arXiv:2304.05671v1 [math.CA] 12 Apr 2023

形式单值化参数消失时退化第三 Painlevé 方程的代数函数解

A. V. Kitaev* 和 A. Vartanian 斯捷克洛夫数学研究所，丰坦卡街 27 号，圣彼得堡 191023，俄罗斯

2023年4月11日

摘要

本文研究了退化第三 Painlevé 方程代数函数解的各种性质，

$$u''(\tau)=\frac{(u'(\tau))^2}{u(\tau)}-\frac{u'(\tau)}{\tau}+\frac{1}{\tau}\big(-8\varepsilon(u(\tau))^2+2ab\big)+\frac{b^2}{u(\tau)},\qquad \varepsilon=\pm1,\quad \varepsilon b>0,$$

针对单值化参数 $a=0$ 进行了研究。本文给出了当 $\tau\to+0$和当 $\tau\to+\infty$ 时 $a\in\mathbb{C}$的渐近行为的连接结果。利用这些结果，本文详细考察了具有渐近行为 $u(\tau)\to c\tau^{1/3}$（当 $\tau\to0$，其中 $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$）的最简单的代数分支解，以及其相关积分$\int_0^\tau(u(t))^{-1}\,\mathrm{d}t$，并将它们的基本渐近行为可视化。

2020年数学主题分类。33E17, 34M30, 34M35, 34M40, 34M55, 34M56, 20F55**缩略标题**。退化第三 Painlevé 方程的代数函数解**关键词**。 代数多值函数、渐近行为、考克斯特群、单值化流形、Painlevé 方程

目录

1 引言 **2**

2 在原点全纯的解 $H(r)$ **9**

2.1 存在性 9

2.2 系数 a_n 的性质 . 11

3 代数函数解 **17**

4 单值化数据 **26**

5 Coxeter 群 **31**

6 大-r渐 近似 H（r）及数值方面 35

6.1 例1： H (0) 1 = − 36

6 2 2 H 0 = 60 30 − 100 37

i.例：（）i.6.3 例3： H(0) $=-0.148+$ i0.191.42 6.4 例 4： H(0) $=-100-$ i300.42 6.5 示例 5： H(0) $=-$i300.46 6.6 例6： H(0) $=-0.2+$ i0.045.50 6.7 楼梯斜梁.56

A 附录：函数 $g_2(r)$ 58 B 附录： $\tau\to0$趋近时 $u(\tau)$和 $\varphi(\tau)$关于

$a\in\mathbb{C}$ **60的渐近行为 C 附录： $\tau\to+\infty$趋近时 $u(\tau)$和 $\varphi(\tau)$关于**

$a\in\mathbb{C}$ **61的渐近行为 D 附录：关于论文**

[25] **68的评论**

参考文献 **72**

*E-mail: kitaev@pdmi.ras.ru

1 引言

我们考虑形式为 [25, 26] 的退化第三 Painlevé 方程

$$u''(\tau)=\frac{(u'(\tau))^2}{u(\tau)}-\frac{u'(\tau)}{\tau}+\frac{1}{\tau}\big(-8\varepsilon(u(\tau))^2+2ab\big)+\frac{b^2}{u(\tau)}, \tag{1.1}$$

其中撇号表示对 τ 求导，$\varepsilon=\pm1$、$b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 和 $a\in\mathbb{C}$ 是参数。方程 (1.1) 也称为 D_7 型第三 Painlevé 方程 [32]。

方程 (1.1) 的代数函数解可视为与方程 (1.1) 等价（按 Ince 分类的意义而言）的 Painlevé 型方程的亚纯解 [23], ; 因此，将本文一位作者在 [28] 中为研究 (1.1) 的亚纯解而发展的一些结果和思路，推广至这一更广泛的解类，是很自然的。这些代数函数解从渐近行为的角度来看属于一类有趣的解，因为其大-τ 渐近行为可以用相关亚纯函数的初值明确表示。请注意，在一般情况下，任何 Painlevé 方程都无法得到这样的显式公式。然而，与此同时，代数函数解在无穷远点处的行为又类似于一般解的行为；因此，我们借此机会“展现渐近行为”，即考察最简单代数分支解的若干初值示例，并将数值解的图像与其渐近行为进行比较。这种比较揭示了数值—渐近对应关系的许多有趣特征。鉴于本文对渐近行为的研究，我们在附录 B 和 C 中收录了 [26, 27] 中所得的、经更新和重新表述的连接结果，这些结果涉及方程 (1.1) 对一般 $a\in\mathbb{C}$ 解的渐近行为。本文内容的详细介绍将在简要回顾相关文献之后给出。

我们现在提及一些与本研究主题相关的工作。Gromak [17] 证明了，一般的第三 Painlevé 方程具有代数解，当且仅当它能够（或许借助变换 $u(\tau)\to1/u(\tau)$）化归为带有 i$a=n\in\mathbb{Z}$ 的退化情形 (1.1)：对于每个 n，方程 (1.1) 恰好有三个形如 $R(x)$ 的解，其中 R 是有理函数，且 $(2\varepsilon x)^3=b^2\tau$。从函数的观点来看，我们有一个多值函数，而这三个解是通过对黎曼曲面 $(2\varepsilon x)^3=b^2\tau$ 的层进行循环置换得到的。对于最简单的情形 $a=0$，函数 $R(x)$ 可以通过将 Bäcklund 变换依次应用于 (1.1) 的三个不同解$u(\tau)=\frac{\varepsilon}{2}\sqrt[3]{b^2\tau}$ 来构造。最近，Buckingham 和 Miller [7] 研究了当 $n\to\infty$ 且 $\tau/n^{3/2}=\mathcal{O}(1)$ 时代数解的双重缩放极限。

关于方程 (1.1) 一般解的其他渐近结果，我们提及 Shimomura 最近发表的论文 [36] 。该文利用 Weierstrass $\wp$-函数，给出了沿 $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\mathrm{i}\mathbb{R})$ 中一般方向的类奶酪条带区域内，方程 (1.1) 一般解的椭圆渐近表示。Gamayun、Iorgov 和 Lisovyy 的另一篇有趣论文 [16] ，尤其推导了如何通过从第六 Painlevé 方程到退化第三 Painlevé 方程的适当双重缩放极限，得到渐近展开，并着重讨论了渐近展开系数的组合性质。

过去十年间，越来越多的论文致力于将退化第三 Painlevé 方程及其推广形式（例如 Toda 方程组的柱面约化）应用于应用物理、理论物理和几何学中的某些模型；例如参见 [3, 8, 9, 11, 12, 18, 19, 20, 21, 22, 39, 40, 41]。这些研究大多涉及或报告了某些特殊解在具体应用中的渐近描述方面的新成果。本文既无法也无意概述这些研究，因为这样做会使我们偏离本文的目标。事实上，若能将这些研究整理成一篇综述文章，专门介绍退化第三 Painlevé 方程 (1.1) 的多种表现形式，将会非常有意义。下文仅讨论与当前研究直接相关的工作。

本文的主要研究对象是在 $r=0$ 处全纯的函数 $H(r)$，它满足常微分方程（ODE）

$$H''(r)=\frac{(H'(r))^2}{H(r)}-\frac{H'(r)}{r}+\frac{1}{r}\left((H(r))^2-\frac{1}{H(r)}\right), \tag{1.2}$$

其中，撇号表示对 r 求导。实数情形下的这个函数 $H(r)\in\mathbb{R}$ for$r\in\mathbb{R}$，由 Bobenko 和 Eitner 于 [4] 引入，用作定义 $\mathbb{R}^3$ 中具有两条仿射直线的二维正则不定仿射球面的 Blaschke 度量的函数。他们特别证明，对于这类特殊的仿射球面，函数 $H(r)$ 是一般 Tzitzéica 方程的相似解，该方程描述 $\mathbb{R}^3$ 中的正则不定仿射球面。 [4] 的作者为 Tzitzéica 方程构造了一个特殊的 Goursat 边值问题：该问题的解是一个相似函数，同时也是方程 (1.2) 的解。利用二阶双曲型偏微分方程 Goursat 问题解的唯一可解性，Bobenko 和 Eitner 证明了

实数域上的光滑解 $H(r)$ 的存在性和唯一性，其中 $r=0$。接着，假设光滑解 $H(r)$ 存在，他们从方程 (1.2) 推导出 $H''(r)$ 也是光滑的，并代入展开式

$$H(r) \underset{r\to 0}{=} H(0) + H'(0)r + \mathcal{O}(r^2), \tag{1.3}$$

其中 $\mathcal{O}(r^2)$ 是一个光滑函数，将其代入方程 (1.2)，可证明

$$H'(0) = (H(0))^2 - \frac{1}{H(0)}. \tag{1.4}$$

Bobenko 和 Eitner 还指出，该方程的 Painlevé 性质使人们能够得出若干关于此解定性行为的有用结论，这些结论对仿射球面的几何研究也很有帮助；例如，若 $H(0)>0$，则该解在负 r 半轴上既没有极点也没有零点；而当 $H(0)<0$ 时，光滑解从负 r 半轴上的某个——最大的——极点开始，单调递增，直至正 r 半轴上的第一个零点。

现在，我们开始详细讨论本文的内容。

第 2 节由两个小节组成。在第 2.1 小节中，我们证明，当 $H(0)\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 时，存在唯一一个在 $r=0$ 处全纯的方程 (1.2) 的解：我们采用一种直接的方法，该方法基于对形式幂级数收敛性的证明。之所以选择这种证明方法，是因为在接下来的第 2.2 小节和第 6 节中，我们将使用第 2.1 小节所分析的递推关系。我们在第 2.2 小节的主要目标是研究第 2.1 小节中引入的 $H(r)$ 的泰勒级数展开系数。实际上，我们的目标有两个方面：(i) 阐述这些系数的一些数论性质；(ii) 提供一种有效的计算工具。在获得一些初步结果并使用 Maple 进行试验后，我们得以提出一个猜想，涉及定义泰勒级数系数的 $a_0:=-H(0)$ 中多项式的 内容。第 2.2 小节有相当一部分内容专门讨论如何运用生成函数技术计算这些系数。 [28] 曾提出这一技术，用于研究方程 (1.1) 的全纯解的泰勒系数，适用情形是这些系数为参数 $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的有理函数。方程 (1.2) 与方程 (1.1) 有关（见下文讨论），但其中 $a=0$，而我们的系数则是参数 $H(0)$ 的函数。尽管如此，我们证明生成函数技术在这种情况下同样适用；此外，在附录 A 中，我们提出了一种策略，实际上有助于处理直接计算会导致公式冗长繁复的情形。

通过变量代换

$$y(t)=t^{1/3}H(r), \qquad r=\left(\frac{3}{4}\right)^2 t^{4/3}, \tag{1.5}$$

可证明，方程 (1.2) 变换为第三 Painlevé 方程的标准形式 [23]，其系数为 (1,0,0,−1)，

$$y''(t)=\frac{(y'(t))^2}{y(t)}-\frac{y'(t)}{t}+\frac{(y(t))^2}{t}-\frac{1}{y(t)}, \tag{1.6}$$

其中撇号表示对 t 求导。方程 (1.1) 也可视为具有以下系数集 $(-8\varepsilon, 2ab, 0, b^2)$ 的第三 Painlevé 方程标准形式的特例。当然，可以通过令 $\varepsilon=-1/8$, $b=\pm\mathrm{i}$ 和 $a=0$ 来对应方程 (1.1) 和 (1.6)；然而，由于我们计划使用 [26, 27]，中得到的渐近结果，其中假设 $\varepsilon=\pm1$ 和 $\varepsilon b>0$，因此我们通过为方程 (1.1) 中的系数取以下值来对应这些方程。

$$\varepsilon=b=+1 \qquad \text{and} \qquad a=0, \tag{1.7}$$

并进行如下变量代换

$$\tau=2^{-3/2}\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}t \qquad \text{and} \qquad u(\tau)=-2^{-3/2}\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}/4}y(t). \tag{1.8}$$

为便于日后参考，我们将展开式 (1.3) 改写为函数 $y(t)$ 和 $u(\tau)$ 的形式； $y(t)$ 的展开式可由方程 (1.3) 和 (1.5) 直接得到：

$$y(t) \underset{t\to 0}{=} t^{1/3}\Big(H(0)+H'(0)(3/4)^2\,t^{4/3}+\mathcal{O}\big(t^{8/3}\big)\Big), \tag{1.9}$$

其中，当 $t>0$ 为正时， $t^{1/3}$ 和 $t^{4/3}$ 的分支定义为正值。现在，方程 (1.8) 表明

$$u(\tau) \underset{\tau\to+0}{=} \frac{1}{2}\tau^{1/3}\Big(H(0)-H'(0)(3/2)^2\tau^{4/3}+\mathcal{O}(\tau^{8/3})\Big), \tag{1.10}$$

其中， $\tau^{1/3}$ 和 $\tau^{4/3}$ 的分支定义方式与上文 t 的幂的分支定义方式类似，并假设系数取值为 (1.7)。

第 3 节首先概述方程 (1.6) 的代数函数解。此处的考量基于这样一个事实：方程 (1.6) 具有 Painlevé 性质，其解在原点 $t=0$ 只有一个分支点；因此，当决定解在原点 ($\tau=t=r=0$) 处行为的指数为有理数时，该解就是代数函数解；此外，该解的完整渐近展开中不存在对数项，展开形式为 $t\to 0$。随后，我们定义两类特殊的代数函数解级数（无限数列），并说明如何使之符合代数多值函数的经典定义（例如参见 [38]）：它是一个具有亚纯系数的代数方程的解。这种方法基于对解的渐近展开 $t\to 0$ 的研究。我们推导出该展开的系数关于初值 a_0 的结构。此分析与第 2.2 小节中研究函数 $H(r)$ 的相应部分类似；然而，系数的组合结构更为有趣。接下来，我们不再沿用第 2.2 小节的研究思路，不使用系数的生成函数，而是借助每个代数函数解的小-t 展开，为其定义一组在原点全纯的亚纯函数。利用这些亚纯函数，我们明确构造出上述级数中代数函数解所满足的代数方程。此构造引出了对一些有趣的泛函行列式的研究。最后，我们推导出一些二阶微分方程组，以便将上述代数方程构造中使用的亚纯函数确定为这些方程组在原点全纯的唯一解。我们预计，第 3 节阐述的方法适用于方程 (1.1) 的一般代数函数解；然而，从技术上讲，明确构造可能会十分繁复。

在第 4 节中，我们将重新研究函数 $H(r)$。我们回顾在文献 [26] 中定义的单值化流形，该流形对应于满足方程 (1.1)、系数取值为 (1.7) 时的函数 $u(\tau)$。这个流形唯一地描述函数对 $u(\tau)$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\tau)}$，其中函数 $\varphi(\tau)$ 是一个不定积分，即 $\varphi'(\tau)=2a/\tau+b/u(\tau)$。我们看到，与函数 $u(\tau)$ 相比，函数 $v(\tau):=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\tau)}$ 还依赖一个额外的乘法积分常数；此外，只要已知函数 $v(\tau)$，就可以通过求导直接得到函数 $u(\tau)$。实际上，可以用函数 $v(\tau)$ 对我们的等单值变形方程组 [26] 进行参数化；该函数本身满足一个三阶 Painlevé 方程，此方程可由方程 (1.1) 通过代入 $u(\tau)=-b(2a/\tau+\mathrm{i}v'(\tau)/v(\tau))^{-1}$ 推导得到。然而，我们的目标是比较文献 [25] 和 [26]中的渐近结果。为此，我们从 [26] 的单值化流形的单值化数据中消去乘法常数，从而得到所谓的收缩单值化流形，并证明该收缩流形等价于文献 [25]中考察的单值化流形。第 4 节的主要目的是说明如何利用文献 [26] 中的结果，根据初值$H(0)$，计算与 $H(r)$相关的解 (1.10) 对应的单值化数据。为方便读者，附录 B 中阐述了理解本节内容所需的 [26] 中的一些基本结果。这些结果涉及参数为 $a\in\mathbb{C}$ 且满足 $|\mathrm{Im}\ a|<1$ 时，函数 $u(\tau)$ 及其不定积分 $\varphi(\tau)$ 在 $\tau\to 0$时的渐近行为；它们与方程 (1.1) 有关。如上所述，函数 $\varphi(\tau)$ 与文献 [26, 27], 研究的等单值变形方程组密切相关，因此，它对研究与 $u(\tau)$ 有关的一些定积分的渐近行为很有帮助。与文献 [26], 相比，我们在附录 B 中简化了记号和部分公式，并给出了函数 $\varphi(\tau)$ 的显式渐近表达式。我们期望，第 4 节中给出的详细推导，结合附录 B 对渐近结果的改进表述，能够帮助那些需要为方程 (1.1) 的其他类型解推导类似参数化的读者。

在第 5 节中，我们给出 $a=0$ 时方程 (1.1) 的代数函数解的群论刻画。对于 a 的一般取值，用来“枚举”方程 (1.1) 的解的收缩单值化流形是 $\mathbb{C}^3$ 中的一个三次曲面。该曲面的射影化是 $\mathbb{CP}^3$ 中一个具有 A_3 型奇点的奇异三次曲面。借助这个三次曲面的有理参数化，我们推导出其自同构群 G。该群的一个生成元的公式未被正确定义，因此我们考虑对其进行正则化：对群 G 的限制可得到这种正则化，记作 $G(s)$；其中 s 是一个 Stokes 乘子，它作用于两个互不相交的圆锥曲面的并。这些圆锥曲面的并在 s 取不同值时彼此不相交。因此，将 $G(s)$ 在收缩单值化流形中、位于 $G(s)$ 非平凡作用的圆锥曲面之外的部分上继续定义为恒等变换，我们便可将 G 表示为群 $G(s)$ 的无限直和，其中 $s\in\mathbb{C}\setminus\{-1,3\}$。群 $G(s)$ 同构于以下类型的考克斯特群



其含有一个同构于二面体群 Dih_m, $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 的正规子群。对应的单值化数据属于 m 为有限的圆锥曲线时，该解是代数分支的。此条件等价于对应的 Stokes 乘子 s 是一个实代数数，且

是第 5 节中借助切比雪夫多项式递归定义的多项式方程 $q_m(s)$、 $m \in \mathbb{N}$ 之一的解。数学文献中已知多项式 $q_m(s)$ 表示“ 三角函数型”代数数；特别是，它们的伽罗瓦群是可解的，因此其根（与代数解的斯托克斯乘子相同）可以用根式表示。

第 6 节致力于可视化负-r 半轴上的大-r 渐近行为。在本节中，我们将函数 $H(r)$ 和 $I(r)$ 的数值图像: $= \int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\,\mathrm{d}r = (\varphi(\tau) - \varphi(0))\ |_{\tau^{2/3}=\frac{2}{3}\sqrt{-r}}$与它们的渐近行为图像进行比较，其中函数 $\varphi(\tau)$ 已在上文讨论。为方便读者，我们分别在附录 B 和 C 中总结了先前关于方程 (1.1) 对一般 $a \in \mathbb{C}$ 的解的小型和大型-τ 渐近行为的结果 [26, 27] ；此外，读者还将在这些附录中找到关于函数 $\varphi(\tau)$ 渐近行为的若干新结果。在我们先前的论文中 [27, 28, 29], , 我们发现并纠正了 [26]中的一些错误；因此，我们已将修正后的结果汇编于附录 B 和 C 中。此外，在这些附录中，我们改进了记号并简化了部分公式：所有这些更改均已在其中注明。

我们所说的“渐近行为的可视化”，是指将数值解的图像与其渐近行为进行视觉比较。这种比较主要有三个目标：(i) 对于不同的初值 $H(0)$，观察函数 $H(r)$ 和 $I(r)$ 在“有限”距离处的行为；(ii) 验证渐近公式的正确性；(iii) 了解这些函数以何种速度达到其渐近行为。从应用的角度来看，这些目标对于理解这些函数至关重要；然而，要为这些概念奠定严谨的数学基础，绝非易事。

第 6 节包含六个示例，这些示例经过特意选择，用于展示函数 $H(r)$ 和 $I(r)$ 对负-r 半轴上初值 $H(0)$ 的依赖关系，以及其渐近近似的特征。这些示例并不代表已知解的完整列表：此处未提及的解代表某些特殊解类（在我们的情况下，是依赖于一个实参数的解），并具有某些特定的渐近行为；例如，在负-r 半轴上奇异的解，或所谓的截断解 [42]。

有句古谚说道：“书中千言，不如一见。”在我们的研究语境中，可以将其改述为“渐近行为的可视化”。然而，若没有计算机模拟的帮助，就无法获得“当下的一瞥”；在计算机模拟中，结果的呈现会经由相应的计算机程序进行修正，因此，有必要讨论这种修正的一些特征。这些特征与这样一个事实有关：方程 (1.2) 在$r = 0$处有一个奇点，而初始数据正是在此处指定的。

乍一看，一切似乎都很简单：如果观察到某个函数的图像与其渐近行为在一段长度适中的区间内彼此趋近，那么就可以得出结论：该渐近行为是正确的.....或者，至少很可能是正确的.....当然，这里有一个微妙之处，那就是“长度适中”这一概念，而它并不那么显而易见。由于我们研究的是渐近行为，因此必须在相对较长的距离上对其进行验证，因为在某些情况下，尽管数值解及其所提出的渐近行为在较短距离内彼此接近，但在更长距离上却可能发生偏离。例如，如果渐近公式中存在一个子式错误，就可能出现这种情况：解的行为尚未稳定下来，而在这一阶段，错误对其产生了部分补偿；图像之间的一些残余差异，则可以解释为渐近行为本来就不应当与解完全重合。为了排除渐近行为中存在错误的可能性，我们必须增加比较区间的长度。然而，这样做可能会损害数值解的精度，从而使得渐近行为本身是正确的，但两者之间的差异却开始增大。这两个问题都可以得到纠正，但结果是，我们将不得不在相对较大的区间上比较图像。随后，为了适应标准页面，计算机程序会对图像进行适当的缩放。结果，图像的某些特征可能会丢失；例如在我们的情形中，在第6节所展示的一些图中（另见下文的图1和图2），读者会看到尖峰和冰锥状尖峰，尽管所有函数实际上都是，事实上，光滑的，并且在它们的极值点处，导数均为零，然而“看上去”却仿佛它们接近无穷大。与缩放有关的另一个问题，是最初两个峰值/冰锥状尖峰的长度，因为它们是最狭窄的。图像是根据有限数量的点绘制的，而其中真正落入狭窄峰值/冰锥状尖峰内部的点非常少。实际上，当绘图点的数量不足时，这些峰值/冰锥状尖峰就像由长度随机的木棍搭成的栅栏。观察这样的图像，人们可能会得出结论，认为这种情况是因为负r 半轴附近的极点位于随机距离处，然而事实并非如此！当然，从渐近行为的角度来看，距离原点相对较近处的解的行为并不是一个特别重要的问题，因为我们想看到的是：在长于前两个峰值/冰锥状尖峰所在位置的距离上，一切都是正确的；然而，在许多情况下，即使在这些非常短的距离上，渐近行为也仍然类似于数值解的行为，这与解达到其渐近行为的速度问题有关；因此，即使在如此短的距离上，观察相应图像之间的差异也颇为引人入胜。最初峰值/冰锥状尖峰的真实长度可以通过考察这些峰值/冰锥状尖峰的特写图来确定；在最复杂的情况下，还可以通过采用更小的步长进行数值计算来确定。

尺寸。随后，调整用于生成图像的计算点数量，以便更好地对应峰值/冰锥状尖峰的长度。对于第 6 节中的示例，在缩放图和特写图中，前两个峰值/冰锥状尖峰的长度差异约为 5% 至 6%，或更小；而后续峰值/冰锥状尖峰的差异则无法观察到。我们在部分示例中展示了这类特写图，以便读者比较峰值/冰锥状尖峰的实际长度与缩放图中的长度。这些特写图还向读者展示了数值解的大-r 渐近行为在很短距离内的近似质量：在非特写图中，由于缩放的缘故，这种近似看起来更好。

人们可能会问：用大参数渐近行为在有限距离、甚至很小的距离处逼近一个函数，这种想法从何而来？其实，“有限”和“小”都不是定义明确的概念；毕竟在实际应用中，如果要将一个函数与其渐近行为进行比较，就必须从某个“有限”的辐角值开始比较！回想前面提到的谚语，读者可能会问：应该“看”哪里，才能确信渐近行为确实能正确逼近函数？另一个问题是，所有具有实际价值的数学模型都适用于某些有界区域（时间、距离等）；因此，我们必须弄清楚，我们的渐近行为是否确实适用于所关注的区域，还是只适用于远离这些区域的地方。

上一段讨论的要点可借助下方的图1和图2直观呈现。

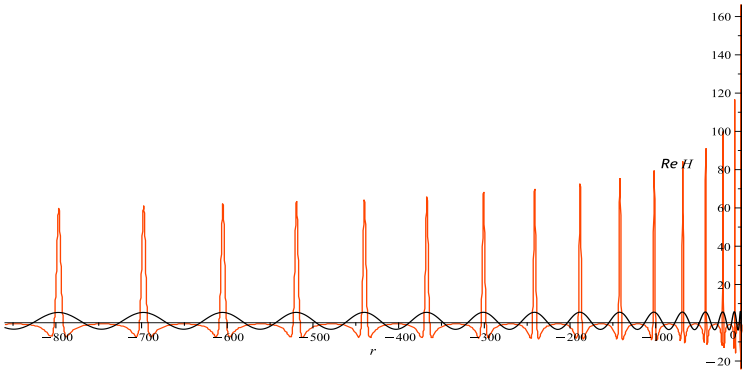

图1：红色和黑色图像分别表示函数 $H(r)$ 的数值解和大-r 渐近解（参见方程 (6.1)）的实部，其中 $r \leqslant -0.1$ 对应于初值 $H(0) = -0.2 + \mathrm{i}0.045$（见第6.6小节）。

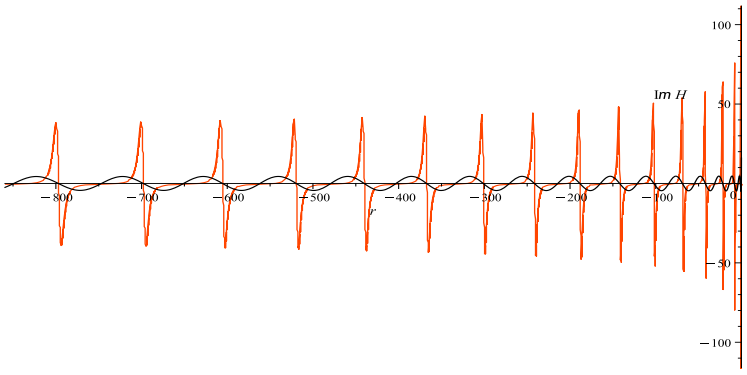

图 2：红色和黑色图像分别表示函数 $H(r)$ 在 $r \leqslant -0.1$ 对应于初值 $H(0) = -0.2 + \mathrm{i}0.045$（见第6.6小节）时的数值解和大-$r$ 渐近值（参见方程 (6.1)）的虚部。

在图1和图2中，红色图像分别表示例6中第 6节所考察的函数 $H(r)$的实部和虚部。这些图中的黑色图像是渐近行为中相应的首项。“看一眼”似乎表明存在某些问题：（i）或许是渐近行为有误；（ii）或许是渐近行为开始适用时所对应的距离；或者（iii）或许是缺少修正项？我们的主张如下：（i）渐近行为事实上是正确的；（ii）能够将这些事实直观呈现出来的适当距离在数值上无法达到；并且（iii）有限个修正项并不能帮助直观呈现渐近行为是正确的，尽管相对于原点，在更大的距离上，它们可能有助于改善图像之间的对应关系。

我们现在来论证上述结论。我们如何知道渐近行为是正确的？事实上，我们有两个适用区域重叠的渐近公式，其中一个见于 [26], , 另一个见于 [27]。取自 [26] 的公式在图1和图2中以可视化方式呈现，而取自 2 的公式则在第6.6小节的图33和图35中呈现：可视化结果表明，对于 $r \leqslant -0.1$，后一个公式能以极高的精度逼近数值解。这个取自 [27] 的公式还可以针对非常大的 $|r|$ 进一步简化，从而可以说得到“渐近行为的渐近行为”，进而获得一个简化的渐近公式，它与图1和图2中绘出的公式一致。简化后的渐近行为表明，当 $|r| \to \infty$ 时，Re $H(r) \to 1$ 。在第6.6小节中，我们估算了图1所示图像变为正值所需的距离：估算结果表明，计算数值解所需的时间和精度远超现代计算机的能力；此外，即使我们能够执行这样的计算，也无法将其可视化，因为我们只能看到对应图像的零星片段，完全无法辨别这些片段之间的联系。若不了解这些渐近行为之间的相互作用，原则上可以继续计算至类似 $r = -10^4$、$-10^5 \ldots$ 这样的值，并观察到图像变化得非常缓慢，即数值解的最大值略微减小，而最小值略微增大，最大值之间的距离按 n 增长，其中 n 是准周期的个数（图像中两个相邻峰值之间的部分）；缩放会缩短这些距离，但不会将其完全消除，而且从视觉上看，整体图像仍与所展示的图像非常相似。修正项可能会改变极值的位置，并使图像在其邻域内变窄；然而，由于图像变化得非常缓慢，仅用有限个（例如 5 到 10 个）修正项，不可能得到这样的尖峰。[1] 如果我们没有论文 [27], 中的第二个渐近公式，那么我们很可能会借助图1和图2说明，来自 [26] 的渐近行为对这些图中所示的解 $H(r)$ 并不成立！读者会注意到，对于某些 $H(r)$ 的初值，与上文讨论的例子相反，取自 [26], 的第一个渐近行为在有限的 r 值下对解的逼近效果更好，因此更适合研究具有这类初值的解。

第 6节中考察的六个例子均附有三类评论：(i)相应Maple程序中所采用的设置，读者可据此复现我们的图像，或为方程(1.1) 的其他解生成图像；(ii) 我们对这些解的定性行为及相应渐近行为的理解；以及(iii) 当我们遇到解的出乎意料的行为时，嵌入脚注中的一些带有情感色彩的评论。现在我们依次讨论这些内容。

(i) 数值解的构造基于柯西问题，其初始数据为 $H(0)$、$H'(0)$ 和 $I(0) = 0$，其中 $H'(0)$ 由式 (1.4) 给出。这里涉及的问题是，方程 (1.2) 在 $r = 0$ 处有一个奇点。看来 Maple 有一种算法，可以在这种情况下进行计算，但必须确保它严格满足初始条件 (1.4)。对于一些选定的初始数据（见附录 D，图 42–44），我们能够使用标准 Maple 程序进行数值计算，以生成相应的图像；但当初值 $H(0)$ 稍有变化，例如从 $5/7$ 变为 $4/7$ 或 $3/7$ 时，标准程序就无法运行。因此，我们不得不考虑在靠近原点的某个点 r_1 处设置柯西问题。由于我们研究的是大-r 渐近行为，因此必须在相对较长的区间上构造解。区间越长，越靠近区间远端的解精度就越低。因此，在计算中，我们必须设法保证数值解的计算精度足以满足与其渐近行为进行比较的需要。为此，我们采用了 [2] 中使用的方法：我们选取一个在我们看来相当小的值 r_1，例如，在该值下进行精度良好的计算，绘制所分析函数的图像；然后为 r_1 另选一个值，通常使其离原点近 10 倍，比较这些图像；接着将计算精度提高一倍，再比较图像；如果图像在某个区间上重合，就将该区间的长度增加 1.5 到 2 倍，并检查是否出现偏差。图像用不同颜色绘制，因此可以很容易地目视判断它们是否重合。这一带有算法性质的过程并不像乍看之下那么复杂，因为积累了一些经验后，第一次近似就已经足够好，通常只需再进行 2 到 3 次计算，就能确认数值解在所选区间上具有足够的精度。函数 $H(r)$ 的渐近行为计算不存在任何问题，因为误差不会随计算距离的增加而累积，所以这里不需要特别高的精度。与此同时，函数 $I(r)$ 渐近行为的数值计算则更为微妙，所需执行时间甚至远远超过相应数值解的计算时间。

(ii) 我们还通过渐近行为补充了一些示例，解释解的行为及其近似解的某些特征。这些解释应被视为初步观察，并希望它们日后能够发展到方程定性分析的层面

[1] 总的来说，显式计算超过 10 个修正项非常耗时（见附录 C）。保留的修正项越多，渐近行为就能为函数 $H(r)$ 和 $I(r)$ 提供越来越好的近似，因为 r 继续向远离原点的方向移动。

（1.1）。如上所述，光滑实解的定性分析相当简单，事实上， [4] 已经完成了这项工作。复解的定性分析则更有趣；在这种情况下，稳定与不稳定吸引曲线之间会发生“相互作用”（对于函数 $H(r)$，这些曲线是直线；对于 $I(r)$，则是抛物线），这使解的行为复杂得多。有人可能会问，有限极点和/或零点是否会导致在负 r 半轴上无法进行解的数值计算。对于某些特殊解类，例如满足 $H(0) < 0$ 的实解（见上文讨论），这一问题确实存在。对于初始数据 $H(0)$ 随机选取的复解，这一问题在实践中并未出现：尽管我们研究了许多复解示例，其中若干已在本文中展示，但至今尚未遇到这一问题。

(iii) 对比渐近行为与数值解，对我们而言是一件令人意外地激动人心的事：请记住，我们用来推导渐近公式的方法，即等单值变形法，并未“暗示”方程 (1.1) 直接参与渐近分析；而数值方法则基于用于近似该方程解的差分格式。因此，当我们看到数值图像和渐近图像几乎合并为同一条曲线时，这仿佛体现了数学的完整性。与此同时，图1和图2展示了一个例子，正如上文所述，其中渐近结果的正确性只能从理论上加以论证。在这些图中，渐近结果和数值解至少位于图像的同一“区域”，且离负r 半轴不远。对于相应的积分 $I(r)$，则出现了更令人惊讶的情况。根据我们的研究， $I(r) \underset{r\to-\infty}{=} 2\sqrt{-r} + \mathcal{O}(1)$。实际上，在第 6 节的例1和例2中，我们证实了这种渐近行为；然而，在第 6 节的例3–6中，对于随机选取的初始值 $H(0)$， $I(r)$ 图像中初始且相当长的一段却出人意料地位于负r 半轴下方！即使大幅延长积分区间， $I(r)$ 仍然沿着错误的趋势变化！进一步延长积分区间后，函数 $I(r)$ 的行为突然转变为正确的渐近行为！结果，数值解的图像就像一座“地下掩体”，有两段阶梯通向地面，但方向相反。有人或许会认为，我们没有近似右侧阶梯的公式；但事实上，我们确实有一个公式，只需作一个可能的 $2\pi k$ 平移，对于某个整数 k，便能对右侧阶梯给出合理的近似！究竟是谁，或什么样的实体，能居住在这样一座掩体里，并设法破坏函数 $I(r)$ 的正确行为？[2] 基于脚注 2 中解释的原因，我们将这座地下掩体称为“鼹鼠的居所”。另一方面，我们找到了某些初始值，对于这些初始值，我们无法通过数值计算到达鼹鼠的居所：其中一个初始值将在第 6 节的例6中讨论。借助渐近结果，我们估算了鼹鼠居所的位置：这一位置表明，它不可能由普通鼹鼠居住。[3] 因此，可视化研究中引发情绪的核心悬念，关乎解达到其大-r 渐近行为的速率。当这种渐近行为在 r 接近原点的取值处实现时，还会引出一个问题：它为何发生得如此迅速？最初推导函数 $u(\tau)$，进而推导 $H(r)$ 的渐近结果时，我们在假设 τ 非常大的条件下，大幅简化或忽略了许多中间表达式；然而，当 τ取值较小时，这些项却与最终构成渐近首项的项十分接近！在我们的研究中，一个非常有利的条件是：对于函数 $H(r)$ 和 $I(r)$，我们各有两个渐近公式，它们在初始值 $H(0)$ 的重叠区域内均有效。我们发现，至少有一个渐近公式能够从较小的 r值开始，就为相应的解提供良好的近似。我们认为，这些可视化研究中的情绪因素表明，有必要对方程 (1.1) 的复解进行定性分析，以此搭建一座连接数值方法与间接渐近方法的桥梁。

在论文的正文中，我们讨论 $a = 0$ 的方程 (1.1)；因此，我们决定通过取函数 $H(r)$ 作为示例，在附录 D 中验证工作 [25] 中获得的一些结果。与第 6 节中讨论的示例不同，在附录 D 中，我们考虑正则的 **实** 解$H(r)$。在论文 [25] 发表时，出版物的页数受到严格限制，所有公式都以手写形式呈现；遗憾的是，这导致了许多印刷错误。在附录 D 中，我们纠正了所有乍看之下显而易见的此类印刷错误（无需任何额外计算），然后展示这些结果与附录 B 和 C 中所给结果的一致性。在附录 D 中，我们评论了该论文的俄文版本 [25]。

[2] 那么，该如何理解呢？没错，这让人想起18世纪中叶、卡洛·戈尔多尼笔下特鲁法尔迪诺的家！到了21世纪，这可以解释为某个同时为两个情报机构工作的人的住所，也就是“鼹鼠”的家。不过，我们对这类鼹鼠只有模糊的概念，却很熟悉生活在花园里的鼹鼠。沿着这个思路继续思考（进一步考察图像），便会明白，函数 $I(r)$ 可以被解释为描述鼹鼠地下活动的简化数学模型（详见小节

6 7 $I\ r\quad the\ mole$. 的最 $function$ 后一段）。介绍完这一点后，读者或许会选择将 ( ) 称为.....。[3] 这让我们想起亚伯拉罕诸教中广为人知的“堕落天使”概念。我们看到，对于不同的初始值，函数 $I(r)$ 可能有不同的解释。

在 [25], 英文译本问世两年后；与原版本相比，其中包含了额外的印刷错误：附录 D 也对这些印刷错误进行了说明。

2 在原点全纯的解 $H(r)$

本节由两个小节组成。在第 2.1 小节中，我们证明方程 (1.2) 的解 $H(r)$ 在 $r=0$ 处全纯。在第 2.2 小节中，我们研究 $H(r)$ 的泰勒级数展开的系数的一些数论性质。

2.1 存在性

命题 2.1. 对任意 $a_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$，方程 (1.2),

$$H(r) = -a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k, \tag{2.1}$$

其中系数 $a_k \in \mathbb{C}$ 与 r 无关。

证明。对于 $a_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$，将展开(2.1)代入方程(1.2)，并令 r^k、 $k=-1$、0、.....的同次幂的系数为零，可得到

$$a_1 = \frac{a_0^3+1}{a_0}, \tag{2.2}$$

以及系数 a_k 的以下递推关系,

$$\begin{aligned}(n+1)^2 a_0 a_{n+1} = \big((n-1)^2 a_1 - 3a_0^2\big)a_n + 3a_0\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} + \sum_{i=2}^{n-1}(n+1-i)(n+1-2i)a_i a_{n+1-i} \\ - \sum_{\substack{i+j+k=n\\ i,j,k\geqslant 1}} a_i a_j a_k, \qquad n=1,2,\dots,\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中采用约定 $\sum_{i=2}^{0} X_i = -X_1$ 和 $\sum_{i=1}^{0} X_i = 0$ 。 □

Le引理 2.1. 对于任意 $a_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$，存在 $R>0$ 和 $N>0$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}$,

$$|a_n| < N\frac{R^n}{n^2}. \tag{2.4}$$

如果 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$的紧子集，那么存在 $N>0$ 和 $R>0$，使得估计 (2.4) 对所有 $a_0\in\mathcal{D}$ 均成立。

证明。证明采用数学归纳法。归纳论证的基础是以下不等式（参见下文 (2.17)）

$$|a_1| < NR, \qquad |a_2| < NR^2/4. \tag{2.5}$$

乘 以 $3|a_0|/4$ 乘方程 (2.2)，可见不等式 (2.5) 得以满足，前提是 d

$$R > \max\left\{3|a_0|, \frac{|a_0|^3+1}{|a_0|\,N}\right\}, \tag{2.6}$$

其中 $N>0$ 至此仍是任意的。现在假设对于所有 $n=1$、2、.....、 m，不等式 (2.4) 均成立，并证明它对 $n=m+1$ 也成立。将 $n=m$ 代入递推关系 (2.3)，并将等式两边除以 a_0，接着依次估计右侧的四个项:

(1)

$$\begin{aligned}\big|\big((m-1)^2a_1 - 3a_0^2\big)a_m/a_0\big| &\leqslant \left((m-1)^2\frac{|a_1|}{|a_0|} + 3|a_0|\right)|a_m| \leqslant \left(\frac{(m-1)^2}{m^2}\frac{NR}{|a_0|} + \frac{3|a_0|}{m^2}\right)NR^m \\ &< \left(\frac{N}{|a_0|} + \frac{3|a_0|}{Rm^2}\right)NR^{m+1} \leqslant \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)NR^{m+1} = \frac{NR^{m+1}}{4},\end{aligned} \tag{2.7}$$

wh这里我们考虑了 $m\geqslant 2$，并对 N 和 R 施加了以下条件 :

$$0 < N \leqslant \frac{|a_0|}{8}, \qquad R \geqslant 6|a_0|. \tag{2.8}$$

(2)

$$\left|3\sum_{i=1}^{m-1}a_ia_{m-i}\right|\leqslant 3N^2R^m\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i^2(m-i)^2}=\frac{3N^2R^m}{m^2}\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{m-i}\right)^2$$
$$=\frac{3N^2R^m}{m^2}\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{(m-i)^2}+\frac{2}{m}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{m-i}\right)\right)=\frac{3N^2R^m}{m^2}\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{2}{i^2}+\frac{4}{m}\cdot\frac{1}{i}\right) \tag{2.9}$$
$$<\frac{3N^2R^m}{m^2}\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{4}{m}\left(1+\frac{m-2}{2}\right)\right)=\frac{N^2R^m(\pi^2+6)}{m^2}\leqslant\frac{16N^2R^m}{4}\leqslant\frac{NR^{m+1}}{4},$$

其中，在最后一个不等式中，我们假设

$$R\geqslant 16N. \tag{2.10}$$

(3)

$$\left|\frac{1}{a_0}\sum_{i=2}^{m-1}(m+1-i)(m+1-2i)a_ia_{m+1-i}\right|\leqslant\frac{N^2R^{m+1}}{|a_0|}\left(\sum_{i=2}^{m-1}\frac{|m+1-2i|}{(m+1-i)i^2}\right)$$
$$\leqslant\frac{N^2R^{m+1}}{|a_0|}\left(\sum_{i=2}^{m-1}\frac{1}{i^2}+\sum_{i=2}^{m-1}\frac{1}{i(m+1-i)}\right)=\frac{N^2R^{m+1}}{|a_0|}\left(\sum_{i=2}^{m-1}\frac{1}{i^2}+\frac{2}{m+1}\sum_{i=2}^{m-1}\frac{1}{i}\right) \tag{2.11}$$
$$<\frac{N^2R^{m+1}}{|a_0|}\left(\frac{\pi^2}{6}-1+\frac{m-2}{m+1}\right)<\frac{\pi^2N^2R^{m+1}}{6|a_0|}\leqslant\frac{NR^{m+1}}{4},$$

其中施加了以下不等式,

$$0<N\leqslant\frac{3|a_0|}{20}. \tag{2.12}$$

(4)

$$\left|\frac{1}{|a_0|}\sum_{\substack{i+j+k=m\\ i,j,k\geqslant 1}}a_ia_ja_k\right|=\left|\frac{1}{|a_0|}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\sum_{j=1}^{m-i-1}a_ja_{m-i-j}\right|\leqslant\frac{N^3R^m}{|a_0|}\sum_{i=1}^{m-2}\frac{1}{i^2}\sum_{j=1}^{m-i-1}\frac{1}{j^2(m-i-j)^2}$$
$$<\frac{N^3R^m}{|a_0|}\sum_{i=1}^{m-2}\frac{1}{i^2(m-i)^2}\left(\frac{\pi^2}{3}+2\right)<\frac{N^3R^m}{|a_0|m^2}\left(\frac{\pi^2}{3}+2\right)^2<\frac{NR^{m+1}}{4}, \tag{2.13}$$

其中，最后一个不等式基于

$$\frac{N^2}{|a_0|R}\left(\frac{\pi^2}{3}+2\right)^2\leqslant 1. \tag{2.14}$$

现在，可以验证存在 $N>0$ 和 $R>0$，使条件 (2.6)–(2.14) 成立。实际上，任取满足不等式的 N 即可。

$$0<N<\frac{|a_0|}{8}, \tag{2.15}$$

并且，对于 N 的该取值，取

$$R=\max\left\{16N,6|a_0|,\frac{|a_0|^3+1}{|a_0|\,N}\right\}. \tag{2.16}$$

在这种情况下，条件（2.6）和（2.10）–（2.14）自动满足。

如果 $a_0\in\mathcal{D}$，那么函数 $|a_0|$ and $(|a_0|^3+1)/|a_0|$ 有最小值和最大值。在这种情况下，我们在条件 (2.15) 中用 $\min(|a_0|)$ 代替 $|a_0|$，并在 (2.16) 中分别用 $|a_0|$ 和 $(|a_0|^3+1)/|a_0|$ 的最大值代替相应项。因此，估计 (2.7)–(2.13) 对所有 $a_0\in\mathcal{D}$ 均成立。

最后，将估计(2.7)–(2.13)相加，我们得到关于 $n=m+1$的不等式 (2.4)，其中 N 和 R 分别按 (2.15) 和 (2.16) 中的定义给出。 □

推论 2.1。级数 (2.1) 在 $a_0\in\mathcal{D}$ 上一致收敛，其中 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的紧致域。收敛半径 $1/R$ 由引理 2.1 估计。

2.2 系数的性质 a_n

利用递推关系 (2.3)，我们借助 Maple 计算了前几个系数 a_k:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{3}{4}(a_0^3+1), \quad a_3 = \frac{(a_0^3+1)(2a_0^3+1)}{4a_0^2}, \quad a_4 = -\frac{(a_0^3+1)(20a_0^3+17)}{64a_0}, \\ a_5 &= \frac{3(a_0^3+1)(100a_0^6+122a_0^3+25)}{1600a_0^3}, \quad a_6 = -\frac{(a_0^3+1)(700a_0^6+1113a_0^3+416)}{6400a_0^2}, \ldots. \end{aligned} \tag{2.17}$$

备注2.1. 显然，方程(1.2)有三个常数解，$(H(r))^3 = 1$。就方程(1.1)的解 $u(\tau)$ 而言，这些解可以合并为代数解 $u(\tau) = \tau^{1/3}/2$ 的三个分支。这个事实可以重新表述为：系数 a_k的分子是关于 a_0^3的多项式，并且可被 a_0^3+1整除。显然，借助递推关系 (2.3)，最后一个陈述可以通过归纳法直接证明。■

命题 2.2.

