arXiv:2304.05702v1 [math.DG] 12 Apr 2023

# 具有边界条件的全纯圆盘 Bishop 族的抛物型演化

BRENDAN GUILFOYLE 和 WILHELM KLINGEN BERG

Abstract. 证明了，在欧几里得三维空间的有向直线空间中，定号的图形型旋转对称直线全等在相对于中性 K¨ahler 度量的平均曲率流作用下演化，并满足适当的狄利克雷和诺伊曼边界条件时，将收敛到一个极大曲面。当所施加的诺伊曼条件要求流动圆盘在边界处为全纯时，证明该流将收敛到一个全纯圆盘。

这一结果推广到一族圆盘的流动情形：这族圆盘的边界位于一个固定的旋转对称直线全等上，并且可以证明该流将收敛到由极大曲面构成的填充。此外，如果要求这族圆盘在边界处为全纯，则可以证明该流将收敛到 Maslov 指数为 2 的孤立复点的全纯圆盘 Bishop 填充。

## 1. Motivation and Results

本文的研究动机有两个来源。首先，是著名的 Bishop族全纯圆盘，它们在复曲面中的实曲面上的一个孤立复点附近构成一个填充 [3] [7] [8] [20] [22]。其次，本文旨在说明，在几何设定和边界条件恰当的情况下，二阶抛物型偏微分方程如何收敛到一阶方程的解。因此，本文是作者在证明托波诺戈夫和嘉泰奥多里猜想时所发展出的解析技巧的一个简化版本´。 [10] [12] 。

具体而言，考虑赋有其典范中性凯勒结构（$\mathbb{G}$， $\mathbb{J}$， $\omega$） [14]的 $\mathbb{R}^3$ 中有向直线空间 $\mathbb{L}$ 。经典上称为直线全等的一族二参数有向直线 [15], 在 $\mathbb{L}$中构成一个曲面 $\Sigma$； 当且仅当这些直线与 $\mathbb{R}^3$中的某个曲面 $S$ 正交时，该曲面相对于辛形式 $\omega$ 是拉格朗日的。如果曲面 $\Sigma$ 是辛曲面，则称这些直线具有扭转性，且在 $\mathbb{R}^3$中不存在与之正交的曲面。

本文研究了 $\mathbb{L}$ 中纯扭转、旋转对称的直线全等在中性度量 $\mathbb{G}$下由其平均曲率向量驱动的演化。抛物型偏微分方程的旋转对称约化已被证明有助于深入了解此类流的一般行为，其中包括平均曲率流 [1] [2] [5], 逆平均曲率流 [16], 线性曲率流 [9], 全非线性流 [19] 以及里奇流 [4]。关于另一种旨在寻找由全纯圆盘所成叶状结构的演化，请参见 [18]。

*Date*: 2023年4月13日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 35K51, 32V40。*Key words and phrases.* 平均曲率流，以全纯圆盘填充。

为使该流具有抛物性，我们考虑一个诱导度量定号的初始曲面，并证明这一性质在所有时刻都得以保持。对称性假设将问题约化为二维空间中的一条曲线，并在边界上施加一个狄利克雷条件和一个诺伊曼条件。我们证明，该演化可约化为以下关于一个实函数 $\psi$ 的问题，其定义在一个空间维度和一个时间维度上。

初边值问题

设 $\theta_0 \in (0, \pi/2)$，$C_0 \in (0, \infty)$，$C_1 \in \mathbb{R}$ 和 $\psi_0 \colon [0, \theta_0] \to [0, \infty)$ 使得

$$c_2 \leq \frac{\psi_0'}{\sin(2\theta)} \leq c_3 \qquad for \;\; 0 \leq \theta \leq \theta_0.$$

考虑函数 $\psi \colon [0, \theta_0] \times [0, \infty) \to [0, \infty) : (\theta, t) \mapsto \psi(\theta, t)$，满足

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\sqrt{\psi}}{\psi'}\psi'' - \sqrt{\psi}\cot(2\theta) \qquad for \;\; 0 < \theta < \theta_0,$$

其初始条件和边界条件为：

(i) $\psi(t = 0) = \psi_0$ 对 $\theta \in [0, \theta_0]$, (ii) $\psi(\theta = \theta_0) = C_0$ 对 $t \geq 0$, (iii) $\psi'(\theta = \theta_0) = 2C_0 \cot(2\theta_0) + C_1$ 对 $t \geq 0$,

其中撇号表示对 $\theta$ 求导。

我们的主要结果是：

定理1. 存在 $\theta_0$、$C_0$ 和 $\psi_0$，使得解 初边值问题 在 $t \to \infty$ 时收敛到 $\mathbb{L}$ 中的极大圆盘。

此外，如果在诺伊曼条件 (iii) 中有 $C_1 = 0$，那么流会收敛到 $\mathbb{L}$ 中的一个全纯圆盘。

与Bishop族全纯圆盘的联系源于允许 $(\theta_0, C_0) = \tilde{}(\theta_0, \psi_0(\theta_0))$ 在直线全等 $\Sigma \subset \mathbb{L}$上变化。特别地，固定一个由 $\psi(\vartheta)$ 给出的纯˜扭转旋转对称直线全等，适用于 $\vartheta \in (0, \vartheta_0]$，并令 $\psi_0(\vartheta, \theta)$为一个初始的不相交纯扭转旋转对称˜直线全等族，其边界位于 $\Sigma$上。由旋转对称性，原点$0 \in \Sigma$ 是曲面的一个复点，假设该点是孤立的。

