0} \bigoplus_{m=0}^{k} \left(\int_{i\mathbb{R}_{\geq 0}} \sigma_B^+ \boxtimes \tau^{\mathrm{SU}(5,1)}_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2}-m,-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}),\mu}\, d\mu \oplus \int_{i\mathbb{R}_{\geq 0}} \sigma_B^- \boxtimes \tau^{\mathrm{SU}(5,1)}_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2},m-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}),\mu}\, d\mu \right).$$

现在，SU(5, 1) 的每个表示 $\tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2}-m,-\frac{k}{2},-\frac{k}{2})\,\mu}$（分别为 $\tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2},m-\frac{k}{2},-\frac{k}{2})\,\mu}$）都恰好在此分解中出现一次。由于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A$ 与 SU(5, 1) 对易，它作用于相应的同型分量 $\sigma_B^+ \boxtimes \tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2}-m,-\frac{k}{2},-\frac{k}{2})\,\mu}$（分别为 $\sigma_B^- \boxtimes \tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2},m-\frac{k}{2},-\frac{k}{2})\,\mu}$。限制到 $\sigma_B^{\pm}$ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的唯一酉表示是引理 3.5 中的 $\tau_{\mp l}$ ($l>0$)。在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的酉对偶中，这些表示彼此分离，因此 l 在每个单独的直积分中都必须是常数。这就证明了该断言。□

注 3.10。前述结论有意排除了 $m=0$ 这一情形，因为在这种情况下，表示 $\tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2}-m,-\frac{k}{2},-\frac{k}{2})\,\mu}$ 和 $\tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2},m-\frac{k}{2},-\frac{k}{2})\,\mu}$ 相等，因此

$$\left(\sigma_B^+ \boxtimes \tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2},-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}),\mu}\right) \oplus \left(\sigma_B^- \boxtimes \tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2},-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}),\mu}\right) \simeq (\sigma_B^+ \oplus \sigma_B^-) \boxtimes \tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2},-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}),\mu}$$

而且，目前还不清楚限制到 $\sigma_B^+ \oplus \sigma_B^-$ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A$ 的哪个表示作用在第一个因子上。

注 3.11。此时，对于每个 $k>0$ 和 $0<m\leq k$，如何确定参数 l 尚不清楚。一个想法是利用 $M=$ 中与 SU(1, 1) $\simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 同构、且与 G 内的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A$ 共轭的子群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_M$。将 $\tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2}-m,-\frac{k}{2},-\frac{k}{2})\,\mu}$ 限制到该子群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_M$ 后，可能会包含一些 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的离散系列表示；通过将该子群共轭到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_A$，这些表示或许能与参数 l 联系起来。然而，由于将 $\tau_{(\frac{k}{2},\frac{k}{2}-m,-\frac{k}{2},-\frac{k}{2})\,\mu}$ 限制到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_M$ 后会包含若干不同的离散系列表示，我们尚不清楚如何利用这些信息。

参考文献

[1] Salem Ben Sa¨ıd、Toshiyuki Kobayashi 和 Bent Ørsted，《Laguerre半群与Dunkl算子》，Compositio Mathematica 148（2012年），第4期，1265–1336页。引用页码：1[2] Walter Borho 和 Hanspeter Kraft，《论 Gelfand-Kirillov 维数》，Mathematische Annalen 220（1976），第1期，1–24页。引用页码：8[3] Guillaume Bossard 和 Boris Pioline，《精确的 ∇^4R^4 耦合与螺旋度超迹》，Journal of High Energy Physics（2017），第1期，050，前置页+40。引用页码：2[4] David H. Collingwood 和 William M. McGovern，《半单李代数中的幂零轨道》，Van Nostrand Reinhold数学丛书，Van Nostrand Reinhold公司，纽约，1993年。引用页码：9、10、11