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{\kappa_n(a_0^3+1)P_n(a_0^3)}{(n!)^2 a_0^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}-(-1)^n\frac{3}{4}}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.18}$$

其中 $\kappa_n \in \mathbb{N}$ 和 $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$，且deg $P_n(x) \leqslant \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$，$\lfloor * \rfloor$ 表示实数的向下取整。

证明。证明采用数学归纳法（借助递推关系(2.3)）。归纳法的底空间是方程 (2.2) 和(2.17) 的结果。为了完成从 a_m 到 a_{m+1}的归纳步骤，在递推关系中改变 $n \to m$，并假设对于所有 $n \leqslant m$，(2.18)都成立，将其代替 a_n代入(2.3)，然后将最后一个方程的两边都除以$(n+1)^2 a_0$。最后，在所得到的方程左端有 a_{m+1}，而在右端则有若干项之和；根据假设(2.18)，其中每一项都具有预期的形式，从而得到 a_{m+1}。为看清这一点，需要将每一项同时除以并乘以 $(m!)^2$,，并注意到各项分母中的数值系数恰好是 $((m+1)!)^2$,，而它们的分子可以表示为自然数 κ_j 与二项式系数在二重和中、三项式系数在三重和中的乘积。为了确定各项关于 a_0 的函数依赖关系，分别考虑 m取奇数值和偶数值的情形是方便的。方程 (2.3)中的各个和也适合按奇数指标和偶数指标分别拆分。最后，将所有项相加，便得到命题中关于 $n = m+1$ 所陈述的结果。

□

注2.2。引入这些数 κ_n 是因为，稍后我们会提出一个猜想，说明如何选择它们，从而使多项式 $P_n(x)$ 的系数互质。事实上，我们将在下文证明 deg $P_n(x) = \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$；然而，要借助基于递推关系 (2.3) 的归纳过程来确认这一点，过程颇为迂回，因为多项式 $P_{m+1}(a_0^3)$ 是若干多项式的线性组合，这些多项式的次数相同，但整数系数有正有负（见下文注2.4中的方程 (2.27)）。■

注2.3。在继续之前，先回顾数论中的一些基本概念：$\nu_3(\cdot)$ 是相应自然数的 3进赋值，即它能被整除的最高次 3 的幂；而 $|n!|_3 = 3^{-\nu_3(n!)}$ 是 $n!$ 的 3进绝对值（因此 $n!|n!|_3$ 与 $n!$ 在素数上的分解相同，只是省略了对应于 3 的项）。

在本小节中，我们用记号 b_n 表示 n 的三进制各位数字之和：它是在线整数数列百科全书（OEIS）中的数列 A053735 [5]。Benoit Cloitre [5] 给出了一个有用的公式，可用于大-n计算 b_n：

$$b_n = n - 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{3^k}\right\rfloor. \tag{2.19}$$

将方程 (2.19) 与著名的勒让德公式 [30] 进行比较很有意思。该公式给出了 $n!$ 的 3进赋值：

$$\nu_3(n!) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{3^k}\right\rfloor.$$

为多项式 $P_n(x)$ 的系数引入以下记号：

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} p_k^n x^k, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.20}$$

整数系数多项式的内容是其系数的最大公约数（g.c.d.） [33], 即,

$$\mathrm{cont}(P_n) = \mathrm{g.c.d.}\left\{p_0^n, \ldots, p_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}^n\right\}. \tag{2.21}$$

一个多项式 式，其系数互素，被称为本原的；等价地， P_n 是本原的，当且仅当

$$P_n \in \mathbb{Z}[x] \quad \text{and} \quad \mathrm{cont}(P_n) = 1. \tag{2.22}$$

■

命题 2.3。

$$\kappa_n P_n(-1) = (-1)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} 3^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.23}$$

证明。设 $f_m = (-1)^{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor+1}\kappa_m P_m(-1)/(m!)^2$。考虑关于 $n = m$ 的递推关系 (2.3)，并将其除以 $a_0^3 + 1$。然后，结合 (2.18)，代入 $a_0 = -1$ 并考虑到

$$(m-1) - \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4} - (-1)^m\frac{3}{4}\right) - \left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor - 1 = \begin{cases} -2 & m \text{ is odd}, \\ 0 & m \text{ is even}, \end{cases} \tag{2.24}$$

我们得到 $(m+1)^2 f_{m+1} = 3f_m$。将关于 $m = 1, \ldots, n-1$ 的最后一个方程相乘，可证明 $(n!)^2 f_n = 3^{n-1} f_1$；由于 $f_1 = -1$，可得到 $(n!)^2 f_n = -3^{n-1}$，这可以改写为方程 (2.23)。 □

推论 2.2. 对所有 $n \in \mathbb{N}$，多项式 $P_n(x)$ 不能被 $x+1$ 整除。

证明. 反证；否则，存在某个 n，使得 $P_n(-1) = 0$ ，这与 (2.23) 矛盾。 □

推论 2.3.

$$\mathrm{cont}(P_n) = 3^{c_n}, \qquad \kappa_n = 3^{d_n}, \qquad where \quad c_n, d_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

借助递推关系 (2.3) 对试探解 (2.18) 作进一步研究似乎无济于事；然而，利用 Maple 进行额外的尝试，可以提出以下

猜想 2.1.

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{3^{\nu_3(n+1)}(a_0^3+1)P_n(a_0^3)}{(n!|n!|_3)^2 a_0^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}-(-1)^n\frac{3}{4}}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.25}$$

其中 $P_n(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式，具有正整数互素系数，且 $\deg P_n = \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$。

前几个多项式 $P_n(x)$（参见猜想 2.1）如下:

$$\begin{gathered} P_1(x) = P_2(x) = 1, \;\; P_3(x) = 2x+1, \;\; P_4(x) = 20x+17, \;\; P_5(x) = 100x^2+122x+25, \\ P_6(x) = 700x^2+1113x+416, \;\; P_7(x) = 19600x^3+38416x^2+21275x+2450, \\ P_8(x) = 78400x^3+182672x^2+134227x+29952, \;\; \ldots. \end{gathered} \tag{2.26}$$

注 2.4. 在本小节接下来的部分中，我们将简要概述 [28], 中发展的生成函数技术。该技术可以推导出对于任意给定的 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} := \{0\} \cup \mathbb{N}$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$，多项式 $P_n(x)$的系数 p_k^n 和$p^n_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-k}$ 的显式公式。注意，这种技术可以证明，对于所有 $n \in \mathbb{N}$都有$\kappa_n p^n_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} > 0$，这意味着 $\deg P_n = \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$。此外，如果 $\kappa_n = 3^{\nu_3(n+1)+2\nu_3(n!)}$ 固定，如猜想 2.1 中所假设的那样，那么我们可以证明多项式 $P_n(x)$是本原的。

因此，猜想 2.1 包含三个非平凡的陈述：(1) 系数 κ_n 的值；(2) 对于 κ_n 的这一选择，系数 $p_k^n \in \mathbb{N}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k = 0$, ..., $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$均成立；以及 (3) 断言 $P_n(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式。下面我们具体解释与论证第 (2) 项相关的问题。递推关系 (2.3) 可以改写如下:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 a_0 a_{n+1} = {} & -3a_0^2 a_n + 3a_0\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} - \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k\geqslant 1}} a_i a_j a_k \\ & + \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(n-2i+1)^2 a_i a_{n+1-i}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{2.27}$$

如果我们假设猜想 2.1 成立，那么 (2.27) 第一行中每一项的符号为 $(-1)^n$，而 (2.27) 第二行求和中的每一项的符号为 $(-1)^{n-1}$。

本文并未详尽阐述生成函数的技巧，而是概述了运用该技巧可以得到的一些非平凡结果。关于这类生成函数还可得到的更多结果，见 [28]。

仔细考察方程（2.25）可知，系数 a_n 关于参数 a_0 有三个奇点：-1、0 和 ∞。对于每个奇点，都可以构造出一个关于多项式 P_n 系数的生成函数无穷级数。-1 还有另外两个立方根，但相应的生成函数可以通过对称性由对应于 -1 的生成函数得到。

以下命题均在猜想 2.1 成立的假设下证明。某些结果无需借助这一猜想即可得到：这些情形会特别注明。■

命题2.4。

$$3^{\nu_3(n+1)}P_n(-1) = (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}3^{b_n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.28}$$

其中，序列 b_n 在注2.3中定义。

注2.5。例如，考虑 $n = 34 = 1021_3$，使得 $b_{34} = 1 + 0 + 2 + 1 = 4$, $\nu_3(35) = 0$，因此$P_{34}(-1) = 3^3$。■。

证明。这个结果与 $a_0 = -1$ 的第一个生成函数有关。一般而言，与 $a_0 = -1$ 相关的生成函数构造如下。通过 $a_0 = -(1-\varepsilon)^{1/3}$ 定义 ε；于是，展开 (2.1) 可以改写为

$$H(r) = (1-\varepsilon)^{1/3} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(r)\varepsilon^k, \tag{2.29}$$

其中系数 $g_k(r)$、$k = 1$、2、.....是生成函数。为得到命题中所述的结果，需要生成函数 $g_1(r)$。将展开式（2.29）代入方程（1.2），将相应的表达式展开为关于 ε 的幂级数，并令 ε 的相同幂次的系数相等，可得到关于 $g_k(r)$ 的微分方程；特别地，对 ε^1 进行这一过程会得到关于 $g_1(r)$ 的微分方程，

$$(rg_1'(r))' = 3g_1(r) - 1,$$

其通解可用修正贝塞尔函数表示，

$$\frac{1}{3} + C_1 I_0\big(2\sqrt{3r}\big) + C_2 K_0\big(2\sqrt{3r}\big),$$

其中，积分常数为 $C_2 = 0$，因为我们的解 $H(r)$ 的小-r 展开中不含对数项；且 $C_1 = -1/3$，因为 $g_1(r)$ 的小 -r 展开以项 $-r$ 开始。因此，

$$g_1(r) = \frac{1}{3}\left(1 - I_0\big(2\sqrt{3r}\big)\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}r^n}{(n!)^2}. \tag{2.30}$$

为完成证明，我们必须将级数 (2.30) 与展开(2.1)中正比于 ε的部分进行比较；为此，需要从每个系数 a_k 中提取因子 $a_0^3 + 1 = \varepsilon$，然后令 $a_0 = -1$。在令 $a_0 = -1$后，还应考虑方程(2.24)。为验证 (2.28) 右侧的 3的幂，利用勒让德公式，将因子 $3^{2\nu_3(n!)}$ 从级数 (2.30)的系数的分母移到相应的分子中，并根据 Cloitre公式 (2.19) 记数 b_n。将 b_n 解释为 n 在三进制中的数字和，归功于 [5]。

□

注 2.6。在 $\mathbb{R}^2$ 中，考虑坐标为（n，$b_n - 1$）的点，$n \in \mathbb{N}$。用线段连接相邻的点（n，$b_n - 1$）和（$n+1$，$b_{n+1} - 1$）。由此，我们得到一个位于（x，y）平面第一象限内的半无限图形，其上方由一条折线围成，折线由若干线段组成，下方则由 x 轴围成。为简便起见，我们称这个图形为“栅栏”。对于 $n = 3^l$，其中 $l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，$b_n = 1$，因此栅栏由若干“部分”组成。栅栏的第 l 部分位于线段 $\big[3^l, 3^{l+1}\big]$ 上，并且在该线段的端点处，栅栏的高度为 0，因此相邻部分在 x 轴上有一个公共点。将栅栏第 l 部分的面积记为 S_l；于是，

$$S_l = \sum_{l=3^l}^{3^{l+1}}(b_n - 1) = (2l+1)3^l \quad \text{and} \quad \sum_{l=0}^{L} S_l = L3^{L+1} + 1.$$

注意，将栅栏各部分高度相加以表示 S_l 的自然公式，仅对点 $[3^l, 3^k]$ 之间的那些部分成立，其中 $0 \leqslant l < k$ 为整数。在这种情况下，栅栏的相应部分可以变换为面积相同的矩形栅栏的一部分。注意，序列 S_l 可在 OEIS [1] 中找到，对应序列 A124647。我们未能在 OEIS 中找到上文所示数列 b_n 与 S_l 之间的关系。■

注 2.7. 人们可能会预期，对于 $k \geqslant 2$，更高阶生成函数 $g_k(r)$ 有助于证明推论 2.3 中的 $c_n = 0$。不难看出，函数 $g_k(r)$ 可以用来计算 $P_n^{(k-1)}(-1)$，即 $P_n(x)$ 关于 x 在 $x = -1$ 处的第 $k-1$ 阶导数。

利用方程 (2.26)，可得 $P_5'(-1) = 78$、$P_7'(-1) = 3243$，以及 $P_8'(-1) = 4083$。这些数都能被 3 整除，因此 $g_2(r)$ 几乎无法帮助确立假设 (2.22)。与此同时，不难看出，首批非平凡导数 $P_5''(-1)$、$P_7''(-1)$ 和 $P_8''(-1)$ 均不能被 3 整除，因此函数 $g_3(r)$ 或许有助于证明假设 (2.22)。在附录 A 中，我们构造了生成函数 $g_2(r)$ 的显式形式，并得到了其在 $r = 0$ 处展开的系数的显式公式。这一情形在技术上颇值得关注，因为若遵循构造该展开的标准步骤——先建立生成函数的常微分方程，再求其显式解，最后得到相应的展开——就会遇到繁复的展开系数表达式。此外，能否简化该公式尚不明确；然而，若直接从常微分方程得到展开，相应的系数公式则简单得多。因此，显然可以明确地继续构造更高阶函数 $g_k(r)$、$k = 3$、4、.....。借助这些函数，可以针对任意 n 和 k 计算 $P_n^{(k-1)}(-1)$；然而，借助 $P_n^{(k-1)}(-1)$ 的公式研究整除性问题，可能会有困难。由于生成函数 $g_k(r)$ 的构造是一个递归过程，我们预计，随着 k 的值增大，$g_k(r)$ 系数的相应显式表达式会愈发复杂。因此，我们不认为这些函数有助于证明假设 (2.22)。因此，下面将讨论其他生成函数。■

命题 2.5. 多项式 P_n 的高阶系数（参见 (2.20)）为

$$p^n_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} = \frac{(n+1)|n+1|_3 (n!|n!|_3)^2}{2^n} = 3^{b_n - n - \nu_3(n+1)} \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n+1-k}{2}. \tag{2.31}$$

证明. 借助第一生成函数 $A_1(z)$，在点 $a_0 = \infty$ 处即可完成证明：

$$H(r) = a_0 A_1(z) + \mathcal{O}\left(1/a_0^3\right), \quad z = a_0 r; \qquad a_0 \to \infty, \quad |z| \leqslant \mathcal{O}(1). \tag{2.32}$$

事实上，这个展开可以看作 $H(r)$ 的双重渐近展开。将展开式 (2.32) 代入方程 (1.2)，用所得方程除以 a_0，并令与 a_0 无关的系数等于零，便得到关于函数 $A_1(z)$ 的非线性常微分方程：

$$\left(z \frac{A_1'(z)}{A_1(z)} \right)' = A_1(z). \tag{2.33}$$

这个常微分方程有如下通解和特解，

$$A_{1\,gen} = \frac{2 C_2 C_1^2 z^{C1-1}}{(1 - C_2 z^{C1})^2}, \qquad A_{1\,spec} = \frac{2}{z \ln^2(C_2 z)}, \tag{2.34}$$

其中 C_1 和 C_2 是积分常数。值得关注的是，(2.34) 中的解可以展开为关于 z 的幂级数，

$$A_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n,$$

其中 $\alpha_n \in \mathbb{C}$。将这个展开与 (2.1) 中函数 $H(r)$ 在 $a_0 \to \infty$ 时的渐近行为首项进行比较，便得到 $\alpha_0 = -1$，以及

$$\alpha_n = (-1)^{n-1} \frac{3^{\nu_3(n+1)} p^n_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}}{(n!|n!|_3)^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.35}$$

事实是，$\alpha_0 = -1$ 使得可以确定(2.34)中的两个积分常数，即 $C_1 = 1$ 和$C_2 = -1/2$；因此，

$$A_1(z) = -\frac{1}{(1 + z/2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2^n} z^n. \tag{2.36}$$

比较该 co. 将级数 (2.36) 的系数与系数 α_n 相比较，我们得到方程 (2.31)。 □

注 2.8. 在上述证明中，我们可以用命题 2.3 代替猜想 2.1。在这种情况下，我们得到的不是方程 (2.31)，而是 $\kappa_n p^n_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} = (n+1)(n!)^2/2$。最后一个公式表明，对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $p^n_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} > 0$；因此，我们确认 $\deg P_n = \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$。■

注 2.9. T 与 $a_0 = \infty$, $\{A_k(z)\}_{k=1,\ 2,\ \ldots\ldots}$对应的生成函数集合定义如下：
展开式

$$H(r) = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(z)}{a_0^{3(k-1)}}, \quad z = a_0 r; \qquad a_0 \to \infty, \quad |z| \leqslant \mathcal{O}(1). \tag{2.37}$$

事实上，这个展开式可以视为 $H(r)$ 的双重渐近展开。将展开式 (2.37) 代入方程 (1.2)，把所得方程除以 a_0，并令 $a_0^{3(1-k)}$，$k = 1, 2, \ldots$ 的各次幂对应的系数依次为零，对于 $k = 1$，可得到关于 $A_1(z)$ 的非线性常微分方程 (2.33)，以及用于确定 $A_k(z)$（其中 $k = 2$ 为 3, ...）的线性非齐次常微分方程。这些线性常微分方程的齐次部分对所有函数 $A_k(z)$ 都相同，可视为一个退化超几何方程。非齐次部分是关于 z 的有理函数，在 $z = -2$ 处有一个单极点。由于 z =−2 是所有关于函数 $A_k(z)$ 的线性常微分方程的唯一奇点，因此这些函数对应的 z-级数具有相同的收敛半径，即 2。根据引理 2.1 中给出的估计，$H(r)$ 的级数 (2.1) 至少在 $|a_0 r| < 1/16$ 时收敛，因此，对于 r 的这些取值，我们可以将级数 (2.1) 重排为生成函数的级数 (2.37)。

因此，在获得所有 $A_l(z)$ 的 $l < k$ 后，便有一种递归过程可以构造 $A_k(z)$。函数 $A_k(z)$ 的小-z 展开生成了 $P_n(x)$ 在幂 $x^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1-k}$ 处的系数。

这里，我们仅考虑函数 $A_1(z)$。值得一提的是，读者将在 [28], 的第 3 节中找到关于更高阶生成函数的一个非常相似的构造，其中明确给出了最初的几个生成函数。■

推论 2.4. 对任意 $n \in \mathbb{N}$，多项式 P_n 是本原的。

证明。我们必须证明 P_n 的系数没有公因子，即方程 (2.22) 成立。命题 2.5 指出， P_n 的最高次系数不能被 3 整除；因此，该结论由推论 2.3 得出。

□

命题 2.6。对于 $k \in \mathbb{N}$,

$$P_{2k-1}(0) = p_0^{2k-1} = \frac{(2k)!|(2k)!|_3 (2k-1)!|(2k-1)!|_3}{2^{3k-2}} = \frac{3^{b_{2k-1}-(2k-1)-\nu_3(2k)}}{2^{k-1}} \prod_{l=0}^{2k-2} \binom{2k-l}{2}. \tag{2.38}$$

证明。在.....中 在这种情况下，我们引入变量 $z = r/\sqrt{a_0}$ 并定义生成函数 $B_1(z)$:

$$H(r) = B_1(z)/\sqrt{a_0} + O(a_0), \qquad a_0 \to 0, \quad |z| \leqslant \mathcal{O}(1); \tag{2.39}$$

此外， $B_1(z)$ 是关于 z 的奇函数，且 $B_1(z) = z + \mathcal{O}(z^3)$。将展开式 (2.39) 代入 $H(r)$ 满足的常微分方程 (1.2)，可得 $B_1(z)$ 满足与函数 $A_1(z)$ 相同的常微分方程 (2.33)，但积分常数 $C_1 = 2$ 和 $C_2 = 1/8$ 的取值不同（参见 (2.34)）；因此，我们得到

$$B_1(z) = \frac{z}{(1 - z^2/8)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{8^{k-1}} z^{2k-1}. \tag{2.40}$$

另一方面，我们借助方程（2.25）计算上述级数的系数；通过考虑表达式 $\sqrt{a_0} a_{2k-1} r^{2k-1}$ 并令 $a_0 \to 0$，可得到渐近行为的首项：

$$\frac{3^{\nu_3(2k)} P_{2k-1}(0)}{((2k-1)!|(2k-1)!|_3)^2} z^{2k-1}.$$

将此表达式 与级数（2.40）中的对应项相等，即得到所述结果
于命题中 n.

□

命题 2.7。

$$P_2(0) = p_0^2 = 1, \qquad P_4(0) = p_0^4 = 17,$$
$$P_{2k}(0) = p_0^{2k} = \frac{13}{(35)^2} \frac{((2k+1)!|(2k+1)!|_3)^2}{2^{3(k-2)}} 3^{\nu_3(2k+1)}, \quad k = 3, 4, 5, \ldots. \tag{2.41}$$

证明。为计算 $P_{2k}(0)$，定义生成函数 $B_2(z)$ 如下：

$$H(r)=\frac{B_1(z)}{\sqrt{a_0}}+a_0B_2(z)+\mathcal{O}\big(a_0^{5/2}\big),\quad z=\frac{r}{\sqrt{a_0}};\qquad a_0\to 0,\quad |z|\leqslant\mathcal{O}(1),\tag{2.42}$$

其中，$B_1(z)$ 由 (2.40) 中的第一个方程给出。现在，将 (2.42) 中的展开代入方程 (1.2)，将所得方程两边除以 a_0，按 $a_0^{3/2}$ 的幂展开，并令最高次项 $a_0^{3/2}$ 的系数为零，我们得到关于函数 $B_2(z)$ 的二阶线性非齐次常微分方程：

$$\big((1-z^2/8)^2B_2'(z)-(1+3z^2/8)(1-z^2/8)B_2(z)/z\big)'=B_2(z)-(1-z^2/8)^4/z^2.$$

这个常微分方程的齐次部分是一个退化超几何方程，求其显式解并不困难：

$$\begin{aligned}B_2(z)=C_1&\frac{z(z^2+8)}{(z^2-8)^3}+C_2\frac{z(z^2\ln z+8\ln z+16)}{(z^2-8)^3}\\&+\frac{40140800+15052800z^2+1254400z^4-56448z^6+1704z^8-25z^{10}}{78400(z^2-8)^3},\end{aligned}$$

其中 $C_1=C_2=0$，因为 $B_2(z)$ 是关于 z 的单值偶函数。现在，将 $B_2(z)$ 分解为部分分式，

$$B_2(z)=-\frac{1}{2^67^2}z^4+\frac{69}{70^2}z^2-\frac{393}{35^2}-\frac{13\cdot 2^6}{35^2}\left(\frac{8}{(1-z^2/8)^3}-\frac{8}{(1-z^2/8)^2}+\frac{1}{1-z^2/8}\right).$$

将上述方程中的商按 z^2 的幂展开，并将它们合并为一个级数，得到

$$B_2(z)=-\frac{393}{35^2}+\frac{69}{70^2}z^2-\frac{1}{2^67^2}z^4-\frac{13}{35^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)^2}{2^{3(k-2)}}z^{2k}.$$

这个级数可以改写为

$$B_2(z)=-1-\frac{3}{4}z^2-\frac{17}{64}z^4-\frac{13}{35^2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(2k+1)^2}{2^{3(k-2)}}z^{2k}.$$

现在，将级数 $H(r)/a_0$ （当 $a_0\to 0$ 时）中的 $a_{2k}r^{2k}/a_0=a_{2k}a_0^{k-1}z^{2k}$ 项与上述 $B_2(z)$ 级数中的对应项相等。由于

$$\lim_{a_0\to 0}a_{2k}a_0^{k-1}=-\frac{3^{\nu_3(2k+1)}P_{2k}(0)}{((2k)!|(2k)!|_3)^2},$$

由此便得到命题所断言的结果。 □

注 2.10。引入生成函数 $B_k(z)$ 的理由，与引入函数 $A_k(z)$ 的理由十分相似。我们通过如下展开定义这些函数的一个无限序列

$$H(r)=\frac{1}{\sqrt{a_0}}\sum_{k=1}^{\infty}B_k(z)a_0^{\frac{3}{2}(k-1)},\quad z=\frac{r}{\sqrt{a_0}};\qquad a_0\to 0,\quad |z|\leqslant\mathcal{O}(1).\tag{2.43}$$

所有函数 $B_k(z)$ 都是 z 的有理函数，且仅在 $z^2=8$ 处有极点；因此，它们可以展开为关于 z 的幂级数，且具有相同的收敛半径$2\sqrt{2}$。级数 (2.43) 是 $r=o(a_0^2)$ 在 $a_0\to 0$ 时的级数 (2.1) 的重新排列（参见引理 2.1 中的估计）。只要已经求得所有满足 $n<k$ 的函数 $B_n(z)$，便可显式构造函数$B_k(z)$。这一归纳过程与函数 $A_k(z)$ 的相应过程十分相似。值得一提的是，函数 $B_{2l+1}(z)$ 定义 p_l^{2n-1}，而 $B_{2l+2}(z)$ 定义 p_l^{2n}，其中 $l=0$、1、.....以及 $n=1$、2、.....。■

推论 2.5。多项式 P_n 的最高次系数和最低次系数由以下方程联系：

$$2^{k-1}p_0^{2k-1}=p_{k-1}^{2k-1},\qquad k=1,2,\dots,\tag{2.44}$$

$$2^{k-6}p_0^{2k}=\frac{13}{(35)^2}(2k+1)p_{k-1}^{2k},\qquad k=3,4,\dots.\tag{2.45}$$

证明。公式 (2.44)（分别为 (2.45)）可由比较显式公式 (2.31) 和 (2.38)（分别为 (2.31) 和 (2.41)）得到。□

备注 2.11。推论 2.5 形式上是利用猜想 2.1 得到的；然而，关系式 (2.44) 和 (2.45) 与 κ_n 的取值无关（参见方程 (2.23)）。因此，可以通过引用命题 2.3 证明这些关系式。■

3 代数函数解

在本节中，我们考虑方程 (1.6) 的代数函数解。将方程改写为以下形式较为方便: (1.6)

$$\left(\frac{ty'(t)}{y(t)}\right)' = y(t) - \frac{t}{(y(t))^2}. \tag{3.1}$$

定理 3.1。如果 $y(t)$ 是方程 (3.1) 的代数函数解，则存在 n、$m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 和 $\alpha = (m+2n+3)/4$，使得

$$y(t) = x^{n+1-\alpha} w(x), \qquad t = x^{\alpha}, \tag{3.2}$$

其中，函数 $w(x)$ 在 $x = 0$ 和 $w(0) \neq 0$ 处全纯，是方程的唯一解

$$\left(\frac{xw'(x)}{w(x)}\right)' = \alpha^2 \left(x^n w(x) - \frac{x^m}{(w(x))^2}\right). \tag{3.3}$$

反过来，对于任意的 $n, m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\alpha = (m+2n+3)/4$ 和 $a_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，方程 (3.3) 存在唯一一个在 $x = 0$ 处全纯且满足 $w(0) = -a_0$ 的解 $w(x)$；通过 (3.2)，该解定义了方程 (3.1) 的一个代数函数解。

证明。根据 Painlev´e 性质，解的唯一分支点是 $t = 0$。如果解 $y(t)$ 是代数函数解，那么存在一个自然数 α，使得 $y(x^{\alpha})$ 在 $x = 0$ 处是全纯函数，或者有有限阶极点。作变换 $y(t) = x^{1-\alpha} v(x), t = x^{\alpha}$ 很方便，并考虑满足下式的函数 $v(x)$

$$\left(\frac{xv'(x)}{v(x)}\right)' = \alpha^2 \left(v(x) - \frac{x^{4\alpha-3}}{(v(x))^2}\right), \qquad 4\alpha - 3 = m_1, \tag{3.4}$$

其中 $m_1 \in \mathbb{Z}$，因为 $\alpha \in \mathbb{N}$。现在，假设对于某个 $m_1 \in \mathbb{Z}$，$v(x)$ 是方程 (3.4) 的一个解，在 $x = 0$ 处全纯或有 Laurent 展开；那么我们看到，$\alpha = (m_1+3)/4$ 是一个有理数，而解 $y(t)$ 在 $x = 0$ 处有一个代数奇点。显然，$m_1 \geqslant -2$，因为否则，$\alpha \leqslant 0$。在这种情况下，将 $x = t^{1/\alpha}$ 代入 $v(x)$ 的 Laurent 展开后，会得到无穷多项关于 t 的负次幂项，并且这些项随 $t \to 0$ 增大。更确切地说，局部分析表明，平衡首项的唯一可能方式是要求

$$v(x) = \frac{1}{x^l} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \qquad b_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad m_1 = -3l, \quad l - 1 \in \mathbb{N}; \tag{3.5}$$

否则，方程 (3.4) 的右端将有一个极点，而左端却没有。即使在假设 (3.5) 下，也无法构造出无限 Laurent 展开，因为通过归纳法可以证明，这种展开的所有系数 b_k、$k \geqslant 1$ 都应为零：如果 $k \geqslant 2$、$b_1 = \cdots = b_{k-1} = 0$，那么在方程 (3.4) 的左端，首项为 $k^2 b_k x^{k-1}/b_0$；而在右端，首项为 $3\alpha^2 b_0 b_k x^{k-l}$，其中有 $b_0 = -a_0$ 和 $a_0^3 + 1 = 0$；因此，对于 $l \geqslant 2$，各项的阶数不同。类似地，可以证明 $b_1 = 0$。因此，对于所有 $l \geqslant 2$，唯一的解是 $v(x) = -a_0/x^l$。对于所有 l，$v(x)$ 生成相同的显式解 $y(t) = -a_0 t^{1/3}$。这一观察不适用于 $l = 1$；然而在这种情况下，$\alpha = 0$，并且方程 (3.4)（即使不使用 α^2，而改用一个参数）也与 Painlev´é 方程 (3.1) 无关。

因此，当 $m_1 \geqslant 0$ 时，方程 (3.4) 的在 $x = 0$ 处具有Laurent 展开的解存在。第 2 节专门讨论 $m_1 = 0$ 的情形。$m_1 \geqslant 1$ 的情形可以类似地研究。这里，我们只概述一些对下面讨论很重要的关键点。函数 $v(x)$不可能在 $x = 0$处有极点，因为方程 (3.4) 中另外两项是有界的；因此，对于某个 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，我们可以写成 $v(x) = x^n w(x)$：按照引言中参数 n 的含义，我们假设 $w(0) \neq 0$。将此代入方程(3.4)，得到带有 $m = m_1 - 2n$的方程(3.3)。通过使用与上一段中用于证明 $m_1 \geqslant 0$的论证相似的辐角，可以确认，方程(3.3)在 $x = 0$ 处存在全纯解的必要条件是 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。因此，定理的直接陈述得证。

反过来，考虑含有 $n,m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 的方程 (3.3)。在这种情况下，首项总是可以平衡的：由于我们寻求满足 $w(0)\neq 0$ 的解，方程 (3.3) 右侧两个表达式关于 $x\to 0$ 的首项分别为 $-a_0x^n$ 和 $-x^m/a_0^2$，而该方程左侧项关于 $x\to 0$ 的首项为 $-(q+1)^2a_{q+1}x^q/a_0$，其中我们假设 a_{q+1} 是 $w(x)$ 的泰勒展开中的第二个非零系数（第一个是 $-a_0$）。因此，对于任意给定的 n 和 m，总能找到合适的 q 来平衡首项。（注意，系数 $a_1=\cdots=a_q=0$）。因此我们看到，对于任意 $a_0\neq 0$，都能平衡首项，而 $w(x)$ 的泰勒展开中 $k\geqslant q+1$ 的后续系数 a_k，可以借助从方程 (3.3) 推导出的递推关系唯一确定。此类展开的收敛性可用与证明引理 2.1 类似的方法建立。

□

注 3.1. 对于任意给定的一对 $(n,m)\in\mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}$，定理 3.1 给出了方程 (1.6) 的一族（类）解的精确构造，$y(t)=y(t;a_0)$，其中 $a_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$：由这类解族构成的集合记为 $\mathbb{ALG}(dP3_0)$：[4] 此外，对于方程 (1.6) 的任意代数函数解，都存在一个数 $a_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，使得该解属于 $\mathbb{ALG}(dP3_0)$ 中的某个元素。■

推论 3.1. 正有理数集合（$\mathbb{Q}_{>0}$）与 $\mathbb{ALG}$（$dP3_0$）之间存在一一对应：

$$\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{ALG}(dP3_0),\quad q\mapsto y(t)\underset{t\to 0}{\sim}-a_0\,t^{1-4\rho},\quad a_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\ \ and\ \ 2\rho=\frac{1}{1+2q},\tag{3.6}$$

其中，$y(t)$ 是相应类的一个代表元。

证明。定义映射 f：$\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{ALG}(dP3_0)$ 如下：若 $q=\frac{n+1}{m+1}$，其中 $n+1$ 和 $m+1$ 互质，则 $f(q)\to(n,m)\to y(t)$，其中 $y(t)\in\mathbb{ALG}(dP3_0)$ 是在定理 3.1 中构造的。[5]

映射 f 是单射。考虑当 $t\to 0$ 时 $y(t)$ 的行为，即 $y(t)\underset{t\to 0}{\sim}t^{(n+1)/\alpha-1}w(0)$（参见定理 3.1）。由于 $\alpha=(m+1+2(n+1))/4$，我们得到领先分支 $(n+1)/\alpha-1=q/(2q+1)-1$ 对不同的 q 而言是不同的。

映射 f 是满射。根据定理3.1中给出的构造，对于任意 $y(t)\in\mathbb{ALG}(dP3_0)$，都可以找到一对非负整数（$n$，$m$），从而定义一个数 $q=(n+1)/(m+1)$；然而，问题在于，数 $n+1$ 和 $m+1$ 可能并不互质，因此不能断言恰好是这个解 $y(t)$对应于 $f(q)$。我们将证明，对于给定的 $y(t)\in\mathbb{ALG}(dP3_0)$，表示同一个有理数 q 的任意一对非负整数都是适用的。

假设存在 $p\in\mathbb{N}$，使得 $n+1=(p+1)(\tilde n+1)$ 且 $m+1=(p+1)(\tilde m+1)$，其中$\tilde n+1$ 和 $\tilde m+1$ 互质。记对应于参数 n 和 m 的方程 (3.3) 的解为 $w_{n,\,m}(x)$。现在，对自变量作变换 $x\to x^{p+1}$，并注意到

$$\alpha=\frac{1}{4}(m+1+2(n+1))=(p+1)\tilde\alpha=\frac{p+1}{4}(\tilde m+1+2(\tilde n+1)),\tag{3.7}$$

由此可证明 $w_{n,\,m}(x)=w_{\tilde n,\,\tilde m}(x^{p+1})$，假设 $w_{n,\,m}(0)=w_{\tilde n,\,\tilde m}(0)$。利用最后一个方程和关系式 (3.7)，可证明定理 3.1 中通过函数 $w=w_{n,\,m}$ 和$w=w_{\tilde n,\,\tilde m}$ 定义的函数 $y(t)$ 完全相同：

$$y(t)=x^{n+1-\alpha}w_{n,m}(x)=t^{\frac{n+1}{\alpha}-1}w_{n,m}\left(t^{\frac{1}{\alpha}}\right)=t^{\frac{\tilde n+1}{\alpha}-1}w_{\tilde n,\tilde m}\left(t^{\frac{p+1}{\alpha}}\right)=t^{\frac{\tilde n+1}{\tilde\alpha}-1}w_{\tilde n,\tilde m}\left(t^{\frac{1}{\tilde\alpha}}\right)=\tilde y(t).\tag{3.8}$$

将方程 (3.8) 第二个等式中出现的函数 $w_{n,\,m}(t^{1/\alpha})$ 替换为其泰勒展开的首项（参见定理 3.1），即可得到 (3.6) 中给出的 $y(t)$ 的渐近行为，其中$1-4\rho=(n+1)/\alpha-1$。最后，解出后一个方程中的 2ρ，可得

$$2\rho=\frac{m+1}{m+1+2(n+1)}=\frac{1}{1+2q}.\tag{3.9}$$

□

注 3.2. 从几何意义上说，推论 3.1 表明，代数函数解的空间同平凡纤维丛 $\mathbb{Q}_{>0}\times\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 同构，其中底空间为 $\mathbb{Q}_{>0}$，圆柱面 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 是定义这些解的初值的纤维。所构造的映射允许将所有

[4]下标 0 表示我们考虑的是方程 (1.1) 在 $a=0$ 下的一个特殊情形。[5]滥用记号时，$y(t)$ 既表示方程 (1.6) 的一族解 $y(t)=y(t;a_0)$，也表示 $\mathbb{ALG}(dP3_0)$ 中对应的元素。

结构拉回到 $\mathbb{ALG}(dP3_0)$ 上；特别是将 $\mathbb{Q}_{>0}$ 上定义的序、拓扑和乘法阿贝尔群结构拉回。以群结构为例：对于 $k=1$，2，3，令 $y_k(t)\in\mathbb{ALG}(dP3_0)$，其分支为 ρ_k。我们如下定义 $*$ 在 $\mathbb{ALG}(dP3_0)$ 中的群乘法： $y_1*y_2=y_3$ 当且仅当

$$\frac{1}{2\rho_3}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\rho_1}-1\right)\left(\frac{1}{2\rho_2}-1\right). \tag{3.10}$$

借助方程(3.6)中的最后一个公式，可以直接验证，带有有理数通常乘法的群 $\mathbb{Q}_{>0}$ 与带有上文定义的乘法的 $\mathbb{ALG}(dP3_0)$是同构的。注意，对应于函数 $H(r)$的解 $y(t)$（参见第 1 节，方程 (1.9)）在 $\mathbb{ALG}(dP3_0)$ 中充当群单位元。在第 5 节中研究了另一个更有趣的、同样作用于丛的纤维上的群。■

注 3.3. 方程 (1.1) 的代数函数解在 $\tau\to 0$ 时的渐近行为与代数函数解 $y(t)$ 的渐近行为相似:

$$u(\tau)\underset{\tau\to 0}{\sim} c\,\tau^{1-4\rho},\quad \text{with}\quad c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\ \text{ and }\ 2\rho=\frac{1}{1+2q}.$$

代数函数解的分支记号 $1-4\rho$ 用于与附录 B 定理 B.1 中所述方程 (1.1) 一般解的渐近行为结果相匹配。■

本节余下部分将研究分别对应于数对 $(0,m)$ 和 $(n,0)$ 的两组“边界”代数函数解:

$$\begin{aligned} &2\rho=\frac{m+1}{m+3},\quad m=0,1,2,\ldots, && m-\text{series},\\ &2\rho=\frac{1}{2n+3},\quad n=1,2,\ldots, && n-\text{series}. \end{aligned}$$

我们分别称它们为 m-级数和 n-级数的代数函数解。由于 $1-4\rho=\frac{1-m}{m+3}$ 对于m-级数以及 $1-4\rho=\frac{2n+1}{2n+3}$ 对于 n-级数，相应的解 $u(\tau)$ 和 $y(t)$ 可以通过初始数据条件加以区分，即，对于 $m>2$，有 $y(0)=u(0)=\infty$；对于n-级数，有 $y(0)=u(0)=0$。从这个意义上说， m-级数的前两个解比较特殊：对应于$m=0$ ($\rho=1/6$)的解，其行为与满足 $y(0)=u(0)=0$ 的 n-级数解相同；原则上，可以将它视为同时属于这两个级数的唯一解。对应于 $m=1$ 的第二个解在 $t=\tau=x=0$处有有限且非零的初值，并且是 $\mathbb{C}$中的亚纯函数。

注 3.4. 在研究函数 $v(x)$ 的泰勒展开系数时，方程 (3.4) 中的参数 α^2 会使系数的表达式略显繁复。因此，rescale 该方程，并用归一化函数 $H_{-m}(\hat{}x)$ 和 $H_n(\hat{}x)$ 代替 $v(x)$，是较为方便的。采用本节的记号， $H_0(\hat{}x)=H(r)$，其中 $\hat{}x=r$，而 $H(r)$ 是第 2 节研究的函数。对于 $p\neq 0$，函数 H_p 的定义如下:

$$\begin{aligned} &v(x)=c_-^{\frac{m}{3}}H_{-m}(\hat{x}),\quad x=c_-\hat{x},\quad \left(\frac{4}{m+3}\right)^2 c_-^{\frac{m+3}{3}}=2,\\ &v(x)=c_+^{\frac{2n}{3}}\hat{x}^n H_n(\hat{x}),\quad x=c_+\hat{x},\quad \left(\frac{4}{2n+3}\right)^2 c_+^{\frac{2n+3}{3}}=1. \end{aligned}$$