考虑一族实函数 $\psi_\vartheta(\theta, t)$，对于 $\theta \in [0, \vartheta]$ 和 $\vartheta \in (0, \vartheta_0]$ 满足与初边值问题 *相同演化的初边值问题，并满足边界条件：

(i)* $\psi_\vartheta(t = 0) = \psi_0(\vartheta)$ 对于 $\theta \in [0, \vartheta]$,˜(ii)* $\psi_\vartheta(\theta = \vartheta) = \psi(\vartheta)$ 对于 $t \geq 0$, (iii)* $\psi_\vartheta'(\theta = \vartheta) = 2\psi_\vartheta(\theta = \vartheta)\cot(2\vartheta) + C_1$ 对于 $t \geq 0$.

定理2。在初边值问题*下，初始的 $\psi_0$ 圆盘族收敛到一个˜极大圆盘族，其边界位于 $\Sigma$上。此外，如果在诺伊曼条件(iii)*中有 $C_1 = 0$，那么该族收敛到与复点 $0 \in \Sigma$ 相关的 $\mathbb{L}$ 中的Bishop族˜全纯圆盘。

下一截面给出了几何设置的完整细节。截面3 表述了纯扭转旋转对称线的平均曲率流

与边界条件的相容性见 $\mathbb{L}$ 作为 初边值问题 上述问题。定理 1 和 2 中流的收敛性证明见第 4节。

## 2. Geometric Background

欧几里得 $\mathbb{R}^3$ 中有向（仿射）直线的空间 $\mathbb{L}$ 可与二维球面切丛的总空间 $TS^2$ 相识别。投影 $\pi:\ \mathbb{L}=TS^2\to S^2$ 将一条有向直线映射到其方向。这个光滑四维流形带有一个典范的中性 K¨ahler 结构（$\mathbb{G},\mathbb{J},\omega$），该结构在欧几里得运动群 [14] 诱导于 $\mathbb{L}$ 上的作用下保持不变。其中，中性度量 $\mathbb{G}$ 是一个度量符号为（2, 2）的伪黎曼度量。

如果我们在 $S^2$上选取标准全纯坐标 $\xi$，则可在纤维中补充全纯坐标 $\eta$，从而在 $\mathbb{L}$ 上得到局部坐标（$\xi,\eta$）；相对于典范复结构 $\mathbb{J}$，这些坐标是全纯的。

为了将其与 $\mathbb{R}^3$ 中的欧几里得坐标（$x^1,x^2,x^3$）明确联系起来，我们可以使用如下关系。由（$\xi,\eta$）确定的有向直线为 [15]

$$x^1+ix^2=\frac{2(\eta-\bar\eta\xi^2)+2\xi(1+\xi\bar\xi)r}{(1+\xi\bar\xi)^2},\qquad x^3=\frac{-2(\eta\bar\xi+\bar\eta\xi)+(1-\xi^2\bar\xi^2)r}{(1+\xi\bar\xi)^2}, \tag{1}$$

其中，$r$ 是沿该直线的单位参数化，$r=0$ 是该直线上距离原点最近的点。

在这些坐标下，中性度量的形式为 [14]

$$\mathbb{G}=4(1+\xi\bar\xi)^{-2}\mathbb{I}\mathrm{m}\left(d\bar\eta d\xi+\frac{2\bar\xi\eta}{1+\xi\bar\xi}d\xi d\bar\xi\right). \tag{2}$$

相关的辛结构 $\omega$ 可以通过复结构与度量的复合得到

$$\omega=4(1+\xi\bar\xi)^{-2}\mathbb{R}\mathrm{e}\left(d\eta\wedge d\bar\xi-\frac{2\bar\xi\eta}{1+\xi\bar\xi}d\xi\wedge d\bar\xi\right).$$

设 $\Sigma$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的直线全等族，我们将其视为 $\mathbb{L}$ 中的一个曲面。若该曲面是典范丛 $\pi:\mathbb{L}\to S^2$ 的一个截面的图像，则称其为图形型。因此，图形直线全等族可由复函数 $\bar{}(\xi,\eta=F(\xi,\xi))$ 描述。若直线全等族 $\Sigma$ 满足 $\omega_\Sigma=0$，则称其为拉格朗日。如前所述，当且仅当存在 $\mathbb{R}^3$ 中的一个曲面与该全等族的直线正交时，直线全等族才是拉格朗日的。

$\bar{}$定义3。对于截面 $\eta=F(\xi,\xi)$，引入$F$的加权复斜率：

$$\sigma=-\frac{\partial\bar F}{\partial\xi}\qquad\qquad \rho=\varepsilon+i\lambda=(1+\xi\bar\xi)^2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{F}{(1+\xi\bar\xi)^{-2}}\right).$$

函数 $\lambda$ 和 $\sigma$ 称为 $\mathbb{R}^3$中底层有向直线族的扭转和剪切。图形直线全等族是拉格朗日的，当且仅当 $\lambda=0$；是全纯的，当且仅当 $\sigma=0$。