[5] Thomas Enright、Roger Howe 和 Nolan Wallach，《酉最高权模的分类》，《约化群表示论》（帕克城，犹他州，1982年），数学进展丛书，第40卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1983年，第97–143页。引用页码：15、16[6] Jacques Faraut 和 Adam Kor´anyi，《对称锥分析》，牛津数学专著，The Clarendon Press，牛津大学出版社，纽约，1994年，牛津科学出版物。引用页码：2、14[7] Jan Frahm，《海森堡群上的共形不变微分算子与最小表示》，（2020年），即将发表于 M´em. Soc. Math. Fr.，可见 arXiv:2012.05952。引用页码：7、11、13[8] Jan Frahm、Clemens Weiske 和 Genkai Zhang，《Hermitian 李群的海森堡抛物诱导表示，第一部分：交织算子与韦尔变换》，（2022年），即将发表于 Adv. Math，可见 arXiv:2209.04273。引用页码：2、4、6、7、8、11、12、15、16[9] Igor Frenkel 和 Matvei Libine，《四元数分析与 ¨Schr¨odinger 模型：$O(3,3)$ 的最小表示》，Int. Math. Res. Not. IMRN（2012），第21期，4904–4923页。引用页码：1[10] Israel. M. Gelfand 和 Mark A. Naimark，《直线线性变换群的酉表示》，C. R. (Doklady) Acad. Sci URSS (N.S.) 55（1943年），567–570页。引用页码：13[11] Dmitry Gourevitch、Henrik P. A. Gustafsson、Axel Kleinschmidt、Daniel Persson 和 Siddhartha Sahi，《自守形式傅里叶系数的欧拉性》，Represent. Theory 25（2021年），481–507页。引用页码：2[12] ———，《单边群的最小与次最小自守表示的傅里叶系数》，Canad. J. Math. 74（2022年），第1期，122–169页。引用页码：2[13] Michael B. Green、Stephen D. Miller 和 Pierre Vanhove，《小表示、弦瞬子与艾森斯坦级数的傅里叶模》，J. Number Theory 146（2015年），187–309页。引用页码：1、2[14] Joachim Hilgert、Toshiyuki Kobayashi、Jan M¨ollers 和 Bent Ørsted，《Hermitian 李群最小表示的福克模型与 Segal-Bargmann 变换》，J. Funct. Anal. 263（2012年），第11期，3492–3563页。引用页码：1[15] Roger Howe，《经典群酉表示的秩概念》，《调和分析与群表示》，Liguori，那不勒斯，1982年，第223–331页。引用页码：2[16] ———，《超越经典不变量理论》，J. Amer. Math. Soc. 2（1989年），第3期，535–552页。引用页码：1[17] ———，《诱导表示的一些近期应用》，《群表示、遍历理论与数学物理：献给 George W. Mackey 的论文集》，Contemp. Math.，第449卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008年，第173–191页。引用页码：2[18] Jing-Song Huang、Pavle Pandˇzi´c 和 Gordan Savin，《新的对偶对对应》，Duke Math. J. 82（1996年），第2期，447–471页。引用页码：1[19] Markus Hunziker、Mark R. Sepanski 和 Ronald J. Stanke，《共形群的最小表示与波动方程的经典解》，J. Lie Theory 22（2012年），第2期，301–360页。引用页码：1[20] Stephen Hwang、Yang Liu 和 Genkai Zhang，《C-n 单位球上张量值全纯函数的希尔伯特空间》，Pacific Journal of Mathematics - PAC J MATH 214（2004年），303–322页。引用页码：17[21] Anthony W. Knapp，《半单群表示论》，普林斯顿数学丛书，第36卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1986年，基于实例的概述。引用页码：13[22]Toshiyuki Kobayashi，《限制最小表示时的重数》，（2022年），预印本，可见 arXiv:2204.05079。引用页码：1[23] Toshiyuki Kobayashi 和 Gen Mano，《不定正交群 $O(p,q)$ 最小表示的 Schr¨odinger 模型》，Mem. Amer. Math. Soc. 213（2011年），第1000期。引用页码：1[24] Toshiyuki Kobayashi 和 Bent Ørsted，《$O(p,q)$ 最小表示分析。第一部分：通过共形几何实现》，Adv. Math. 180（2003年），第2期，486–512页。引用页码：1[25] ———，《$O(p,q)$ 最小表示分析。第二部分：分支定律》，Adv. Math. 180（2003年），第2期，513–550页。引用页码：1[26] ———，《$O(p,q)$ 最小表示分析。第三部分：$\mathbb{R}^{p-1,q-1}$ 上的超双曲方程》，Adv. Math. 180（2003年），第2期，551–595页。引用页码：1[27] Jian-Shu Li，《单李群中约化对偶对的无穷小特征对应》，Duke Math. J. 97（1999年），第2期，347–377页。引用页码：1[28] Jan M¨ollers 和 Yoshiki Oshima，《最小全纯表示的离散分支定律》，J. Lie Theory 25（2015年），第4期，949–983页。引用页码：1

[29] Aaron Pollack，秩三不定正交群上的模形式，J. Number Theory 238（2022年），611–675。附录“次最小表示”由 Gordan Savin 撰写。第 2 页[30] Joe Repka， $SL_2(R)$ 的酉表示的张量积，American Journal of Mathematics 100（1978），第 4 期，747–774。第 12 页[31] David A. Vogan, Jr.，Harish-Chandra 模的 Gelfand-Kirillov维数，Invent. Math. 48（1978），第 1 期，75–98。第 8 页[32] ———，伴随簇与幺幂表示，《约化群上的调和分析》（缅因州布伦瑞克，1989年），Progr. Math.，第 101 卷，Birkh¨äuser Boston，马萨诸塞州波士顿，1991年，第 315–388 页。第 8 页[33] Genkai Zhang，实有界对称域上的 Berezin 变换，Trans. Amer. Math. Soc. 353（2001），3769–3787。第 17 页[34] ———, 由海森堡抛物子群诱导的 Hermitian 李群主系列，J. Funct. Anal. 282（2022年），第 8 期，论文编号 109399，共 39 页。第 4、9、15 页[35] Chen-Bo Zhu 和 Jing-Song Huang，关于不定正交群的某些小表示，Repre- sent. Theory 1（1997），190–206。第 2、3、9、10 页

奥胡斯大学数学系，Ny Munkegade 118，8000 Aarhus C，丹麦 电子邮箱：fra hm@math.au.dk

查尔姆斯理工大学数学科学系及哥德堡大学数学科学系，SE-412 96 哥¨德¨堡，瑞典 电子邮箱：weiske@chalmers.se

查尔姆斯理工大学数学科学系及哥德堡大学数学科学系，SE-412 96 哥¨德¨堡，瑞典 电子邮箱：genkai@chalmers.se