因此， $H_p(\hat{}x)$、 $p\in\mathbb{Z}$ 被定义为 $\mathbb{C}$ 中的亚纯函数，且 $H_p(0)=-a_0\neq 0$。（这些函数取决于初始数据，因此更完整的记法应为 $H_p(\hat{}x;a_0)$。）它们满足以下二阶常微分方程:

$$\left(\frac{\hat{x}H'_{-m}(\hat{x})}{H_{-m}(\hat{x})}\right)'=2\left(H_{-m}(\hat{x})-\frac{\hat{x}^m}{(H_{-m}(\hat{x}))^2}\right),\qquad m\geqslant 1, \tag{3.11}$$

$$\left(\frac{\hat{x}H'_{n}(\hat{x})}{H_{n}(\hat{x})}\right)'=\hat{x}^n H_n(\hat{x})-\frac{1}{(H_n(\hat{x}))^2},\qquad n\geqslant 0. \tag{3.12}$$

注意，根据我们的归一化，函数 $H_0(\hat{}x)$ 满足方程 (3.12)， n-级数也满足该方程。■

根据定理 3.1，在 $\hat{x}=0$ 的某个邻域内，函数 $H_p(\hat{x})$ 可以展开为泰勒级数：

$$H_p(\hat{x}) = -a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p \hat{x}^k. \tag{3.13}$$

注意，a_k^p 中的上标 p 表示相应函数 H_p的标签，而 $H_p(0) = -a_0$对所有 p均成立；因此，在下文的公式中，$a_0^n = (a_0)^n$。

命题 3.1. 对于 $m \in \mathbb{N}$,

$$a_k^{-m} = (-1)^{k+1}(k+1)a_0^{k+1} + \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k+1}{m+2} \rfloor} r_l^{-m} a_0^{k+1-(m+3)l}, \quad k \geqslant 1, \tag{3.14}$$

其中，$r_l^{-m} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$是数，而 $\lfloor * \rfloor$ 表示实数的向下取整。

注 3.5. 命题 3.1 的证明与第 2.2 小节命题 2.2 中给出的函数 $H(r) = H_0(\hat{x})$（其中 $\hat{x}=r$）的类似证明相似。这里，对 a_0 的符号进行变换并不能使所有数 $r_l^{-m} > 0$。■

命题 3.2. 对于 $n \in \mathbb{N}$,

$$a_k^n = \sum_{(m_j,l_j)\in\mathcal{P}_k^n} \gamma_{m_j,l_j}^n a_0^{m_j+1-2l_j}, \tag{3.15}$$

其中 $\mathcal{P}_k^n$ 是 由非负整数对（m_j，l_j）组成的数对集合，它们表示所有可能的划分 o f

$$k = (n+1)m_j + l_j, \quad where \quad l_j \in \{0, 1, \ldots, m_j+1\}, \tag{3.16}$$

数 $\gamma_{m_j,\ l_j}^n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ 和 $\gamma_{0,\ 1}^n = 1$。

注 3.6。事实上，集合 $\mathcal{P}_k^n$ 中的元素很少：

$$|\mathcal{P}_k^n| = \left\lfloor \frac{k+2n+2}{n+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k+2n+2}{n+2} \right\rfloor. \tag{3.17}$$

如果该集合为空，那么相应的系数 $a_k^n = 0$。

作为方程 (3.17) 的一个应用，$|\mathcal{P}_1^n| = 1$ 对于 $n \geqslant 1$；事实上，对于所有 n，$a_1^n = 1/a_0$。另一方面，对于 $n \geqslant 2$，$|\mathcal{P}_k^n| = 0$，$k = 2$，....., n；因此，对于 $n \geqslant 2$，$a_2^n = \cdots = a_n^n = 0$。同时，对于 $n \geqslant 1$，$|\mathcal{P}_{n+1}^n| = 1$，使得 $a_{n+1}^n \neq 0$。再举一例，例如，考虑 $|\mathcal{P}_{37}^3| = \lfloor \frac{45}{4} \rfloor - \lfloor \frac{45}{5} \rfloor = 11 - 9 = 2$；事实上，$37 = 4\times 9 + 1 = 4\times 8 + 5$，因此 $a_{37}^3 = \gamma_{9,\ 1}^3 a_0^8 + \gamma_{8,\ 5}^3 a_0^{-1}$。

对于 $n = 1$、2、3、4，我们在 OEIS [37] 中找到了数列 $|P_k^n|$。实际上，我们的数列不包括 OEIS 中相应数列的前几项，因为这些数列的组合定义不同。对于 $n = 5$，我们没有在 OEIS 中找到对应的数列。我们的数列 $|P_k^n|$ 的组合定义似乎是新的。■

注 3.7. 对于每个函数 $H_p(\hat{x})$，都对应着方程 (1.6) 的一个解（参见 (3.1)），记为 $y_p(t)$。将联系方程 (3.1)、(3.11) 和 (3.12) 的连续变换合并起来，我们得到

$$t y_{-m}(t) = c_-^{\frac{m}{3}} t^{\frac{4}{m+3}} H_{-m}\left(c_-^{-1} t^{\frac{4}{m+3}}\right), \tag{3.18}$$

$$t y_n(t) = c_+^{-\frac{n}{3}} t^{\frac{4(n+1)}{2n+3}} H_n\left(c_+^{-1} t^{\frac{4}{2n+3}}\right), \tag{3.19}$$

其中 $y_{-m}(t)$、$m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 和 $y_n(t)$、$n \in \mathbb{N}$ 分别表示 m-级数和 n-级数的解。有时，明确指出我们的函数对参数 a_0 的依赖关系至关重要；在这种情况下，我们写作

$$y_p(t) = y_p(t; a_0), \quad H_p(\hat{x}) = H_p(\hat{x}; a_0), \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

■

推论 3.2. 对于 $m \in \mathbb{N}$ 和 q、$l \in \mathbb{Z}$,

$$H_{-m}\left(\hat{x}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i q}{m+3}}; a_0 \mathrm{e}^{\frac{2\pi i q}{m+3}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i q}{m+3}} H_{-m}\left(\hat{x}; a_0\right), \tag{3.20}$$

$$y_{-m}(t; a_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{m,q,l}} y_{-m}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{m,q,l}}; a_0 \mathrm{e}^{\frac{2\pi i q}{m+3}}\right), \qquad \varphi_{m,q,l} = \frac{\pi}{2}\big(l(m+3) - q\big). \tag{3.21}$$

证明。第一个对称性（3.20）通过结合方程（3.13）和（3.14）进行直接计算即可证明。第二个对称性（3.21）也可通过直接计算得到，其中使用了（3.18）中 $y_{-m}(t)$ 的定义，以及关于 $H_{-m}(\hat{}x)$ 的第一个对称性。□

推论 3.3. 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 和 $q, l \in \mathbb{Z}$,

$$H_n\left(\hat{x}\mathrm{e}^{\frac{4\pi \mathrm{i}q}{2n+3}}; a_0\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}q}{2n+3}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}q}{2n+3}} H_n(\hat{x}; a_0), \tag{3.22}$$

$$y_n(t; a_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_{n,q,l}} y_n\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_{n,q,l}}; a_0\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}q}{2n+3}}\right), \qquad \psi_{n,q,l} = \pi q + \frac{\pi}{2} l(2n+3). \tag{3.23}$$

证明. 函数 $H_0(\hat{}x) = H(r)$，其中 $r = \hat{}x$，形式上属于 m-级数；然而，它在 m-级数与 n-级数之间的位置降低了其对称性，因此它具有与 n-级数相同类型的对称性。对此事实的形式证明沿用 n-级数的推理思路（见下文）；不过，它需要使用方程 (2.18) 中给出的系数 $a_k^0 = a_k$ 的另一个公式。这里，我们概述 n-级数中一个一般项的证明。

考虑方程 (3.16)。它可以改写为以下形式：

$$m_j + 1 - 2l_j = (2n+3)m_j - (2k-1).$$

该方程意味着（参见 (3.15)），对于所有 $k \geqslant 0$,

$$a_k^n\left(a_0\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}p}{2n+3}}\right)\left(\hat{x}\mathrm{e}^{\frac{4\pi \mathrm{i}p}{2n+3}}\right)^k = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}p}{2n+3}} a_k^n(a_0)\hat{x}^k,$$

这里我们记 $a_k^n = a_k^n(a_0)$。现在，方程 (3.22) 可由 $H_n(\hat{}x)$ 的泰勒级数（参见 (3.13)）推出，而方程 (3.23) 则是根据 (3.19) 中给出的 $y_n(t)$ 的定义，由前一个方程得到的。□

注 3.8. 应用推论 3.2 和3.3，并考虑到函数 $H_p(\hat{}x; a_0)(p = -m, n)$是通过收敛级数定义的，其系数是 a_0 的有理函数，可得$H_p(\hat{}x;\ a_0\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}}) = H_p(\hat{}x;\ a_0)$。函数 $y_p(t;\ a_0)$对 a_0 的依赖是通过函数H_p定义的；因此，$y_p(t; a_0\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}}) = y_p(t; a_0)$。■

命题 3.3。

$$ty_n(t) = \left(\frac{2n+3}{4}\right)^2 z^{\frac{n+1}{2n+3}} \sum_{q=0}^{2n+2} z^{\frac{q}{2n+3}} f_q^n(z) = \left(\frac{2n+3}{4}\right)^2 \sum_{q=0}^{2n+2} z^{\frac{q}{2n+3}} \hat{f}_q^n(z), \quad z = \left(\frac{4}{2n+3}\right)^6 t^4, \tag{3.24}$$

其中，函数 $f_q^n(z)$、 $q = 0$、1、.....、$2n+2$ 在 $z = 0$ 处全纯,

$$f_q^n(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{l,q}^n z^l, \quad a_{l,q}^n := a_{l(2n+3)+q}^n \in \mathbb{C}, \quad q = 0, 1, \ldots, 2n+2;$$

ˆ此外， $f_q^n(0) \neq 0$当且仅当 $q \in \{0, 1, n+1, n+2, n+3, 2n+2\}$；此外， $f_k^n(z) = zf_{k+n+2}^n(z)$对于ˆˆ$k = 0$、1、. . .、 n， $f_k^n(z) = f_{k-n-1}^n(z)$对于 $k = n+1$、$n+2$、. ..、$2n+2$，以及 $f_q^n(0) \neq 0$当且仅当 $q \in \{n+1, n+2, 2n+2\}$。

证明。由 (3.19) 中给出的函数 $y_n(t)$ 的定义和 (3.13) 中 $H_n(\hat{}x)$ 的级数，经重新排列后可得 (3.24) 中的结果。函数 $f_q^n(z)$ 的性质由命题 3.2 和注 3.6 得出。□

注 3.9。需要注意的是，当解 $y_n(t)$ 使用表示式 (3.24)，而 $y_{-m}(t)$ 使用下文方程 (3.25) 中给出的类似表示式时，假定分支满足以下一致性规则： $z^{\frac{q}{p}} = |\left(\frac{4}{2n+3}\right)^6 t|^{\frac{4q}{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4q}{p}\arg t}$。■

命题 3.4。根据 $(m+3) \bmod 4$ 的值，按如下方式定义自然数集 p_k for $k = 1, 2, 4$:

$$p_4 := m+3 \equiv 2n+1, \quad 2p_2 := m+3 \equiv 2(2n+1), \ \textit{and}\ \ 4p_1 := m+3 \equiv 4n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

那么，对于 $m = 4p_k/k - 3$, $y_{-m}(t)$ 继承了表示

$$ty_{-m}(t) = 2\left(\frac{p_k}{k}\right)^2 (z_k)^{\frac{1}{p_k}} \sum_{q=0}^{p_k-1} (z_k)^{\frac{q}{p_k}} f_q^{-m}(z_k) = 2\left(\frac{p_k}{k}\right)^2 \sum_{q=0}^{p_k-1} (z_k)^{\frac{q}{p_k}} \hat{f}_q^{-m}(z_k), \quad z_k = (c_-)^{-p_k} t^k, \tag{3.25}$$

其中函数 $f_q^{-m}(z_k)$, $q=0,1,\ldots,p_k-1$ 在 $z_k=0$ 处全纯,

$$f_q^{-m}(z_k)=\sum_{l=0}^{\infty}a_{l,q}^{-m}(z_k)^l,\quad a_{l,q}^{-m}:=a_{lp_k+q}^{-m}\in\mathbb{C},\quad q=0,1,\ldots,p_k-1;$$

ˆˆ 此外，对于所有 $q=0$, $f_q^{-m}(0)\neq 0$, $1\ldots$, p_k-1; 而且, $f_0^{-m}(z_k)=z_kf_{p_k-1}^{-m}(z_k)$, $f_j^{-m}(z_k)=$ ˆˆ$f_{j-1}^{-m}(z_k)$ 对于 $j=1$, 2, ..., p_k-1, $f_q^{-m}(0)\neq 0$ 对于 $q=1$, 2, ..., p_k-1, 并且 $f_0^{-m}(0)=0$。

证明。该证明与命题 3.3 的证明非常相似：将公式 (3.18) 和 (3.13) 结合起来，再按照方程 (3.25) 中给出的方式重新排列；两者唯一的区别是，此处必须考虑 $m+3$ 被 2 和 4 整除。函数 $f_q^n(z_k)$ 的性质可由命题 3.1 中给出的系数 a_k^n 的性质推得。 □

注3.10.命题 3.4 中定义的自然数 p_k 和变量 z_k 可以明确写成如下形式:

$$\frac{p_k}{k}=\frac{m+3}{4},\qquad z_4=\frac{2^9t^4}{(2n+1)^6},\quad z_2=\frac{2^{3/2}t^2}{(2n+1)^3},\quad z_1=\frac{t}{2^{3/4}n^{3/2}}.$$

■

命题 3.5。函数 $f_q^n(z)$和 $f_q^{-m}(z_k)$的解析延拓（分别参见命题 3.3 和 3.4）在 $\mathbb{C}$上是亚纯的。

证明。在命题3.3 和 3.4 中引入的函数 $y_r(t)$ 中的任意一个，在 $z=0$ ($z_k=0$) 的邻域内，都可表示为如下形式:

$$ty(t)=c^2\sum_{q=0}^{p-1}z^{\frac{q}{p}}\hat{f}_q(z),\qquad p\in\mathbb{N},\ \ c\in\mathbb{Q}\setminus\{0\},\tag{3.26}$$

ˆ 其中，函数 $f_q(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内全纯。
对于 $p\geqslant 1$ 和 $k=0$, 1、.....、$p-1$, 定义函数 $y_k(t):=y(te^{2\pi in_k})$, 其中绕数$n_k=k$（模$p$），以及列向量

$$Y(t)=(y_0(t),y_1(t),\ldots,y_{p-1}(t))^T\quad\text{and}\quad F(z)=(\hat{f}_0(z),z^{1/p}\hat{f}_1(z),\ldots,z^{(p-1)/p}\hat{f}_{p-1}(z))^T,$$

其中, T 表示转置。于是，方程 (3.26) 可以改写为矩阵形式。

$$tY(t)=AF(z),\tag{3.27}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\ldots&1\\1&\varepsilon_p&\varepsilon_p^2&\ldots&\varepsilon_p^{p-1}\\1&\varepsilon_p^2&\varepsilon_p^4&\ldots&\varepsilon_p^{2(p-1)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\varepsilon_p^{p-1}&\varepsilon_p^{2(p-1)}&\ldots&\varepsilon_p^{(p-1)^2}\end{pmatrix},\qquad \varepsilon_p=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p}},\quad p\in\mathbb{N}.$$

$p\times p$矩阵 A可逆，因为 det $A=p^{\frac{p}{2}}e^{-\frac{\pi\mathrm{i}(p-1)(p-2)}{4}}\neq 0$（见 [15],问题 *299）；因此,

$$F(z)=tA^{-1}Y(t),\qquad t=\left(\frac{2n+3}{4}\right)^{3/2}z^{1/4}.\tag{3.28}$$

对于函数 $y_{-m}(t)$（参见命题3.3）， t 通过对关于 z_k 的公式求逆给出（参见注 3.10）。

方程 (3.28) 定义了向量值函数 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的解析延拓；因此， $F(z)$ 各分量的唯一奇点是极点，即函数 ˆ$f_q(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的唯一奇点是极点。

□

注 3.11. 命题 3.3（分别地，命题 3.4）表明， n-级数（分别地， m-级数）的解在 $w^{2n+3}=z$ （分别地， $w^{p_k}=z_k$）的黎曼曲面上是单值的。下面，我们说明如何满足代数多值函数的形式定义（例如，参见 [38]）。■

定义 3.1. 考虑函数

$$g(z)=\sum_{q=0}^{\nu-1}\omega^q\tilde{f}_q(z),\qquad \omega^\nu=z, \tag{3.29}$$

其中，函数 $\tilde{f}_q(z)$在 $z=0$ 处全纯。对于 $k=1$、2、.....、ν，通过恒等式定义在 $z=0$ 处全纯的函数 $f_q^k(z)$

$$(g(z))^k=\left(\sum_{q=0}^{\nu-1}\omega^q\tilde{f}_q(z)\right)^k=:\sum_{q=0}^{\nu-1}\omega^q f_q^k(z).$$

定义矩阵 $\nu\times\nu$ $F_\nu(z)=\{f_q^k(z)\}$ $q=0,1,\dots,\nu-1$ $k=$，其中，、、依次枚举各列，、、依次枚举行。$1,2,\dots,\nu$

注 3.12。尽管矩阵 $F_\nu(z)$ 的定义看起来足够简单，但精确计算其行列式似乎是一个相当复杂的问题。$F_k(z)$的行列式对于 $k=1$,. ..,7几乎可以立即算出；然而，矩阵 $F_8(z)$~ ~ ~的行列式计算大约需要 340 秒：在 $\mathbb{Z}[f_0,f_1,\dots,f_{\nu-1}]$上的因式分解形式中，多项式有四个因子，其中一个因子的规模，即一个 12 次多项式，超过了 10^6 个字符，因而无法打印。我们未能计算 $F_9(z)$ 的行列式，因为 MAPLE在数小时的计算之后，仍无法在配备16GB 内存的计算机上分配足够的内存，甚至无法计算 $F_9(z)$ 的一个 8×8 子式（几乎全部内存连同部分硬盘空间都被占用了）。例如，我们给出 $\det(F_3(z))$ 的显式公式：

$$\det(F_3(z))=\Big((\tilde{f}_1(z))^3-z(\tilde{f}_2(z))^3\Big)\Big((\tilde{f}_2(z))^3z^2+\Big((\tilde{f}_1(z))^3-3\tilde{f}_0(z)\tilde{f}_1(z)\tilde{f}_2(z)\Big)z+(\tilde{f}_0(z))^3\Big). \tag{3.30}$$

~利用 $f_k(z)$ 在 $z=0$ 处全纯这一事实，很容易证明 $\det(F_3(z))$ 恒不为零。■

~命题 3.6。将函数 $f_q(z)$ 视为 $\mathbb{Z}$ 上的超越元素，而不是 z的函数，并在此意义下将其记为变量 f_q。将$\det(F_\nu(z))$视为关于 z 的多项式，系数属于~ ~ ~$\mathbb{Z}[f_0,f_1,\dots,f_{\nu-1}]$。那么，

$$\deg\det(F_\nu(z))\le\frac{\nu(\nu-1)}{2},$$
$$\det(F_\nu(z))\underset{z\to\infty}{=}(\tilde{f}_{\nu-1})^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}(-z)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}+\mathcal{O}\left(z^{\frac{(\nu-2)(\nu+1)}{2}}\right). \tag{3.31}$$

证明。根据矩阵 $F_\nu(z)$ 的定义，第 k 行的元素是 z 中次数小于或等于 $k-1$ 的多项式；因此，多项式 $\det(F_\nu(z))$ 的次数不可能大于 $0+1+\cdots+\nu-1$。事实上，只有一个由构成行列式的元素相乘所得的乘积能达到最高次数，即主副对角线上的多项式首项之积（依次从右上角列至左下角），

$$\tilde{f}_{\nu-1},\ (\tilde{f}_{\nu-1})^2z,\ \dots,\ (\tilde{f}_{\nu-1})^\nu z^{\nu-1},$$

其与相应符号 $(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$ 的乘积表示多项式 $\det(F_\nu(z))$ 的首项。

□

~ ~ ~猜想 3.1。多项式$\det(F_\nu(z))$，$\nu\geqslant3$，总是在 $\mathbb{Z}[f_0,f_1,\dots,f_{\nu-1}]$上可约，其因数数量等于 ν 的因数数量（包括 1 和其本身）。其中一个因数是关于 z 的多项式，次数为 $\nu-1$。

方程 (3.30) 是猜想 3.1 的一个例证。

引理 3.1。

$$\det(F_\nu(0))=(\tilde{f}_0(0))^\nu(\tilde{f}_1(0))^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}, \tag{3.32}$$
$$\det(F_\nu(z))\underset{z\to0}{=}(-1)^{\nu+1}(\tilde{f}_1(0))^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}z+\mathcal{O}\left(z^2\right),\quad \tilde{f}_0(0)=0, \tag{3.33}$$

$$\det(F_{2n+3}(z))\underset{z\to0}{=}(-1)^{\frac{(n+1)(3n+4)}{2}}(\tilde{f}_{n+1}(0))^{(n+2)(2n+3)}z^{(n+1)^2}+\mathcal{O}\left(z^{(n+1)^2+1}\right),\quad n\in\mathbb{Z}_{\geqslant0},$$
$$\tilde{f}_0(0)=\cdots=\tilde{f}_n(0)=0. \tag{3.34}$$

证明。考虑矩阵 $F_\nu(0)$。其第一列由 $\tilde f_0(0)$ 的幂组成，即 $(\tilde f_0(0))^k$, $k = 1, \dots, \nu$。从第一列中提出 $f_0(0)$，使其作为行列式的一个因子；此时所得矩阵的 $(1,1)$ 元素等于 1。将第一行乘以 $f_0(0)$ 的适当幂，并依次从其他各行中减去所得结果，我们得到一个第一列全为零的矩阵，只有 $(1,1)$ 元素等于 1。显然，所得行列式等于删除第一列和第一行后得到的子式：该子式等于所导出的 $(\nu-1)\times(\nu-1)$ 矩阵的行列式。这个新得到的矩阵的第一列由元素 $\binom{k}{1}(\tilde f_0(0))^k \tilde f_1(0)$, $k = 1, \dots, \nu-1$ 组成；特别地，第一个元素是 $\tilde f_0(0)\tilde f_1(0)$。从该列中提出这个因子，得到一个行列式，其第一列由项 $\binom{k}{1}(\tilde f_0(0))^{k-1}$ 组成：第一个元素等于 1。将该行列式的各行乘以 $f_0(0)$ 的适当幂，并依次从后续各行中减去所得结果，便得到一个第一列，其第一个元素为 1，其余元素全为 0；因此，变换后的行列式等于删除第一行和第一列后得到的 $(\nu-2)\times(\nu-2)$ 子式。前一步中导出的 $(\nu-2)\times(\nu-2)$ 行列式的第一列由元素 $\binom{k}{2}(\tilde f_0(0))^{k-1}(\tilde f_1(0))^2$, $k = 2, \dots, \nu-1$ 组成。原行列式第三列中所有含有 $f_2(0)$ 的项，现在都因前述减法以及二项式系数的某些恒等式而被消去。该列的第一个元素 $\tilde f_0(0)\tilde f_1(0)^2$，现在从行列式中提出，并与前两步中得到的因子 $\tilde f_0(0)$ 和 $f_0(0)f_1(0)$ 合并。因此，该过程进行 ν 步，最终得到的总乘法因子为 $\tilde f_0(0)\cdot\tilde f_0(0)\,\tilde f_1(0)\cdot\dots\cdot\tilde f_0(0)(\tilde f_1(0))^{\nu-1}$。

对于情形 $zg_0(z)$，其中函数 $\tilde g_0(z)$ 在 $z = 0$ 处全纯。回顾矩阵 $F_\nu(z)$ 的构造可知，z 的连续幂次之所以出现，是因为在 $\prod_{j\leqslant k}\omega^j\tilde f_j$ 类型的乘积中，指标在 j 上的和会大于 ν、2ν 等。因此，将全纯函数 $f_j(z)$ 展开为泰勒级数后，显然，z 的最小幂次由指标和最小的乘积产生。显然，$\det(F_\nu(z))$ 中只有一项具有这一性质，即由包含在主对角线上方下一行的矩阵元素中的 ν 个 $f_1(0)$ 的连续幂次之积，以及项 $z(f_1(0))^\nu$ 组成的项；后者是唯一包含 z 的一次幂、且该幂位于矩阵 $F_\nu(z)$ 左下角的项：$\tilde f_1(0)\cdot(\tilde f_1(0))^2\cdot\dots\cdot(\tilde f_1(0))^{\nu-1}\cdot z(\tilde f_1(0))^\nu$。该项的奇偶性等于排列 ν，1，2，…，$\nu-1$ 的奇偶性。

渐近行为 (3.34) 的证明与前面对 (3.33) 的证明非常相似。在这种情况下，$\nu = 2n+3$。令 $f_0(z) = zg_0(z)\dots, f_n(z) = zg_n(z)$，并通过将其余函数 $\tilde f_k(z)$ 视为对应于 ω 的幂来进行思想实验，即 $\tilde f_k(z)\to\omega^k\tilde f_k(z)$。由此我们可以看出，$z$ 的最低次幂仅由行列式中的一个元素给出，该行列式由以下各项的乘积构成

$$\tilde f_{n+1}(0)\cdot(\tilde f_{n+1}(0))^2\cdot(\tilde f_{n+1}(0))^3 z\cdot(\tilde f_{n+1}(0))^4 z\cdot\dots\cdot(\tilde f_{n+1}(0))^{2n+1}z^n\cdot(\tilde f_{n+1}(0))^{2n+2}z^n\cdot(\tilde f_{n+1}(0))^{2n+3}z^{n+1}$$

这些项是矩阵元素中依次位于第 1、2、…、$2n+3$ 行的元素，但处于“混合”列 $n+2, 2n+3, n+1, 2n+2, n, 2n+1, \dots, 2, n+3, 1$ 中。该置换由 $(n+1)(3n+4)/2$ 次转置构成。乘积等于 $(\tilde f_{n+1}(0))^{1+2+\dots+2n+3}z^{2(0+1+\dots+n)+n+1}$。□

命题 3.7. 存在亚纯函数 $g_k^p(z)$、$z\in\mathbb{C}$，使函数 $y_p(t)$ 满足多项式方程

$$\sum_{k=1}^{2n+2} g_k^n(z)(ty_n(t))^k - 1 = 0,\quad n\in\mathbb{N},\qquad \sum_{k=1}^{p_k-1} g_k^{-m}(z_k)(ty_{-m}(t))^k - 1 = 0,\quad m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\tag{3.35}$$

其中 z 在 (3.24) 中定义，p_k 和 z_k 见注 3.10，且方程中的多项式在亚纯函数域上不可约。 (3.35)

证明. 考虑矩阵 $F_\nu(z)$ 的构造（参见定义 3.1）：令 $g(z) = ty_p(t)$，其中 t 根据 $p = n$ 或 $p = -m$ 的情况，分别通过 z 或 z_k 定义（分别参见命题 3.3 或 3.4，以及注 3.10）。注意，对于 $p = n$，参数为 $\nu = 2n+3$；而对于 $p = -m$，$\nu = p_k$，$k = 1, 2, 4$。接下来，令 $f_q(z) = f_q(z)$，并对 m-级数，设 $z = z_k$。由于 n-级数和 m-级数的证明完全相同，仅需对上述记号稍作调整，因此我们给出 n-级数的证明。

引入两个列向量：$Y_n(t) = (y_n(t), (y_n(t))^2, \dots, (y_n(t))^\nu)^T$ 以及 $\Omega(z) = (1, \omega, \dots, \omega^\nu)^T$。现在，利用定义 3.1 中给出的矩阵 $F_\nu(z)$ 的构造，可写出

$$tY_n(t) = F_\nu(z)\Omega(z).\tag{3.36}$$

ˆ 根据命题 3.3， $f_{n+1}^n(0) \neq 0$；因此，引理 3.1（渐近行为 (3.34)）意味着 $F_\nu(z)$ 不恒等于零，从而可以对方程 (3.36) 求逆，得到 $(F_\nu(z))^{-1} t Y_n(t) = \Omega(z)$。因此，(3.35) 中的第一个多项式方程正是 $\Omega(z)$ 的第一分量所满足的方程。对于 m-级数，矩阵 $F_\nu(z_k)$ 的可逆性由 ˆ 渐近行为 (3.33) 得到保证，因为根据命题 3.4， $f_1^{-m}(0) \neq 0$。

(3.35) 中多项式的不可约性源于这样一个事实：否则，函数 $y_n(t)$ 和 $y_{-m}(t)$ 的分支数将分别少于 $2n+3$ 和 p_k。然而，这与 (3.18) 和 (3.19) 中给出的这些函数的小-t 展开相矛盾。 □

在命题 3.7 中，多项式方程及其解均用ˆ函数 $f_q(z)$表示。下面我们证明，这些函数可以刻画为某些特殊的非线性多项式微分方程组的亚纯解。

命题 3.8. 对于方程 (1.6)（参见 (3.1)）的任意代数函数解 $y(t)$，若其具有 p 个分支，则存在一个由 p 个二阶多项式常微分方程组成的方程组 $\mathcal{E}_p$， $E_p^q = 0$，其中

$$E_p^q = E_p^q\Big(z, \{\hat f_0, \hat f_1, \dots, \hat f_{p-1}\}; \{\hat f_0', \hat f_1', \dots, \hat f_{p-1}'\}; \{\hat f_0'', \hat f_1'', \dots, \hat f_{p-1}''\}\Big), \quad q = 0, 1, \dots, p-1, \tag{3.37}$$

其具有一个（关于 $\mathbb{C}$）亚纯解 $\{\hat f_0(z), \hat f_1(z). .., \hat f_{p-1}(z)\}$，该解通过命题3.3或3.4 中给出的公式定义 $y(t)$。反之，方程组 $\mathcal{E}_p$ 的任意亚纯解都可通过命题3.3 或 3.4 定义出方程(1.6)（参见 (3.1)）的一个具有 p-分支的代数函数解。

证明。证明具有构造性。例如，考虑偶数m时的 n级数和 m级数的情形。根据命题 3.3 和 3.4，此时，解 $y(t)$ 可以表示为以下形式：

$$t y(t) = v(z) = (c_1)^2 \sum_{q=0}^{p-1} z^{\frac{q}{p}} \tilde f_q(z), \tag{3.38}$$

其中 p 是奇正整数， c_1 是参数。函数 $v(z)$ 的方程可写为

$$v(z)\delta^2 v(z) - (\delta v(z))^2 = (c_2)^2 \left((v(z))^3 - z\right), \qquad \delta = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}, \tag{3.39}$$

˜其中 c_2 是某个参数。由于在此阶段，函数 f_q 的定义只确定到乘以一个参数的倍数，我们可以通过缩放 $v(z)$ 和 z，始终固定 $c_1 = c_2 = 1$。

将由 (3.38) 给出的 $v(z)$ 代入方程 (3.39)，经过直接计算后，我们得到如下形式的方程

$$\sum_{q=0}^{p-1} z^{\frac{q}{p}} E_p^q = 0, \tag{3.40}$$

其中 E_p^q 是形如 (3.37) 的亚纯函数。由于函数 E_p^q 是单值的，我们重复证明命题 3.5 中使用的论证，得到向量 $\vec{\mathcal{E}}_p = (E_p^0, z^{1/p}E_p^1, \dots, z^{(p-1)/p}E_p^{p-1})^T$ 满足的方程 $A\vec{\mathcal{E}}_p = \vec 0$，其中矩阵 A 在命题 3.5 中定义。

反过来，如果我们有方程组 $\mathcal{E}_p$ 的一个亚纯解，就通过公式 (3.38) 构造函数 $v(z)$ 和 $y(t)$；将 $y(t)$ 代入方程 (1.6) 后，得到方程 (3.40)，它成立是因为 $E_p^q = 0, q = 0, 1, \dots, p-1$。 □

注 3.13. 对于在命题 3.8 的证明中构造的方程组 $\mathcal{E}_p$，我们补充几点说明。

方程组 $\mathcal{E}_p$ 的所有亚纯解在原点处都是全纯的。对于 $m = 2n \geqslant 2$的偶数值，方程组 $\mathcal{E}_{m+3}$ 和 $\mathcal{E}_{2n+3}$ 在缩放（$c_1 = c_2 = 1$）意义下重合。最后这一事实意味着，对于任意 $n \geqslant 1$，方程组 $\mathcal{E}_{2n+3}$ 恰好有两个亚纯解：借助命题 3.3 和 3.4 中给出的初始数据，可以区分这两个解。

对于 $m = 0$，情况并非如此（见下文注 3.14）。当 $p_2 = 2n+3$ 或 $p_4 = 2n+3$ 时，偶数 m 的 m 级数的其他解（参见命题 3.4）也可能具有相同的分支数；然而，方程组 $\mathcal{E}_{p_2}$ 和 $\mathcal{E}_{p_4}$ 并不相同，因为它们是由类似 (3.39) 的方程得到的，其中右端的变量 z 分别替换为 $(z_2)^2$ 或 $(z_4)^4$, 。当然，我们可以通过变量替换 $(z_2)^2 = z$ 或 $(z_4)^4 = z$，将它们映射到相应的方程组 $\mathcal{E}_{2n+3}$；但在这种情况下，在变量 z_2（分别为 z_4）中于 $z_2 = 0$（分别为 $z_4 = 0$）处全纯的解，将在 $z = 0$ 处关于 $\sqrt{z}$（分别为 $\sqrt[4]{z}$）展开。

方程组 $\mathcal{E}_{2n+3}$ 的显式形式如下，其推导过程见命题 3.8 的证明：

$$E_p^q:\quad \sum_{\substack{q_i+q_j=q(\mathrm{mod}\,p)\\ q_i\geqslant 0,\,q_j\geqslant 0}} z^{\frac{q_i+q_j-q}{p}}\left(\hat{f}_{q_i}\left(\frac{q_j^2}{p^2}\hat{f}_{q_j}+\frac{2q_j}{p}\delta(\hat{f}_{q_j})+\delta^2(\hat{f}_{q_j})\right)-\left(\frac{q_i}{p}\hat{f}_{q_i}+\delta(\hat{f}_{q_i})\right)\left(\frac{q_j}{p}\hat{f}_{q_j}+\delta(\hat{f}_{q_j})\right)\right)$$
$$=(c_1)^4(c_2)^2\sum_{\substack{q_i+q_j+q_k=q(\mathrm{mod}\,p)\\ q_i\geqslant 0,\,q_j\geqslant 0,\,q_k\geqslant 0}} z^{\frac{q_i+q_j+q_k-q}{p}}\hat{f}_{q_i}\hat{f}_{q_j}\hat{f}_{q_k}\quad -\quad \frac{z}{(c_1)^6}\delta_{0,q},\qquad q=0,1,\ldots,p-1,$$

其中 $\hat{f}_{q_l}=\hat{f}_{q_l}(z)$、$\delta(\hat{f}_{q_l})=z\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}z\,\hat{f}_{q_l}(z)$、$l=i$、$j$、$k$ 和 $\delta_{0,q}$ 是克罗内克 δ。 ■

注 3.14. 此处，我们考虑与第 2 节中所讨论的解 $H(r)$ 相关联的 $\mathcal{E}_3$ 方程组示例。回想一下，方程 (3.1) 的相应解（参见 (1.6)）记为 $y_0(t)$。定义

$$v_0(z):=ty_0(t)=\hat{f}_0(z)+z^{1/3}\hat{f}_1(z)+z^{2/3}\hat{f}_2(z),\qquad z=t^4. \tag{3.41}$$

将此公式与命题3.4 中给出的公式进行比较，可以注意到，z的缩放系数已被修改，因为我们希望恰好得到第2节中引入的级数。将函数 $v_0(z)$代入方程 (3.1)后，经过直接的变换，我们得到关于 $v_0(z)$的如下常微分方程：

$$9\left(\frac{zv_0'(z)}{v_0(z)}\right)'=v_0(z)-\frac{z}{(v_0(z))^2}. \tag{3.42}$$

回顾第2节的记号，$z=r$。为简化随后关于$\hat{}$函数 f_q、$q=0$、1、2的方程组中的记号，我们省略它们对 z 的依赖关系，并且撇号表示关于 z 的求导：

$$\begin{aligned}
E_3^0:\quad & z^2\big(\hat{f}_2\hat{f}_1''-2\hat{f}_1'\hat{f}_2'+\hat{f}_1\hat{f}_2''\big)+z\big(\hat{f}_0\hat{f}_0''-(\hat{f}_0')^2\big)+(1/3)z\hat{f}_2\hat{f}_1'+(5/3)z\hat{f}_1\hat{f}_2'+\hat{f}_0\hat{f}_0'\\
&=(1/9)\big(z(\hat{f}_2)^3+(\hat{f}_0)^3/z+(\hat{f}_1)^3-\hat{f}_1\hat{f}_2-1\big)+(2/3)\hat{f}_0\hat{f}_1\hat{f}_2,\\
E_3^1:\quad & z^2\big(\hat{f}_2\hat{f}_2''-(\hat{f}_2')^2\big)+z\big(\hat{f}_1\hat{f}_0''-2\hat{f}_0'\hat{f}_1'+\hat{f}_0\hat{f}_1''\big)+(1/3)\hat{f}_1\hat{f}_0'+(5/3)\hat{f}_0\hat{f}_1'+z\hat{f}_2\hat{f}_2'\\
&=(1/3)\big((\hat{f}_0)^2\hat{f}_1/z+\hat{f}_0(\hat{f}_2)^2+(\hat{f}_1)^2\hat{f}_2\big)-(1/9)\hat{f}_0\hat{f}_1/z,\\
E_3^2:\quad & z^2\big(\hat{f}_0\hat{f}_2''-2\hat{f}_0'\hat{f}_2'+\hat{f}_2\hat{f}_0''+\hat{f}_1\hat{f}_1''-(\hat{f}_1')^2\big)+z\big((7/3)\hat{f}_0\hat{f}_2'-(1/3)\hat{f}_2\hat{f}_0'+\hat{f}_1\hat{f}_1'\big)\\
&=(1/3)\big((\hat{f}_1)^2\hat{f}_0+(\hat{f}_0)^2\hat{f}_2+z(\hat{f}_2)^2\hat{f}_1\big)-(4/9)\hat{f}_0\hat{f}_2.
\end{aligned}$$

分析 E_3^0 方程中极点的阶数，可以证明 $\mathcal{E}_3$$\hat{}$ 方程组的亚纯解在 $z=0$处不可能有极点：反设 f_0 在 $z=0$ 处有极点，且其阶数高于 f_1 和 f_2的极点阶数；那么很容易推出矛盾，即函数 f_1 或 f_2 必须有一个更高阶的极点（至少高 1 阶）。如果假设 f_1 或 f_2 具有最高阶极点，也会出现类似的矛盾。另一方面，如果所有极点的阶数都相同，那么项 $\hat{}$ f_0^3/z在原点处有一个极点，且无法被 E_3^0方程的其他任何项的极点抵消。因此，$\mathcal{E}_3$的任何亚纯解在 $z=0$处都是正则的。

容易证明，在 $z=0$ 处可展开为泰勒级数的 $\mathcal{E}_3$ 方程组的解只有一个；借助 Maple 可求得其前几个系数：

$$\hat{f}_0(z)=z(a_2\ +a_5z+a_8z^2+\cdots),\quad \hat{f}_1(z)=a_0+a_3z+a_6z^2+\cdots,\quad \hat{f}_2(z)=a_1+a_4z+a_7z^2+\cdots,$$

其中，数 a_k, $k=0$, 1, 2,..., 在第 2 节中定义（见方程 (2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.17)、$\hat{}$ 和 (2.25)）。函数 $f_q(z)$ 的级数结构与命题 3.4 中 $m=0$ in $\hat{}$ 的级数结构一致；特别地，$f_0(z)=zf_0(z)$，其中 $f(0)\neq 0$。 ■

4 单值化数据

Painlevé 方程的解空间可以通过单值化数据流形来刻画；事实上，该流形是由 $\mathbb{C}^n$中的一组多项式方程定义的代数簇。该流形上各点的坐标称为解的单值化数据；特别地，方程(1.1)的单值化数据流形定义于 [26] 中。下面，我们给出对应于 $a=0$ 情形的该流形的约化版本。

考虑 $\mathbb{C}^7$，其坐标为 $(s_0^0, s_0^\infty, s_1^\infty, g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22})$。对于方程(1.1)且满足 $a=0$ 的单值化流形，记为 $\mathcal{M}$，其通过以下代数方程组定义：

$$s_0^\infty s_1^\infty = -2 - \mathrm{i}s_0^0, \tag{4.1}$$
$$g_{21}g_{22} - g_{11}g_{12} + s_0^0 g_{11}g_{22} = \mathrm{i}, \tag{4.2}$$
$$g_{11}^2 - g_{21}^2 - s_0^0 g_{11}g_{21} = \mathrm{i}s_0^\infty, \tag{4.3}$$
$$g_{22}^2 - g_{12}^2 + s_0^0 g_{12}g_{22} = \mathrm{i}s_1^\infty, \tag{4.4}$$
$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1. \tag{4.5}$$

注 4.1. 将方程 (4.3) 和 (4.4) 相乘，并借助剩余的三个方程，可以证明该乘积恒等成立；因此，$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = 3$。事实上，这个单值化流形唯一刻画的是一个略作扩展的方程组的解，而不只是方程 (1.1) 的解 $u(\tau)$；具体而言，$\mathcal{M}$ 唯一刻画函数对 $(u(\tau)\ \varphi(\tau))$，其中 $\varphi(\tau)$ 可写为不定积分 $\int^\tau \mathrm{d}\xi/u(\xi)$，而额外的参数是确定某个特定本原函数所必需的。函数 $\varphi(\tau)$ 见附录 B 和 C。

解的唯一参数化 $u(\tau)$ 通过对 $\mathcal{M}$ 进行二次压缩实现。定义下列压缩变量：

$$\tilde{g}_1 = \mathrm{i}g_{12}g_{11}, \quad \tilde{g}_2 = \mathrm{i}g_{21}g_{22}, \quad \tilde{g}_3 = g_{11}g_{22}, \quad \tilde{g}_4 = g_{12}g_{21}, \quad \tilde{s} = 1 + \mathrm{i}s_0^0 = -(1 + s_0^\infty s_1^\infty). \tag{4.6}$$

参数 $\tilde{g}_4$ 的引入仅仅是为了方便；它起辅助作用，从形式上说，定义收缩单值化流形并不需要它。注意，根据定义，有 $\tilde{g}_3\tilde{g}_4 = -\tilde{g}_1\tilde{g}_2$，而方程（4.5）允许消去 $\tilde{g}_4$，即 $\tilde{g}_3 - \tilde{g}_4 = 1$。最后，将方程（4.2）乘以 –i，我们得到如下代数方程，它们在 $\mathbb{C}^4$ 中以坐标（$\tilde{g}_1$，$\tilde{g}_2$，$\tilde{g}_3$，$\tilde{s}$）定义收缩单值化流形：

$$\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 + \tilde{g}_3(1 - \tilde{s}) = 1, \qquad \tilde{g}_3(\tilde{g}_3 - 1) = -\tilde{g}_2\tilde{g}_1. \tag{4.7}$$

坐标 $\tilde{g}_1$ 或 $\tilde{g}_2$ 中的任一个都可以进一步从方程组 (4.7)中消去，因此收缩单值化流形可以表示为关于 $\mathbb{C}^3$ 的单个方程：

$$(\tilde{g}_1)^2 + \tilde{g}_1\tilde{g}_3(1 - \tilde{s}) + (\tilde{g}_3)^2 = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_3 \tag{4.8}$$