拉格朗日直线全等构成了 $\mathbb{R}^3$ 中曲面的定向法线，而扭转直线合同则是 $\mathbb{R}^3$ 中由直线 [21] 组成的叶状分解。

注意以下两个由这些定义得出的恒等式：

$$-(1+\xi\bar{\xi})^2\partial\left[\frac{\bar{\sigma}}{(1+\xi\bar{\xi})^2}\right]=\bar{\partial}\rho+\frac{2F}{(1+\xi\bar{\xi})^2},$$

$$\mathbb{I}\mathrm{m}\;\partial\left\{(1+\xi\bar{\xi})^2\partial\left[\frac{\bar{\sigma}}{(1+\xi\bar{\xi})^2}\right]\right\}=\partial\bar{\partial}\lambda+\frac{2\lambda}{(1+\xi\bar{\xi})^2}. \tag{3}$$

注意，为简便起见，我们记 $\partial$ 表示对 $\xi$ 求导。

对于诱导度量，我们有：

命题 4. 由 K ¨ahler 度量¯在截面图像上诱导的度量，在坐标 $(\xi,\xi)$ 下表示为；

$$g=\frac{2}{(1+\xi\bar{\xi})^2}\begin{bmatrix}i\sigma & -\lambda\\ -\lambda & -i\bar{\sigma}\end{bmatrix},$$

其逆为

$$g^{-1}=\frac{(1+\xi\bar{\xi})^2}{2(\lambda^2-\sigma\bar{\sigma})}\begin{bmatrix}i\bar{\sigma} & -\lambda\\ -\lambda & -i\sigma\end{bmatrix}.$$

证明。这是将中性度量（2）沿局部截面拉回_$\eta=F$（$\xi$，$\xi$）。□

定义 5. 若诱导度量在 $\Sigma$ 上是正定或负定的，则曲面 $\Sigma\subset\mathbb{L}$ 是定号的。对于图形，这意味着 $\lambda^2-|\sigma|^2>0$；此外，若 $\lambda>0$，则诱导度量是负定的；而若 $\lambda<0$，则它是正定的。

命题 6. 拉格朗日曲面上的诱导度量是洛伦兹度量，但在复点处退化。全纯曲面上的诱导度量是定号的，但在复点处退化。

证明. 根据前一个命题可知，诱导度量的行列式为 $2(1+\xi\bar{\xi})^{-4}(\lambda^2-\sigma\bar{\sigma})$，结论随即成立。□

设 $\Sigma\to\mathbb{L}$ 是一个浸入曲面，并假设诱导度量在 $\Sigma$ 上是定号的，因此对于 $\gamma\in\Sigma$，我们有正交分解 $T_\gamma\mathbb{L}=T_\gamma\Sigma\oplus N_\gamma\Sigma$。下文中我们省略下标 $\gamma$。

¯命题 7. 若 $\Sigma$ 是由图形 $\xi\to(\xi,\eta=F(\xi,\xi))$ 给出的定号曲面，则以下向量场构成沿 $\Sigma$ 的 $T\mathbb{L}$ 的一组标准正交基：

$$E_{(1)}=2\mathbb{R}e\left[\alpha_1\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\partial F\frac{\partial}{\partial\eta}+\partial\bar{F}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)\right],$$

$$E_{(2)}=2\mathbb{R}e\left[\alpha_2\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\partial F\frac{\partial}{\partial\eta}+\partial\bar{F}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)\right],$$

$$E_{(3)}=2\mathbb{R}e\left[\alpha_2\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+(\bar{\partial}\bar{F}-2(F\partial u-\bar{F}\bar{\partial}u))\frac{\partial}{\partial\eta}-\partial\bar{F}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)\right],$$

$$E_{(4)}=2\mathbb{R}e\left[\alpha_1\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+(\bar{\partial}\bar{F}-2(F\partial u-\bar{F}\bar{\partial}u))\frac{\partial}{\partial\eta}-\partial\bar{F}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)\right],$$

*for*

$$\alpha_1 = \frac{e^{-u-\frac{1}{2}\phi i+\frac{1}{4}\pi i}}{\sqrt{2}[-\lambda-|\sigma|]^{\frac{1}{2}}} \qquad \alpha_2 = \frac{e^{-u-\frac{1}{2}\phi i-\frac{1}{4}\pi i}}{\sqrt{2}[-\lambda+|\sigma|]^{\frac{1}{2}}},$$

其中 $\bar{\partial}F = -|\sigma|e^{-i\varphi}$ 且我们引入了 $e^{2u} = 4(1+\xi\bar{\xi})^{-2}$。注意，当$|\sigma| = 0$时， $\varphi$ 只是标架的规范自由度。

此外， $\{E_{(1)}, E_{(2)}\}$张成 $T\Sigma$，且 $\{E_{(3)}, E_{(4)}\}$张成 $N\Sigma$。

使用与上述相同的记号:

命题 8. 1-形式的对偶基为:

$$\theta^{(1)} = \mathbb{I}m\left[(\alpha_1\partial\bar{F} + \bar{\alpha}_1(\bar{\partial}\bar{F} - 2(F\partial u - \bar{F}\bar{\partial}u)))d\xi - \bar{\alpha}_1 d\eta\right]e^{2u},$$

$$\theta^{(2)} = \mathbb{I}m\left[(\alpha_2\partial\bar{F} + \bar{\alpha}_2(\bar{\partial}\bar{F} - 2(F\partial u - \bar{F}\bar{\partial}u)))d\xi - \bar{\alpha}_2 d\eta\right]e^{2u},$$

$$\theta^{(3)} = \mathbb{I}m\left[(\alpha_2\partial\bar{F} - \bar{\alpha}_2\partial F)d\xi + \bar{\alpha}_2 d\eta\right]e^{2u},$$

$$\theta^{(4)} = \mathbb{I}m\left[(\alpha_1\partial\bar{F} - \bar{\alpha}_1\partial F)d\xi + \bar{\alpha}_1 d\eta\right]e^{2u}.$$

现在考虑与 $\mathbb{G}$ 相关的 Levi-Civita 联络 $\overline{\nabla}$，对于 $X$， $Y \in T\Sigma$，我们有正交分解

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla^{\parallel}_X Y + A(X,Y),$$

其中 $A$： $T\Sigma \times T\Sigma \to N\Sigma$是浸入曲面的第二基本形式Σ。

命题 9。第二基本形式为:

$$A(e_{(a)}, e_{(b)}) = 2\mathbb{R}e\left[\beta_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + (\bar{\partial}\bar{F} - 2(F\partial u - \bar{F}\bar{\partial}u))\frac{\partial}{\partial\eta} - \partial\bar{F}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)\right],$$

对于 $a, b = 1, 2$， 其中

$$\beta_{11} = \left[i\lambda\partial|\sigma| - \sigma\bar{\partial}|\sigma| + i\lambda\partial\lambda - \sigma\bar{\partial}\lambda + |\sigma|(|\sigma| + \lambda)(\partial\varphi - ie^{i\varphi}\bar{\partial}\varphi + 2i\partial u - 2e^{i\varphi}\bar{\partial}u)\right]$$

$$\Big/\left[2e^{2u+i\varphi}(|\sigma| + \lambda)^2(-|\sigma| + \lambda)\right],$$

$$\beta_{22} = \left[-i\lambda\partial|\sigma| + \sigma\bar{\partial}|\sigma| + i\lambda\partial\lambda - \sigma\bar{\partial}\lambda + |\sigma|(|\sigma| - \lambda)(\partial\varphi + ie^{i\varphi}\bar{\partial}\varphi + 2i\partial u + 2e^{i\varphi}\bar{\partial}u)\right]$$

$$\Big/\left[2e^{2u+i\varphi}(|\sigma| - \lambda)^2(-|\sigma| - \lambda)\right],$$

$$\beta_{12} = \left(-|\sigma|\partial|\sigma| + i\lambda e^{i\varphi}\bar{\partial}|\sigma| + \lambda\partial\lambda - i\sigma\bar{\partial}\lambda\right)$$

$$\Big/\left[2e^{2u+i\varphi}(|\sigma|^2 - \lambda^2)\sqrt{|\Delta|}\right],$$

其中我们定义 $\Delta = \lambda^2 - |\sigma|^2$。

证明。考虑平行投影算子 ${}^{\parallel}P$： $T\mathbb{L} \to T\Sigma$和垂直投影算子 ${}^{\perp}P$： $T\mathbb{L} \to N\Sigma$。相对于适配标架，它们可表示为

$${}^{\parallel}P^k_j = \delta^k_j - E^k_{(3)}\theta^{(3)}_j - E^k_{(4)}\theta^{(4)}_j \qquad {}^{\perp}P^k_j = \delta^k_j - E^k_{(1)}\theta^{(1)}_j - E^k_{(2)}\theta^{(2)}_j.$$

平行投影算子的坐标表示如下：

$$
\begin{aligned}
{}^{\parallel}P^{\xi}_{\bar{\eta}} &= -\tfrac{1}{2\Delta}\bar{\sigma} & {}^{\parallel}P^{\xi}_{\bar{\xi}} &= -\tfrac{1}{2\Delta}(\bar{\partial}\bar{F}+\lambda i)\bar{\sigma},\\
{}^{\parallel}P^{\xi}_{\eta} &= -\tfrac{1}{2\Delta}\lambda i & {}^{\parallel}P^{\xi}_{\xi} &= \tfrac{1}{2\Delta}[(\partial F-2\lambda i)\lambda i-|\sigma|^2],\\
{}^{\parallel}P^{\eta}_{\bar{\eta}} &= \tfrac{1}{2\Delta}\bar{\sigma}(\partial F-\lambda i) & {}^{\parallel}P^{\eta}_{\bar{\xi}} &= \tfrac{1}{2\Delta}[-\bar{\sigma}[\partial F\bar{\partial}\bar{F}-|\sigma|^2-\lambda i(\bar{\partial}\bar{F}-\partial F)]+2\lambda^2],\\
{}^{\parallel}P^{\eta}_{\eta} &= -\tfrac{1}{2\Delta}[\lambda i\partial F+|\sigma|^2] & {}^{\parallel}P^{\eta}_{\xi} &= \tfrac{1}{2\Delta}\lambda i[(\partial F-2\lambda i)\partial F-|\sigma|^2],
\end{aligned}
$$