对于与 (1.1) 等价且 $a = 0$ 的方程（参见附录 D，方程 (D.1)），文献 [25] 引入了两个等价的（通过双有理变换相联系的）单值化流形（$\varepsilon = \pm 1$ 的每个取值对应一个）。例如，对于 $\varepsilon = +1$，相应的流形由以下方程组描述：

$$g_1 + g_2(1 - s) + g_3 = 1, \qquad g_2(g_2 - 1) = g_1 g_3. \tag{4.9}$$

两个流形（4.7）和（4.9）应双有理等价。存在两个显然的置换变换：

$$\tilde{s} = s, \quad \tilde{g}_3 = g_2, \quad \tilde{g}_2 = -g_3, \quad \tilde{g}_1 = g_1 \qquad \text{or} \qquad \tilde{s} = s, \quad \tilde{g}_3 = g_2, \quad \tilde{g}_2 = -g_1, \quad \tilde{g}_1 = g_3.$$

然而，这些变换与论文 [25, 26] 中得到的解的参数化并不对应；事实上，通过比较渐近行为中的振荡项的振幅，我们看到 $\tilde{g}_3 = g_3$，这意味着应当存在某种其他的双有理变换来连接这些收缩流形：

$$s = \tilde{s}, \ \ g_3 = \tilde{g}_3, \ \ g_2 = -\tilde{g}_2, \ \ g_1 = \tilde{g}_1 - \tilde{s}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_3), \tag{4.10}$$

or

$$s = \tilde{s}, \ \ g_3 = \tilde{g}_3, \ \ g_2 = \tilde{g}_1, \ \ g_1 = -\tilde{g}_2 + \tilde{s}(\tilde{g}_1 - \tilde{g}_3). \tag{4.11}$$

上述变换的证明比置换变换的证明稍复杂；因此，我们以变换（4.11）为例概述证明。将不带波浪号的变量公式代入（4.9）的第一个方程，我们立即可以确认（4.7）的第一个方程对带波浪号的变量成立。要确认（4.7）的第二个方程，我们必须两次使用第一个方程；更准确地说，将不带波浪号的变量代入（4.9）的第二个方程，可得

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(\tilde{g}_1 - 1) = \tilde{g}_3(-\tilde{g}_2 + s\tilde{g}_1 - s\tilde{g}_3) \quad &\Rightarrow \quad \tilde{g}_1(\tilde{g}_2 - \tilde{g}_3 + \tilde{s}\tilde{g}_3) = \tilde{g}_3(-\tilde{g}_2 + \tilde{s}\tilde{g}_1 - \tilde{s}\tilde{g}_3) \Rightarrow \\ \tilde{g}_1\tilde{g}_2 = \tilde{g}_3(\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 + \tilde{s}\tilde{g}_3) \quad &\Rightarrow \quad \tilde{g}_1\tilde{g}_2 = \tilde{g}_3(1 - (1 - \tilde{s})\tilde{g}_3 + \tilde{s}\tilde{g}_3). \end{aligned}$$

■

引理 4.1.令 $u(\tau)$为由渐近行为(1.10) 定义的方程 (1.1) 的解。那么，刻画 $u(\tau)$ 的单值化数据为:

$$\tilde{s}=0,\quad s_0^0=\mathrm{i},\quad s_0^\infty s_1^\infty=-1,\quad s_0^\infty g_{12}^2=s_1^\infty g_{21}^2=-\frac{\mathrm{i}(H(0)-1)^2}{3H(0)},$$
$$\tilde{g}_4=g_{12}g_{21}=\frac{(H(0)-1)^2}{3H(0)},\quad \tilde{g}_3=g_{11}g_{22}=\frac{1}{3H(0)}\Big(H(0)-\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\Big)\Big(H(0)-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\Big),$$
$$\tilde{g}_2=\mathrm{i}g_{21}g_{22}=-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}}{3H(0)}\Big(H(0)-1\Big)\Big(H(0)-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\Big),\quad \tilde{g}_1=\mathrm{i}g_{12}g_{11}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}}{3H(0)}\Big(H(0)-1\Big)\Big(H(0)-\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\Big).\tag{4.12}$$

证明。当 $\tau\to 0$ 时，解 $u(\tau)$ 的渐近行为不含对数项（参见 (1.10)）；因此，其通过单值化数据进行的参数化见附录 B 定理 B.1（其中代入 $a=0$）：

$$u(\tau)\underset{\tau\to+0}{=}\frac{\tau}{16\pi}\big(\varpi_1(-\rho)\varpi_2(-\rho)\tau^{-4\rho}+\varpi_1(-\rho)\varpi_2(\rho)+\varpi_1(\rho)\varpi_2(-\rho)+\varpi_1(\rho)\varpi_2(\rho)\tau^{4\rho}\big)\left(1+o(\tau^\delta)\right),\tag{4.13}$$

其中，$\varpi_k(\lambda)$ 对于 $k=1$、2 和 $\lambda=\pm\rho$ 由方程 (B.6)–(B.8) 给出，而 $\delta>0$。

为与渐近行为 (1.10) 相匹配，必须假设 $\varpi_1(-\rho)\varpi_2(-\rho)\neq 0$ 且 $1-4\rho=1/3$: 最后一个等式意味着 $\rho=1/6$。在上述结论中，我们用到了渐近展开式 (4.13) 的首项在变换 $\rho\to-\rho$ 下保持对称这一事实，因此，当 $\rho\neq 0$ 时，总可以假设 $\rho>0$。方程 (B.3) 现在写为

$$\cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big)=\frac{1}{2}=-\frac{\mathrm{i}s_0^0}{2}=1+\frac{1}{2}s_0^\infty s_1^\infty,$$

这证实了 (4.12) 中前三个关系式。

比较方程 (4.13) 和 (1.10) 中首项的系数，我们得到

$$\frac{\varpi_1(-1/6)\varpi_2(-1/6)}{16\pi}=\frac{1}{2}H(0).\tag{4.14}$$

对于 $\rho=1/6$，附录 B 中的方程 (B.6)–(B.8) 为:

$$\varpi_1(\pm1/6)=\mathbf{p}_1(\pm1/6)\chi_1(\pm1/6)=\mathbf{p}_1(\pm1/6)\left(g_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/6}+g_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi/6}\right),\tag{4.15}$$
$$\varpi_2(\pm1/6)=\mathbf{p}_2(\pm1/6)\chi_2(\pm1/6)=\mathbf{p}_2(\pm1/6)\left(g_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/6}+g_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi/6}\right),\tag{4.16}$$

with

$$\mathbf{p}_1(\pm1/6)=\pm6\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/12}\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm1/6}\frac{\Gamma(1\mp\frac{1}{3})\Gamma(1\pm\frac{1}{6})}{\Gamma(1\pm\frac{1}{3})},\qquad \mathbf{p}_2(\pm1/6)=\mathbf{p}_1(\pm1/6)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi/6},\tag{4.17}$$

而 $\Gamma(*)$ 是（欧拉）伽马函数 [13]。数 $\mathbf{p}(\pm1/6)$ 可以显式计算,

$$\mathbf{p}_1(1/6)=3\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{12}},\quad \mathbf{p}_1(-1/6)=-2\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{12}},\quad \mathbf{p}_1(1/6)\,\mathbf{p}_1(-1/6)=-12\pi.\tag{4.18}$$

结合方程 (4.14)–(4.16)，可得

$$(\mathbf{p}_1(-1/6))^2\left(g_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}+g_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\right)\left(g_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}+g_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}=8\pi H(0).\tag{4.19}$$

利用 (4.18) 中给出的 $\mathbf{p}_1(-1/6)$ 的表达式，展开方程 (4.19)，并利用 (4.5) 消去项 $g_{12}g_{21}$，再引入 $\tilde{g}_k$ 变量，可得到关于单值化数据的如下方程:

$$\tilde{g}_1\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}+2(\tilde{g}_3-1)-\tilde{g}_2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}=H(0)-1.\tag{4.20}$$

方程 (4.20) 还应补充定义单值化流形 (4.7) 的两个方程；因此，我们得到关于三个变量 $\tilde{g}_k, k=1, 2, 3$ 的三个方程。为了求解这些方程，将线性方程中的 $\tilde{g}_1$ 和 $\tilde{g}_2$ 表示为 $H(0)-1$ 和 $\tilde{g}_3-1$的线性组合；然后，将这些表达式代入 (4.7) 中的二次方程，可发现二次项 $(\tilde{g}_3-1)^2$ cancels，因此得到一个含有 $H(0)$ 的关于 $\tilde{g}_3-1=\tilde{g}_4$ 的线性方程。对最后一个方程求解 $\tilde{g}_4$，便得到 (4.12) 中给出的 $\tilde{g}_4$ 表达式。接着，由方程 $\tilde{g}_3-1=\tilde{g}_4$ 得到 $\tilde{g}_3$ 的公式，而 $\tilde{g}_1$ 和 $\tilde{g}_2$ 则由上述证明中提到的线性方程得出。□

注 4.2。注意，渐近行为 (4.13) 中的误差估计包含一个未确定的正参数 δ。在许多问题中，正如上面的证明所展示的那样，这个参数的取值并不重要。不过，在某些非常特殊的情况下，这个参数可能会妨碍直接应用渐近行为来计算单值化数据；然而，在这些情况下，解的特殊性质仍可能有助于绕过这一问题（例如，参见 [28]）。δ 的取值并非普适，而是取决于解；当然，对解进行局部分析可以确定特定解所对应的参数 δ 的取值（见下文 (4.26)）。

下面，我们说明我们的渐近公式(4.13) 如何与第 2 节中研究的函数$H(r)$的展开相一致。事实上，我们针对在引理 4.1 中获得的单值化数据提出了另一种计算方法，旨在展示附录 B、定理 B.1 中那些未用于单值化数据计算的公式的适用性。不过需要注意的是，后一个计算实际上使用了 δ 的值。

我们首先证明关于 $\varpi_k(\pm1/6)$、 $k=1$、2 的两个恒等式：

$$\begin{aligned}&\varpi_1(-1/6)\,\varpi_2(1/6)+\varpi_1(1/6)\,\varpi_2(-1/6)\\ &=\mathbf{p}_1(1/6)\,\mathbf{p}_1(-1/6)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\chi_1(1/6)\,\chi_2(-1/6)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}\chi_1(-1/6)\,\chi_2(1/6)\right)\\ &=-12\pi\sqrt{3}\,(\mathrm{i}(g_{11}g_{12}-g_{21}g_{22})+g_{12}g_{21})=0;\end{aligned}\tag{4.21}$$

第一个等式由方程 (B.6)和(4.17) 中的第二个方程得出；第二个等式使用定义(B.7)和(4.18) 中的第三个方程；最后一个关系等价于方程 (4.2)（其中含有 $s_0^0=\mathrm{i}$）和 (4.5)。以类似的方式，可以证明以下恒等式：

$$\begin{aligned}&\varpi_1(1/6)\,\varpi_1(-1/6)\,\varpi_2(1/6)\,\varpi_2(-1/6)=\\ &\underbrace{\big(\mathbf{p}_1(-1/6)\mathbf{p}_1(1/6)\big)^2}_{=(-12\pi)^2}\underbrace{\left(g_{11}^2-g_{21}^2-\mathrm{i}g_{11}g_{21}\right)}_{=\mathrm{i}s_0^\infty}\underbrace{\left(g_{22}^2-g_{12}^2+\mathrm{i}g_{12}g_{22}\right)}_{=\mathrm{i}s_1^\infty}=144\,\pi^2;\end{aligned}\tag{4.22}$$

第一个等式是借助定理 B.1 中的定义推导出来的；带下划线的关系式来自方程 (4.18) 中的第三个关系式，以及定义单值化流形的方程 (4.3) 和 (4.4)；最后一个等式则由方程 (4.1) 和 $s_0^0=\mathrm{i}$ 得出。

方程 (4.22) 和 (4.14) 表明

$$\varpi_1(1/6)\,\varpi_2(1/6)=\frac{144\,\pi^2}{\varpi_1(-1/6)\,\varpi_2(-1/6)}=\frac{18\pi}{H(0)}.\tag{4.23}$$

现在，借助 (4.15) 和 (4.16)，方程 (4.23) 可以写成如下形式 :

$$\big(\mathbf{p}_1(1/6)\big)^2\left(g_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}+g_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}\right)\left(g_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}+g_{22}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}=\frac{18\pi}{H(0)}.\tag{4.24}$$

利用 (4.18) 中给出的 p(1/6) 公式，展开括号中的表达式，并引入收缩变量，我们将方程 (4.24) 改写为

$$\tilde{g}_1\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}+2(\tilde{g}_3-1)-\tilde{g}_2\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}=\frac{1}{H(0)}-1.\tag{4.25}$$

方程 (4.25) 为 与方程 (4.20) 一致，并且结合定义收缩.....的方程，
流形，是 等价于引理 4.1 中给出的方程 (4.12)。

现在，我们证明渐近行为 (4.13) 与由方程 (1.5)–(1.8) 和 (2.1) 得出的函数$u(\tau)$的局部展开相一致。为此，将方程 (4.14)、(4.21) 和 (4.23) 中给出的关于 $\varpi_k(\pm1/6)$、 $k=1$、2 的关系式代入渐近展开 (4.13)。参数 δ 尚未指定；但我们知道第 2.1 小节给出的 $H(r)$的展开：实际上，后者意味着 $\delta=3/4$。因此，将 $1+o\big(\tau^\delta\big)$ 替换为相应的级数展开，可得

$$u(\tau)\underset{\tau\to+0}{=}\frac{1}{2}\tau^{1/3}\left(H(0)+\frac{9}{4H(0)}\tau^{4/3}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\mu_m\tau^{4m/3}\right)=\frac{1}{2}\tau^{1/3}H\left(-\left(\frac{3}{2}\right)^2\tau^{4/3}\right),\tag{4.26}$$

其中， μ_m 是 τ无关的系数，而函数 $H(r)$ 由级数 (2.1) 定义。将方程 (4.26) 中括号内的表达式展开，可得

$$H(0)\mu_1+\frac{9}{4H(0)}=-\frac{9}{4}H'(0)=-\frac{9}{4}\left((H(0))^2-\frac{1}{H(0)}\right)\Rightarrow\mu_1=-\frac{9}{4}H(0),$$

$$H(0)\mu_m + \frac{9}{4H(0)}\mu_{m-1} = (-1)^m \left(\frac{3}{2}\right)^{2m} a_m, \quad m = 2, 3, \ldots,$$

其中，数 a_m 在第 2 节中定义。显然，级数 $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \tau^{4m/3}$ 有唯一确定的定义，并且在 $\tau = 0$ 的某个邻域内收敛。■

推论4.1.方程(1.1)有三个代数解（参见 (1.6)），其 $a = 0$ 对应于方程(1.2)的三个常数解。这些解以及方程 (1.1) 的相应单值化数据如下：

(1)

$$u(\tau) = \frac{1}{2}\tau^{1/3}, \qquad y(t) = t^{1/3}, \qquad H(r) = 1,$$
$$\tilde{s} = \tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = \tilde{g}_4 = 0, \qquad \tilde{g}_3 = 1,$$
$$s_0^0 = \mathrm{i}, \quad s_0^\infty = -\mathrm{i}g_{11}^2, \quad s_1^\infty = -\mathrm{i}g_{22}^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{11}g_{22} = 1;$$

(2)

$$u(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\tau^{1/3}, \qquad y(t) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}t^{1/3}, \qquad H(r) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}},$$
$$\tilde{s} = \tilde{g}_1 = \tilde{g}_3 = 0, \qquad \tilde{g}_2 = -1, \quad \tilde{g}_4 = -\mathrm{i},$$
$$s_0^0 = \mathrm{i}, \quad s_0^\infty = \mathrm{i}g_{21}^2, \quad s_1^\infty = \mathrm{i}g_{12}^2, \quad g_{11} = 0, \quad g_{12}g_{21} = -1, \quad g_{21}g_{22} = \mathrm{i};$$

(3)

$$u(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\tau^{1/3}, \qquad y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}t^{1/3}, \qquad H(r) = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}},$$
$$\tilde{s} = \tilde{g}_2 = \tilde{g}_3 = 0, \qquad \tilde{g}_1 = 1, \quad \tilde{g}_4 = -\mathrm{i},$$
$$s_0^0 = \mathrm{i}, \quad s_0^\infty = \mathrm{i}g_{21}^2, \quad s_1^\infty = \mathrm{i}g_{12}^2, \quad g_{22} = 0, \quad g_{12}g_{21} = -1, \quad g_{11}g_{12} = -\mathrm{i}.$$

备注4.3。推论4.1中的 $\tau^{1/3}$ 分支被固定为使其对于 $\tau > 0$为正。函数$y(t)$借助关系式 (1.8) 计算得到。这三个方程(1.1)的不同解（参见(1.6)）当然与代数函数 $\frac{1}{2}\tau^{1/3}$（分别为$t^{1/3}$）的三个分支的拉回相一致；然而，从常微分方程的解的角度来看，它们代表三个不同的解，因为对于 τ（分别为 t）的相同取值，它们具有不同的初值。■

备注4.4. 根据 [17], , 推论4.1中列举的解是方程(1.1) 的唯一代数解，其中 $a = 0$（相应地，方程 (1.6)）。这里，我们说明如何从我们的渐近结果中推导出这一事实。无穷远处的本性奇点对解在该点处的代数行为施加了严格限制。关于解在无穷远点处的渐近行为的主要结果见附录 C。这些渐近结果特别意味着，在解在无穷远点处呈现代数行为的情况下，相应的单值化数据必然满足条件 $g_{12}g_{21}g_{11}g_{22} = 0$（参见方程 (C.2)与 (C.3)，以及方程 (C.24)与(C.26)）。表面看来，还存在另一种可能性，即 $g_{11}g_{22} = 1$（参见方程 (C.1)与(C.3)）。后一种情形结合方程(4.5)意味着 $g_{12}g_{21} = 0$，因此条件 $g_{12}g_{21}g_{11}g_{22} = 0$ 成立。借助定义单值化流形的方程（参见方程(4.2)–(4.5)），这一最后条件可以细分为三个子情形：(1) $g_{12}g_{21} = 0$；(2) $g_{11} = 0$；以及 (3) $g_{22} = 0$。

考虑子情形 (1)，其中大-τ 渐近行为在 [26] 的定理 3.2 中给出。[6] 该定理表明，只有在 $s_0^0 = \mathrm{i}$ 时才可能出现代数行为。现在，方程 (4.2) 和 (4.5) 表明$g_{12} = g_{21} = 0$。这为单值化数据满足 $g_{11}g_{22} = 1$ 时代数解的存在性提供了必要条件。推论 4.1 的第一种情形给出了充分条件。

借助方程 (4.2)–(4.5)，子情形 (2) 得出如下单值化数据值： $g_{11} = 0$, $g_{12}g_{21} = -1$, $g_{21}g_{22} = \mathrm{i}$，以及 $s_0^\infty = \mathrm{i}g_{21}^2$。尽管无法直接确定 s_0^0 和 s_1^∞的值，但有一个与对称性有关的简单巧妙方法。显然，若 $u(\tau)$ 是代数解，那么 $\hat{}u(\tau) = u\big(\tau\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\big)$ 也是代数解；因此，可以推导出变换 $\tau \to \tau\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$ 在单值化流形上的作用。在我们的情形中，即 $a = 0$，该作用用斯托克斯矩阵 S_k和连接矩阵 G表示，其中矩阵定义见 [26], , 可写为：$\hat{}S_k^\infty = S_k^\infty$以及 $-\mathrm{i}S_0^0\sigma_1\hat{}G = G$，其中 $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$，而“帽子”表示与解 $\hat{}u(\tau)$ 对应的单值化矩阵，不带“帽子”的单值化矩阵则对应解 $u(\tau)$。考虑到这些矩阵 [26] 的定义，并假设帽子

[6]在 [26], 的定理 3.2 中，令 $a = 0$, $\varepsilon b = +1$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0)$, $s_0^0(0, 0) := s_0^0$, $s_0^\infty(0, 0) := s_0^\infty$, $s_1^\infty(0, 0) := s_1^\infty$, 且 $g_{ij}(0, 0) := g_{ij}$, $i, j \in \{1, 2\}$。

变量对应于子情形(2)，矩阵关系式可以用相应的标量变量重写如下：$\hat{s}_k^{\infty} = s_k^{\infty}$, $k = 0,1,\hat{s}_0^0 = s_0^0$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{11} = -\mathrm{i}\hat{}g_{21}$，以及 $g_{22} = -\mathrm{i}\hat{}g_{12}$。因此，我们将子情形 (2)映射到子情形(1)。对于子情形 (1)，已证明代数解存在当且仅当 $s_0^0 = \mathrm{i}$，这意味着子情形 (2)也同样如此。显然，同一个矩阵作用将对应于子情形(3) 和(2) 的单值化数据联系起来，而此时，带帽变量对应于子情形 (3)。由于子情形 (2)已得到研究，因此可以重复上述论证，以确认子情形 (3) 的代数解的唯一性。■

5 考克斯特群

在本节中，我们考虑单值化流形上的一些群作用。

命题 5.1。方程 (1.1) 的收缩单值化流形的射影化是类型为 A_3的奇异三次曲面。

证明。一般情形下方程 (1.1) 的单值化流形定义在 [26] 中（参见 [26], 第 1172 页，方程组 (33)）。我们引入与情形 $a = 0$ 相同的变量替换 (4.6)，得到以下关于收缩变量的方程组：

$$\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 + \tilde{g}_3(1 - \tilde{s}) = \mathrm{e}^{-\pi a}, \qquad \tilde{g}_3(\tilde{g}_3 - 1) = -\tilde{g}_1\tilde{g}_2. \tag{5.1}$$

从方程组 (5.1) 的第一个方程中解出 $\tilde{g}_2$，并将结果代入第二个方程，我们得到关于 $\mathbb{C}^3$ 的以下三次方程，其参数为 $\mathrm{e}^{-\pi a}$,

$$\tilde{g}_1\tilde{g}_3(\tilde{s} - 1) = (\tilde{g}_1)^2 + (\tilde{g}_3)^2 - (\tilde{g}_1\mathrm{e}^{-\pi a} + \tilde{g}_3). \tag{5.2}$$

根据公式，在 $\mathbb{CP}^3$、$\{x_0$ 中引入局部坐标：x_1 ： x_2 ： $x_3\}$ ，

$$\tilde{g}_3 = -\frac{x_0}{x_2}, \qquad \tilde{g}_1 = -\frac{x_1}{x_2}\mathrm{e}^{-\pi a}, \qquad \tilde{s} - 1 + 2\cosh(\pi a) = \frac{x_3}{x_2}\,\mathrm{e}^{\pi a}, \tag{5.3}$$

将方程 (5.2) 重写如下：

$$x_0x_1x_3 = x_2(x_0 + x_1 + x_2)(x_0 - ux_1), \quad \text{where} \quad \sqrt{-u} = \mathrm{e}^{-\pi a}. \tag{5.4}$$

该曲面具有 A_3 [6, 34] 型奇点。 □

今后，t 直到本节结束，我们将研究 $a = 0$ ($u = -1$) 的情形；在这种情况下，方程 (5. 4）读取

$$x_0x_1x_3 = x_2(x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + x_1). \tag{5.5}$$

方程 (5.5) 包含十条 $\mathbb{CP}^3$-直线 [6, 34]。这些直线可以表示为两个超平面的交集。其中三条直线属于位于“无穷远处”的超平面 $x_2 = 0$；也就是说，它们可以表示为平面 $x_2 = 0$ 与平面 $x_0 = 0$、$x_1 = 0$ 和 $x_3 = 0$ 的交集。单值化坐标不能取无穷大值；因此，我们无法（至少不能直接）从单值化数据及方程 (1.1) 的相应解来解释这些直线。因此，就我们的目的而言，我们回到 $\mathbb{C}^4$，并将此空间中的坐标记作 (x, y, z, s)。我们将这些坐标与单值化数据对应如下：

$$x = \tilde{g}_1, \quad y = -\tilde{g}_2, \quad z = \tilde{g}_3, \quad s = \tilde{s}.$$

在这些坐标下，定义收缩单值化流形的方程组 (4.7) 写作

$$x + y + z(1 - s) = 1, \qquad z(z - 1) = xy. \tag{5.6}$$

曲面 (5.5) 的其余七条直线及其对应的单值化坐标如下：

1. $x_0 = 0$ and $x_1 = 0$, $(0, 1, 0, s)$;
2. $x_0 = 0$ and $x_1 + x_2 = 0$, $(1, 0, 0, s)$;
3. $x_1 = 0$ and $x_0 + x_2 = 0$, $(0, s, 1, s)$;
4. $x_3 = 0$ and $x_0 + x_1 = 0$, $(x, x + 1, -x, -1)$;
5. $x_3 = 0$ and $x_0 + x_1 + x_2 = 0$, $(x, x - 1, 1 - x, -1)$;
6. $x_1 + x_2 = 0$ and $x_0 + x_1 + x_3 = 0$, $(1, s(s - 1), s, s)$;

7. $x_0 + x_2 = 0$ and $x_0 + x_1 + x_3 = 0$, $(s, 0, 1, s)$;

其中 s、$x \in \mathbb{C}$。请注意，在上文第 6 项中，y 对 s 的依赖是二次的；由于曲面 (5.5) 是用不依赖于 y 的坐标表示的，因此它仍是一条直线。本节稍后研究考克斯特群在收缩单值化流形上的作用时，还会再次出现这些直线。

在系统 (5.6) 中令 $z = \kappa x$，可得到一个以参数 κ、$s \in \mathbb{C}$ 表示的收缩单值化流形的有理参数化。（(5.6) 中的第二个方程提示了另外三种有理参数化；不过，这一点与我们的讨论无关。）借助这一有理参数化，我们得到收缩单值化流形的以下变换：

$$r_1 : \ (x, y, z, s) \longrightarrow (y, x, z, s), \tag{5.7}$$
$$r_2 : \ (x, y, z, s) \longrightarrow (z, y + (x - z)s, x, s), \tag{5.8}$$
$$r_3 : \ (x, y, z, s) \longrightarrow \left(\frac{(2 - x)z + xy}{z + y}, -\frac{z - y}{z + y} y, \frac{z - y}{z + y} z, 2 - s \right). \tag{5.9}$$

可以将这些变换视为作用在 $\mathbb{C}^4$ 中。直接计算表明，这些变换的阶为 2：

$$r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = 1, \tag{5.10}$$

其中，上文 (5.10) 和下文 (5.11) 中的 1 表示对应于 $\mathbb{C}^4$ 中恒等映射的变换。变换 r_1 和 r_2 作用于 $\mathbb{C}^4$ 中，而变换 r_3 在超平面 $z + y = 0$ 上无定义；此外，若要将其应用两次以证明 (5.10) 中的最后一个关系，就必须排除超平面 $z - y = 0$。若要考察由三个变换 (5.7)–(5.9) 生成的群的作用，就必须从 $\mathbb{C}^4$ 中去除可数多个曲面。我们不再进一步讨论这个问题，因为我们主要关注这些变换在曲面 (5.6) 上的作用。

限制在曲面 (5.6) 上时，这些反射满足以下关系式

$$(r_3 r_1)^4 = (r_1 r_3)^4 = 1 \qquad \text{and} \qquad (r_3 r_2)^2 = (r_2 r_3)^2 = 1. \tag{5.11}$$

当然，r_3 的作用并未定义在整个曲面 (5.6) 上，因此关系式 (5.11) 仅对曲面 (5.6) 上相应变换有定义的点得到证明。事实上，正如我们在本节末尾将要展示的，可以对 r_3 在曲面 (5.6) 上的定义进行正则化，使其在从曲面中删去几条直线后处处有定义。

我们从二面体群 $\mathcal{D}_{1,\,2}$ 开始讨论，该群由 $\{r_1, r_2\}$ 生成。令 $\mathcal{N}_{1,\,2}$ 为其由生成元 $r_1 r_2$ 生成的正规子群。

命题 5.2. 方程 (1.1) 的代数函数解与 $\mathcal{N}_{1,\,2}$ 在单值化流形 (5.6) 上作用所产生的有限轨道之间存在一一对应。有限轨道的长度与相应代数函数解的对称变换生成元的阶相同。

证明。令 $u(\tau, c)$ 为对应于分支参数 $\rho \in \mathbb{C}$ ($u(\tau, c) \underset{\tau \to 0}{\sim} c\,\tau^{1-4\rho}$ 的一个解，其中 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$：参见附录 B）；则与生成元 $r_1 r_2$ 对应的变换为 $u(\tau, c) \to -\mathrm{i} u(\tau \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/2}, -c) = u(\tau, -c\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\rho})$。若 $\rho \notin \mathbb{Q}$，则任意有限次这样的变换都会得到不同的解。另一方面，经过有限次这样的迭代后，所有代数函数解都会映射到自身。对于 m-级数和 n-级数，这些对称性在推论 3.2 和 3.3 中有明确的定义。

剩下的唯一解是具有对数行为的解（当 $\tau \to 0$ [25, 26] 时）：它们具有无限轨道，具体形式将在下文命题 5.4 中给出。 □

$\mathcal{D}_{1,2}$ 在 $\mathbb{C}^4$ 上的作用不会改变第四个坐标。这一事实使我们能够将 s 视为参数，并通过将其视为 $\mathbb{C}^4$ 中的超平面 $s = s_0$，来考察 $\mathcal{D}_{1,2}$ 在 $\mathbb{C}^3$ 中的作用；在这种情况下，我们将此作用记为 $\mathcal{D}_{1,2}(s_0)$。

命题 5.3。定义 $\rho_1 = 1/2 - \rho$，其中 ρ 是代数函数解的分支参数（参见推论 3.1 和注 3.3）。群 $\mathcal{D}_{1,2}(s_0)$ 是有限群，当且仅当 s_0 是代数数，且可写成 $s_0 = 1 + 2\cos(2\pi\rho_1)$ 的形式，其中 $\rho_1 \in \mathbb{Q}$ 满足 $0 < 2\rho_1 < 1$。在这种情况下，正规子群 $\mathcal{N}_{1,2}$ 的轨道长度等于 ρ_1 表示为既约分数时的分母。

证明。我们在命题 5.2 中证明了，当作用于收缩单值化流形时，$\mathcal{D}_{1,2}$ 对于与代数函数解对应的点具有有限轨道。在此，我们考虑 $\mathcal{D}_{1,2}(s_0)$ 在 $\mathbb{C}^3$ 中的作用。考虑列向量 $\mathrm{R} = (x_0, y_0, z_0)^T \in \mathbb{C}^3$；然后，经过 n 次通过 $r_1 r_2$ 的迭代，我们

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$到达点 $P_n(s_0)$R，其中 $P_n(s_0)$是一个以 $\mathbb{Z}[s_0]$中的多项式为元素的 3×3 矩阵。假设 s_0 对应于一个代数函数解，其在收缩单值化流形上的轨道长度为 $n\widehat{\ }$。在这种情况下，对于定义单值化流形上一点的R，$P_n(s_0)$R $=$R。我们选取流形上的以下三个点：R$_1=(1,0,0)^T$、R$_2=(0,1,0)^T$和R$_3=(s_0,0,1)^T$；于是，矩阵 $R:=$(R$_1$,R$_2$,R$_3$)的行列式为1，并满足方程$(P_n(s_0)-I)R=0$，其中 I $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$是单位矩阵 3×3。因此，对于这个 s_0值，$P_n(s_0)=I$。由于矩阵 $P_n(s_0)$与初始点R无关，这意味着条件 $\widehat{P}_n(s_0)$R $=$R对任意点R $\in\mathbb{C}^3$都成立。

回到命题 5.2 的证明，由于我们知道，变换r_1r_2的生成元等价于解的定义参数 $(\rho,c)\to(\rho,-c\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\rho})$ 的改变，因为$-c\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\rho}=c\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(1/2-\rho)}=c\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\rho_1}$，由此可见，只有当 ρ_1 为有理数时才可能出现有限轨道，而这些轨道的长度与数ρ_1 表示为整数比时其不可约表示的分母相同。

根据定理 B.1（见附录 B），收缩的 Stokes 乘子 $s=1+\mathrm{i}s_0^0$（参见 (4.6)）与解 $u(\tau)$ 的分支参数 ρ 的关系为 $s=1-2\cos(2\pi\rho)$，其中 $0<2\rho<1$；因此，$s=1+2\cos(2\pi\rho_1)$，其中 $0<2\rho_1<1$。由于对于代数函数解，ρ_1 是有理数，相应的数 s 是代数数 [31], ，而二面体群 $\mathcal{D}_{1,2}(s_0)$ 对于这个 $s_0=s$ 是有限的。□

注 5.1. 与通过 $H(r)$ 定义的解 $u(\tau)$ 相对应的正规子群 $\mathcal{N}_{1,2}$ 的轨道长度（参见第 3 节、注 3.3 和第 4 节、引理 4.1）等于 3，因为 $s=0$、$\rho=1/6$ 和 $\rho_1=1/3$。在 $\tau=0$ 处全纯的解 $u(\tau)$ 所对应的轨道长度（参见第 3 节、注 3.3）等于 4，因为 $s=1$ 和 $\rho=\rho_1=1/4$。

下面，我们定义最小多项式集合 $q_k(s)$，$k\in\mathbb{N}$；对于 $k=3$、4、.....，这些多项式定义代数数 $s=1+2\cos(2\pi\rho_1)$，$0<2\rho_1<1$，它们与对应于代数函数解的收缩斯托克斯乘子相同。定义该集合时，使多项式 $q_k(s)$ 的下标 k 与 ρ_1 在其既约分数表示中的分母一致，从而也与相应的轨道长度一致。$\mathcal{N}_{1,2}$。■

由于定义代数数 $1+2\cos(2\pi\rho_1)$ 的最小多项式 $q_k(s)$ 对描述代数函数解起着重要作用，我们简要回顾本文所采用记号下的相应构造。该主题众所周知 [31], ，因此省略了部分证明细节。

考虑分圆方程 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\rho_1 n}=1$。利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\rho_1}=\cos(2\pi\rho_1)+\mathrm{i}\sin(2\pi\rho_1)$，可知分圆方程等价于 $T_n(\cos(2\pi\rho_1))=\cos(2\pi\rho_1 n)=1$，其中 $T_n(x)$ 是第 n 类切比雪夫多项式；其显式公式可见 [14]:

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^m\frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}.$$

借助欧拉公式，很容易证明多项式 $T_n(x)-1$ 对于 $n\geqslant 2$ 总是可约的；此外，以下恒等式右端多项式的根的阶为二，

$$2q_1(s)\left(T_{2n+1}\left(\frac{s-1}{2}\right)-1\right)=\left(\prod_{d\backslash(2n+1)}q_d(s)\right)^2, \tag{5.12}$$

$$2q_1(s)q_2(s)\left(T_{2n+2}\left(\frac{s-1}{2}\right)-1\right)=\left(\prod_{d\backslash(2n+2)}q_d(s)\right)^2, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{5.13}$$

其中 $q_1(s)=2(\cos(2\pi\rho_1)-1)=2(s-1)/2-2=s-3$，且 $q_1(s)q_2(s)=2(\cos(4\pi\rho_1)-1)=4\cos^2(2\pi\rho_1)-4=(s-3)(s+1)$，从而 $q_2(s)=s+1$。假设多项式 $q_d(s)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上不可约。方程 (5.12) 和 (5.13) 允许递归地导出对所有 $k\in\mathbb{N}$ 都成立的多项式 $q_k(s)\in\mathbb{Z}[s]$。若假设这些多项式是首一的，则满足方程组 (5.12) 和 (5.13) 的序列 $q_k(s)$ 是唯一的。

由此可得（by 数学归纳法），由欧拉函数的高斯恒等式可得，$\varphi(n)$ ，

$$\sum_{d\backslash n}\varphi(d)=n,$$

对于 $k>2$，$=\varphi(k)/2$ 的 $\deg q_k(s)$。多项式 $q_k(s)$、$k\in\mathbb{N}$ 的根集按构造为实代数数，且在区间段 $[-1,3]$ 上稠密。多项式的伽罗瓦群

$q_k(s)$ 是可解的，因此其所有根都可以用根式表示。因此，与代数函数解相对应的斯托克斯乘子可以用根式表示。

In [43], the 自 h者，使用 i d实体 for the Chebysh$^{\text{ev po}}$ lynomia ls, d导出, f由 h该方程组 (5.12) 以及（5.13），得到一个更方便的方程组，可用于递归求得多项式 $q_k(s)$:

$$2(T_{n+1}((s-1)/2) - T_n((s-1)/2)) = \prod_{d\backslash(2n+1)} q_d(s), \tag{5.14}$$

$$2(T_{n+1}((s-1)/2) - T_{n-1}((s-1)/2)) = \prod_{d\backslash(2n+2)} q_d(s), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.15}$$

下面列出 前 18 个多项式 $q_k(s)$: $= q_k$，它们借助方程（5.14）和（5.1 5):

$$q_1 = s-3,\ q_2 = s+1,\ q_3 = s,\ q_4 = s-1,\ q_5 = s^2-s-1,\ q_6 = s-2,\ q_7 = s^3-2s^2-s+1$$
$$q_8 = s^2-2s-1,\ q_9 = s^3-3s^2+3,\ q_{10} = s^2-3s+1,\ q_{11} = s^5-4s^4+2s^3+5s^2-2s-1,$$
$$q_{12} = s^2-2s-2,\ q_{13} = s^6-5s^5+5s^4+6s^3-7s^2-2s+1,\ q_{14} = s^3-4s^2+3s+1,$$
$$q_{15} = s^4-5s^3+5s^2+5s-5,\ q_{16} = s^4-4s^3+2s^2+4s-1,$$
$$q_{17} = s^8-7s^7+14s^6+s^5-25s^4+9s^3+12s^2-3s-1,\ q_{18} = s^3-3s^2+1.$$

根据推论 3.1， s 的边界值，即 $s=-1$ $(2\rho=1)$ 和 $s=3$ $(2\rho=0)$，是多项式 $q_1(s)$ 和 $q_2(s)$ 的根。事实上，我们知道，对于 s 的这些取值，相应地存在方程 (1.1) 的解 $a=0$，它们在 $\tau\to 0$ [25, 26] 时呈现对数行为。因此，根据命题 5.3，相应的二面体群 $\mathcal{D}_{1,\ 2}(s_0)$，$s_0=-1$,3 是无限群。

命题5.4。设 $s=-1$ 或 $s=3$，且点（x_0、y_0、z_0）属于 $\mathbb{C}^3$ 或属于单值化数据流形（5.6）；那么，正规子群 $\mathcal{N}_{1,2}(s)$ 在 $\mathbb{C}^3$ 中或在单值化数据流形上的轨道是无限的。这些点经过 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 次迭代后，具有以下坐标:

$$\begin{aligned}
s=-1;\qquad & x_n = (-1)^n\left\lfloor 1+\frac{n}{2}\right\rfloor x_0 + (-1)^{n+1}\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor y_0 + n(\mathrm{mod}(2))\ z_0,\\
& y_n = (-1)^n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor x_0 + (-1)^{n-1}\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor y_0 + n(\mathrm{mod}(2))\ z_0,\\
& z_n = (-1)^{n+1}\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor x_0 + (-1)^{n}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor y_0 + (n+1)(\mathrm{mod}(2))\ z_0,\\
s=3;\qquad & x_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,x_0 + \frac{n(n+1)}{2}\,y_0 + \big(1-(n+1)^2\big)z_0,\\
& y_n = \frac{n(n-1)}{2}\,x_0 + \frac{(n-2)(n-1)}{2}\,y_0 + \big(1-(n+1)^2\big)z_0,\\
& z_n = \frac{n(n+1)}{2}\,x_0 + \frac{(n-1)n}{2}\,y_0 + (1-n^2)z_0.
\end{aligned}$$

证明。通过数学归纳法：归纳的基础情形 $n=0$ 可立即验证，而借助变换 r_1r_2 的显式公式，归纳步骤很容易完成（参见（5.7）和（5.8））。 □

现在，考虑变换 r_3（参见（5.9））。只要该变换作用于单值化流形（5.6），它对我们而言就是有意义的，因此其作用可以扩展到解空间；所以，我们考虑它在单值化流形上的作用，而不是在 $\mathbb{C}^4$ 上的作用。

如果我们希望将该变换作用一次于单值化流形（5.6）上的点 $\mathcal{P}$，那么 $\mathcal{P}$ 的坐标应满足条件 $\mathcal{P}\neq(1,0,0,s)$ 或 $\mathcal{P}\neq(x,\ x-1,\ 1-x,\ -1)$，$x,\ s\in\mathbb{C}$。

然而，第一个条件可以正则化；在这种情况下，所提议的 r_3 的像（参见 (5.9)）的分子和分母均为零点。利用这一事实，可以令 $z+y=\varepsilon$、[7]，并以下列方式重写定义单值化流形的方程 (5.6):

$$z = \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{s+1} + \frac{\varepsilon^2(s-3)}{4(s+1)}}, \qquad y = \frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{s+1} + \frac{\varepsilon^2(s-3)}{4(s+1)}}, \qquad x = zs+1-\varepsilon. \tag{5.16}$$

[7]不要与引言中的 ε混淆。

将这些方程代入 (5.9)，并考虑极限 $\varepsilon \to 0$，可得

$$r_3(1,0,0,s) = \left(\frac{1-s}{1+s}, \frac{2}{1+s}, \frac{2}{1+s}, 2-s\right), \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}.$$

容易验证，根据此定义，$r_3^2(1,0,0,s) = (1,0,0,s)$，因此 (5.10) 中的第三个关系成立。我们看到，唯一的问题出现在 $s=-1$ 的情形。对于 $s=-1$，单值化流形由两条直线组成：$(x, x-1, 1-x, -1)$ 和 $(x, x+1, -x, -1)$，其中 $x \in \mathbb{C}$。它们是两条不同的直线，并通过对称性 $r_1(x, x-1, 1-x, -1) = (x_1, x_1+1, -x_1, -1)$ 相联系，其中 $x_1 = x-1$。另一方面，$r_3(x, x+1, -x, -1) = ((2x-1)x, (2x+1)(x+1), (2x+1)x, 3)$：最后一条二次曲线为 $s=3$ 时的单值化流形提供了有理参数化。因此，我们只能在射影几何的意义下，正确定义 r_3 在第一条曲线 $(x, x-1, 1-x, -1)$ 上的作用；然而，考虑到其在退化第三 Painlevé 方程理论中的应用，我们不采用这种做法。注意，对于单值化流形上的所有其他点，任意变换 $r_3 w(r_1, r_2)$ 都可以用自然的方式正则化，其中 w 是由两个字母 r_1 和 r_2 组成的任意词；例如，$r_3 r_1(0,1,0,s) = r_3(1,0,0,s)$ 以及 $r_3 r_2(0,s,1,s) = r_3(1,0,0,s)$，或者更复杂的例子：$r_3(r_1 r_2)^3(1, s(s-1)\ s, s) = r_3(1,0,0,s)$ 和 $r_3(r_1 r_2)^4 = (s, (s-1)(s^2-s-1)\ s(s-1)) = r_3(1,0,0,s)$。在最后两个例子中，利用方程 (5.10)，当然可以求出变换 $r_3(r_1 r_2)^3$ 和 $r_3(r_1 r_2)^4$，的一般公式，然后应用上文所述类型的极限过程。不过，后一个极限过程比方程 (5.16) 所描述的过程复杂得多。

因此，如果希望考虑完整群 $\mathcal{G}$（其生成元为 r_1、r_2和 r_3）在单值化流形上的作用，就必须从中移除那些第四个坐标为$s=-1$和 $s=3$的点。前面的考察提示了如下构造：对于任意 $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 3\}$ 和 $s \neq 1$，在 $\mathbb{C}^3$ 中，取坐标为 x、y和 z，考虑以下两个平面：

$$\mathcal{H}_s: \qquad x + y + z(1-s) = 1, \tag{5.17}$$
$$\mathcal{H}_{2-s}: \qquad x + y - z(1-s) = 1. \tag{5.18}$$

这些平面的交集是直线 $x+y=1$，它位于平面 $z=0$上。考虑二次曲面$z(z-1)=xy$：每个平面 $\mathcal{H}_k$、$k=s$、$2-s$都与其相交于一条二次曲线 $\mathcal{C}_k$。这两条二次曲线在 $\mathbb{C}^3$ 中有两个公共点：(1, 0, 0) 和 (0,1,0)；然而，在 $\mathbb{C}^4$ 中，我们得到的不是这些点，而是两对点：(1, 0,0, s)和 (1, 0,0, $2-s$)，以及 (0, 1, 0, s)和 (0, 1, 0, $2-s$)。因此，群 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{C}^3$ 上的作用所对应的正确几何对象，是其在两条二次曲线的不交并 $\mathcal{C}_s \sqcup \mathcal{C}_{2-s}$ 上的限制。将此限制记作 $\mathcal{G}(s)$：这一记号假设 $\mathcal{G}(s) \equiv \mathcal{G}(2-s)$。在 $s=1$的情形下，平面 $\mathcal{H}_s$ 和$\mathcal{H}_{2-s}$ 重合，因此我们得到的不是二次曲线的不交并，而是一条二次曲线 $\mathcal{C}_1$。

二面体群 $\mathcal{D}_{1,2}(s_0)$ 分别作用于 $s_0 = s$ 和 $s_0 = 2-s$ 对应的圆锥曲线 $\mathcal{C}_s$ 和 $\mathcal{C}_{2-s}$，而变换 r_3 将一条圆锥曲线上的点映射到另一条上，例如，$r_3(0,1,0,s) = (0,1,0,2-s)$。

命题 5.5. 考克斯特群 $\mathcal{G}(s)$ 有限，当且仅当 s 是方程 (1.1) 对应于 $a=0$ 的代数函数解的 Stokes 乘子；换句话说，它是某个多项式 $q_m(s)$ 的根。在这种情况下，$2-s$ 也是某个多项式 $q_n(s)$ 的根，且 ord $\mathcal{G}(s) = 4\max\{m,n\}$。

6 r 较大时 $H(r)$ 的渐近行为及数值方面

在第 4 节中，利用方程 (1.1) 的一般解 $u(\tau)$ 的 $\tau \to +0$ 渐近行为，以确定与函数 $H(r)$ 对应的单值化数据。这些数据构成一组参数，借助 [26, 27], 中推导出的结果，可以据此确定函数 $H(r)$ 在 $r \to -\infty$ 时的渐近行为，以及相应的积分 $I(r) := \int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\,\mathrm{d}r$。为方便读者，下面的附录 B 和 C 汇总了 [26, 27] 中所有必要的渐近结果。本节将展示并比较若干解的渐近结果和数值结果，这些解对应于初值 $H(0)$ 的不同取值。

在给出相应的渐近公式之前，我们先谈谈数值计算。函数 $H(r)$ 及其相应的单值化数据由初值 $H(0)$ 定义；另一方面，定义 $H(r)$ 的方程 (1.2) 在 $r=0$ 处是奇异的。严格来说，必须从 $r=0$ 迈出一步到达 $r=r_1$：这一步应小于表示 $H(r)$ 的级数的收敛半径（参见 (2.15) 和 (2.16)），然后借助该级数计算 $H(r)$ 在 $r=r_1$ 处的初始数据。理论上，这项计算可以达到任意精度。我们的计算使用 Maple 16 和 17 完成。我们发现，如果只想计算函数 $H(r)$，且在 $r=0$ 处给定的初始数据为高斯有理数，那么在许多（但并非所有！）情况下，Maple 的标准常微分方程数值解程序能够正确计算相应的解；至少从图像上看，使用“简化”程序和“正确”方法得到的结果一致。这可能是因为（参见方程 (1.4)） $H'(0) = H(0)^2 - 1/H(0)$ 似乎是一个

比 $H(0)$ 复杂得多的高斯有理数，因此 Maple 会以浮点运算处理它，使这一关系仅近似成立，并应用通用数值过程。显然，对于在常微分方程奇点处指定的泛型柯西数据，正则解并不存在。

定理 C.1（见附录 C）给出了 $H(r)$ 的以下渐近行为：

$$H(r) \underset{r\to-\infty}{=} 1-\sqrt{6\nu_1}\cdot\frac{\cos\left(\psi(r)+o\left(r^{-\delta}\right)\right)}{\sqrt[4]{-3r}},\qquad \delta>0, \tag{6.1}$$

其中

$$\psi(r)=2\sqrt{-3r}+\frac{\nu_1}{2}\ln(-3r)+\nu_1\ln(24)+\frac{3\pi}{4}-\frac{3\pi\mathrm{i}}{2}\nu_1-\frac{\mathrm{i}}{2}\ln(2\pi)+\mathrm{i}\ln\left(\tilde{g}_1\sqrt{\nu_1}\,\Gamma(\mathrm{i}\nu_1)\right), \tag{6.2}$$

$$\nu_1:=\frac{\ln\tilde{g}_3}{2\pi},\qquad |\mathrm{Im}\,\nu_1|<\frac{1}{6}=0.1666\ldots. \tag{6.3}$$

在下文中，假定对多值函数的分支采用以下自然约定：(i) 正数的所有根的分支均为正；(ii)参数的一个根的分支（该参数可能取正值）固定为正，然后通过解析延拓进一步定义；以及 (iii) 正数的对数的分支为实数。

参数 ν_1 通过方程 (6.3) 唯一定义。它与附录 C 中的参数 $\tilde{\nu}$ 之间满足关系 $\mathrm{i}\nu_1=\tilde{\nu}+1$。$\sqrt{\nu_1}$ 的分支可按上述约定选取；不过，只要假定以下自然的分支匹配，$\sqrt{\nu_1}$ 的分支具体如何选取并不重要：$\sqrt{6\nu_1}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{\nu_1}$（参见 (6.1) 和 (6.2)）。

渐近行为 (6.1) 在 $H(0)=1, \mathrm{e}^{\pm\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$ 时无效，因为单值化参数 $\tilde{g}_1$ 和 $\tilde{g}_3$ 在这些 $H(0)$ 的取值下没有定义。不过，我们可以形式上认为，对于 $H(0)=1$，渐近行为仍然成立，因为已知（参见推论 4.1，第 (1) 项）$\tilde{g}_3=1$，这意味着 $\nu_1=0$，如果我们假设余弦函数保持有限；在这种情况下，当 $r\to-\infty$ 时，$H(r)\to1$，这与对所有 r，$H(r)=1$ 的事实相一致。

方程 (6.3) 对初值 $H(0)$ 还施加了额外限制：此条件不仅确定了对数的分支，还对 $H(0)$ 施加了条件。

在与渐近行为（6.1）相同的条件下，以下渐近公式成立：

$$\int_r^0\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{-r}H(r)}\underset{r\to-\infty}{=}2\sqrt{-r}+2\nu_1\ln(2+\sqrt{3})+\mathrm{i}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}H(0)-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}-H(0)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}}\right)+\mathrm{E}(r), \tag{6.4}$$

其中

$$\mathrm{E}(r)=\frac{\sqrt{6\nu_1}}{2}\cdot\frac{\sin\left(\psi(r)+o\left(r^{-\delta}\right)\right)}{\sqrt[4]{-3r}}. \tag{6.5}$$

尽管方程(6.2)中最右侧对数项的分支并不重要，方程(6.4)中最右侧对数项的分支由条件 $|\mathrm{Im}\ln(\cdot)|<\pi$ 确定；最后一个条件不会对初值 $H(0)$施加任何额外限制，因为 $|\mathrm{Im}\ln(\cdot)|=\pi$ 仅对 $H(0)=\infty$成立。就初值 $H(0)$ 而言，渐近公式(6.1)和(6.4)成立的重要条件 (6.3) 写作：

$$\left|\arg\left(H(0)+\frac{1}{H(0)}+1\right)\right|<\frac{\pi}{3}.$$

下面给出渐近公式 (6.1) 和 (6.4) 的两个应用示例，并将其与 $H(r)$ 和 $I(r)$的相应数值图像进行比较。这些函数在 $r=0$ 处是有限的，而其渐近行为的分母包含因子 $\sqrt[4]{-3r}$；因此，函数 $H(r)$和 $I(r)$的图像及其渐近行为是在原点附近的一些小邻域之外进行比较的，这些邻域在图注中有所说明。

6.1 示例 1：$H(0)=-\frac{1}{30}-\mathrm{i}$

对于 $H(0)$ 的这个取值，$\nu_1=-0.185823\ldots-\mathrm{i}0.0001892\ldots$，因此条件 (6.3)得以满足。在 Maple 计算中，我们选择参数Digits=50，以及针对该Digits值能够提供最大精度的过程。下面给出的每个数值解及其相应积分的图形，均基于 500 个点的计算。我们还选择初始点 $r_1=-10^{-6}$。原则上，对于 $H(r)$ 的计算，可以为位数选择一个较小的值，并为 r_1、Digits=20和 $r_1=-0.001$ 选择较大的值，例如；然而，这些参数无法为积分 $\int_r^0\frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\mathrm{d}r$ 提供“正确”的数值精度。我们对这些参数的选择接近最优

数值，即计算精度的提高在相应函数的图像中并不明显；例如，使用参数值 Digits=100和 $r_1 = -10^{-9}$ 时，Maple 计算得到的图像与图 3–7 中所示的图像在视觉上无法区分。[8]

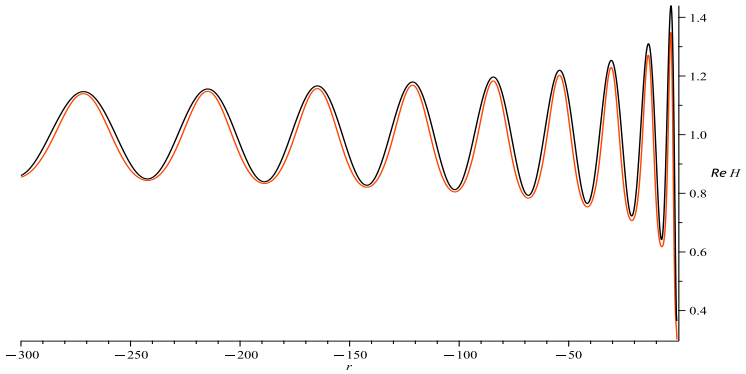

图 3：红色和黑色图像分别表示函数 $H(r)$ 在 $r \leqslant -0.6$ 时数值解和大-r 渐近值的实部，对应的初值为 $H(0) = -1/30 - \mathrm{i}$。

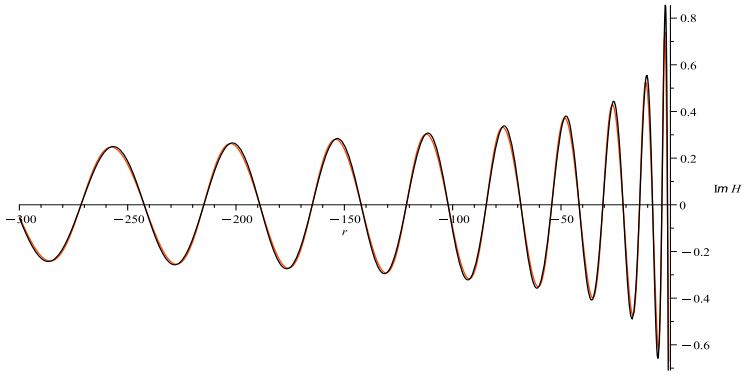

图 4：红色和黑色图像分别表示函数 $H(r)$ 在 $r \leqslant -0.5$ 时数值解和大-r 渐近值的虚部，对应的初值为 $H(0) = -1/30 - \mathrm{i}$。

6.2 例 2：$H(0) = 60 - \mathrm{i}100$

对于这个 $H(0)$ 值，$\nu_1 = 0.583250\ldots - \mathrm{i}0.162814\ldots$，因此条件 (6.3) 得到满足。不过，此处渐近行为 (6.1) 的有效区间边界离我们更近。Maple 计算采用与例 1 相同的设置。计算结果见图 8–12：这些 50 位精度的计算在一台较旧的笔记本电脑上耗时约 133 秒（见脚注 8）。

注 6.1. 原则上，即使超出条件 (6.3)，即 $|\mathrm{Im}\,\nu_1| < 1/2$，渐近行为 (6.1) 和 (6.4) 仍然有效；然而，超出条件 (6.3) 越远，要在解与其渐近行为之间观察到视觉上的吻合，所需的 $|r|$ 值就越大。渐近行为 (6.1) 和 (6.4) 的修正项（见附录 C）能改善吻合程度，但不会改变总体趋势：对于有限但相当大的 r 值，$H(r)$ 和 $I(r)$ 的数值与渐近值之间的吻合程度会变差。当趋近于 $|\mathrm{Im}\,\nu_1| \approx 2/5$ 时，预计能够观察到视觉吻合的 r 值似乎大到无法计算这些值对应的解。这一趋势可通过分别比较图 3 和图 4 与图 8 和图 9，以及这些图与积分图像来部分说明：当趋近于条件 (6.3) 的边界值时，视觉吻合程度会变差。下文的例6说明，在何种 r 值下，可以预期渐近行为 (6.1) 和 (6.4) 能够忠实描述 $H(r)$ 和 $I(r)$ 在大 r 时的行为。

[8] Maple 16，在配备 4Gb RAM 和 Intel(R) Core(TM) i7-3517U（第3代）处理器的笔记本电脑上，进行 50 位数的计算耗时 84 秒，而进行 100 位数的计算耗时 103 秒。在准备这项工作时，我们借助Maple 2017 在一台配置更现代的笔记本电脑上重新进行了计算，该电脑配备 16Gb RAM 和 Intel(R) Core(TM) i7-12700H（第12代）处理器：这两项计算分别耗时 60 秒和 65 秒。

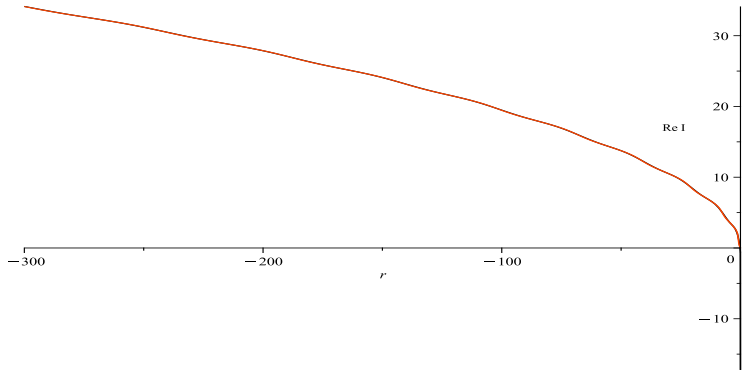

图5：红色和黑色图像分别是$I=\int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\,\mathrm{d}r$ 对应于初值 $H(0)=-1/30-\mathrm{i}$ 的数值和大-r 渐近值的实部。在此尺度下，~~两条~~图像几乎重合。在图6中，读者将看到对这些图像的更详细比较。

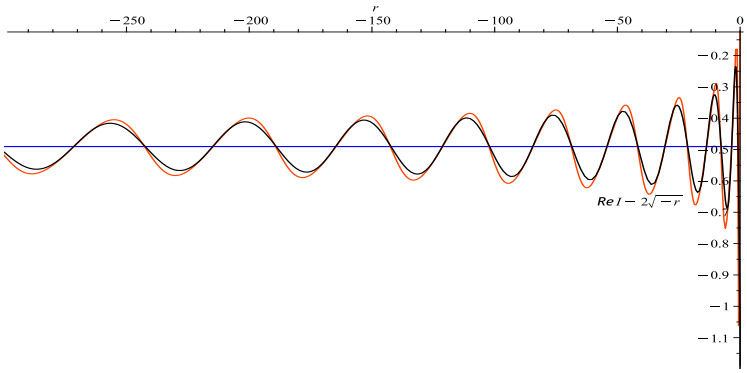

图6：红色和黑色图像分别是$\int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\,\mathrm{d}r-2\sqrt{-r}$ 对应于 $r\leqslant -10^{-7}$ 的数值和大-r 渐近值的实部，其初值为 $H(0)=-1/30-\mathrm{i}$。蓝线是渐近行为（6.4）模去抛物线$2\sqrt{-r}$ 和 E(r)后的实部。

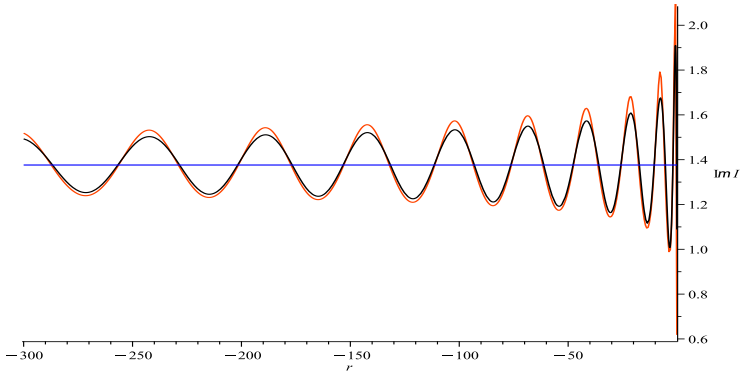

图7：红色和黑色图像分别表示数值解和大-r渐近值的虚部，其中$\int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\,\mathrm{d}r$ 对应初值 $H(0)=-1/30-\mathrm{i}$。蓝线表示~~渐近表~~达式 (6.4) 模 E(r) 的虚部。

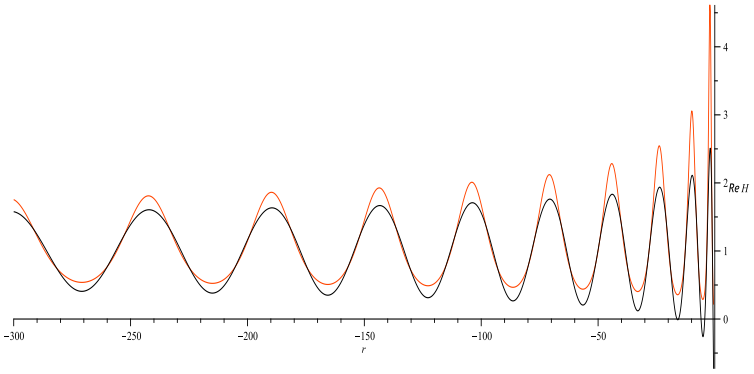

图 8：红色和黑色图像分别表示函数 $H(r)$ 的数值解和大-r 渐近解的实部，其中 $r \leqslant -0.6$ 对应初值 $H(0) = 60 - \mathrm{i}100$

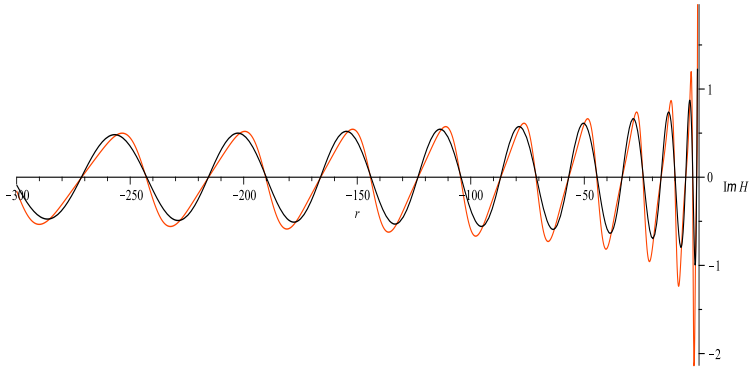

图 9：红色和黑色图像分别是函数 $H(r)$ 的数值和大-r渐近值的虚部，其中 $r \leqslant -0.1$ 对应于初值 $H(0) = 60 - \mathrm{i}100$。

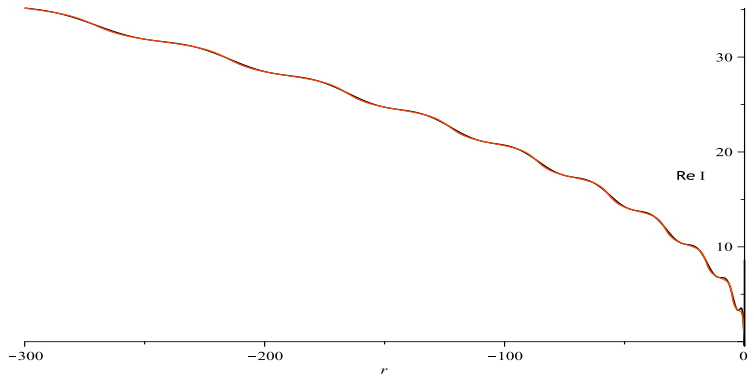

图10：红色和黑色图像分别是 $\int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\,\mathrm{d}r$ 对应于初值 $H(0) = 60 - \mathrm{i}100$ 的数值和大-r 渐近值的实部。两条图像~~几乎重~~合为一条曲线；然而，可以注意到，这条曲线有一些较粗的线段，一侧呈红色，另一侧呈黑色。图 11 给出了对这些图像更详细的比较。

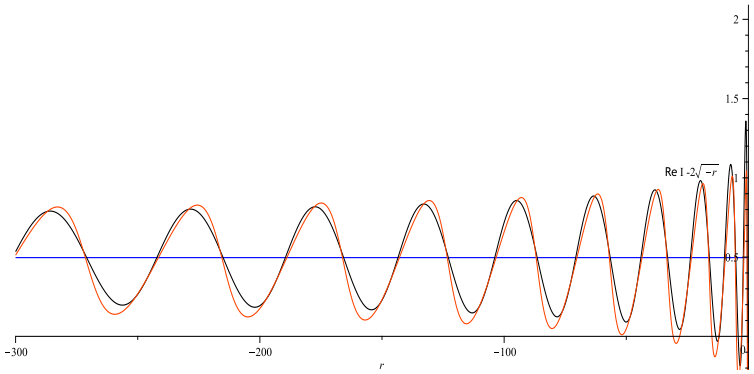

图 11：红色和黑色图像分别表示对应初值 $H(0) = 60 - \mathrm{i}100$ 时 $r \leqslant -10^{-2}$ 的数值解和大-r 渐近值 $\int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\,\mathrm{d}r - 2\sqrt{-r}$ 的实部。蓝线表示渐近行为 (6.4) 模去抛物线$2\sqrt{-r}$ 和 E(r) 后的实部。

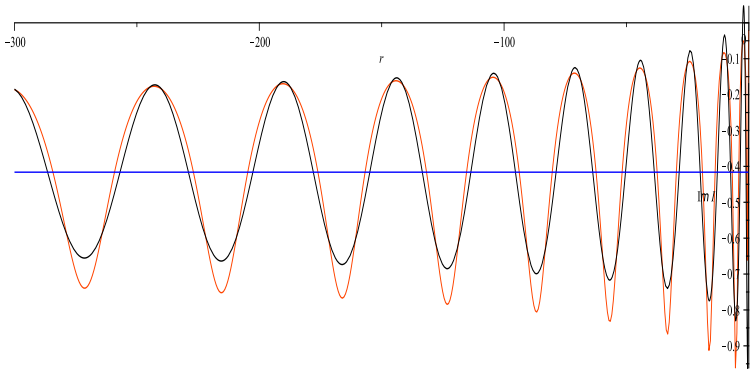

图 12：红色和黑色图像分别表示对应初值 $H(0) = 60 - \mathrm{i}100$ 时 $r \leqslant -0.1$ 的数值解和大-r渐近值 $\int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\,\mathrm{d}r$ 的虚部。蓝线表示渐近行为 (6.4) 模去 E(r) 后的虚部。

为了解决上述问题，我们在 [27] 中推导出另一个渐近公式，下面将对此进行讨论。■

现在我们来数值说明函数$H(r)$的渐近结果（由定理 C.2 推出，见附录 C）：

$$H(r) \underset{r\to-\infty}{=} 1-\frac{3}{2\sin^2\left(\frac{1}{2}\hat{\psi}(r)+o\big(r^{-\delta}\big)\right)},\qquad \delta>0, \tag{6.6}$$

其中

$$\hat{\psi}(r)=2\sqrt{-3r}+\left(\nu_1+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\ln\left(24\sqrt{-3r}\right)-\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi\mathrm{i}}{2}\nu_1-\frac{\mathrm{i}}{2}\ln(2\pi)+\mathrm{i}\ln\left(\tilde{g}_1\Gamma(\mathrm{i}\nu_1)\right), \tag{6.7}$$

$$\nu_1:=\frac{\ln\tilde{g}_3}{2\pi},\qquad \operatorname{Im}\nu_1\in(-1,0)\setminus\{-1/2\}. \tag{6.8}$$

请读者注意，尽管（6.8）中的参数 ν_1 与（6.3）中的 ν_1 由同一公式定义，但其虚部取值于另一个区间。显然，渐近式（6.1）和（6.6）的有效域有交集。积分 $I(r)$的渐近行为为：

$$\int_r^0\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{-r}H(r)}\underset{r\to-\infty}{=}2\sqrt{-r}+(2\nu_1+\mathrm{i})\ln(2+\sqrt{3})+\pi(2k-1)+\mathrm{i}\ln\left(\frac{H(0)\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}-H(0)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}}\right)+\mathcal{E}(r), \tag{6.9}$$

其中 $k\in\mathbb{Z}$,

$$\mathcal{E}(r)=-\mathrm{i}\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\hat{\psi}(r)+\theta_0+o\big(r^{-\delta}\big)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\hat{\psi}(r)-\theta_0+o\big(r^{-\delta}\big)\right)}\right),\qquad \theta_0=-\frac{\pi}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right). \tag{6.10}$$

注6.2。无法通过在 [27] 中发展的等单值变形方法确定数 $k=k(H(0))\in\mathbb{Z}$，因为事实上，那里研究的是函数 $\exp\left(\int_r^0\frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\mathrm{d}r\right)$ 的渐近行为。用初值 $H(0)$表示整数 k ~~是一个~~看起来很有趣的问题。在下面讨论的数值示例中，我们通过比较 $H(r)$ 的数值解与其渐近式 (6.9)来求得 k。由于 k 是一个整数，在这种情况下对其进行实验确定并不构成问题。k 的值见相应的图注。■

备注 6.3. 如果 $\operatorname{Im}\nu_1\in(-1,-5/6)$，这对应于渐近行为 (6.6) 和 (6.9) 的有效范围（参见条件 (6.8)），那么可以固定 ν_1 的分支，使得 $\operatorname{Im}\nu_1\in(0,1/6)$，从而可以使用渐近行为 (6.1) 和 (6.4)；此外，$\operatorname{Im}\nu_1$ 越接近 -1 或 0，渐近行为 (6.1) 和 (6.4) 的效果就越好（即在有限取值下逼近 $H(r)$）。■

备注 6.4。本备注涉及渐近公式 (6.9) 中的项 $\mathcal{E}(r)$（参见 (6.10)）。假定当 r 从 0 变化到 $-\infty$ 时，必须取对数函数的一个连续分支。这个问题在数值计算中十分重要，因为 Maple 只计算对数函数的主值分支；因此，在一个较大的 r 区间上绘制渐近公式 (6.10) 几乎总会产生锯齿状图像。为解决这一问题，可以将 (6.10) 中的对数表示为余切函数之差的积分。这个方法在长度较小的区间上有效；然而，在区间 $[-10,0]$ 上计算该积分就已经要耗费相当多的时间，例如，其耗时是 Painlev´é 方程本身数值计算所需时间的数倍！因此，我们不采用积分，而是将对数的连续分支定义为上述积分所对应微分方程的解。事实表明，Maple 对该解进行数值计算的速度远快于通过余切函数积分表示的显式形式。可是，这种快速计算的执行时间（其中仅保持了 20 位精度）似乎仍然是根据 Painlev´é 超越函数，通过直接计算（保持 120 位精度）得到方程 (6.9) 左端积分的数值计算时间的 5 至 8 倍！因此，使用渐近公式 (6.4) 和 (6.9) 进行数值计算之间存在显著差异：第一组渐近公式 (6.4) 的图像几乎可以立即计算出来，而第二个渐近式 (6.9) 在理论研究中颇具意义，直至将用于计算对数函数连续分支的快速算法实现到 Maple（以及类似的代码）中。■

下面，我们考虑几个示例，以说明渐近公式 (6.6) 和 (6.9) 的一些特点。

6.3 例3： $H(0) = -0.148 + \mathrm{i}0.191$

对于这个 $H(0)$ 的值， $\nu_1 = 0.0249933\ldots - \mathrm{i}0.329580\ldots$，因此条件 (6.8) 得以满足，我们可以使用渐近公式 (6.6) 和 (6.9)。为了通过 Maple 数值计算解 $H(r)$ 及其相关积分 $I(r)$，我们考虑 $H(r)$ 在 $r_1 = 10^{-8}$ 处的初值，并在计算初始值 $H(r_1)$ 和 $H'(r_1)$ 时使用相应泰勒级数展开的 4 项，同时设置参数 Digits $= 120$。计算相应渐近行为时，Digits 设为 20。原则上，数值计算 $H(r)$ 和 $I(r)$ 时，可以采用较少的位数，例如 60 位；采用 60 位进行计算后，得到的图形在视觉上相同。

图13、15、17和19表明，即使对于较小的 r值，大-r 渐近行为也能为相应的函数给出相当好的近似。我们为这些图像的计算取了800个点。使用较旧的笔记本电脑（见脚注8）从头开始计算图17所示的数值解需要20s，而计算同一图中由蓝线表示的其渐近行为则需要170s（参见备注6.4）。为了生成图14、16、18和20中由红色曲线表示的数值解及相应的积分——这些红色曲线实际上隐藏在蓝色曲线之下——较新的笔记本电脑（参见脚注8）需要188s的执行时间。表示渐近值的蓝色曲线约耗时1015s生成（参见备注6.4）。由于图像具有尖峰，且峰值的高度很大程度上取决于尖峰内部点的数量和位置，因此在生成这些图像时，我们将点数从800增加到了1837。

图18类似一个借助两架梯子即可到达的鼹鼠的居所。[9] 左侧阶梯所有台阶和立板的斜率均为负。右侧阶梯的台阶斜率为负，而立板斜率为正。显然，斜率的符号与–Re $(H(r))$的符号一致。如果我们查看图14，事实上会观察到，函数 Re $(H(r))$ 在其位于原点附近的局部极小值附近的线段上为负；然而，只要沿负方向移动，越来越远离原点，这些极小值就会单调且缓慢地增大。不过，从图中并不能清楚看出，计算表明，最后一个线段是 $H(r) < 0$ 发生于 $r \in (-414.68789\ldots, -398.07403\ldots)$，它对应于鼹鼠的居所的右壁（第一个立板）。鼹鼠的居所的左壁是 $r_{\min} = -482.3271\ldots$ 处一个局部极小值附近线段的像，其中 $H(r_{\min}) = 0.0022342881\ldots$。由于 $|H(r)|$ 在这些线段上的值非常小，墙壁看起来几乎是垂直的，尽管实际上，左壁和右壁的斜率分别为负和正。

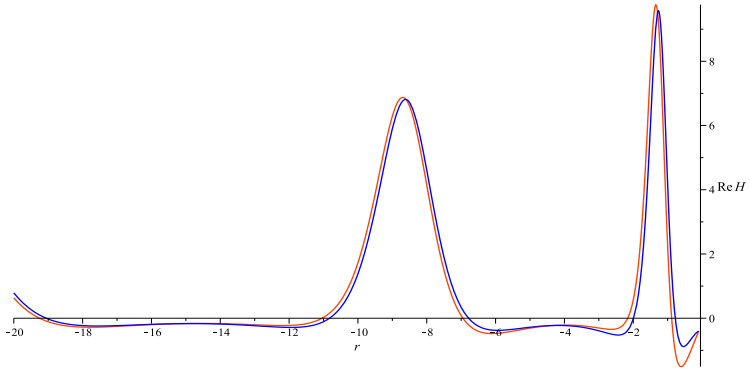

图13：红色和蓝色图像分别是函数 $H(r)$ 在 $r \leqslant -0.1$ 对应于初值 $H(0) = -0.148 + \mathrm{i}0.191$ 时的数值和大-r 渐近（参见（6.6））值的实部。

在例3中，我们证明了，对于某些 $H(r)$ 初值，大-r 渐近行为的首项能够非常准确地近似相应的Painlevé函数及其相关积分，且这种近似从非常小的 r $(r < 1)$ 值开始。在下面的例 4 中，我们将展示，存在明显不同的 $H(r)$ 初值，使得 $H(r)$ 及其相关积分具有与例3中相似的行为；然而，对于较小 r 值的近似会显著变差，尽管在定性意义上仍令人满意；此外，为了获得正确的图像，必须更加谨慎地设置数值参数。

6.4 例 4： $H(0) = -100 - \mathrm{i}300$

对于这个 $H(0)$ 值， $\nu_1 = 0.741160\ldots - \mathrm{i}0.300731\ldots$，因此满足条件 (6.8)，我们可以使用渐近公式 (6.6) 和 (6.9)。对于该解及其数值计算

[9]鼹鼠似乎是卡洛·戈尔多尼喜剧 *Il servitore di due padroni* 中的主要人物，或者也可能是个双面间谍。

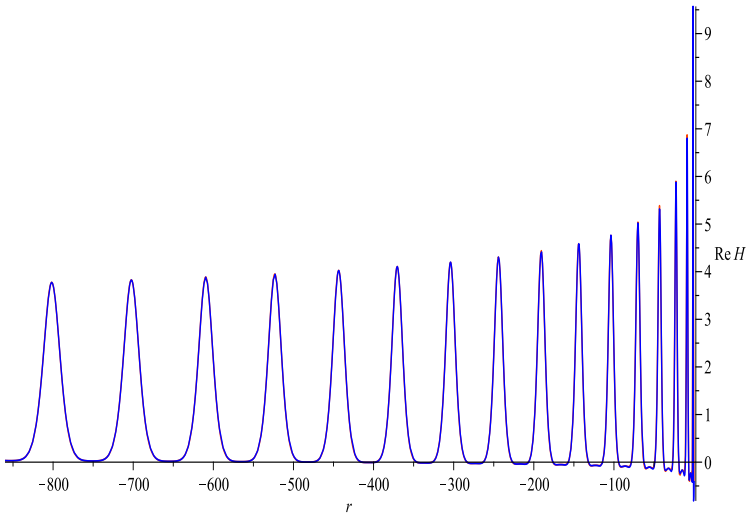

图14：图13的扩展版本（两幅图像几乎重合）。

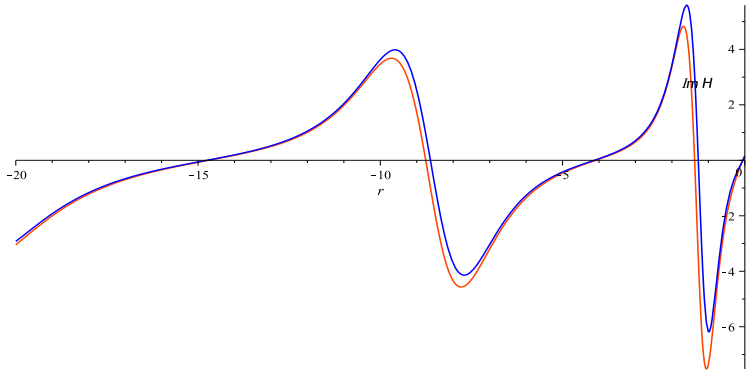

图15：红色和蓝色图像分别表示函数 $H(r)$在对应于初值$H(0) = -0.148 + \mathrm{i}0.191$的 $r \leqslant -0.01$ 数值解和大-r渐近解（参见（6.6））的虚部。

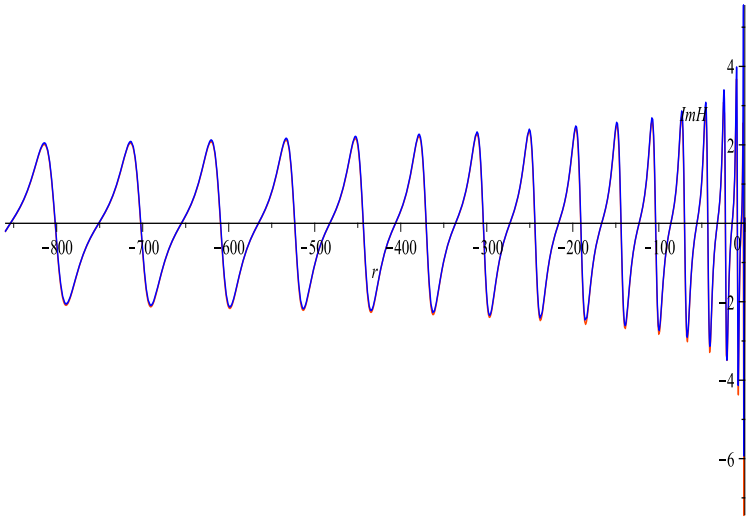

图16：图15的扩展版本（两幅图像几乎重合）。

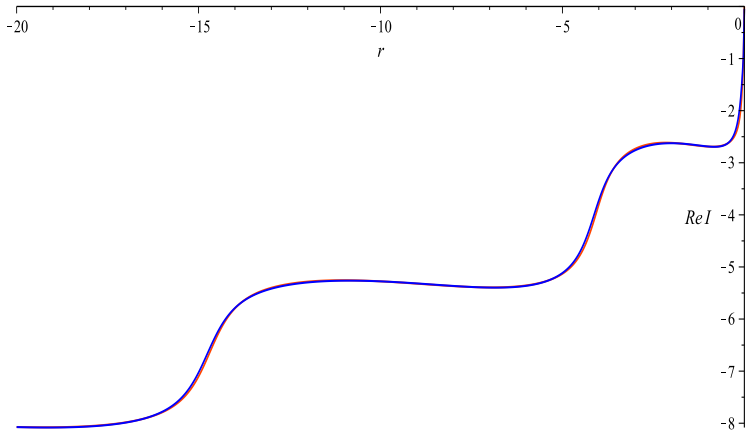

图17：红色和蓝色图像分别表示 $I = \int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-rH(r)}}\,\mathrm{d}r$ 在 $r \leqslant -10^{-8}$ 时的数值解和大-r 渐近值（参见 (6.9)，其中 $k = 0$）的实部，其中 $H(r)$ 是初值为 $H(0) = -0.148 + \mathrm{i}0.191$ 的解。黑白显示时，这些曲线无法区分；但在彩色显示时，可以看出曲线之间存在细微差异。

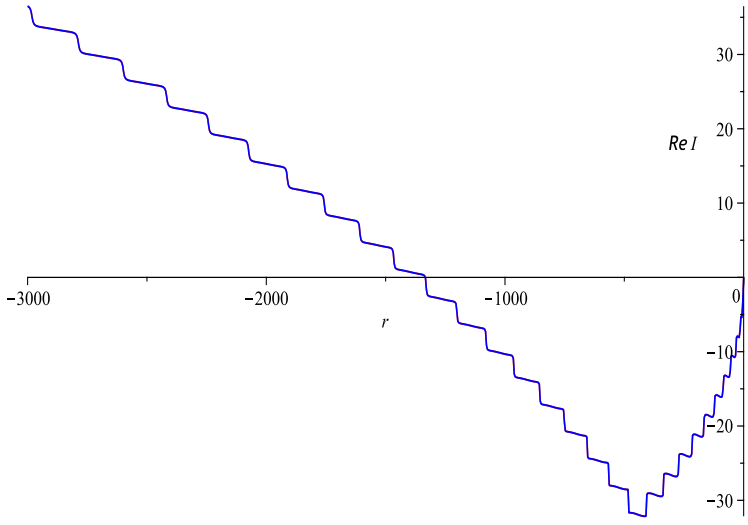

图18：图17的扩展版本（两条图像几乎重合）。

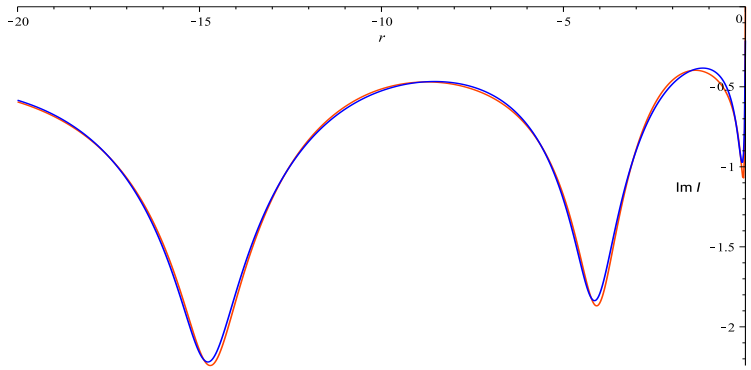

图19：红色和蓝色图像分别表示数值和大-r渐近（参见带有 $k=0$的（6.9））值的虚部，其中 $I=\int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\,\mathrm{d}r$ 对于 $r\leqslant -10^{-3}$，其中 $H(r)$是~~初值为 $H(0)=-0.148+\mathrm{i}0.191$~~的解。在黑白显示中，可以注意到曲线之间存在一些子式差异。

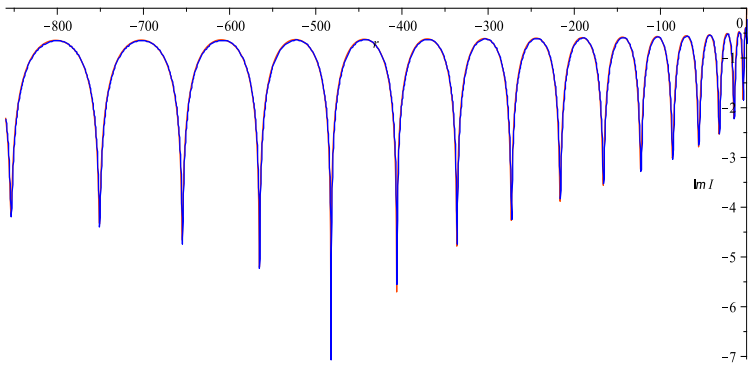

图20：红色和蓝色图像分别是数值和大-r渐近（参见 (6.9)）值的虚部，其中 $I=\int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\,\mathrm{d}r$ 对应于解 $H(r)$，其初值为 $H(0)=-0.148+\mathrm{i}0.191$。~~在彩色图中可以看到，线段 $[-600,-400]$ 上的三个红色峰值比蓝色峰值略长（不到 5%），而其他对应的红色和蓝色峰值之间的长度差异几乎无法区分。~~

借助 Maple 计算相关积分时，我们考虑了 $H(r)$ 在 $r_1 = 10^{-9}$ 处的初始值。为计算 $H(r)$ 的初始值及其对应的积分，我们对 $H(r)$ 采用了 6 项泰勒展开（参见第 2 节，方程 (2.1)、(2.2) 和 (2.17)）。为便于可视化，原则上，$H(r)$ 取泰勒级数展开的 4 项，$I(r)$ 取 2 项即可。我们将参数 Digits$= 180$ 设为 180，计算渐近行为时也采用了同样的数值 180。参数 Digits 取较大的值 180，对于计算渐近公式的虚部至关重要，因为如上所述，积分的渐近行为 (6.10) 中的对数项是通过适当微分方程的解计算得到的。在例 3 中，我们计算渐近行为时将 Digits 保持为 20，并未注意到增大其值会带来视觉上的差异。然而，在本例中，我们发现将 Digits 从 20 增至 100 后出现了差异。为验证图像保持稳定，我们将 Digits 增至 180：下文所示图像对应于参数 Digits 的这一取值。原则上，此项计算使用 80 至 90 位数字精度便已足够。

对于带有“峰值”的图像生成，我们发现最合适的点数值为5237，而在例3中，该值保持为1837。在本例中，我们不得不将其保持在如此高的水平，因为在点数达到5237之前，三个最高峰的高度并不稳定；此后，这些高度仅发生子式变化。使用这么多位数和点数进行计算会使所需时间增加约20%，但就我们的情况而言，这并不重要。