而垂直投影算子为

$$
{}^{\perp}P^{\xi}_{\xi} = {}^{\parallel}P^{\eta}_{\eta} \qquad {}^{\perp}P^{\xi}_{\bar{\xi}} = -{}^{\parallel}P^{\xi}_{\bar{\xi}} \qquad {}^{\perp}P^{\xi}_{\eta} = -{}^{\parallel}P^{\xi}_{\eta} \qquad {}^{\perp}P^{\xi}_{\bar{\eta}} = -{}^{\parallel}P^{\xi}_{\bar{\eta}},
$$

$$
{}^{\perp}P^{\eta}_{\xi} = -{}^{\parallel}P^{\eta}_{\xi} \qquad {}^{\perp}P^{\eta}_{\bar{\xi}} = -{}^{\parallel}P^{\eta}_{\bar{\xi}} \qquad {}^{\perp}P^{\eta}_{\eta} = {}^{\parallel}P^{\xi}_{\xi} \qquad {}^{\perp}P^{\eta}_{\bar{\eta}} = -{}^{\parallel}P^{\eta}_{\bar{\eta}}.
$$

相对于一个满足 $\{E_{(1)}, E_{(2)}\}$ 张成 $\Sigma$ 的切空间的标架，第二基本形式为

$$
A_{(ab)}{}^{j} = {}^{\perp}P^{j}_{k}\, E^{l}_{(a)}\overline{\nabla}_{l}\, E^{k}_{(b)}.
$$

通过直接计算这些量并运用命题7和 8，即可得出结果。

□

命题 10. 曲面 $\Sigma$ 的平均曲率向量为：

$$
H = 2\mathbb{R}e\left[\gamma\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+(\bar{\partial}\bar{F}-2(F\partial u-\bar{F}\bar{\partial}u))\frac{\partial}{\partial\eta}-\partial\bar{F}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)\right],
$$

其中

$$
\gamma = \left[-\lambda(-i\lambda\partial|\sigma|+\sigma\bar{\partial}|\sigma|)-|\sigma|(i\lambda\partial\lambda-\sigma\bar{\partial}\lambda)-|\sigma|(|\sigma|^2-\lambda^2)(\partial\varphi+2i\partial u)\right] \Big/\left[e^{2u+i\varphi}(|\sigma|^2-\lambda^2)^2\right].
$$

证明。曲面 $\Sigma$ 的平均曲率向量是第二基本形式的迹，即

$$
H^{j} = A_{(11)}{}^{j} + A_{(22)}{}^{j}.
$$

借助前面的命题进行计算，即可得出该结果。 □

注 11。我们也可以写出平均曲率向量分量（关于该公式的变分推导，参见 [13] ）

$$
H^{\xi} = \frac{2e^{-2u}}{\sqrt{|\lambda^2-|\sigma|^2|}}\left[ie^{-2u}\partial\left(\frac{\bar{\sigma}e^{2u}}{\sqrt{|\lambda^2-|\sigma|^2|}}\right)-\bar{\partial}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda^2-|\sigma|^2|}}\right)\right]. \tag{4}
$$

推论 12。全纯图是极大的：其平均曲率为零。

证明。将 $\sigma = 0$ 代入方程（4）即可得出。 □

$\mathbb{L}$ 上的中性度量在欧几里得等距变换作用于 $\mathbb{R}^3$ [14]时在直线上诱导的作用下保持不变。因此，绕直线旋转诱导出中性度量的等距变换；特别地，绕 $x^3$–轴旋转在全纯坐标中表示为$(\xi,\eta) \mapsto (\xi e^{i\alpha}, \eta e^{i\alpha})$。

定义 13. 如果某个图形直线全等族由映射 $(\theta,\phi) \mapsto (\xi = \tan(\theta/2)e^{i\phi}, \eta = G(\theta)e^{i\phi})$ 给出，其中 $G$ 是某个复函数，则称该图形直线全等族是旋转对称的。如果 $G$ 是纯虚数，则称该旋转对称直线全等族是纯扭转的。

命题14。对于具有如上所述定义的复函数 $G$ 的图形型旋转对称直线全等，

$$\lambda = \frac{i\cos(\theta/2)}{4\sin(\theta/2)}\left[\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)(\bar{G}' - G') + (4\sin^2(\theta/2) - 1)(G - \bar{G})\right]$$

$$\sigma = -\frac{\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)}\left[\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)\bar{G}' - \bar{G}\right]e^{-2i\phi}.$$

此外，如果直线全等是纯扭转的，那么 $G + G = 0$ 便有

$$\lambda = \tfrac{1}{2\sqrt{\psi}}(\psi' + 2\cot\theta\ \psi) \qquad \sigma = \tfrac{i}{2\sqrt{\psi}}(\psi' - 2\cot\theta\ \psi)e^{-2i\phi}, \tag{5}$$

其中我们引入了由 $\psi$ 定义的正函数。

$$\eta = F = Ge^{i\phi} = \frac{i\sqrt{\psi(\theta)}}{\cos^2(\theta/2)}e^{i\phi}.$$