在例3中，我们解释过，Re $I(r)$ 图像呈现“阶梯结构”，是因为 Re $H(r)$ 数值图像的尾部正从第三象限缓慢上浮至第二象限，随 $r \to -\infty$ 而变化；当然，其渐近图像中也重现了相同的行为。如果两幅图像的尾部几乎同时浮到负实轴上方，那么数值鼹鼠的居所与渐近鼹鼠的居所几乎重合（参见图 18）。然而，尾部上浮的速率取决于初值 $H(0)$。可能出现这样的情况（而且很多时候确实如此）：虽然两幅图像彼此非常接近，如本例所示，但一个尾部（红色）比另一个（蓝色）更早上浮；在图 22 中，红色尾部在 $r \approx -55$ 处、第五个峰值之前上浮，而蓝色尾部则在 $r \approx -120$ 处、第七个峰值之前上浮。由于缩放，这一事实在图 22 中看得并不清楚，但我们通过数值计算验证了这一点。因此，渐近尾部向上浮动的趋势比数值尾部滞后两个峰值，使得“渐近”鼹鼠的居所看起来比“数值”住所低了两级（参见图 27）。本例表明，渐近公式 (6.9) 中的整数 k 对于 $I(r)$ 的出现，不仅是因为该公式源自函数 $\varphi(r)$ 的渐近行为，而该函数是模 $2\pi k$ 定义的（参见附录 B），还因为它与有限 r 值处渐近行为对数值图像的逼近质量有关。注意，通过渐近公式 (6.9) 分别逼近数值解的小-r 部分和大-r 部分时，参数 k 会发生 2 的平移（分别参见图 27 和图 25）。

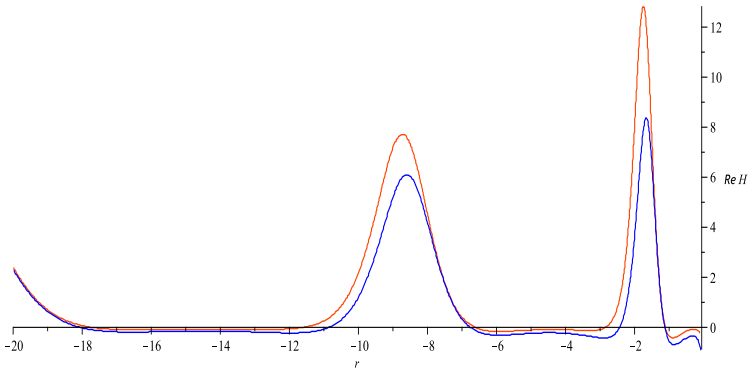

图 21：红色和蓝色图像分别表示函数 $H(r)$ 在 $r \leqslant -0.1$ 对应初值 $H(0) = -100 - \mathrm{i}300$ 时的数值解与大-r 渐近值（参见 (6.6)）的实部。

6.5 示例 5：$H(0) = -\mathrm{i}300$

对于这一 $H(0)$ 值，$\nu_1 = 0.732934\ldots - \mathrm{i}0.249469\ldots$，因此满足条件 (6.8)，我们可以使用渐近公式 (6.6) 和 (6.9)。使用 Maple 对解及其相关积分进行数值计算时，我们采用了与例 4 相同的设置。在本例中，图像与例 4 中的相似。本例的区别在于，对于 $r < 0$，Re $H(r) > 0$；然而，当 r 较小时，Re $H(r)$ 非常接近零；例如，在第一个极小值处，$r_{\min} = -0.485998\ldots$，$H(r_{\min}) = 0.024587\ldots$（参见图 30）。与例 4 一样，通过其大-$r$渐近行为得到的 $H(r)$ 近似，不如初始数据满足 $10^{-3} < |H(0)| < 10^{3/2}$ 时的近似准确。不过，当 r 较小时，Re $H(r)$ 的渐近行为有两段为负（参见图 30）。这些

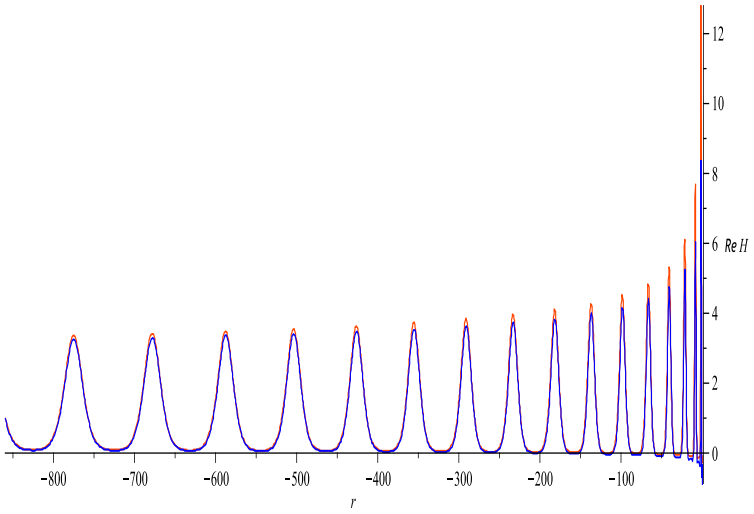

图 22：图 21 的扩展版本，仅显示前两个峰值。在此图中，第一个峰值几乎与纵轴重合。

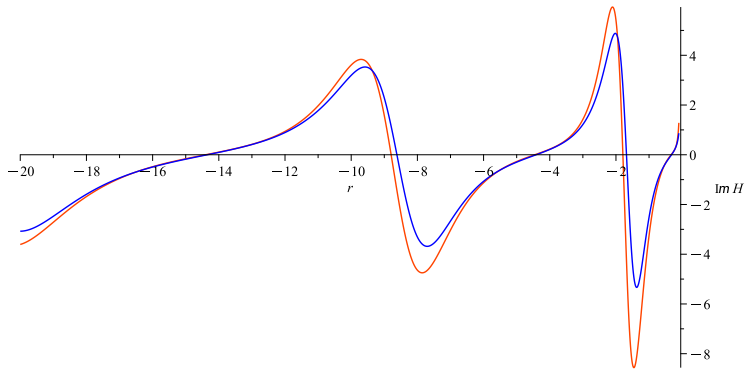

图 23：红色和蓝色图像分别表示函数 $H(r)$ 在 $r \leqslant -0.1$ 对应初值 $H(0) = -100 - \mathrm{i}300$ 时的数值解和大-r渐近（参见 (6.6)）值的虚部。

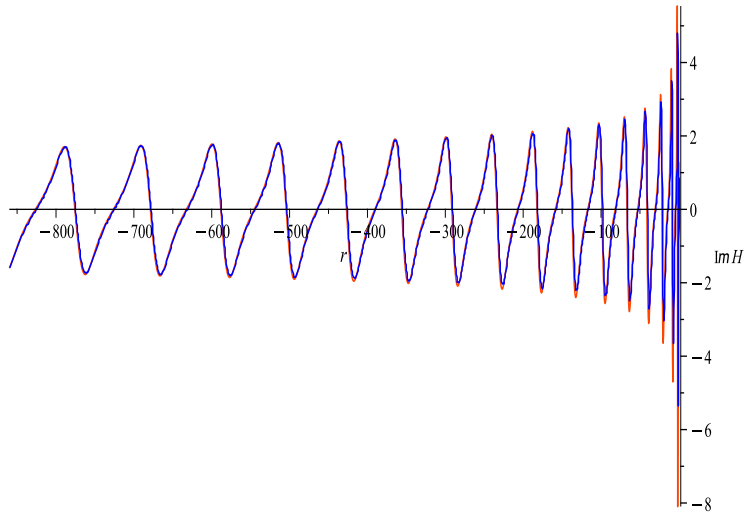

图 24：图 23 的扩展版本。在此图中，图 23 中第一个先下后上的峰几乎与纵轴重合。

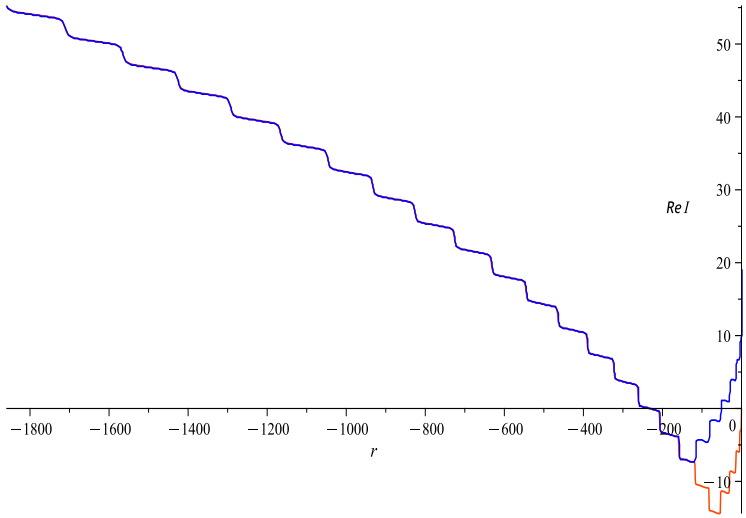

图 25：红色和蓝色图像分别表示 $I = \int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-rH(r)}}\,\mathrm{d}r$ 的数值解和大-r 渐近解的实部（参见 (6.9)，其中 $k = 3$），对应于初值为 $H(0) = -100 - 1300$ 的解 $H(r)$。

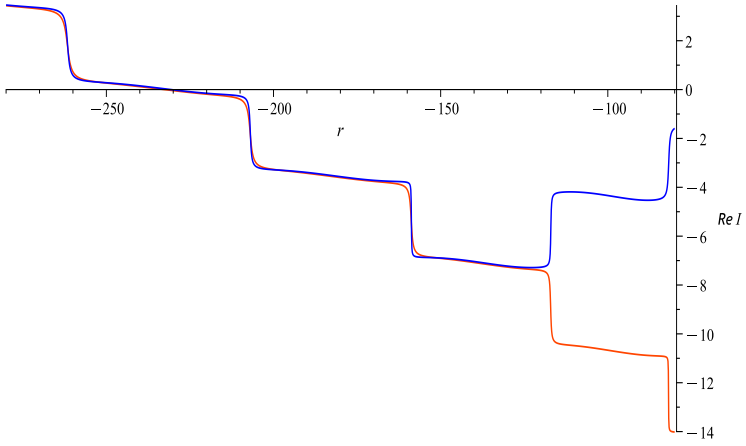

图 26：图 25 中对应于 $-280 \leqslant r \leqslant -80$ 的图像片段的局部放大图，其中数值图像和渐近图像在 $r \approx -120$ 处合并。实际上可以区分出两条彼此非常接近的相互交织的（对于 $r < -120$）曲线。

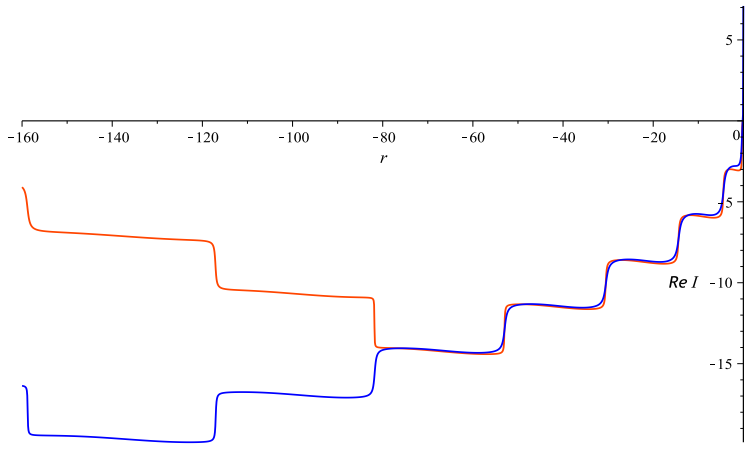

图 27：图 25 中数值解图像的一部分放大图，适用于 $-160 < r < -10^{-9}$，以及相应的渐近图（参见 (6.9)，注意！$k = 1$）。实际上可以分辨出两条彼此非常接近的独立交织曲线。“数值”鼹鼠的住所对应于 $r \in (-80, -55)$，而“渐近”住所则位于下方两步处，其 r 坐标位于 $(-160, -120)$ 内。

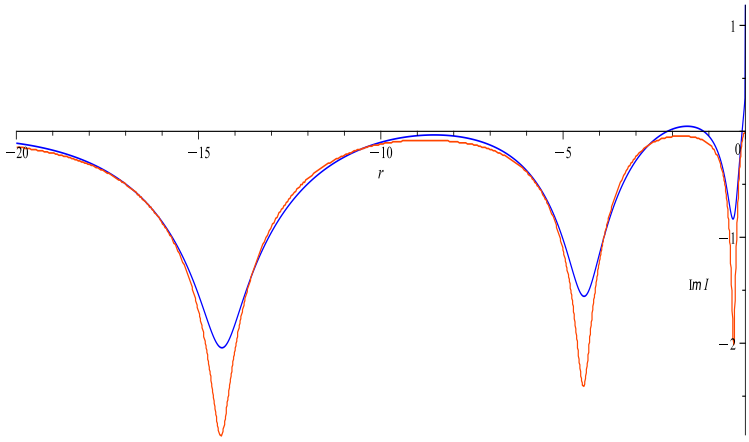

图 28：红色和蓝色图像分别表示数值解和大-r 渐近解（参见 (6.9)：此处 k 并不重要）的虚部，即 $I = \int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-rH(r)}}\,\mathrm{d}r$，其中 $-20 \leqslant r \leqslant -10^{-9}$ 对应于初值为 $H(0) = -100 - \mathrm{i}300$ 的解 $H(r)$。

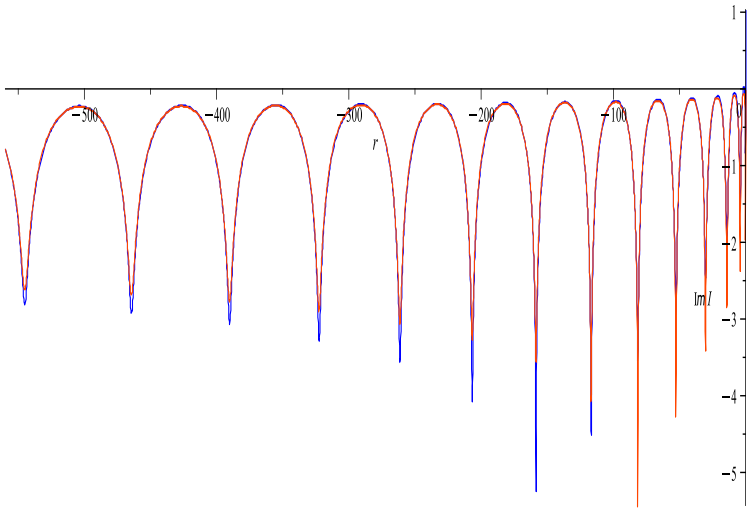

图 29：图 28 针对 $-560 \leqslant r \leqslant -10^{-9}$ 的扩展版本。在图 28 中，第一个峰几乎与纵轴重合，因此不易看清。数值解的前 6 个冰锥状尖峰比对应的渐近冰锥状尖峰更长；然而，从第 7 个冰锥状尖峰开始，渐近冰锥状尖峰更长，但对应尖峰之间的差异迅速缩小。

这些事实表明，$I(r)$ 的数值曲线看起来与图 10 的曲线相似（没有鼹鼠的居所！）；然而，渐近行为的曲线确实有两个向下的阶梯，直到它们与 $I(r)$ 的数值曲线合并。因此，我们得到的不是鼹鼠的居所，而是一个“渐近鸽笼”。在区间 $[-5.5, 0]$ 上，渐近公式甚至无法在定性上近似该解。

当我们增大 $|\mathrm{Im}\, H(0)|$ 的值时，渐近陷阱会向左移动；例如，当 $H(0) = -\mathrm{i}10^5$，时，渐近陷阱位于线段 $[-79, -59]$ 上，因此渐近式无法在 $[-59, 0]$ 上近似 $I(r)$。我们的数值实验表明，在这种情况下，将渐近图关于一条经过渐近陷阱底部两个点的直线作镜像，可以很好地近似线段 $[-79, -3]$ 上的 $I(r)$。这两个点并非唯一确定；因此，可以调整它们的位置以获得更好的近似。

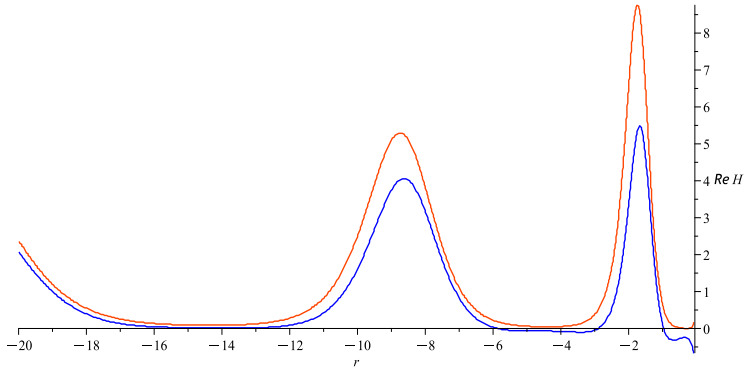

图 30：红色和蓝色图像分别表示函数 $H(r)$ 的数值解和大-r 渐近值（参见 (6.6)）的实部，其中 $r \leqslant -0.1$ 对应于初值 $H(0) = -\mathrm{i}300$。数值解（红色）为正，而渐近解（蓝色）有两段为负。

6.6 例6：$H(0) = -0.2 + \mathrm{i}0.045$

对于这个 $H(0)$ 的取值，$\nu_1 = 0.049319\ldots \approx 0.459650$，因此满足条件 (6.8)，我们可以使用渐近公式 (6.6) 和 (6.9)。通过 Maple 数值计算解及其相关积分时，我们采用了与例 4 相同的设置。图 32–39 中的图像是借助脚注 8 中介绍的新版笔记本在 957 秒内生成的。

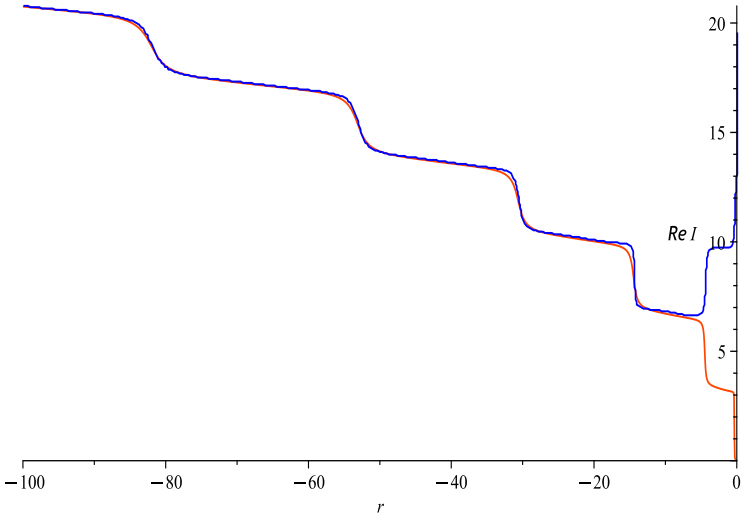

图 31：数值解（红色）与渐近解（蓝色；参见 (6.9)，其中——请注意！——$k = 3$）在区间 $(-6, -5.5)$ 上合并。两幅图像最右端的点均为 $r = -10^{-9}$。

将这个例子与例3进行比较很有启发性：两个例子中的初值很接近，但解的行为却大不相同。这是因为在例6中，$\operatorname{Im} \nu_1$ 与 -0.5更为接近。这一事实还导致 $H(r)$的实部和虚部图像中出现了非常尖锐的峰值。这些峰值给渐近行为的可视化带来了额外的问题，因为我们无法在图像中得到第一个峰值的正确高度：即使使用15000个点来绘制图像也不够！我们采用了两种策略：（i）分别绘制Re $H(r)$和Im $H(r)$的局部放大图（参见图32和图34），以确定前两个峰值的正确高度；（ii）绘制扩展图（参见图33和图35）时，随机选择点数，使前两个峰值的高度尽可能接近局部放大图中的高度。对于第（i）项，我们分别使用5237个和1800个点绘制图32和图34。在这种情况下，数值解实部的前两个峰值高度分别约为182和121。对于图32的扩展版（参见图33），我们所能达到的最佳高度分别为163和119，使用的点数为6237。为了使数值解虚部在局部放大图和扩展图中的峰值相吻合，我们使用10800个点绘制扩展图。对于相应的渐近图，两种情况下2200个点就足够了。$I(r)$的实部没有尖峰，因此我们使用了1800个点。 $I(r)$的虚部仅在较小的负 r处有一个尖峰；对于数值图和渐近图，我们均使用5237个点，得到了该峰的正确高度。

这个例子一个耐人寻味的特点是，实际上，无法通过数值计算 $I(r)$ 到达鼹鼠的居所。我们的计算表明，Re $H(r)$ 的最后一个零点位于 $\approx -2.625 \times 10^{24}$：鼹鼠居所的右壁就在此处，而所谓的“渐近行为”也只从这里才开始！因此，实际上无法数值生成该解的图像，并验证渐近行为的首项最终由平移抛物线 $2\sqrt{-r}$ 给出，即渐近行为的非振荡部分 (6.4)。[10] 不过我们可以看到，渐近公式 (6.9) 从第一级台阶开始就能很好地描述通向鼹鼠居所的右侧阶梯；因此，渐近公式 (6.9) 是正确的，由此可知，当 r 取很大的负值时，该解应表现得像平移抛物线 $2\sqrt{-r}$。这说明了备注 6.4 中提到的渐近公式 (6.9) 的理论应用；若不了解渐近行为，人们可能会认为，对于所有足够大的负 r，右侧阶梯就是 $I(r)$ 的渐近行为。

注 6.5. Question：图 36 中鼹鼠的居所在哪里？ Answer：没人看得见它，但它确实存在！正如例3中所解释的，居所的位置（其右壁）对应于函数 Re $H(r)$ 的最后一个零点。观察图33，我们可能会担心这个最后的零点是否真的存在，因为我们看到渐近公式 (6.6) 在给定图中表现得非常好，而且我们预计它在 $r \to -\infty$ 时也应以略有变化的形式重现。从图33可以看出，解在大-r 下的行为有一个主要趋势：峰值越来越低，峰值之间的距离越来越大。图形变换中还有一个更微妙的趋势：它的尾部正缓慢上升，浮到负实半轴上方

[10] 鼹鼠挖得太深了！

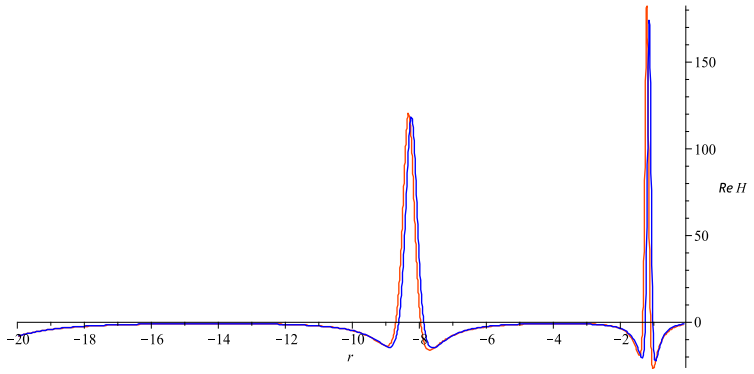

图32：红色和蓝色图像分别表示函数 $H(r)$ 在 $r \leqslant -0.1$对应初值 $H(0) = -0.2+$i0.045 时的数值解和大-r 渐近值（参见 (6.6)）的实部。

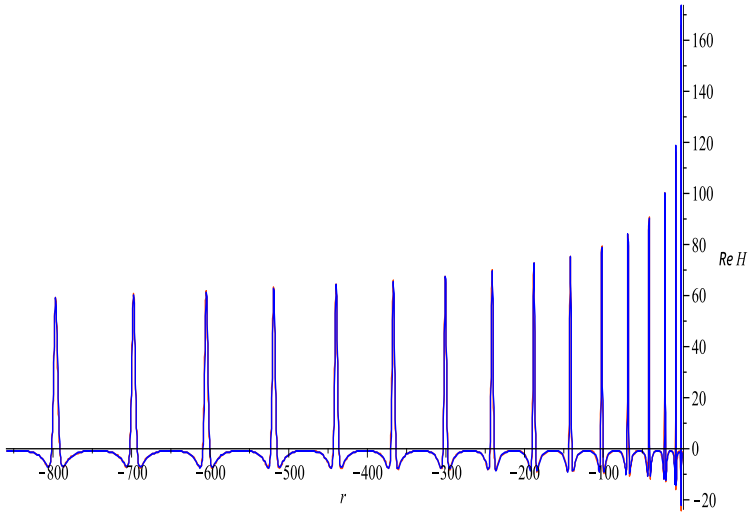

图 33：图 32 的扩展版本，展示了图像的前两个峰值。在这幅图中，第一个峰值几乎与纵轴重合。

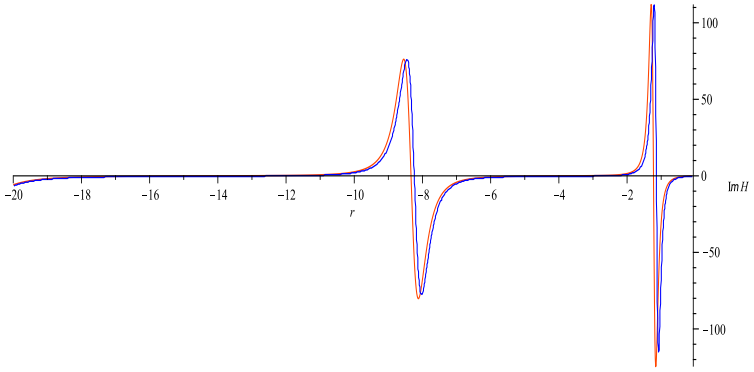

图 34：红色和蓝色图像分别表示函数 $H(r)$ 在 $r \leqslant -0.1$ 对应初值 $H(0) = -0.2 +$ i0.045 时的数值解和大-r渐近值（参见 (6.6)）的虚部。

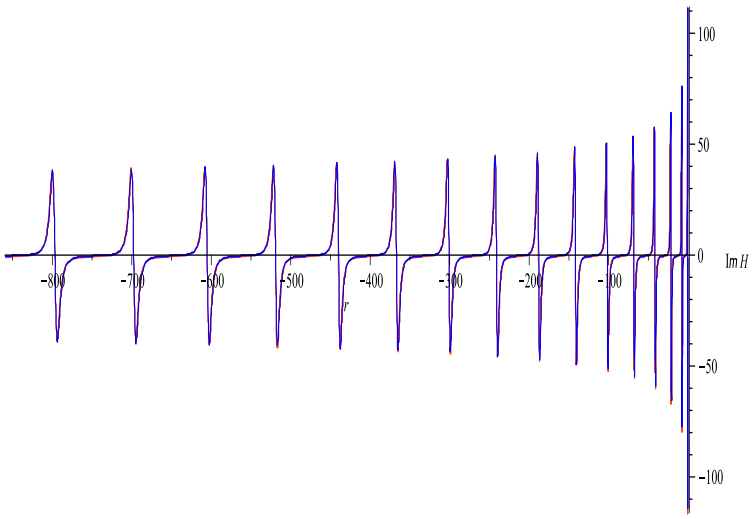

图 35：图 34 的扩展版本。在此图中，图 34 的第一个先下后上的峰几乎与纵轴重合。

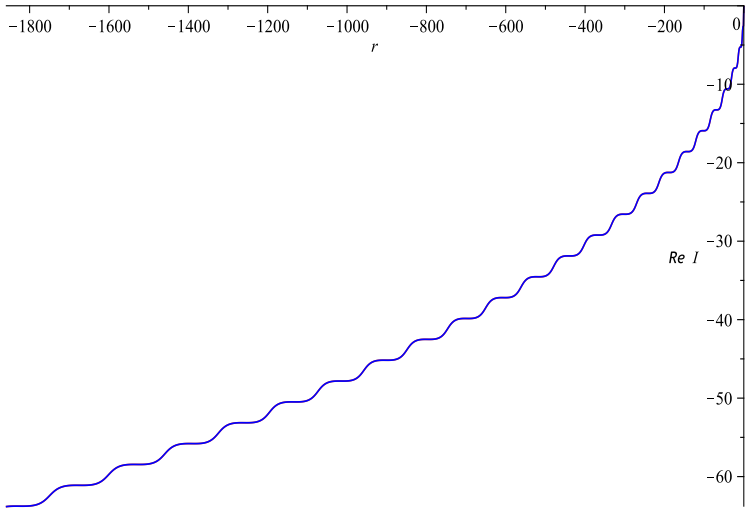

图 36：红色和蓝色图像分别表示 $I = \int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\,\mathrm{d}r$ 的数值解和大-r 渐近值（参见含 $k = 0$ 的 (6.9)），对应于初值为 $H(0) = -0.2 + \mathrm{i}0.045$ 的解 ~~$H(r)$~~。红色图像被蓝色图像覆盖，因此不可见。在接下来的放大图 37 中，可以辨认出红色。

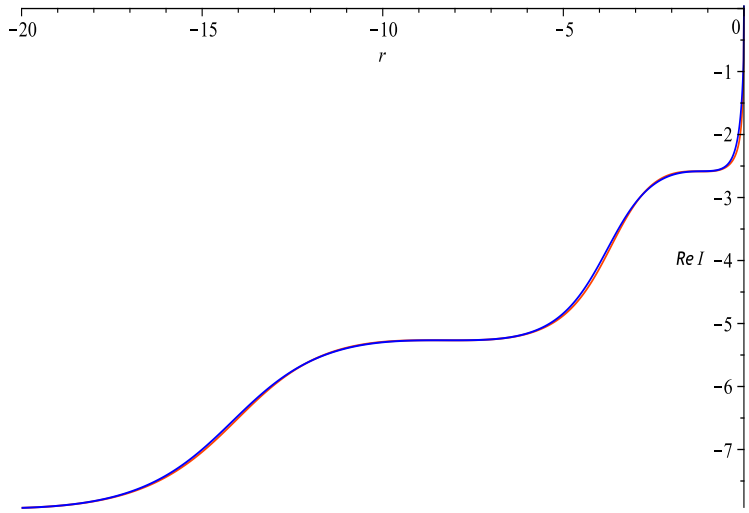

图 37：图 36 中数值解图像的一部分局部放大图（对应 $-20 \leqslant r \leqslant -10^{-8}$），以及相应的渐近图（参见 (6.9)，其中 $k = 0$）。在彩色图中可以看到，来自下方的较陡斜率为红色，来自上方的较陡斜率为蓝色。

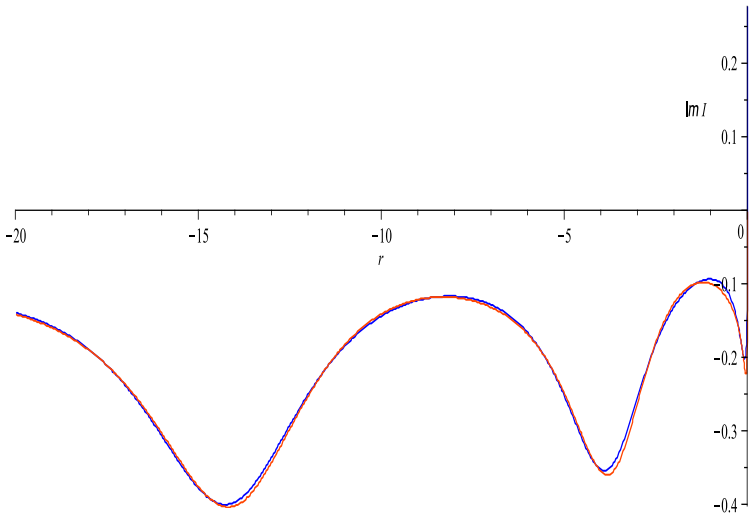

图38：红色和蓝色图像分别表示数值解和大-r渐近解（参见 (6.9)）中 $I = \int_r^0 \frac{1}{\sqrt{-r}H(r)}\,\mathrm{d}r$ 在 $-20 \leqslant r \leqslant -10^{-9}$ 处的虚部，这些值对应于初值为 $H(0) = -0.2 + \mathrm{i}0.045$ 的解 $H(r)$。

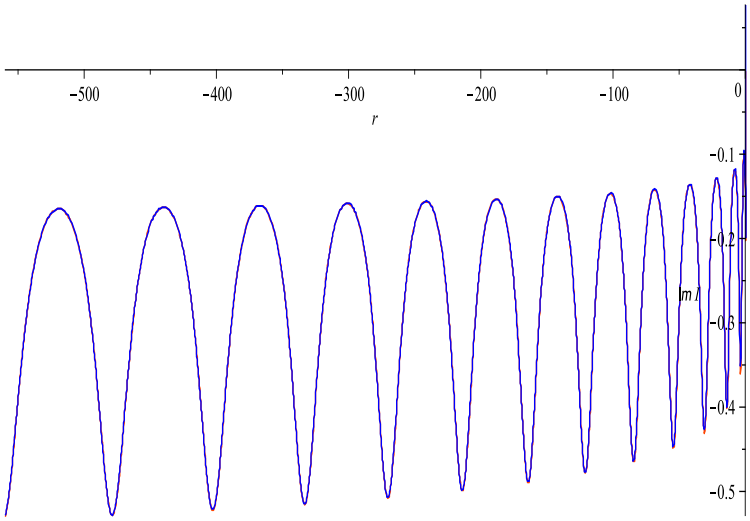

图39：图38针对 $r \leqslant -10^{-5}$的扩展版本。在该图中，图38的第一个峰值几乎与纵轴重合，因此不太清晰可见。在前几个峰值的端点处，可以辨认出一些小红点。

当向左（$r \to -\infty$）推进时：最终，Re $H(r) \to 1$；因此，Re $H(r)$ 的最后一个零点应当存在。

为了理解这些趋势，必须考察渐近公式（6.6）的渐近行为：事实上，方程（6.6）可以得到简化，并转换为一种类似于“常规渐近式”（6.1）的表达式；因此，从这个意义上说，后一种渐近行为可视为“渐近行为的渐近行为”。这样的术语是合理的，因为图像的起始部分——第一种渐近行为（6.6）已经开始起作用的地方——与图像的尾部——它当然仍在起作用的地方——看起来截然不同！不过与此同时，我们将在下文解释，实际上无法将这种差异可视化！

图32和图33中的图像表明，渐近行为能够准确地逼近 Re $H(r)$；因此，在计算 Re $H(r)$ 的最后一个零点时，我们可以使用该函数的渐近行为，而不必进行数值计算。这一点很重要，因为从下文给出的结果 (6.11) 可以明显看出，由于需要跨越“天文数字般遥远的距离”，这样的计算是不可能的。根据我们的计算，Re $H(r)$ 的最后一个零点位于[11]

$$r_0 = -2.627934076521645094492071811 5\ldots \times 10^{24}. \tag{6.11}$$

在 Re $I(r)$ 的图像上，越过点 r_0 之后，就会踏上鼹鼠居所的地面，通往天堂的左侧阶梯由此开始。为了评估住所所在的深度，必须计算 Re $H(r)$ 的零点数。在图32中，我们看到图像具有准周期结构：准周期指图像上位于两个相邻峰值之间的部分。每个峰值都“立”在两条腿上，因此，一个峰值的一条腿属于左侧准周期，另一条腿属于右侧准周期；于是，每条腿都会与负实轴相交，并产生 Re $H(r)$ 的一个零点。因此，每个准周期至少有两个零点。还有一点需要验证，即连接两条腿的“桥”上的极大值点。在到达包含最后一个零点的准周期之前，这个点始终为负。显然，要对 Painlev´e 函数证明这一点并非易事；不过，对于它的渐近行为（6.6），这一点可以证明。数值计算表明，对于图32所示的前两个准周期，我们发现 $r_{\max,1} = -3.756\ldots$，其中 $H(r_{\max,1}) = -0.46471\ldots$，以及 $r_{\max,2} = -14.118\ldots$，其中 $H(r_{\max,2}) = -0.47042\ldots$。因此，尾部的浮动过程如下演变：两条腿向上抬起，同时它们之间的距离不断增大，而两腿之间的“桥”则逐渐拉直，使其极大值点向下移动。于是，桥的形状由凸变凹，两条腿消失，极大值平滑地转变为极小值，浮动过程继续：尾部（在某个适当的尺度下）变得类似于图14所示的图像。对于 $|r|$，图像的这种变换在天文数字般巨大的距离上缓慢推进；然而，借助渐近公式（6.6），仍然可以观察到这一变化。在演化的这一阶段，图像的变换仍在继续：尖峰逐渐变得越来越“平坦”，最终，经过适当的重新缩放后，尾部与图1中的黑色图像相似。实际上，即使借助渐近行为，也无法绘制尾部这一部分的图像，因为尖峰之间的距离以及尖峰本身都在不断增大。

[11]请注意，10^{24} 是对可观测宇宙中恒星数量的估计。

沿负半轴拉伸得更多，除非对 r 使用某种特殊缩放，并且这种缩放伴随着 $|r|$ 的增长而变化。

回到确定鼹鼠的居所这一问题，我们注意到，$\mathrm{Re}\,H(r)$ 的两个相邻峰值之间的那一对零点，对应于右侧阶梯向下的一步。若 $2N$ 表示零点的数量，那么右侧阶梯向下共有 N 步。从第二步开始，每一步向下的深度应为 π，因此当 N 很大时，鼹鼠居所的深度为$\pi N + \mathcal{O}(1)$。另一方面，这一深度可以按如下方式计算（参见方程 (6.9) 和 (6.10)）：$\mathrm{Re}\big((\hat{}\psi(r_0) - \theta_0)/2 + (\hat{}\psi(r_0) + \theta_0)/2\big) - 2\sqrt{-r_0} + o(1)$，因此当 $|r_0|$ 很大时，鼹鼠的居所大约位于深度 $2\sqrt{-3r_0} - 2\sqrt{-r_0} + \mathcal{O}\big(\ln \sqrt{-3r_0}\big)$ 处。更精确的估计需要计入 $\mathcal{O}(1)$ 项；在我们的距离尺度 (6.11) 上，该项与对数误差估计相当。不过，就我们所寻求的粗略估算而言，这些项并不重要。数值上，对于鼹鼠居所的 y 坐标，我们得到以下估计：[12]

$$-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{-r_0} = -2.373441069108\ldots \times 10^{12}. \tag{6.12}$$

我们认为，式（6.12）中小数点后10到11位数字是正确的。借助所谓的楼梯弦杆（6.14），可以更精确地估计鼹鼠的居所深度；相关讨论见下一小节。■

6.7 楼梯斜梁

最后，我们想对 $I(r)$的渐近行为作一些观察。这些观察还有待进一步研究，并需要更严谨地表述。在例1和例2中，$I(r)$的实部看起来像阶梯。在例3–6中，我们观察到两段与鼹鼠的居所相连的阶梯。鼹鼠的居所在 $I(r)$图像中的出现，可以用函数 $H(r)$图像的尾部浮升至负r 半轴上方来解释。我们推测，直线 $H_-(r) = -1/2 = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i}/3}\right)$ 起着不稳定吸引线的作用；鼹鼠的居所如何出现及其位置，则可以通过稳定吸引线 $H_+(r) = +1$与不稳定吸引线 $H_-(r)$之间的相互作用来解释。[13]

我们用术语楼梯弦杆 指描述阶梯的渐近行为首项中的非振荡部分。左侧阶梯的楼梯弦杆，记作 Str_l，可由渐近行为 (6.4) 立即推得，即，

$$Str_l = 2\sqrt{-r} + 2\mathrm{Re}(\nu_1)\ln(2+\sqrt{3}) + 2\pi k - \mathrm{Im}\left(\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}H(0) - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}} - H(0)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}}\right)\right). \tag{6.13}$$

要得到由 Str_r 表示的右侧阶梯楼梯弦杆公式则更为复杂；不过，仔细阅读本节的读者应当能够推导出以下公式：

$$\begin{aligned} Str_r = &-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{-r} - \mathrm{Re}(\nu_1)\ln\sqrt{-r} + \mathrm{Re}(\nu_1)\ln\left(\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2\sqrt{3})^3}\right) - \frac{3\pi}{2}\mathrm{Im}(\nu_1) \\ &+ \frac{\pi}{4} + 2\pi(k-1) - \mathrm{Im}\left(\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}H(0) - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}} - H(0)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}}\right)\right) + \mathrm{Im}\left(\ln\left(\tilde{g}_1\Gamma(\mathrm{i}\nu_1)\right)\right). \end{aligned} \tag{6.14}$$

在方程 (6.13) 和 (6.14) 中，$k \in \mathbb{Z}$ 是 2π 不确定性的一个明确体现，该不确定性存在于渐近行为 (6.4) 和 (6.9) 的虚部中。

楼梯弦杆 Str_l 无需额外的可视化，因为它是渐近行为首项的重要组成部分，而该首项已在例1和例2中得到验证。“中间的”楼梯弦杆Str_r 借助图40和图41进行了说明：在这两幅图中，整数 k 均等于1，而对于与例6相对应的 Str_r，$k = 0$。

当 $r \to -\infty$ 时，方程 (1.2) 的几乎所有解（尤其是本文中考虑的所有解）的渐近行为都可以描述如下：存在某个 r，其大小可能取决于具体的解而较小或较大；解会被吸引至抛物线$2\sqrt{-r}$，并在距离 $Str_l - 2\sqrt{-r}$ 处保持振荡（参见 (6.13)），该距离可能因具体解而较小或较大。从这个意义上说，我们可以称 $r \to 2\sqrt{-r}$ 为稳定吸引抛物线。在稳定吸引抛物线使许多解的行为达到平衡之前，这些解会被不稳定“捕获”。

[12]考虑到鼹鼠的居所的坐标 (6.11)、(6.12)、它的大小，以及左侧阶梯向上延伸，远远高于负半轴这一事实，我们可以猜想，例6中那只奇怪的鼹鼠不久前是从天而降的。[13]数 1 和 $\mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i}/3}$ 是方程 (1.2) 的非微分部分的根（参见推论 4.1）。

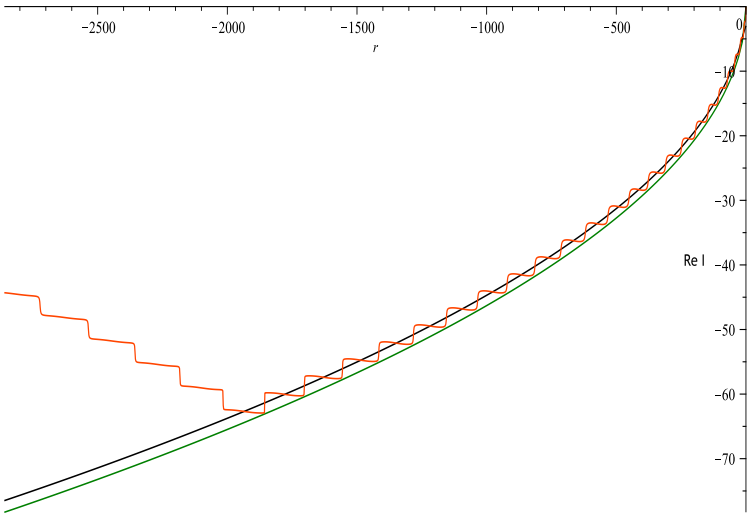

图 40：红色曲线表示与初值$H(0) = -0.4 + \mathrm{i}0.78$ 对应的 Re $I(r)$ 数值。生成该曲线的 MAPLE 设置与例 6的设置相似。该解的参数 ν_1 等于 $-0.396664\ldots - \mathrm{i}0.198139\ldots\ldots$。黑线表示 Str_r，其中 $k = 1$，最低的（绿色）线是不稳定吸引抛物线。