证明。前两个方程由定义3 中对扭转和剪切的表达式，以及从全纯坐标到极坐标的变换（$\xi$，$\xi$）$\mapsto$（$\theta$，$\phi$）可得，其中

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \cos^2(\theta/2)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)e^{-i\phi}, \tag{6}$$

而后面两个则由代入纯扭转条件得到。 □

命题 15. 对于纯扭转的旋转对称直线全等，实函数 $\psi$ above 等于有向直线到原点距离的平方的四分之一。

证明。 这是由以下事实得出的：有向直线 $d$ 到原点的垂直距离，其全纯坐标为 $(\xi,\eta)$，为（见公式 (1)，其中 $r = 0$）

$$x_0^1 + ix_0^2 = -\frac{2(\eta - \bar{\eta}\xi^2)}{(1+\xi\bar{\xi})^2}, \qquad x_0^3 = -\frac{2(\eta\bar{\xi} + \bar{\eta}\xi)}{(1+\xi\bar{\xi})^2},$$

因此，到原点的垂直距离的平方为

$$\chi^2 = (x_0^1)^2 + (x_0^2)^2 + (x_0^3)^2 = \frac{4\eta\bar{\eta}}{(1+\xi\bar{\xi})^2} = 4\psi.$$

□

注意， $\lambda^2 - |\sigma|^2 = 2$ 余切 $\theta\psi'$，因此根据命题 4 的证明，当 $\psi' > 0$ 时，纯扭转合同族是（负）定号的。

命题 16. 唯一的非奇异纯扭转旋转对称极大图具有

$$\psi = a + b\cos(2\theta),$$

对于 $a$、 $b \in \mathbb{R}$。唯一的纯扭转旋转对称全纯图形是具有 $a = -b$ 的那些。

证明。根据 [13], 的定理3，唯一的旋转对称极大图是

$$\eta = \left( A_1 R + B_1 R^{-1}(1+R^2)^2 \pm i\sqrt{A_2 R^2 + B_2(1+R^2)^2 - B_1^2 R^{-2}(1+R^2)^4} \right) e^{i\phi},$$

其中 $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ 和 $R = \tan(\theta/2)$。要成为纯扭转，我们必须有$A_1 = 0$ 和 $B_1 = 0$。然后将坐标从 $R$ 变换到 $\theta$ ，即可得到所述结果。□

## 3. The Parabolic Evolution

现在我们研究初边值问题，即带有边界条件的无参数化平均曲率流。特别地，我们考虑一族定性截面 $f_t : D \to \mathbb{L}$ ，使得

$$\frac{\partial f}{\partial t}^{\perp} = H,$$

其中 $H$ 是 $f_t(D)$的平均曲率向量，而 $\perp$ 是相对于 $\mathbb{G}$垂直于 $f_t(D)$的投影。

考虑流动曲面为 $\mathbb{L} \to S^2$的一个截面图像时的演化。在这种情况下，使用底空间对曲面进行参数化最为方便。也就是说¯，我们考虑由 $\xi \mapsto (\xi, \eta = F_t(\xi, \xi))$给出的流动曲面。

我们计算复函数 $F_t$ 的流的显式表达式。

命题17. 对于 $\mathbb{L}$ 中的一个定性图，平均曲率流为

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} =& g^{jk}\partial_j\partial_k F + \frac{i\bar{\sigma}}{\Delta}\left((\sigma\xi - \bar{\rho}\bar{\xi})(1+\xi\bar{\xi}) + \bar{F} - \bar{\xi}^2 F\right) \\ =& \frac{(1+\xi\bar{\xi})^2}{2(\lambda^2 - \sigma\bar{\sigma})}\left(-2\bar{\sigma}\partial\lambda - i\bar{\sigma}\bar{\partial}\sigma + 2\lambda\partial\bar{\sigma} + i\sigma\bar{\partial}\bar{\sigma} + \frac{4i\bar{\sigma}(\sigma\xi + \lambda i\bar{\xi})}{1+\xi\bar{\xi}}\right).\end{aligned}$$

¯ ¯证明。考虑一个定性曲面 $f\colon \Sigma\times[0,t_0) \to \mathbb{L}$，使得 $f_t(\xi,\xi) = (\xi, F_t(\xi,\xi))$。那么

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}.$$

投影到 $\Sigma$ 的法向

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}^{\perp} =& ({}^{\perp}P^{\xi}_{\eta}\dot{F} + {}^{\perp}P^{\xi}_{\bar{\eta}}\dot{\bar{F}})\frac{\partial}{\partial \xi} + ({}^{\perp}P^{\eta}_{\eta}\dot{F} + {}^{\perp}P^{\eta}_{\bar{\eta}}\dot{\bar{F}})\frac{\partial}{\partial \eta} \\ &+ ({}^{\perp}P^{\bar{\xi}}_{\bar{\eta}}\dot{\bar{F}} + {}^{\perp}P^{\bar{\xi}}_{\eta}\dot{F})\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} + ({}^{\perp}P^{\bar{\eta}}_{\bar{\eta}}\dot{\bar{F}} + {}^{\perp}P^{\bar{\eta}}_{\eta}\dot{F})\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}},\end{aligned}$$

因此平均曲率流为

$${}^{\perp}P^{\xi}_{\eta}\dot{F} + {}^{\perp}P^{\xi}_{\bar{\eta}}\dot{\bar{F}} = H^{\xi},$$

或者根据命题证明中给出的投影算子表达式9

$$\frac{\lambda i}{2\Delta}\dot{F} - \frac{\bar{\sigma}}{2\Delta}\dot{\bar{F}} = H^{\xi}.$$

将此式与其复共轭相结合，得到

$$\dot{F} = -2\lambda i H^{\xi} + 2\bar{\sigma}H^{\bar{\xi}}. \tag{7}$$

利用4式中的平均曲率表达式，可得

$$H^{\xi} = \frac{(1+\xi\bar{\xi})^2}{4\Delta^2}\Big[2\left(i\partial\bar{\sigma} - \bar{\partial}\lambda - \frac{2i\bar{\xi}\bar{\sigma}}{1+\xi\bar{\xi}}\right)\Delta \\ - 2i\lambda\bar{\sigma}\partial\lambda + i\sigma\bar{\sigma}\partial\bar{\sigma} + i\bar{\sigma}^2\partial\sigma + 2\lambda^2\bar{\partial}\lambda - \lambda\sigma\bar{\partial}\bar{\sigma} - \lambda\bar{\sigma}\bar{\partial}\sigma\Big],$$

并且，命题中所述的第二个等式可通过将其代入方程（7）得到。

要看出命题中的第一个等式成立，计算

$$\begin{aligned} g^{jk}\partial_j\partial_k F &= \frac{(1+\xi\bar{\xi})^2}{2\Delta}\left(i\bar{\sigma}\partial^2 F - 2\lambda\partial\bar{\partial}F - i\sigma\bar{\partial}^2 F\right) \\ &= \frac{(1+\xi\bar{\xi})^2}{2\Delta}\left[i\bar{\sigma}\partial\left(\theta + i\lambda + \frac{2\bar{\xi}F}{1+\xi\bar{\xi}}\right) + 2\lambda\partial\bar{\sigma} + i\sigma\bar{\partial}\bar{\sigma}\right] \\ &= \frac{(1+\xi\bar{\xi})^2}{2\Delta}\Big[-2\bar{\sigma}\partial\lambda - i\bar{\sigma}\bar{\partial}\sigma + i\sigma\bar{\partial}\bar{\sigma} + 2\lambda\partial\bar{\sigma} \\ &\qquad + i\bar{\sigma}\left(\frac{2(\sigma\xi+\rho\bar{\xi})}{1+\xi\bar{\xi}} - \frac{2(\bar{F}-\bar{\xi}^2F)}{(1+\xi\bar{\xi})^2}\right)\Big], \end{aligned}$$

其中我们使用了恒等式（3）的更方便形式

$$\partial\theta = i\partial\lambda - (1+\xi\bar{\xi})^2\partial\left(\frac{\bar{\sigma}}{(1+\xi\bar{\xi})^2}\right) - \frac{2F}{(1+\xi\bar{\xi})^2}.$$

Thus

$$\begin{aligned} &g^{jk}\partial_j\partial_k F + \frac{i\bar{\sigma}}{\Delta}\left((\sigma\xi - \bar{\rho}\bar{\xi})(1+\xi\bar{\xi}) + \bar{F} - \bar{\xi}^2 F\right) \\ &\quad = \frac{(1+\xi\bar{\xi})^2}{2(\lambda^2-\sigma\bar{\sigma})}\left(-2\bar{\sigma}\partial\lambda - i\bar{\sigma}\bar{\partial}\sigma + i\sigma\bar{\partial}\bar{\sigma} + 2\lambda\partial\bar{\sigma} + \frac{4i\bar{\sigma}(\sigma\xi + \lambda i\bar{\xi})}{1+\xi\bar{\xi}}\right), \end{aligned}$$

正如所声称的那样。□

现在我们将上述方程化简为本文所讨论的情形。

命题 18。对于纯扭转旋转对称图的平均曲率流可归结为实函数 $\psi(\theta)$ 所满足的以下单个方程:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\sqrt{\psi}}{\psi'}\psi'' - \sqrt{\psi}\cot(2\theta),$$

其中撇号表示相对于 $\theta$ 的微分。

证明。这可由方程（5）中给出的扭转和剪切表达式，以及方程（6）中导数的表达式推得，即命题17。

特别要注意，流保持纯扭转条件，因此平均曲率流由一个系统约化为单个方程。□

我们考虑的边界条件是狄利克雷条件 (ii) $\psi(\theta_0) = C_0$，其中某个 $\theta_0 \in (0, \pi/2)$，$C_0 \in \mathbb{R}$ 以及诺伊曼条件 (iii)，即

$$\psi'(\theta_0) = 2C_0\cot(2\theta_0) + C_1,$$

对于某个 $C_1 \in \mathbb{R}$。注意，根据第二个方程（5），如果 $C_1 = 0$ 圆盘在 $\theta = \theta_0$ 处是全纯的。

## 4. Proofs of the Main Theorems

命题19. 在平均曲率流下， $\mathbb{L}$ 中的一个定号纯扭转旋转对称图满足以下先验 $'$ 估计

$$0 < C_4(\psi_0) \leq \psi \leq C_5(\psi_0)$$
$$0 < C_2(\psi_0) \leq \frac{\psi'}{\sin(2\theta)} \leq C_3(\psi_0).$$