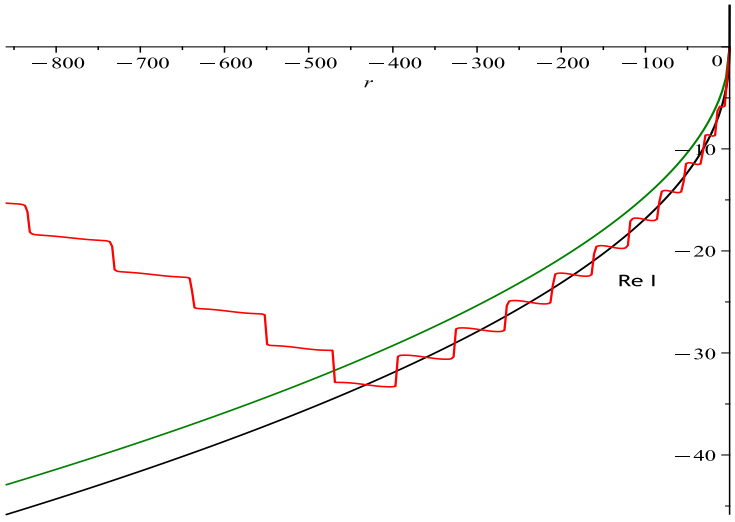

图 41：红色曲线表示与初值$H(0) = -100 - \mathrm{i}200$相对应的Re $I(r)$ 的数值。生成此曲线的 MAPLE 设置与例 4 的设置相似。该解的参数 ν_1 等于 $0.686841\ldots - \mathrm{i}0.323156\ldots$。黑线表示带有 $k = 1$ 的 Str_r，上方的（绿色）曲线是不稳定吸引抛物线。

吸引抛物线，即 $r \to -2(\sqrt{3}-1)\sqrt{-r}$。对于任意 $r = r_0$，都存在一个解，它在距离 $|r_0|$ 处受到不稳定抛物线的吸引。这些解在 Str_r 附近振荡。与 Str_l 的情形不同，不稳定抛物线与 Str_r 之间的距离呈对数增长；然而，这种增长并非不稳定抛物线无法在无限-r 区间上保持该解的原因。我们对这种解的行为给出的形式化解释依赖于“渐近行为的渐近行为”这一概念，详见注 6.5；这意味着 Re $H(r)$ 图像的尾部漂浮在负实半轴上方，因此向下阶梯的数量应当有限。

函数 Re $I(r)$ 可以作为描述鼹鼠行为的数学模型。这个模型对右抛物线的不稳定性给出了更简单、甚至更令人信服的解释。鼹鼠向左下方移动，身后留下的轨迹类似于右侧阶梯；鼹鼠挖得越深，找到的食物就越少，因此右侧阶梯的凹度也越来越小。最后，鼹鼠意识到没有食物了。此时，鼹鼠建造自己的住所，稍作休息、整理思绪之后，无论其天性如何，它都意识到必须改变移动方向，并最终付诸行动！于是，鼹鼠开始修筑左侧阶梯。起初，鼹鼠几乎垂直向上移动；然而，由于垂直移动很困难，它的轨迹变得“波浪起伏”。走了几步之后，鼹鼠发现前方的食物越来越多，于是它的水平移动距离越来越长，而垂直移动距离则持续缩短；因此，左侧阶梯的凸度越来越小。视具体情况而定，鼹鼠住所的位置会随 $H(0)$ 的取值而变化。我们还可以把阶梯的各级理解为鼹鼠挖掘的隧道，其长度可以借助缩放参数 $c > 0$ 调节：$r \to cr$。那么 $I(r)$ 的虚部又如何呢？我们看到（参见图 20），每个冰锥状尖峰都对应着一个独立的阶梯／隧道。我们知道鼹鼠会为食物建造储藏处；因此，每条隧道里都有一个食物储藏处，而冰锥状尖峰的长度可以解释为与相应储藏处中积存的食物储备成正比的数。按照这个模型，最大的食物储藏处恰好位于鼹鼠的住所中。

一个更有趣的模型，用来描述“鼹鼠地下的几何形态”，或许可以与依赖于两个变量的函数 $I(r)$ 的推广联系起来。因此，似乎可以从依赖于两个变量的高阶 Painlevé 方程积分中“挖掘”这样的函数，即与退化第三 Painlevé 方程（1.1）相关层级的第二成员。

A 附录：函数 $g_2(r)$

在第 2节中，给出了生成函数 $g_k(r)$、$k = 1$、2、.....的定义，并构造了该序列中的第一个函数 $g_1(r)$。这里构造了第二个函数 $g_2(r)$，并且我们还解释了如何借助这一结果计算 $P_n'(-1)$。

$g_2(r)$ 的微分方程是

$$\left(r g_2'(r)\right)' = 3g_2(r) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(I_1(2\sqrt{3r})\right)^2, \tag{A.1}$$

其中，I_1 是 1 阶修正贝塞尔函数。该常微分方程是 0 阶非齐次修正贝塞尔方程。$g_2(r)$在小-r 处的展开不包含对数项，其首项为 $-r/3$。这一事实使我们能够唯一确定该方程的适当解：

$$g_2(r) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}I_0(2\sqrt{3r}) + \frac{2}{3}\int_0^r \left(I_0(2\sqrt{3r})K_0(2\sqrt{3x}) - K_0(2\sqrt{3r})I_0(2\sqrt{3x})\right)\left(I_1(2\sqrt{3x})\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{A.2}$$

下面的展开并不广为人知；然而，它对我们的研究非常有帮助：

$$\left(I_1(2\sqrt{3x})\right)^2 = 3x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n+2}{n}(3x)^n}{((n+1)!)^2}, \tag{A.3}$$

其中 $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$ 是二项式系数。

事实上，由于我们需要 $g_2(r)$ 的泰勒级数展开，因此我们借助幂级数求解方程 (A.1)。代入展开式

$$g_2(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, r^k, \tag{A.4}$$

其中系数 c_k、$k = 1$、2、.....与 r 无关，代入方程 (A.1)，可得到以下递推关系，

$$(k+1)^2 c_{k+1} = 3c_k + \frac{3^{k-1}}{(k!)^2}\binom{2k}{k-1}, \quad c_1 = -\frac{1}{3}.$$

解出最后一个关系式，我们得到的是

$$c_n = \frac{3^{n-2}}{(n!)^2}\left(-1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2k}{k-1}\right), \quad n=1,2,\ldots. \tag{A.5}$$

注 A.1. 整数数列 $\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2k}{k-1}$, $n=2,3,\ldots$，与 [24] 中的数列 A057552 相同。将 n 移至 $n-2$，代入 [24], 中给出的公式，我们得到的是

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2k}{k-1} = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2n}\left(4n-2-n\,{}_2F_1(1,-n+1;-n+3/2;1/4)\right)-\frac{1}{2}, \quad n\in\mathbb{N},$$

其中 ${}_2F_1(1,-n+1;\ -n+3/2;1/4)$ 是在 $x=1/4$ 处高斯超几何函数的值，而 $\binom{2n-2}{n-1}_n$ 是第 $(n-1)$ 个卡特兰数。有趣的是，MAPLE 给出了这个和的一个更复杂的表示：

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2k}{k-1} = -\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{6}-\binom{2n}{n-1}\,{}_3F_2(1,n+1,n+1/2;n,n+2;4),$$

其中，${}_3F_2(1,n+1,n+1/2;n,n+2;4)$ 是广义超几何函数在 $x=4$ 处的值。■

推论 A.1。 函数 (A.2) 是序列 c_n 的生成函数（参见 (A.5)）。

证明。函数 (A.2) 是通过指定初始条件 $g_2(0)=0$ 和 $g_2'(0)=-1/3$ 从通解得到的。由于 $r=0$ 是该方程的奇点，严格来说，我们必须证明此解可以展开为关于 r 的幂级数，形式如 (A.4)。证明很直接：使用 $I_0(2\sqrt{3r})$、$I_1(2\sqrt{3r})$ 和 $K_0(2\sqrt{3r})$ 在 $r=0$ 处的展开。函数 $I_0(2\sqrt{3r})$ 和 $I_1(2\sqrt{3r})$ 的展开是收敛幂级数。$K_0(2\sqrt{3r})$ 的展开为

$$K_0(2\sqrt{3r}) = -I_0(2\sqrt{3r})\ln\sqrt{3r}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(1+m)(3r)^m}{(m!)^2}, \quad \psi(1+m)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\gamma,$$

其中 $\gamma=0.57721\ldots$ 是欧拉–马歇罗尼常数。于是，(A.2) 中的积分可分解为两部分：第一部分是含对数的积分，即，

$$\frac{1}{2}I_0(2\sqrt{3r})\int_0^r(\ln(r)-\ln(x))I_0(2\sqrt{3x})\left(I_1(2\sqrt{3x})\right)^2\mathrm{d}x, \tag{A.6}$$

而第二个积分则包含关于积分变量和 r 可展开为幂级数的函数。将相应的幂级数代入第二个积分后，可以逐项积分，并得到一个系数为有理数（！）的幂级数，因为在这个展开中，会出现整数 m 和 l [13] 对应的差值 $\psi(m+1)-\psi(l+1)$。积分 (A.6) 应通过分部积分来计算；此时，显式积分得到的项会消失，而剩余的积分只包含因展开式 (A.3) 而可展开为泰勒级数的函数。

□

注释 A.2. 我们已明确执行了推论 A.1 的证明中讨论的方案；然而，我们通过将相应级数代入积分 (A.2) 得到的数 c_n 对应公式相当繁琐。我们无法将后一个公式化简为简洁的表达式 (A.5)，但数值验证表明这两个公式一致。■

命题 A.1。

$$(-1)^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}3^{\nu_3(n+1)}P_n'(-1) = 3^{b_n-2}\left(\frac{n}{2}-\frac{5}{4}-(-1)^n\frac{3}{4}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2k}{k-1}\right), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{A.7}$$

其中，序列 $\nu_3(n+1)$ 和 b_n 分别由猜想 2.1 和方程 (2.19) 定义。证明。现在借助试探解 (2.25) 计算系数 c_n。将 $a_0=-(1-\varepsilon)^{1/3}$ 代入试探解 (2.25)，并考虑 a_n 按 $\varepsilon\to 0$ 的展开。数 c_n 与该展开在 ε^2 处的系数一致；计算结果如下：

$$c_n = (-1)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1}\frac{3^{\nu_3(n+1)}}{(n!|n!|_3)^2}\left(P_n'(-1)+\frac{1}{3}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}-(-1)^n\frac{3}{4}\right)P_n(-1)\right).$$

考虑到式（2.28）给出的 $P_n(-1)$ 的公式以及方程（A.5），经过直接计算，我们得到方程（A.7）。

□

[14] 另见 OEIS 中的序列 A279561，该序列枚举了避免模式 101、102、201 和 210 的长度为 n 的反演序列数。

B Ap附录： $a\in\mathbb{C}$ 时 $u(\tau)$ 和 $\varphi(\tau)$ 在 $\tau\to 0$ 时的渐近行为

下文定理 B.1 中给出的结果基于 [26] 的定理 3.4。这里，我们仅表述 [26] 的定理 3.4 中关于 $\tau\to+0$ ($\arg(\tau)=0$) 时渐近行为的关键渐近结果，这意味着定理 3.4 中出现的参数 ε_1 和 ε_2 必须设为 0。由此可以简化 [26], 的定理 3.4 中的记号：单值化坐标采用（$a, s_0^0, s_0^\infty, s_1^\infty, g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}$），而非（$a, s_0^0$(0, 0) s_0^∞(0, 0) s_1^∞(0, 0) g_{11}(0, 0) g_{12}(0, 0) g_{21}(0, 0) g_{22}(0, 0)）。此外，我们还简化了渐近公式中参数的记号：（i） $\varpi_k^\natural(0,0;\lambda)$ 改为 $\varpi_k(\lambda)$，$k=1,2$；（ii） $\chi_k(\mathrm{g};\lambda)$ 在此记为 $\chi_k(\lambda)$；（iii） $\mathrm{p}(a,\lambda):=\mathrm{p}_1(\lambda)$, 以及 $\mathrm{p}(-a,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\lambda}:=\mathrm{p}_2(\lambda)$。此外，我们运用欧拉伽马函数的标准恒等式，简化了 [26] 的定理 3.4 中出现的 $\mathrm{p}(z_1,z_2)$ 的表达式。由于本文未研究与方程（1.1）对应的哈密顿函数，下文定理 B.1 中省略了其小-τ 渐近行为；不过，定理 B.1 同时包含函数 $\varphi(\tau)$ 的小-τ 渐近行为。 [26], 的定理 3.4 的表述中未包含后一渐近行为，尽管事实上它是在定理 3.4 的证明过程中得到的。

回顾一下，对于方程 (1.1) 的任意解 $u(\tau)$，函数 $\varphi(\tau)$ 定义为不定积分

$$\varphi'(\tau)=\frac{2a}{\tau}+\frac{b}{u(\tau)}. \tag{B.1}$$

该函数以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\tau)}$ 的形式出现在相应等单调系统系数的参数化表达式中（见 [26], 命题 1.2）；因此，只要给定等单调系统的单值化数据，函数 $\varphi(\tau)$ 就在模 2π 的意义下确定。换言之，(B.1) 中的积分常数由单值化数据在模 2π 的意义下确定，也就是说，从等单调的角度来看，函数 $\varphi(\tau)$ 是一个“几乎定积分”。这一事实使我们能够计算与函数 $u(\tau)$ [29] 相关的一些特定积分。

在 [26] 中，方程组 (12) 的第一个方程的单值化数据，与函数对 $(u(\tau),\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\tau)})$ 之间存在一一对应，其中函数对 $(u(\tau)\ \varphi(\tau))$ 是方程组 (1.1)、(B.1) 的一个解。该方程的单值化数据记为 $(a, s_0^0, s_0^\infty, s_1^\infty, g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}\quad a\quad)\in\mathbb{C}^8$。这些复坐标满足一组代数方程，其中变量 $\mathrm{e}^{\pi a}$ 取代了； $\mathbb{C}^8$ 中的这组方程定义了一个单值化流形。将 $\mathrm{e}^{\pi a}$ 视为参数时，该流形也可视为 $\mathbb{C}^7$ 中的一个代数簇。我们称该流形上的一个点为与 $(u(\tau),\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\tau)})$ 对应的单值化数据，或者简而言之，称为与函数对 $(u(\tau)\ \varphi(\tau))$ 对应的单值化数据；但须注意，函数 $\varphi(\tau)$ 指的是由等价关系 $\varphi\equiv\varphi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ 定义的函数类。

定理 B.1. 设 $(u(\tau)\ \varphi(\tau))$ 是方程组 (1.1)、(B.1) 的一个解，对应于 $\varepsilon b>0$ 的单值化数据 $(a, s_0^0, s_0^\infty, s_1^\infty, g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22})$。假设。

$$|\mathrm{Im}(a)|<1,\qquad \rho\neq 0,\qquad |\mathrm{Re}(\rho)|<1/2,\qquad g_{11}g_{22}\neq 0, \tag{B.2}$$

其中

$$\cos(2\pi\rho):=-\frac{\mathrm{i}s_0^0}{2}=\cosh(\pi a)+\frac{1}{2}s_0^\infty s_1^\infty\mathrm{e}^{\pi a}. \tag{B.3}$$

然后，满足条件的 $\exists\,\delta>0$

$$u(\tau)\underset{\tau\to+0}{=}\frac{\tau b\mathrm{e}^{\pi a/2}}{16\pi}\big(\varpi_1(\rho)\tau^{2\rho}+\varpi_1(-\rho)\tau^{-2\rho}\big)\big(\varpi_2(\rho)\tau^{2\rho}+\varpi_2(-\rho)\tau^{-2\rho}\big)\big(1+o\big(\tau^\delta\big)\big), \tag{B.4}$$

and

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\tau)}\underset{\tau\to+0}{=}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}2^{\mathrm{i}a}\tau^{\mathrm{i}2a}\left(\frac{\varpi_2(\rho)\tau^{2\rho}+\varpi_2(-\rho)\tau^{-2\rho}}{\varpi_1(\rho)\tau^{2\rho}+\varpi_1(-\rho)\tau^{-2\rho}}\right)\big(1+o\big(\tau^\delta\big)\big), \tag{B.5}$$

其中

$$\varpi_k(\lambda)=\mathbf{p}_k(\lambda)\chi_k(\lambda),\qquad k=1,2, \tag{B.6}$$

$$\chi_k(\lambda)=g_{1k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\lambda+1/4)}+g_{2k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(\lambda+1/4)}, \tag{B.7}$$

$$\mathbf{p}_k(\lambda)=\mathrm{e}^{-(-1)^k\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\lambda}\left(\frac{\varepsilon b}{2}\right)^\lambda\frac{\Gamma(1-2\lambda)}{\Gamma(1+2\lambda)}\frac{\Gamma\big(1+\lambda-(-1)^k\mathrm{i}a/2\big)}{\lambda}, \tag{B.8}$$

且 $\Gamma(*)$是伽马函数 [13]。

C Appe附录：当 $\tau\to+\infty$时， $u(\tau)$ 和 $\varphi(\tau)$ 对于 $a\in\mathbb{C}$ 的渐近行为

在我们此前的一项工作中（见 [27], 附录 B），我们指出， [26] 中报告的函数 $u(\tau)$在大-τ 渐近行为中的相移存在错误，该错误已在[27]的附录 B 中得到修正。随后， [28] 的作者（见 [28]的第 7 节）发现[26]中还存在另一处不一致；这一问题又“遗传”到了论文 [27]中：该错误不影响函数 $u(\tau)$的渐近行为，但会影响函数 $\varphi(\tau)$的渐近行为，因为其小-τ 和大-τ 渐近行为中都未计入项 $a\ln\tau$。上述论文的结果列表中并未包含函数 $\varphi(\tau)$的后一种渐近行为。尽管如此，我们撰写了论文 [29] ，研究方程 (1.1) 的亚纯解所对应积分的渐近行为，并说明了如何修正函数 $\varphi(\tau)$的渐近行为（若它由 [26], 导出）；同时，还通过数值计算验证了 [29] 中讨论的具体例子。论文 [29] 给出了亚纯解对应的函数$\varphi(\tau)$的渐近行为及其修正项；该修正项虽有陈述，却未加推导，不过已针对文中讨论的具体例子进行了数值检验。在本附录中，我们给出一般解及其修正项的渐近行为，并推导该修正项。

此外，在本工作的数值计算过程中，我们又发现了函数 $u(\tau)$的大-τ 渐近行为中的一个“神秘”印刷错误（见 [26], 第 3 节，第 1174页，定理3.1）：定义 $z(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$中的项$-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$必须改为 $+\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$。由于我们在 [26] 中给出的原始计算实际上包含项 $+\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$ ，因此显然这是一个排印错误。遗憾的是，这个符号错误似乎已经延续到了后续工作[27], 中所得到的渐近行为，因为其中所采用的方法（见 [27], 第 43页顶部的段落）只能确定模 $\pi\mathrm{i}$ 的相移。为了最终确定是否应加上 $\pi\mathrm{i}$，我们将 [26] 中得到的渐近行为与 [27]中的渐近行为进行了匹配。此外，在 [28], 中注意到了这一与 $\pi\mathrm{i}$ 的不一致之处；而且，在第 8.1和 8.2小节中，尽管数值计算所写出并使用的是正确的公式，但第 47页所陈述的关于 $u(\tau)$的渐近行为的一般结果，在方程 (8.7) 中 z 的公式里仍然包含 $\pi\mathrm{i}\,2$ 的错误符号！

在本附录中，我们重述论文 [26] 和 [27] 中得到的主要结果，并纳入上述所有修正。与附录 B 一样，这里我们只给出正实半轴上的渐近行为，并排除所有变换相关的问题，即令 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ ，并简化 [26] 中的定理 3.1以及 [27], 中的定理 2.1–2.3 和 B.1所用的单值化数据和参数的记号，即 $(s_0^0(0,0)\ s_0^\infty(0,0)\ s_1^\infty(0,0)\ g_{11}(0,0)\ g_{12}(0,0)\ g_{21}(0,0)\ g_{22}(0,0)\ \tilde\nu(0,0)\ z(0,0)):=(s_0^0,s_0^\infty,s_1^\infty,g_{11},g_{12},g_{21},g_{22},\tilde\nu,z)$。

注 C.1. 此处及全文中，我们使用诸如根、对数、分数幂以及复指数幂函数等多值函数来构造单值渐近式。我们采用自然的约定：当辐角为正实数时，所有这些函数的值均为正。若某个此类函数在某个公式或一组相关公式中多次出现，则假定它在该公式或该组公式中的分支相同。若未讨论分支的选择，意即其具体选择不影响所得公式的值；例如， $\sinh(\ln(z))$ 中 $\ln(z)$ 的分支，或下文方程 (C.3) 中 $\sqrt{\tilde\nu+1}$ 的分支。此处与文中其他地方一样， $\Gamma(*)$ 是伽马函数 [13]。■

由于与方程(1.1)对应的哈密顿函数并未在本文中研究， [26] 的定理 3.1中所述的其关于大-τ的渐近行为未被纳入下面的定理C.1；相反，它被函数 $\varphi(\tau)$的渐近行为所取代：至此， [26] 中方程组 (12) 的第一个方程的等单值变形的渐近描述就完整了。

定理 C.1. 设 $(u(\tau)\ \varphi(\tau))$ 是方程组 (1.1)、(B.1) 的一个解，其中 $\varepsilon b>0$ 对应于单值化数据 $(a,s_0^0,\ s_0^\infty,\ s_1^\infty,\ g_{11},g_{12},g_{21},\ g_{22})$。定义

$$\tilde\nu+1:=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\ln(g_{11}g_{22}),\tag{C.1}$$

并假设

$$g_{11}g_{12}g_{21}g_{22}\neq0,\qquad |\mathrm{Re}(\tilde\nu+1)|<1/6.\tag{C.2}$$

那么， $\exists\,\delta>0$ 使得

$$u(\tau)\underset{\tau\to+\infty}{=}\frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\tau^{1/3}\left(1+\frac{2\sqrt{\tilde\nu+1}\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}}{3^{1/4}(\varepsilon b)^{1/6}\tau^{1/3}}\cosh\left(\mathrm{i}\theta(\tau)+(\tilde\nu+1)\ln\theta(\tau)+z+o\big(\tau^{-\delta}\big)\right)\right),\tag{C.3}$$

其中

$$\theta(\tau):=3^{3/2}(\varepsilon b)^{1/3}\tau^{2/3},\tag{C.4}$$

$$z := \frac{\ln 2\pi}{2} + \frac{\pi \mathrm{i}}{2} - \frac{3\pi \mathrm{i}}{2}(\tilde{\nu}+1) + \mathrm{i}a\ln(2+\sqrt{3}) + (\tilde{\nu}+1)\ln 12 - \ln\Big(g_{11}g_{12}\sqrt{\tilde{\nu}+1}\,\Gamma(\tilde{\nu}+1)\Big), \tag{C.5}$$

and

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) \underset{\tau\to+\infty}{=} & \ 3(\varepsilon b)^{1/3}\tau^{2/3} + 2a\ln\left(\tau^{2/3}\right) - a\ln\left((\varepsilon b)^{1/3}/4\right) + \pi - 2\pi(\tilde{\nu}+1) \\ & + \mathrm{i}\ln\left(g_{11}^2\right) - 2\mathrm{i}(\tilde{\nu}+1)\ln(2+\sqrt{3}) + \mathrm{E}_\varphi(\tau), \qquad \mathrm{E}_\varphi(\tau) = \mathrm{o}\left(\tau^{-\delta}\right).\end{aligned} \tag{C.6}$$

注 C.2。修正项 $\mathrm{E}_\varphi(\tau)$ 的显式表达式（参见方程 (C.6)）将在下文的命题 C.1 中给出。■

注 C.3. 此处，我们讨论 (C.2) 中的第二个限制。[26] 所采用的方法是，在适当的估计过程中，渐近公式 (C.3) 中的函数 $\cosh(\cdot)$ 被表示为两个指数项的半和：若 $\mathrm{Re}(\tilde{\nu}+1) \neq 0$，则其中一个指数项呈幂次增长，另一个则呈幂次衰减。在推导过程中通向 (C.2) 中第二个限制的相应阶段，每个指数项都应表示渐近行为的一个首项。原则上，如果我们要求只有增长的指数项表示渐近行为的首项，那么得到的条件会较弱，即 $|\mathrm{Re}(\tilde{\nu}+1)| < 1/2$。若按照后一种推导方案，我们就必须考虑关于 $\mathrm{Re}(\tilde{\nu}+1)$ 的三个不同条件，即 $\mathrm{Re}(\tilde{\nu}+1) = 0$ 和 $\pm\mathrm{Re}(\tilde{\nu}+1) \in (0, 1/2)$，并推导出三个单独的渐近公式；而在我们的情形中，这些公式合并为唯一的公式 (C.3)。

这一事实可以从完全不同的角度揭示出来：如果考察下文方程 (C.7) 中给出的完整渐近展开，就可以验证，事实上，当 (C.2) 中的第二个条件成立时，该展开首项中的最小指数项大于第二个修正项中的最大指数项。

在第 6 节给出的数值示例中，可以清楚地观察到 $1/6$：在前两个示例中，$|\mathrm{Re}(\tilde{\nu}+1)| < 1/6$；而在其他示例中，该条件不成立。根据我们的数值研究，单值化数据满足该条件的解会迅速达到其渐近行为，前提是 (C.2) 中第一个条件的乘积里的各因子都不接近零。所谓“不接近零”，是指 $|g_{i,\ j}| \geqslant 0.1$；不过，这一数值方面的具体界定仍需进一步研究。

如果将$\cosh(\cdot)$项理解为一个唯一函数，那么它（作为其增长的指数项）对于更广泛的单值化数据范围而言，扮演着渐近行为首项的角色，即 $|\mathrm{Re}(\tilde{\nu}+1)| < 1/2$。当 $|\mathrm{Re}(\tilde{\nu}+1)|$ 越来越远离值 $1/6$时，相应的解会在越来越大的 τ 值处达到其渐近行为。应用展开(C.7) 的高阶项会有所帮助，但作用并不显著。对于 $|\mathrm{Re}(\tilde{\nu}+1)| \geqslant 1/6$ 的情形，借助下文定理C.2中给出的渐近行为，可以在 τ 的有限值下，使渐近结果与数值结果之间获得好得多的一致性。■

注 C.4. 渐近行为(C.6) 中$\ln\left(g_{11}^2\right)$ 的分支无法确定，因为函数 $\varphi(\tau)$以$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\tau)}$ 的形式进入相应的等单调系统（见 [26], 命题1.1和 1.2）；因此，$\varphi(\tau)$ 的渐近行为的实部定义到模 2π。

另一方面，函数 $u(\tau)$ 具有首项为 $\pm\mathrm{i}b(\tau-\tau_0)$ 的可动零点，而方程 (B.1) 蕴含着 $\varphi(\tau)$ 具有首项为 $\mp\mathrm{i}\ln(\tau-\tau_0)$ 的可动对数奇点。即使在复数域 τ 平面上从原点到无穷远点设置一条分支切割，$\varphi(\tau)$ 的解析延拓仍取决于延拓路径：因此，我们得到 $\varphi(\tau)$ 的无穷多个分支，它们相差 $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$。事实上，渐近行为 (C.3) 不仅在正半轴上成立，也在更大的区域 $\mathcal{D} = \{\tau \in \mathbb{C};\ |\mathrm{Im}\ \tau^{2/3}| < h, h \in \mathbb{R}_+\}$ 中成立：当 $|\tau|$ 较大时，$\mathcal{D}$ 的宽度按 $\mathcal{O}\left(|\tau|^{1/3}\right)$ 增长。在该区域内部，$\varphi(\tau)$ 可能存在一些对数奇点，并且可能有几条非同伦路径绕过这些奇点。对于 τ 的有限值，这些奇点的位置尚不清楚，因此，相应的渐近行为“并未察觉” $\varphi(\tau)$ 所沿的延拓路径；所以，渐近行为的公式中应包含一种歧义，以涵盖 $\varphi(\tau)$ 沿非同伦路径进行的所有可能解析延拓（如果存在的话），这种歧义保留在 $\ln\left(g_{11}^2\right)$ 的虚部选择中。

在数值研究过程中，我们注意到渐近公式 $\varphi(\tau)$中 2π歧义的另一种机制。这一机制与以下事实有关：我们的图像是从有限且相当小的 τ 值开始绘制的。对于 τ的这类取值，渐近行为有时不能像在 τ的极大值下那样良好地近似解 $u(\tau)$；因此，如果在某个区间内，$u(\tau)$接近但不等于零点，其渐近行为可能在该区间内消失，从而在通过其渐近行为近似函数 $\varphi(\tau)$ 时产生 2π-级偏差（参见第 6 节，例 4）。

这一评论突显了这样一个事实：要制定一条一般规则，以消除适用于所有解的 $\varphi(\tau)$ 渐近行为中的 2π 歧义，是一个非平凡的问题；不过，对于某些解类而言，确实有可能制定这样的规则。假设将正半轴视为 $\varphi(\tau)$ 的解析延拓路径：在这条半轴上，存在一类解 $u(\tau)$，其实部严格为正。假设找到了 $\ln\left(g_{11}^2\right)$ 的正确分支，适用于某个

来自这一类的解；然后，由于 $u(\tau)$ 的渐近行为已明确给出，便可确定这一类所有解的正确分支。■

为了得到 $\mathrm{E}\wp(\tau)$ 的显式公式，我们将使用方程 (B.1)：为此，需要函数 $1/u(\tau)$ 的完整渐近展开的前几项。我们所需的渐近展开由 Shimomura [35] 借助一种独特的方法得到，同时还得到了其他 Painlevé 超越函数的渐近展开。这里，我们展示函数 $u(\tau)$ 和 $1/u(\tau)$ 的这一展开前几项的“可视化”，并对它们的系数提出一些猜想：

$$u(\tau) \underset{\tau\to+\infty}{=} \frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\tau^{1/3}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\tau^{k/3}}\sum_{j=-k}^{j=k}a_{k,j}w^j\right), \qquad w := \tau^{\frac{2}{3}(\tilde\nu+1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\tau)}. \tag{C.7}$$

将展开式 (C.7) 与渐近行为 (C.3) 进行比较，我们发现

$$a_{1,0}=0, \qquad a_{1,\pm1}=\frac{\sqrt{\tilde\nu+1}\,\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}}{3^{1/4}(\varepsilon b)^{1/6}}\mathrm{e}^{\pm\left((\tilde\nu+1)\ln\left(3^{3/2}(\varepsilon b)^{1/3}\right)+z\right)}, \qquad a_{1,1}\,a_{1,-1}=-\frac{\mathrm{i}(\tilde\nu+1)}{\sqrt{3}(\varepsilon b)^{1/3}}. \tag{C.8}$$

注 C.5. 将展开 (C.7) 中的有限内层求和视为一个唯一的函数（第 k 个修正项）：在此情形下，我们得到 $u(\tau)$ 关于 $|\mathrm{Re}(\tilde\nu+1)|<1/2$ 的渐近展开。可以对 (C.7) 中的双重级数采用不同类型的求和，从而得到 $u(\tau)$ 的不同渐近公式。■

为了推导首阶修正项 $\mathrm{E}\wp(\tau)$ 的显式公式，必须明确知道系数 $a_{1,\pm1}$, $a_{2,\pm1}$ 和 $a_{3,0}$：系数 $a_{1,\pm1}$ 已在方程 (C.8) 中给出；因此，还需确定 $a_{2,\pm1}$ 和 $a_{3,0}$。已知，为了用低阶系数 $a_{l,j}$（其中 $l<k$）表示 $k\geqslant 2$ 和 $j\neq\pm1$ 对应的系数 $a_{k,j}$，以及 $a_{k-2,\pm1}$，可以将保留至 $\tau^{-k/3}$ 阶的展开 (C.7) 代入方程 (1.1)，并令所得表达式中前 $k-1$ 个高阶系数为零，其中 $\tau\to+\infty$。要得到最后两个“k 阶”的系数，即 $a_{k,\pm1}$，则必须重复类似的步骤，但在展开 (C.7) 中多保留两个阶次的项，即 $\tau^{-(k+1)/3}$ 和 $\tau^{-(k+2)/3}$。例如，要计算系数 $a_{3,0}$，必须在展开 (C.7) 中保留 $\mathcal{O}\big(\tau^{-4/3}\big)$ 项。

引入新变量较为方便：

$$\varkappa=\tilde\nu+1, \qquad \alpha=\tfrac{2\mathrm{i}\sqrt{3}}{15}a.$$

用这些变量表示，$\mathcal{O}\left(\tau^{-2/3}\right)$ 阶和 $\mathcal{O}\left(\tau^{-1}\right)$ 阶的系数为：

$$a_{2,\pm2}=\frac{a_{1,\pm1}^2}{3}, \quad a_{2,\pm1}=0, \quad a_{2,0}=\frac{\alpha+12\varkappa}{6\mathrm{i}\sqrt{3}(\varepsilon b)^{1/3}}, \tag{C.9}$$

$$a_{3,\pm3}=\frac{a_{1,\pm1}^3}{12}, \quad a_{3,\pm2}=a_{3,0}=0, \quad a_{3,\pm1}=\pm\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}\,a_{1,\pm1}}{6^3(\varepsilon b)^{1/3}}\big(3(\alpha^2+8\varkappa\alpha+10\varkappa^2)-3\mp12\alpha\mp80\varkappa\big). \tag{C.10}$$

我们已明确计算出展开式 (C.7) 中直到 $k=10$阶的系数；基于这些计算，我们将在下文提出关于系数$a_{k,j}$的一些猜想。由于随着阶数 k增大，公式会变得愈发繁复，因此我们将在下文列出 $k=4$、5、6阶的系数，以展示我们的假设：这些例子可能有助于证明我们的猜想。

$$\begin{gathered} a_{4,\pm4}=\frac{a_{1,\pm1}^4}{54}, \qquad a_{4,\pm3}=a_{4,\pm1}=a_{4,0}=0, \\ a_{4,\pm2}=\pm\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}\,a_{1,\pm1}^2}{2^23^4(\varepsilon b)^{1/3}}\big(3\alpha^2+24\varkappa\alpha+30\varkappa^2+1\mp12\alpha\mp54\varkappa\big). \end{gathered} \tag{C.11}$$

$$\begin{gathered} a_{5,\pm5}=\frac{5a_{1,\pm1}^5}{1296}, \qquad a_{5,\pm4}=a_{5,\pm2}=a_{5,0}=0, \\ a_{5,\pm3}=\pm\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}\,a_{1,\pm1}^3}{2^53^4(\varepsilon b)^{1/3}}\big(9(\alpha^2+8\varkappa\alpha+10\varkappa^2)+1\mp36\alpha\mp138\varkappa\big), \\ a_{5,\pm1}=-\frac{a_{1,\pm1}}{2^73^5(\varepsilon b)^{2/3}}\left(9(\alpha^2+8\varkappa\alpha+10\varkappa^2)^2\mp(24\alpha^3+48\alpha^2\varkappa-912\alpha\varkappa^2-3440\varkappa^3)\right. \\ \left.-90\alpha^2-1296\varkappa\alpha-4168\varkappa^2\pm(216\alpha+240\varkappa)+81\right). \end{gathered} \tag{C.12}$$

[15]在所有公式中 对于 $\pm$，在等式左边和右边都必须选择上号或下号。

$$
\begin{aligned}
a_{6,\pm6} &= \frac{a_{1,\pm1}^6}{1296}, \qquad a_{6,\pm5} = a_{6,\pm3} = a_{6,\pm1} = 0,\\
a_{6,0} &= -\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2^3 3^6 \varepsilon b}\left(\alpha^3 + 18\alpha^2\varkappa + 72\alpha\varkappa^2 + 60\varkappa^3 - 12\alpha - 90\varkappa\right),\\
a_{6,\pm4} &= \pm\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}\,a_{1,\pm1}^4}{2^3 3^6 (\varepsilon b)^{1/3}}\big(6(\alpha^2 + 8\varkappa\alpha + 10\varkappa^2) - 1 \mp 24\alpha \mp 84\varkappa\big),\\
a_{6,\pm2} &= -\frac{a_{1,\pm1}^2}{2^5 3^6 (\varepsilon b)^{2/3}}\left(9(\alpha^2 + 8\varkappa\alpha + 10\varkappa^2)^2 - 171 \mp (48\alpha^3 + 396\alpha^2\varkappa + 576\alpha\varkappa^2 - 880\varkappa^3)\right.\\
&\qquad \left. -30\alpha^2 - 816\varkappa\alpha - 2770\varkappa^2 \pm (384\alpha + 1408\varkappa)\right).
\end{aligned}
\tag{C.13}
$$

上面计算得到的系数表明如下内容。

猜想 C.1. 如果 $k \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \mathbb{Z}$、$|j| \leqslant k$ 的奇偶性不同，那么 $a_{k,\,j} = 0$，一个 d

$$
a_{k,\pm k} = \frac{k\,a_{1,\pm1}^k}{2^{k-1}3^{k-1}}.
$$

此外，我们计算了第 $k = 7$、8、9 和 10 层的系数，从而得出以下

猜想 C.2. 对于 $k \geqslant 4$,

$$
\begin{aligned}
a_{k,\pm(k-2)} = \pm\,&\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}\,a_{1,\pm1}^{k-2}}{2^k 3^k (\varepsilon b)^{1/3}}\left(3(k-2)^2(\alpha^2 + 8\varkappa\alpha + 10\varkappa^2) - 5(k-2)^2 + 24(k-2) - 24\right.\\
&\left. \mp 12(k-2)^2\alpha \mp 6\big(5(k-2)^2 + 8(k-2)\big)\varkappa\right).
\end{aligned}
\tag{C.14}
$$

注 C.6. 系数 $a_{3,\,\pm1}$ 的形式与 (C.14) 相似，但并不相同。第 2 节研究的函数 $H(r)$ 的泰勒系数也存在类似情况：某些系数序列的前几项不符合该序列的一般公式。证明这些猜想及其他类似公式最快捷的方法是使用生成函数技巧，尤其是第 2 节中介绍的方法。■

使用 $u(\tau)$ 的展开式 (C.7)，我们得到 $1/u(\tau)$ 的类似展开式：

$$
\begin{aligned}
\frac{b}{u(\tau)} \underset{\tau\to+\infty}{=} &\frac{2(\varepsilon b)^{1/3}}{\tau^{1/3}} - \frac{2(\varepsilon b)^{1/3}}{\tau^{2/3}}\left(a_{1,-1}w^{-1} + a_{1,1}w\right) + \frac{1}{\tau}\left(\frac{4}{3}(\varepsilon b)^{1/3}\big(a_{1,-1}^2 w^{-2} + a_{1,1}^2 w^2\big) - \frac{2}{3}a\right)\\
&+ \sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{\tau^{k/3}}\sum_{j=-k+1}^{j=k-1} b_{k,j}w^j, \qquad w = \tau^{\frac{2}{3}(\tilde\nu+1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\tau)},
\end{aligned}
\tag{C.15}
$$

其中，系数 $b_{k,j}$ 与系数 $a_{k,j}$'s 一样，可用 $a_{1,\pm1}$ 来表示。为确定 $\mathrm{E}\varphi(\tau)$ 的渐近行为首项，系数 $b_{4,0}$ 很重要：可借助方程 (C.9) 和 (C.10) 确定它；事实上，我们确定了 $k = 4$ 层级的所有系数：

$$
\begin{aligned}
b_{4,0} = b_{4,\pm2} = 0, \qquad b_{4,\pm3} &= -\frac{5}{6}(\varepsilon b)^{1/3}a_{1,\pm1}^3,\\
b_{4,\pm1} &= \mp\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}\,a_{1,\pm1}}{108}\big(3(\alpha^2 + 8\varkappa\alpha + 10\varkappa^2 - 1) \pm 12\alpha \pm 40\varkappa\big).
\end{aligned}
$$

命题 C.1。

$$
\mathrm{E}_\varphi(\tau) \underset{\tau\to+\infty}{=} \frac{2\sqrt{\tilde\nu+1}\,\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}/4}}{3^{3/4}(\varepsilon b)^{1/6}\tau^{1/3}}\sinh\left(\mathrm{i}\theta(\tau) + (\tilde\nu+1)\ln\theta(\tau) + z\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}\theta(\tau)}}{\tau^{\frac{2}{3}(1-2|\mathrm{Re}(\tilde\nu+1)|)}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau^{2/3}}\right), \tag{C.16}
$$

其中，$\theta(\tau)$ 和 z 在定理 C.1 中定义。

证明。对于 $\tau > 0$，通过 $f(\tau)$ 定义函数

$$
\frac{b}{u(\tau)} = \frac{2(\varepsilon b)^{1/3}}{\tau^{1/3}} - \frac{2(\varepsilon b)^{1/3}}{\tau^{2/3}}\left(a_{1,-1}w^{-1} + a_{1,1}w\right) - \frac{2a}{3\tau} + f(\tau). \tag{C.17}
$$

此定义给出了如下估计，即 $\tau \to +\infty$,

$$
f(\tau) \underset{\tau\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{w^2}{\tau}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{w^{-2}}{\tau}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau^{5/3}}\right), \tag{C.18}
$$

$$\int_{+\infty}^{\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \underset{\tau\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\theta(\tau)}}{\tau^{\frac{2}{3}(1-2|\mathrm{Re}(\tilde{\nu}+1)|)}}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau^{2/3}}\right), \tag{C.19}$$

其中假设积分路径沿正半轴取值，或者更一般地，在注 C.4 中描述的区域 $\mathcal{D}$ 内取值。渐近行为 (C.18) 和 (C.19) 中最右侧的估计与 $b_{5,0}=\big(\alpha^2-3(4\varkappa+\alpha)^2\big)/\big(2^2 3^3(\varepsilon b)^{1/3}\big)$ 成正比。

现在，沿着 $\mathcal{D}$ 中的轮廓将方程 (B.1) 从 τ_0 积分到 τ，并考虑函数 $f(\tau)$ 的定义（参见方程 (C.17)），得到以下方程:

$$\varphi(\tau)-\varphi(\tau_0)=3(\varepsilon b)^{1/3}\big(\tau^{2/3}-\tau_0^{2/3}\big)+\frac{4a}{3}\ln\frac{\tau}{\tau_0}-\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{2(\varepsilon b)^{1/3}}{\tau^{2/3}}\left(a_{1,-1}w^{-1}+a_{1,1}w\right)\mathrm{d}\tau+\int_{\tau_0}^{\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{C.20}$$

将（C.6）中给出的 $\varphi(\tau)$ 的渐近行为代入（C.20），并分离出依赖于 τ 和与 τ 无关的部分，可得

$$\mathrm{E}_{\varphi}(\tau)=-\int_{+\infty}^{\tau}\frac{2(\varepsilon b)^{1/3}}{\tau^{2/3}}\left(a_{1,-1}w^{-1}+a_{1,1}w\right)\mathrm{d}\tau+\int_{+\infty}^{\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{C.21}$$

$$3(\varepsilon b)^{1/3}\tau_0^{2/3}+\frac{4a}{3}\ln\tau_0+M-\varphi(\tau_0)=\int_{\tau_0}^{+\infty}\left(\frac{b}{u(\tau)}-\frac{2(\varepsilon b)^{1/3}}{\tau^{1/3}}+\frac{2a}{3\tau}\right)\mathrm{d}\tau, \tag{C.22}$$

其中，在积分 (C.22) 中，我们将 $f(\tau)$ 替换为其在 (C.17) 中给出的定义，而 M 表示方程 (C.6) 中的单值化常数，即,

$$M=-a\ln\big((\varepsilon b)^{1/3}/4\big)+\pi-2\pi(\tilde{\nu}+1)+\mathrm{i}\ln\big(g_{11}^2\big)-2\mathrm{i}(\tilde{\nu}+1)\ln(2+\sqrt{3}).$$

考虑(复数域.21)中的第一积分：利用方程 (复数域.8)，将被积函数转换回双曲余弦形式,

$$-\int_{+\infty}^{\tau}\frac{2(\varepsilon b)^{1/3}}{\tau^{2/3}}\left(a_{1,-1}w^{-1}+a_{1,1}w\right)\mathrm{d}\tau=\frac{2\sqrt{\tilde{\nu}+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}}{3^{3/4}(\varepsilon b)^{1/6}}\int_{+\infty}^{\tau}\frac{\cosh\tilde{\psi}(\tau)}{\tau^{1/3}\big(1+\mathcal{O}(\tau^{-2/3})\big)}\,\mathrm{d}\tilde{\psi}(\tau), \tag{C.23}$$

其中 $\tilde{\psi}(\tau)=\mathrm{i}\theta(\tau)+(\tilde{\nu}+1)\ln\theta(\tau)+z$。利用关系式 $\mathrm{d}\tilde{\psi}(\tau)=2\mathrm{i}\sqrt{3}(\varepsilon b)^{1/3}\tau^{-1/3}\big(1+\mathcal{O}(\tau^{-2/3})\big)\mathrm{d}\tau$进行分部积分，可得方程 (C.16) 中渐近行为的首项，并带有修正项 $\mathcal{O}\left(\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta(\tau)}_{\tau^{1-\frac{2}{3}|\mathrm{Re}(\tilde{\nu}+1)|}}\right)$。然而，最后一个修正项小于对 (C.21) 中第二个积分的估计（参见 (C.19)）；因此，我们得到 (C.16) 中所述的结果。□

注记 C.7。在命题C.1 的证明中所介绍的过程当然可以扩展，以获得 $\varphi(\tau)$的任意阶修正项。我们将注意力限制在首阶修正项上，因为它在 $\varphi(\tau)$ 的图像中是可见的。

方程 (C.22) 计算在无穷远处正则化的 $1/u(\tau)$ 的积分。借助定理 B.1，可以推导此类积分在 $\tau_0\to 0$ 下的渐近行为。对于 $a=0$，正如第 6 节所研究的，$1/u(\tau)$ 的积分在原点处收敛；当积分上限不固定而是趋近于无穷远点时，我们研究了大-τ 渐近行为。另一种可能性是，对于 $a\neq 0$，如 [29] 中所示，在原点处对积分进行正则化。■

以下定理 C.2 是对 [27] 中定理 2.1 的重新表述，其中包含 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$，并且以函数$\varphi(\tau)$ 的渐近行为取代了哈密顿函数的渐近行为。根据本附录开头的讨论，下面方程 (C.28) 中出现的函数 $\vartheta(\tau)$ 是通过从 [27] 中的方程 (2.5) 减去 π 得到的。

定理 C.2. 设 $(u(\tau)\ \varphi(\tau))$ 是方程组 (1.1)、(B.1) 的一个解，对应于 $\varepsilon b>0$ 的单值化数据 $(a,s_0^0,s_0^\infty,s_1^\infty,g_{11},g_{12},g_{21},g_{22})$。假设

$$g_{11}g_{12}g_{21}g_{22}\neq 0,\qquad |g_{11}g_{22}|\neq -g_{11}g_{22}, \tag{C.24}$$

并定义

$$\tilde{\nu}+1=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\ln(g_{11}g_{22}),\quad \textit{where}\quad \mathrm{Re}(\tilde{\nu}+1)\in(0,1)\setminus\{1/2\}. \tag{C.25}$$

然后，$\exists\ \delta_G>0$ 使得

$$u(\tau)\underset{\tau\to+\infty}{=}\frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\tau^{1/3}\left(1-\frac{3}{2\sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta(\tau)\right)}\right) \tag{C.26}$$

$$\underset{\tau\to+\infty}{=}\frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\,\tau^{1/3}\frac{\sin\bigl(\frac12\vartheta(\tau)-\vartheta_0\bigr)\sin\bigl(\frac12\vartheta(\tau)+\vartheta_0\bigr)}{\sin^2\bigl(\frac12\vartheta(\tau)\bigr)}, \tag{C.27}$$

其中

$$\begin{aligned}\vartheta(\tau)&=\theta(\tau)-\mathrm{i}((\tilde\nu+1)-1/2)\ln\theta(\tau)-\frac{3\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}(\tilde\nu+1)-\mathrm{i}((\tilde\nu+1)-1/2)\ln 12-\frac{\mathrm{i}}{2}\ln 2\pi+a\ln(2+\sqrt3)\\&\quad+\mathrm{i}\ln(g_{11}g_{12}\Gamma(\tilde\nu+1))+\mathcal{O}\bigl(\tau^{-\delta_G}\ln\tau\bigr),\qquad \theta(\tau)=3^{3/2}(\varepsilon b)^{1/3}\tau^{2/3},\end{aligned} \tag{C.28}$$

$$\vartheta_0:=-\frac{\pi}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\ln(2+\sqrt3),\quad \sin\vartheta_0=-(3/2)^{1/2},\quad \cos\vartheta_0=\mathrm{i}/\sqrt2, \tag{C.29}$$

并且 $\exists\,\delta>0$ 满足不等式 $0<\delta<2/3$，使得

$$\begin{aligned}\varphi(\tau)&\underset{\tau\to+\infty}{=}3(\varepsilon b)^{1/3}\tau^{2/3}+2a\ln\bigl(\tau^{2/3}\bigr)-a\ln\bigl((\varepsilon b)^{1/3}/4\bigr)+\pi-2\pi\bigl((\tilde\nu+1)-1/2\bigr)+\mathrm{i}\ln\bigl(g_{11}^2\bigr)\\&\quad-2\mathrm{i}\bigl((\tilde\nu+1)-1/2\bigr)\ln(2+\sqrt3)+\mathcal{E}_\varphi(\tau),\qquad \mathcal{E}_\varphi(\tau)=-\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{\sin(\frac12\vartheta(\tau)+\vartheta_0)}{\sin(\frac12\vartheta(\tau)-\vartheta_0)}\right)+o\bigl(\tau^{-\delta}\bigr).\end{aligned} \tag{C.30}$$

注 C.8. 尽管定理 C.2 与定理 C.1 使用相同的方程来定义 $\tilde\nu+1$（参见 (C.25) 和 (C.1)），但必须强调，这些方程中的 ln(·) 分支在不同的区域内固定。方程 (C.28) 中的函数 $\theta(\tau)$ 由与定理 C.1 相同的公式给出，此处重述是为了方便读者。■

注 C.9. 如注 C.4 所述，函数 $\varphi(\tau)$ 不具有 Painlev´é 性质，并且其定义只确定到加法常数 $2\pi k$，其中 k 是某个整数，它取决于函数 $\varphi(\tau)$ 的解析延拓路径。这种不确定性体现在渐近公式 (C.30) 中出现了项 $\mathrm{i}\ln\bigl(g_{11}^2\bigr)$；此外，还有另一种机制可以印证这种不确定性，即函数 $\mathcal{E}_\varphi(\tau)$。$\mathcal{E}_\varphi(\tau)$ 中的 $2\pi k$ 不确定性反映了在有限区域内用 $\varphi(\tau)$ 的渐近行为近似它的精度！这种情况怎么会发生呢？在定义 $\mathcal{E}_\varphi(\tau)$ 时，我们用 Ln 表示相应对数函数的连续分支：这意味着必须在正半轴某个邻域内选定一点处的对数值，然后考虑将该对数从所选点解析延拓到我们希望知道其值的点的路径。当然，最简单的方法是采用与定义函数 $\varphi(\tau)$ 时相同的路径，但这样一来，额外常数 $2\pi k$ 的出现就取决于 $u(\tau)$ 的零点及其渐近行为的零点各自的位置。由于函数 $u(\tau)$ 及其渐近行为在正半轴上只有有限个零点，而且解析延拓路径是固定的，整数 k 便被唯一确定。我们的渐近行为不仅在 τ 取较大值时，而且在其取有限值时，都能很好地近似 $\varphi(\tau)$（见第 6 节，例 3、4、5 和 6）；因此，我们从 τ 的较小值开始定义 $\mathcal{E}_\varphi(\tau)$ 的连续分支。

请注意，在计算函数 $\mathcal{E}_\varphi(\tau)$ 时，不能使用 Maple 和Mathematica 中的标准命令来计算 ln(·)，因为它们计算的是对数的主值分支，因此，看到的将是一条锯齿状曲线，而不是渐近行为图。我们已在第 6 节的注 6.4 中讨论过与函数 $I(r)$ 有关的这一问题。■

注 C.10. 定理 C.2 中的记号 $\tau\to+\infty$ 与定理 C.1 中的含义相同，即 $\tau\in\mathcal{D}$ 和 $|\tau|\to\infty$（参见注 C.4）。在定理 C.2 中，我们排除了满足条件 $\mathrm{Re}(\tilde\nu+1)=1/2$ 的单值化数据，因为在这种情况下，域 $\mathcal{D}$ 包含在无穷远点处聚积的无穷多个极点和零点。定理 C.2 在这种情况下仍然成立，但适用于下文定义的域 $\mathcal{D}_u$。因此，为方便起见，我们将这一结果单独表述；我们将在下文的定理 C.3 中表述这一结果。

我们的数值研究表明，对于有限的 τ，当 $\mathrm{Re}(\tilde\nu+1)$ 落在区间 $[1/6,1/2)\cup(1/2,5/6]$ 内时，数值解与定理 C.2 中给出的渐近行为吻合良好。当 $\mathrm{Re}(\tilde\nu+1)$ 落在区间 $[0,1/6)\cup(5/6,1)$ 内时，对于有限的 τ，数值解与定理 C.1 中给出的渐近行为吻合得更好。■

现在我们转而讨论 $\mathrm{Re}(\tilde\nu+1)=1/2$ 的情形。在这种情况下，渐近行为的有效范围 $\mathcal{D}$（参见注 C.10）包含函数 $u(\tau)$ 的零点和极点，因此需要采用更为谨慎的表述。下面的定理 C.3 实质上是对 [27] 中定理 2.2 的重述，但其中的 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$，以及 [27] 的方程 (2.14) 中的 $+\pi/2$，均已修正为 $-\pi/2$（见下文 (C.31)）；此外，在 (C.32) 中，两个单值化函数的辐角合并为一个函数的辐角。

定理 C.3. 设 $(u(\tau)\ \varphi(\tau))$ 是方程组 (1.1)、(B.1) 的一个解，对应于单值化数据 $(a,s_0^0,s_0^\infty,s_1^\infty,g_{11},g_{12},g_{21},g_{22})$，其中 $\varepsilon b>0$。假设

$$g_{11}g_{12}g_{21}g_{22}\neq0,\qquad |g_{11}g_{22}|=-g_{11}g_{22}.$$

定义

$$\varrho_1 := \frac{1}{2\pi}\ln(-g_{11}g_{22}) \quad (\in\mathbb{R}),$$

and

$$\varrho_2 := \varrho_1\ln(24\pi) - \frac{3\pi}{2} + a\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{3\pi\mathrm{i}}{2}\varrho_1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\ln(2\pi) + \mathrm{i}\ln\left(g_{11}g_{12}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\varrho_1\right)\right) \tag{C.31}$$

$$= \varrho_1\ln(24\pi) - \frac{3\pi}{2} + a\ln(2+\sqrt{3}) - \arg\left(\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\varrho_1\right)\frac{\sqrt{g_{11}g_{12}}}{\sqrt{g_{21}g_{22}}}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\ln\left|\frac{g_{11}g_{12}}{g_{21}g_{22}}\right|. \tag{C.32}$$

(C.31) 中最右侧的对数是复数，并假定取主值分支。(C.32) 中平方根的分支定义为使得 $\sqrt{g_{11}g_{12}}\,\sqrt{g_{21}g_{22}} > 0$，且 $\arg(\cdot) \in (-\pi,\pi]$ 表示相应复函数辐角的主值。

于是，$\exists\,\delta\in(0,1/39)$，使得函数 $u(\tau)$ 对所有足够大的 $m\in\mathbb{N}$ 都有二阶极点 τ_m^{∞}，这些极点聚集于无穷远点；而函数 $u(\tau)$（分别地，$\varphi(\tau)$）对所有足够大的 $m\in\mathbb{N}$ 都有一对一阶零点（分别地，可动对数分支点）$\tau_m^{\pm}$，这些点聚集于无穷远点，其中

$$\tau_m^{\infty} \underset{m\to\infty}{=} \left(\frac{2\pi m}{3^{3/2}(\varepsilon b)^{1/3}}\right)^{3/2}\left(1-\frac{3\varrho_1}{4\pi}\frac{\ln m}{m}-\frac{3\varrho_2}{4\pi}\frac{1}{m}\right)+\mathcal{O}\left(m^{(1-3\delta)/2}\right), \tag{C.33}$$

and

$$\tau_m^{\pm} \underset{m\to\infty}{=} \left(\frac{2\pi m}{3^{3/2}(\varepsilon b)^{1/3}}\right)^{3/2}\left(1-\frac{3\varrho_1}{4\pi}\frac{\ln m}{m}-\frac{3}{4\pi}(\varrho_2\pm 2\vartheta_0)\frac{1}{m}\right)+\mathcal{O}\left(m^{(1-3\delta)/2}\right), \tag{C.34}$$

其中 ϑ_0 定义于方程 (C.29) 中。

假设定理 C.3 中所述条件成立。分别用 $\hat{}\tau_m^{\infty}$和 $\hat{}\tau_m^{\pm}$表示 $u(\tau)$的极点和零点的渐近行为 (C.33) 和 (C.34) 的首项。

定义多连通区域 $\mathcal{D}_u := \{\tau\in\mathcal{D};\ |\theta(\tau)-\theta(\hat{}\tau_m^{*})|\geqslant C|\hat{}\tau_m^{*}|^{-\delta}\}$, $*\in\{\infty,\pm\}$，其中条带区域 $\mathcal{D}$ 在注 C.4 中定义，$\theta(\tau)$由方程 (C.4) 定义，而 $C>0$ 和 $\delta\in(0,1/39)$ 是参数。在下文的定理 C.4 中，记号 $\tau\to+\infty$ 表示 $\tau\in\mathcal{D}_u$ 和 $|\tau|\to\infty$。

定理 C. **4** 3, $\delta_G>0$ $0<\delta<$. 对于定理 C. 的条件，存在 $\delta_G<\frac{1}{15}-\frac{8\delta}{5}$ $\delta\in(0,1/39)$ 满足不等式 的，其中 (,)，使得

$$u(\tau) \underset{\tau\to+\infty}{=} \frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\tau^{1/3}\left(1-\frac{3}{2\sin^2\left(\frac{1}{2}\Theta(\tau)\right)}\right) \tag{C.35}$$

$$\underset{\tau\to+\infty}{=} \frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\tau^{1/3}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\Theta(\tau)-\vartheta_0\right)\sin\left(\frac{1}{2}\Theta(\tau)+\vartheta_0\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\Theta(\tau)\right)},$$

且 $\exists\,\delta_1>0$满足不等式 $0<\delta_1<1/3$，使得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\tau)} \underset{\tau\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(\tau)}}{g_{11}^2}\frac{\sin(\frac{1}{2}\Theta(\tau)+\vartheta_0)}{\sin(\frac{1}{2}\Theta(\tau)-\vartheta_0)}\left(1+\mathcal{O}\left(\tau^{-2\delta_1+\delta}\right)\right), \tag{C.36}$$

其中

$$\Theta(\tau) = \theta(\tau) + \varrho_1\ln\theta(\tau) - \frac{3\pi}{2} + \varrho_1\ln 12 + a\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{3\pi\mathrm{i}}{2}\varrho_1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\ln(2\pi)$$
$$+\mathrm{i}\ln\left(g_{11}g_{12}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\varrho_1\right)\right)+\mathcal{O}(\tau^{-\delta_G}\ln\tau), \tag{C.37}$$

$$\Phi(\tau) = \frac{\theta(\tau)}{\sqrt{3}} + \frac{4a}{3}\ln\tau - 2\mathrm{i}\pi\varrho_1 + \pi + 2\varrho_1\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - a\ln\left((\varepsilon b)^{1/3}/4\right)+\mathcal{O}\left(\tau^{-\delta_G}\right). \tag{C.38}$$

注 C.11. 函数 $u(\tau)$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\tau)}$ 具有 Painlev´e 性质，因此它们及其渐近行为在 $\mathcal{D}_u$ 中均有唯一确定的定义。关于函数 $\varphi(\tau)$ 的情况则较为复杂，因为它在 $\mathcal{D}_u$ 中有无穷多个零点，因此还需要进一步研究。 ■

D 附录：关于论文 [25]的评论

在本附录中，使用了论文 [25] 中引入的记号；这些记号不同于本文主体部分所采用的记号，后者采用了 [26, 27] 的记号。假定读者手头有论文 [25] ，因为本附录的目的不仅是讨论其中所呈现的结果，也是为了纠正一些排印错误和遗漏；例如，在下文的讨论中，函数 $e^{u(\tau)}$ 与本文所研究的解 $H(r)$ 相同，其中 $r=\tau$。

T论文 [25] 致力于通过以下二阶常微分方程的渐近分析

$$\varepsilon(\tau u'(\tau))' = \mathrm{e}^{u(\tau)} - \mathrm{e}^{-2u(\tau)}, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{D.1}$$

对 3×3 矩阵线性常微分方程进行等单值变形。本文得到的结果是，求出了当 $\tau \to +0$ 时所有解的渐近行为首项；此外，还构造了方程 (D.1) 的“正则”解在 $\tau \to +\infty$ 时的渐近行为。这些渐近行为用相关 3×3 矩阵线性常微分方程的单值化数据来参数化，因此可以求得当 $\tau \to +0$ 和 $\tau \to +\infty$时的渐近连接公式。

在 [25] 中，单值化数据的定义因 $\varepsilon = +1$ 或 $\varepsilon = -1$而异；尽管它们用相同的字母表示，但这不会造成混淆，因为每组出现此类数据的公式都标明了相应的 ε值。这些单值化数据在形式上定义了不同的同胚流形；然而，由于方程 (D.1) 存在明显的对称性约化 $\tau \to -\tau$ 和 $\varepsilon \to -\varepsilon$ ，可以轻易推导出同一解在这些流形上的单值化坐标之间的关系，从而得出相应解在 $\tau \to 0$ 和 $\tau \to \infty$ 时的渐近连接公式。这些流形之间的关系对连接结果很重要，因为有些渐近行为是针对 $\varepsilon = -1$给出的，另一些则是针对 $\varepsilon = +1$给出的。

在 [25], 的英文译本中，我们注意到缺少以下一行：

$$a.\quad \varepsilon = +1. \qquad S_k^0 = S_k^\infty, \quad k = 1,2,3,4,5,6;$$

这一行应直接插入第 2079 页的最后一行之前。在 [25], 的俄文版和英文版中，均使用符号 $\sim$ 表示渐近行为的首项。在公式组 (18) 的第一个方程中，本应使用 $\sim$ ，却错误地使用了符号 $=$ 。

在整个 [25], 中，渐近行为的修正项均未给出：对于通过等单值变形方法获得的所有误差估计，它们都具有标准形式，即，对于 $\tau \to \infty$ 趋于某值时的渐近行为，应将首项乘以 $(1+\mathcal{O}(\tau^{-\delta}))$；而对于 $\tau \to 0$ 趋于某值时的渐近行为，则应乘以 $(1+\mathcal{O}(\tau^{\delta}))$，其中 $\delta > 0$ 是一个足够小的数，其具体取值因不同公式而异。通过其他局部渐近方法，可以得到 δ 的更精确取值，甚至可以得到完整的渐近展开。

ω 在 [25] 中编号为(18)的公式中的表达式应为 $\omega^{\pm 1} = \mathrm{e}^{\mp\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}\mu}$，而不是 $\omega^{\mp 1}$ （原文如此）。

定义函数 $\mathrm{e}^{u(\tau)}$ 在 $\tau \to +0$ 下渐近行为的主要公式，由 [25] 中编号为 (18) 和 (19) 的方程列表给出。这些公式的有效范围通过一条双曲线以几何方式表示，该双曲线将单值化参数 s 的复平面分为两部分（参见 [25] 的英文译本中的图1；俄文版本中的对应图示没有编号）。用辅助参数 μ 表示，渐近行为 (18) 的有效范围可写为 $|\mathrm{Re}\ \mu| < 1$。通常，这类公式对诸如 μ 之类参数的更大取值范围都成立；在这种情况下，范围可能是 $|\mathrm{Re}\,\mu| < 3/2$，即删去负半轴后的复 s平面：这一结论仍有待验证。假设定义 μ 的对数中的平方根在 $s > 0$ 时取正值。不过，平方根分支的选择并不重要：渐近行为 (18) 在对称性 $\mu \to -\mu$ 下保持不变；因此，假设对数取主分支，使得 $\ln(1) = 0$ ，且其变化规律为 $\ln(x) = -\ln(1/x)$，渐近行为 (18) 在平方根分支改变时仍保持不变。

接下来出现的渐近公式对应于双曲线 ($s = 3$) 的极点：它是由渐近行为 (18) 取极限 $\mu \to 0$ 得到的。该公式后面有两行（每行均以 $s = 3$ 开头），描述具有此渐近行为的解的完整单值化数据集。实际上，这些公式是将 $s = 3$ 代入方程 (15) 得到的；如此可得

$$s = 3, \quad g_1 = \frac{1}{2} + g_2 + \sqrt{\frac{1}{4} + 2g_2}, \quad g_3 = \frac{1}{2} + g_2 - \sqrt{\frac{1}{4} + 2g_2}.$$

在上述方程中，平方根可以任选一个分支，因此这些方程定义了两个具有相应对数渐近式的单参数族解。在 [25], 中还给出了一些其他相关的单值化数据公式，但其中存在算术错误。

现在，我们讨论 [25] 中的渐近行为 (19)。这一渐近行为包含参数 ν。与在变换 $\mu \to -\mu$ 下保持不变的方程 (18) 类似，渐近行为 (19) 在

变换 $\nu \to -\nu$ 下保持不变。与参数 μ 相比， ν 的定义公式略有不同：后一个公式包含与 μ 的公式相同的长对数式（带平方根）。假定对数和平方根的分支与方程 (18) 中的分支相同；特别是，$\ln(-1) = \pi\mathrm{i}$。当我们在此定义中改变平方根的分支时，对数的分支也相应选取，使其变化为 $\ln(x) = -\ln(1/x) + 2\pi\mathrm{i}$。这保证参数 ν 变为 $-\nu$，因此渐近行为 (19) 不变。用参数 ν 表示，渐近行为 (19) 的适用条件可表述为 $|\operatorname{Re}\nu| < 1$。与方程 (18) 的情形类似，渐近行为 (19) 很可能在参数 ν 的更大范围内成立，即 $|\operatorname{Re}\nu| < 3$；然而，当 $|\operatorname{Re}\nu| < 1$ 时，通过渐近行为 (19) 对解的近似效果更好：对于较大的 $|\operatorname{Re}\nu|$ 值，渐近行为 (18) 的效果更好。注意，用参数 ν 表示时，可写为 $\omega^{\pm 1} = -\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi\mathrm{i}\nu}{3}}$。[25] 中给出的公式取决于平方根的分支，因此精度较低。

现在，我们借助 [25] 的结果，说明如何指定本文研究的解。首先，我们必须利用 $\tau \to +0$ 时的渐近行为来指定单值化数据。为此，可以使用公式 (18)、(19) 或 (20) 中的任意一个；不妨从公式 (18) 开始。显然，要使 $\mathrm{e}^{u(0)}$ i 获得有限的非零值，唯一的办法是选择 $\mu = 1$ （当然，也可以选择 $\mu = -1$）。将 $\mu = 1$ 代入关于 μ 的方程，可得 $(s-1)/2 = \cos(2\pi/3)$，即 $s = 0$。参数$2\pi\mathrm{i}\omega = \mathrm{e}^{-\frac{}{3}}$；因此，利用 (18) 中给出的公式，我们得到

$$r_1 = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}} g_1 + \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}} g_2 + g_3, \qquad \frac{c_2}{c_0} = \frac{1}{2}. \tag{D.2}$$

将 (18) 中渐近公式的两边除以 τ ，并取极限 $\tau \to 0$，得到 $\mathrm{e}^{u(0)} = H(0) = r_1$。结合定义单值化数据的方程 (15)，我们得到三个方程，它们完全确定了以 $H(0)$ 表示的单值化数据：

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}}{3H(0)} \left(H(0) - \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\right)(H(0)-1), \quad g_2 = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}}{3H(0)} \left(H(0) - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\right)(H(0)-1), \\ g_3 &= \frac{1}{3H(0)} \left(H(0) - \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\right)\left(H(0) - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(H(0) + 1 + \frac{1}{H(0)}\right), \quad s = 0. \end{aligned} \tag{D.3}$$

在考虑 $\tau \to \infty$ 时的渐近行为之前，我们先检查如何通过渐近行为 (19) 得到相同的结果。由于 (18) 和 (19) 中长对数的分支相同，我们得到 $\nu = \mu = 1$，在这种情况下

$$r = g_3 - \mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}} g_1 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{3}} g_2, \qquad \frac{c_-}{c_+} = -1. \tag{D.4}$$

将(19)的两边乘以 $\tau^{1/2}$ 并取 $\tau \to +0$极限，可得到 $\mathrm{e}^{u(0)} = H(0) = r$。由于根据方程(D.2)和(D.4)，$r = r_1$，渐近行为(19)为给定的 $H(0)$ 初值提供了相同的单值化数据。现在，我们将注意力转向方程 (20)。我们感兴趣的情形对应于 $\varphi = 0$；于是，参数 $p = 1$，方程(20)写为

$$H(\tau) = \mathrm{e}^{u(\tau)} \underset{\tau\to 0}{\sim} r\left(1 + (r - 1/r^2)\tau\right),$$

其中 $r = H(0)$，如上文所确立（参见方程 (1.3)）。

现在，我们可以考察 $\tau \to \infty$ 时的渐近行为了。对于 $\varepsilon = +1$，只有一个指数衰减至 1 的常规渐近式。该渐近式正比于 s。由于 $s = 0$，可知此渐近式对应于精确解 $H(\tau) = 1$。与此解对应的其他单值化参数为 $g_1 = g_2 = 0$ 和 $g_3 = 1$。将它们与 (D.3) 比较后，我们发现，实际上 $H(0) = 1$。

其他渐近结果，如 $\tau \to +\infty$，涉及方程 (D.1) 在 $\varepsilon = -1$ 情形下的情况。若 $u(\tau)$ 是方程 (D.1) 在 $\varepsilon = +1$ 情形下的一个解，则 $u(-\tau)$ 是 $\varepsilon = -1$ 情形下的一个解。容易推导出方程 (D.1) 在 $\varepsilon = \pm 1$ 情形下对应的单值化流形之间的映射，从而在已知解 $u(\tau)$ 在 $\tau \to +0$ 时的渐近行为的情况下，得到 $\tau \to -\infty$ 时的常规渐近式；前提是 $u(\tau)$ 在负半轴上具有这样的常规渐近式。注意，方程 (D.1) 的一般解不是单值的，因此，与解 $u(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}\tau)$ 和 $u(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}\tau)$ 对应的单值化流形之间的映射并不相同。我们的情形 $s = 0$ 尤为简单，因为相应的解是单值的， $u(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}\tau) = u(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}\tau)$，而对应的单值化流形之间的映射恰为恒等变换。因此，对于 $\varepsilon = -1$ 情形，我们可以直接使用 $\tau \to +\infty$ 时的渐近结果，只需在其中将 $\tau \to -\tau$ 改为 $\tau \to -\infty$，并假定这些公式中的单值化参数与 (D.3) 中的一致： [25] 中的公式没有编号，而是列在英文译本第 2080 页底部和第 2081 页顶部（俄文版本第 49 页底部和第 50 页开头）。对于 $H(0) = 1$ 情形，第一个

第 2080 页（俄文版本第 49 页）底部的渐近公式适用，给出 $H(\tau) = 1$，但此时是在负半轴上。在更一般的情况下，我们必须使用第 2080 页底部的第二个渐近公式（该公式延续至下一页顶部）；在我们的情形（$s = 0$）下，它写作：

$$\mathrm{e}^{u(\tau)} - 1 \underset{\tau\to-\infty}{=} -\frac{a\sqrt{6}}{(-3\tau)^{1/4}} \cos\left(2\sqrt{-3\tau} + a^2 \ln\sqrt{-3\tau} + \varphi - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\tau^{-\delta}\right)\right), \tag{D.5}$$

其中

$$a = \sqrt{\frac{|\ln g_3|}{2\pi}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2} \arg\ln g_3\right).$$

and

$$\varphi = a^2 \ln 24 - \frac{\mathrm{i}}{2} \ln\left|\frac{\Gamma(-\mathrm{i}a^2)}{\Gamma(\mathrm{i}a^2)} \frac{g_2}{g_1}\right| + \frac{1}{2} \arg\frac{\Gamma(-\mathrm{i}a^2)}{\Gamma(\mathrm{i}a^2)} + \frac{1}{2} \arg\frac{g_2}{g_1}.$$

请注意，在论文 [25], 中， a 的公式在 $\exp\left(\frac{1}{2}\arg\ln g_3\right)$ 处有一处明显的印刷错误，即因子 $1\,2$ 必须改为 $\mathrm{i}\,2$。

该解具有由 (D.5) 给出的常规渐近式，条件是 $g_1 \neq 0$、$g_2 \neq 0$ 和 $|\text{辐角}\, g_3| < \pi/2$。注意，如果 $g_1 g_2 \neq 0$，那么 $g_3 \neq 0$。辐角，$\arg\ln g_3$，通过 ln 的主值分支在标准范围（$-\pi$、π] 内计算。

此后，我们将讨论范围限定在 $H(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 的情形。相应解的定性行为在 [4] 的命题 5.3.2 中进行了研究。简言之，当 $H(0) > 0$ 时，解 $H(r)$ 在负半轴上为正且有界。在正半轴上，这些解单调趋近于一个极点。对于 $H(0) < 0$，每个解都从负半轴上的某个极点单调递增至正半轴上的一个零点。

如果 $H(0) < 0$，那么 (D.3)中关于 g_3 的方程推出 $g_3 \leqslant -1/3$，从而$\arg g_3 = \pi$，渐近行为 (D.5)不适用。对于 $H(0) > 0$，可以证明 $g_3 > 1$，从而 $\arg g_3 = 0$，渐近行为(D.5)适用。在这种情况下，$a > 0$ 和 $\overline{g_2} = g_1 \Rightarrow |g_2| = |g_1|$。这使得我们可以简化关于 a 和 φ 的方程：

$$a = \sqrt{\frac{\ln g_3}{2\pi}}, \qquad \varphi = a^2 \ln 24 + \arg\Gamma(-\mathrm{i}a^2) + \arg g_2. \tag{D.6}$$

下面，我们给出数值解的图像，以及通过方程(D.5)和(D.6) 计算得到的其大-τ 渐近行为的图像。在下面的图中，与正文中一样，采用记号 $\tau = r$ （这与 [25] 中使用的变量 r 无关，也不应将二者混淆）。观察这些图，可以注意到数值行为与渐近行为之间具有良好的定性对应关系。这种对应关系从 τ的非常小的值开始。在 $H(0) > 0$ 非常大的情况下，解“非常迅速地”下降到实轴，但不会穿过实轴：对于如此大的 $H(0)$值，渐近行为的第一个极小值肯定出现在实轴下方，因为大-τ 渐近行为在分母中包含因子 $\tau^{1/4}$。不过，即使对于 $r \ll 1$ 以及非常大的 $H(0)$，渐近行为仍继续遵循解的行为；例如，对于 $H(0) = 15$，记为 $H_{as}(r)$的渐近行为的第一个极小值出现在 $r = r_m = -0.8181\ldots$，且 $H_{as}(r_m) = -0.6219\ldots$，而解的第一个极小值为 $H(-0.887801\ldots) = 0.439959\ldots$。对于 $H(0) = 100$，渐近行为的极小值为 $H_{as}(-0.393734\ldots) = -0.72913780\ldots$，而解的第一个极小值为 $H(-0.4622134\ldots) = 0.289185\ldots$。可以注意到，对于 $H(0)$ 的两个取值，近似的精度处于同一数量级：对于较大的 r值，大-τ 渐近行为对解的近似更加精确，这正如预期的那样。$H(0)$越接近1，渐近公式(D.5) 的数值效果越好，即，它在数值上对解的近似越精确，且适用于 τ 的较小值。这些结论见图 42–44。

备注 D.1。在本附录中，我们使用了 [25] 中定义的流形。如上文所述，[25] 中引入了两个等价的单值化流形。对于 $s = 0$ 的情形，这种等价性通过恒等映射得到确立，因为这些流形的单值化数据用相同的字母表示，即 g_1、g_2 和 g_3，而本附录中也采用了这些记号。另一方面，在第 4 节中，我们使用了 [26] 中定义的单值化流形。由于这两个单值化流形描述了 $a = 0$ 时方程 (1.6) 的同一组解，因此它们应当是等价的。不过，严格来说，第 4 节中考察的流形多包含一个参数，该参数还可以求出附录 B 和 C 中所考察的函数 $\varphi(\tau)$ 的渐近行为（另见第 6 节中的积分 $I(r)$）；然而，第 4 节中的流形的二次压缩仅枚举满足 $a = 0$ 的方程 (1.6) 的解，因此，这一压缩应当等价于本附录中所采用的流形。

在一般情形下，我们不考虑上述流形之间的映射；不过，对于情形 $s = 0$，我们给出了流形之间的显式映射，该映射可由比较本附录与引理 4.1 的结果得到：

$$s = \tilde{s} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad s_0^0 = i, \quad s_0^\infty s_1^\infty = -1,$$

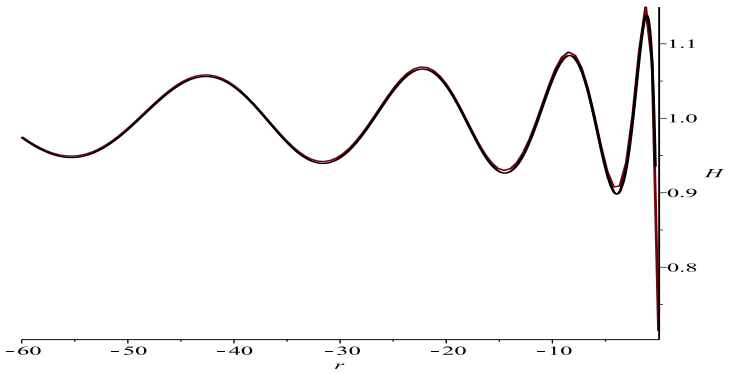

图 42：红色和黑色图像分别是方程 (D.1) 的数值解和大-r 渐近解（$e^{u(\tau)}=H(r),\ \tau=r$），对应于初始数据 $e^{u(0)}=H(0)=5/7$。

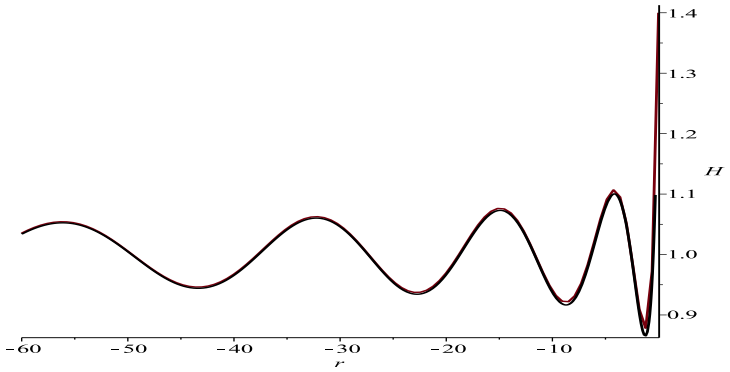

图 43：红色和黑色图像分别是方程 (D.1) 对应于初始数据 $e^{u(0)}=H(0)=7/5$ 的数值解和大-r 渐近解 ($e^{u(\tau)}=H(r),\ \tau=r$)。

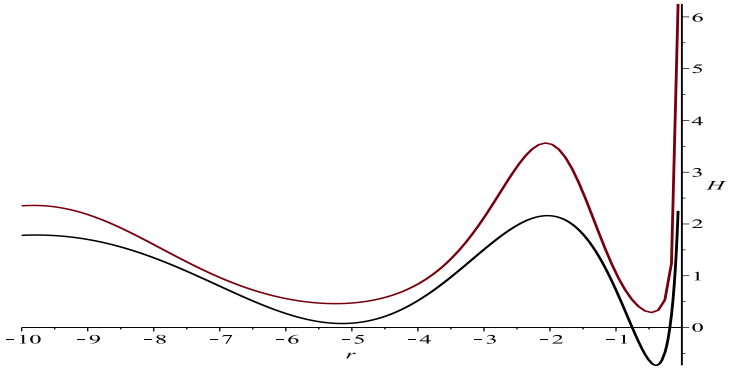

图 44：红色和黑色图像分别表示方程 (D.1) 对应初始数据 $e^{u(0)}=H(0)=100$ 的数值解和大-r 渐近解（$e^{u(\tau)}=H(r),\ \tau=r$）。

$$g_1 = \tilde{g}_1, \quad g_2 = -\tilde{g}_2, \quad g_3 = \tilde{g}_3,$$

这在 $s = \tilde{s} = 0$ 时与变换 (4.10) 一致。 ■

致谢

作者感谢 R. Conte就Painlevé性质开展的讨论。A. V.非常感谢斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分所（POMI）在 2019 年夏季提供的热情接待，本项工作即始于当时。

参考文献

[1] Adamson G. W.，《在线整数数列百科全书》中的数列 A124647（2006），电子版发表于 https://oeis.org/[2] Andreev F. V., Kitaev A. V.，虚轴上第五 Painlevé 超越函数渐近行为的连接公式：I，Stud. Appl. Math. 145（2020），第 3 期，397–482.[3] Bilman D., Ling L., Miller P. D.，《极端叠加：无限阶怪波与 Painlevé-III 层级》，Duke Math. J. 169（2020），第 4 期，671–760.[4] Bobenko A. I., Eitner U.，《曲面微分几何中的 Painlevé 方程》，数学讲义，1753，Springer-Verlag，柏林，2000.[5] Bottomley H.，《在线整数数列百科全书》中的数列 A053735（2000），电子版发表于 https://oeis.org/[6] Bruce J., Wall C. T. C.，《关于三次曲面的分类》，J. London Math. Soc. (2) 19（1979），245–256.[7] Buckingham R. J., Miller P. D.，《关于 Painlevé-III (D_7) 方程的代数解》，Phys. D 441（2022），论文编号 133493，共 22 页。[8] Contatto F., Dorigoni D.，《阿贝尔 sinh-Gordon 方程与 Tzitzeica 涡旋的瞬子解》，J. Geom. Phys. 98（2015），429–445.[9] Contatto F.，《可积阿贝尔类涡旋孤子》，Physics Letters B 768（2017），23–29.[10] Conte R.，《非线性常微分方程的 Painlevé 方法》，《Painlevé 性质：百年回顾》，77–180，CRM 数学物理丛书，Springer，纽约，1999.[11] Dunajski M., Plansangkate P.，《Strominger-Yau-Zaslow 几何、仿射球面与 Painlevé III》，Comm. Math. Phys. 290（2009），997–1024.[12] Dunajski M.，《由 sinh-Gordon 方程与 Tzitzeica 方程导出的阿贝尔涡旋》，Phys. Lett. B 710（2012），236–239.[13] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G.，《高等超越函数》第 1 卷，McGraw-Hill Book Company, Inc.，纽约—多伦多—伦敦（1953）（部分依据 Harry Bateman 遗留的笔记编写）。[14] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G.，《高等超越函数》第 2 卷，McGraw-Hill Book Company, Inc.，纽约—多伦多—伦敦（1953）（部分依据 Harry Bateman 遗留的笔记编写）。[15] Faddeev D. K.; Sominskij I. S.，《高等代数习题集》。（俄文）[《高等代数习题集》] 3版，Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit.，莫斯科—列宁格勒，1952，共 308 页。[16] Gamayun O., Iorgov N., Lisovyy O.，《瞬子组合学如何求解 Painlevé VI、V 和 III 方程》，J. Phys. A 46:33（2013），335203，共 29 页。[17] Gromak V. I.，《第三 Painlevé 方程的代数解》，Dokl. Akad. Nauk BSSR 23（1979），第 6 期，499–502（俄文）。[18] Guest M. A., Its A. R., Lin C.-S.，《Cecotti 和 Vafa 的 tt* 方程的等单值变形方面 I：Stokes 数据》，Int. Math. Res. Not. IMRN 2015，第 22 期，11745–11784。

[19] Guest M. A., Its A. R., Lin C.-S., 《Cecotti 和 Vafa 的 tt* 方程的等单值变形方面 II：黎曼–希尔伯特问题》, Comm. Math. Phys. 336（2015）, 第 1 期, 337–380.[20] Guest M. A., Its A. R., Lin C.-S., 《Cecotti 和 Vafa 的 tt* 方程的等单值变形方面 III：岩泽分解与渐近行为》, Comm. Math. Phys. 374（2020）, 第 2 期, 923–973.[21]Guest M. A., Its A. R., Lin C.-S., 《 A_n 型 tt*-Toda 方程》, arXiv 预印本 arXiv:2302.04597（2023）。[22] Hildebrand R., 《自伴三维锥》, Beitr. Algebra Geom. 63（2022）, 第 4 期, 867–906.[23] Ince E. L., 《常微分方程》, Dover Publications, 纽约, 1944.[24] Kimberling C., 《在线整数数列百科全书》中的数列 A057552（2000）, 电子版发表于 https://oeis.org/[25] Kitaev A.V., 《退化第三 Painlevé 方程的等单值变形方法》。（俄文）; Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 161（1987）, 45–53; 英文译本 J. Soviet Math. 46（1989）, 第 5 期, 2077–2083.[26] Kitaev A. V., Vartanian A. H., 《退化第三 Painlevé 方程解的渐近行为连接公式：I》, Inverse Problems 20（2004）, 1165–1206.[27] Kitaev A. V., Vartanian A., 《退化第三 Painlevé 方程解的渐近行为连接公式：II》, Inverse Problems 26（2010）, 105010, 共 58 页。[28] Kitaev A. V., 《在原点消失的退化第三 Painlevé 方程亚纯解》, SIGMA 15（2019）, 046, 共 53 页。[29] Kitaev A. V., Vartanian A., 《与退化第三 Painlevé 方程相关的若干函数的积分渐近行为》, J. Math. Sci. (N.Y.) 242（2019）, 715–721.[30] Legendre A. M., 《数论》, 巴黎：Firmin Didot Frères, 1830.[31] Lehmer D. H., 《关于三角代数数的注记》, Amer. Math. Monthly 40（1933）, 第 3 期, 165–166.[32] Ohyama Y., Kawamuko H., Sakai H., Okamoto K., 《Painlevé 方程研究。V. 特殊类型的第三 Painlevé 方程 $P_{\mathrm{III}}(D_7)$ 和 $P_{\mathrm{III}}(D_8)$》, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 13（2006）, 145–204.[33] Prasolov V. V., 《多项式》, 算法与计算数学丛书第 11 卷, Springer-Verlag, 柏林, 2004.[34] Sakamaki Y., 《无参数正规奇异三次曲面上的自同构群》, Trans. Amer. Math. Soc. 362（2010）, 第 5 期, 2641–2666.[35] Shimomura S., 《Painlevé 超越函数在无穷远点附近的级数展开》, Funkcial. Ekvac. 58（2015）, 第 2 期, 277–319.[36] Shimomura S., 《退化第三 Painlevé 超越函数的 Boutroux 试探解》, arXiv 预印本 arXiv:2207.11495（2022）。[37]Sloane N. J. A., Plouffe S., Alford A., Tixier M., 《在线整数数列百科全书》中的数列 A008615、A008679、A165190、A033182（2009）, 电子版发表于 https://oeis.org/[38] Steinmetz N., 《Nevanlinna 理论、正规族与代数微分方程》, Universitext, Springer, Cham, 2017.[39] Suleimanov B.I., 《小色散对空间一维情形下自聚焦的影响》, JETP Letters 106（2017）, 第 6 期, 400–405.[40] Tracy C. A., Widom H., 《圆柱形 Poisson-Boltzmann 方程的精确解及其在聚电解质中的应用》, Phys. A 244.1-4（1997）, 402–413.[41] Tracy C. A., Widom H., 《一类圆柱形 Toda 方程解的渐近行为》, Comm. Math. Phys. 190.3（1998）, 697–721。

[42] Vartanian A.，《退化 Painlevé III 方程解的转级数渐近行为：案例研究》，预印本 arXiv:2010.11235（2020）。[43] Watkins W.、Zeitlin J.，cos(2π/n) 的最小多项式，《美国数学月刊》**100**（1993），第 5 期，471–474。