证明。这是因为在量$\psi' \sin(2\theta)$ 的内部转折点处，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi'}{\sin(2\theta)}\right) = \frac{\sqrt{\psi}}{\psi'}\left(\frac{\psi'}{\sin(2\theta)}\right)'',$$

因此，根据极大值原理，第二个估计对内部转折点成立。

根据狄利克雷条件和诺伊曼条件，这些估计在边界处也成立。 □

当诺伊曼条件是在边界上全纯时，即在条件(iii) 和 (iii)* 中的 $C_1 = 0$ in, 流动的图渐近地全纯。

命题20. 在带有全纯边界条件$C_1 = 0$的平均曲率流下， $\mathbb{L}$ 中的定号纯扭转旋转对称图，其剪切满足

$$|\sigma| \leq \frac{C_6(\theta_0, \psi_0)}{t} \qquad for \;\; t > 0.$$

证明。根据以下事实：在 $|\sigma| = (\sqrt{\psi})' - \cot\theta\sqrt{\psi}$ 的内部转折点处，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}|\sigma| = \frac{\sqrt{\psi}}{\psi'}|\sigma|'' - \frac{|\sigma|^2}{2\psi} + \frac{a_3(\psi')^3 + a_2(\psi')^2\psi + a_1(\psi')\psi^2 + a_0\psi^3}{2\sin^4\theta\cos^2\theta\psi(\psi')^2},$$

其中

$$a_3 = -\cos^3\theta\sin^3\theta \qquad a_2 = \sin^2\theta(2\sin^4\theta - 1),$$

and

$$a_1 = 8\cos^3\theta\sin\theta \qquad a_0 = -\cos^2\theta.$$

这意味着对于较小的 $\theta_0$ 和 $\psi'$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\sigma| \leq \frac{\sqrt{\psi}}{\psi'}|\sigma|'' - \frac{|\sigma|^2}{2\psi}.$$

因此，若边界是全纯的，由极大值原理和 ODE 比较可得该估计成立（例如参见 [6]）。 □

命题21. 在平均曲率流下， $\mathbb{L}$ 中的定号纯扭转旋转对称图满足以下先验 $'$ 估计。

$$C_6(\psi_0, \theta_0) \leq \frac{\psi''}{\sin(2\theta)(\psi')^{2/3}} \leq C_3(\psi_0, \theta_0).$$

证明。对于该量的一个内部转折点。

$$B = \frac{\psi''}{\sin(2\theta)(\psi')^{2/3}},$$

我们有

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\sqrt{\psi}}{\psi'} B'' + a(\psi'')^2 + b\psi'' + c, \tag{8}$$

其中

$$a = \frac{-28\cos(2\theta)\psi - \sin(2\theta)\psi'}{6\sin^2(2\theta)\sqrt{\psi}(\psi')^{8/3}} \leq 0$$

$$b = \frac{-3\sin(2\theta)(\psi')^2 + 20\cos(2\theta)\psi\psi' - (80 + 32\cot^2(2\theta))\sin(2\theta)\psi^2}{12\sin^2(2\theta)\sqrt{\psi}\psi(\psi')^{8/3}}$$

$$c = \frac{\cot(2\theta)(\psi')^2 + 8(1+\cot^2(2\theta))\psi\psi' - 32\cot(2\theta)(1+\cot^2(2\theta))\psi^2}{2\sin(2\theta)\sqrt{\psi}\psi(\psi')^{2/3}}.$$

现在计算表明，

$$\lim_{\theta\to 0} \sin^6\theta(b^2 - 4ac) = -\frac{41\psi}{9(\psi')^{10/3}} \leq 0.$$

因此，对于足够小的 $\theta_0$ 和 $\psi_0$，二次项 $\psi''$ 在方程（8）中为非正，且估计由内部的极大值原理得出。

对于边界，对狄利克雷条件关于时间求导，从而得出

$$\psi''(\theta_0) = \cot(2\theta_0)\psi'(\theta_0)$$

这给出了二阶导数的界。 □

定理**1**的证明：

由命题19 以及 $\theta_0 < \pi/2$，只要解 初边值问题 的解 $\psi(\cdot, t)$ 存在且光滑，演化就严格抛物，譬如在 $t \in [0, T)$ 上。再次利用命题 19中的界，Nash-Moser正则性给出一致的$C^{1,\alpha}$ 界，该界在开最大时间区间上成立。这使得解可以延拓至 $t = T$ 在 $C^{1,\alpha}$。由命题 21可得光滑性，从而可以重复上述论证，得到在 $[0, T = \infty)$ 上的光滑解。

最后，由命题 20，当 $C_1 = 0$ 时，我们得到一个全纯极限。 □

具体而言，该流收敛到纯扭转合同族 $\psi = a + b\cos(2\theta)$，它可以用初始条件和边界条件写成：

$$a = \frac{-C_1\cos(2\theta_0) + 2\cot(\theta_0)\psi_0}{2\cot(\theta_0)(1-\cos(2\theta_0))} \qquad b = \frac{C_1 - 2\cot(\theta_0)\psi_0}{2\cot(\theta_0)(1-\cos(2\theta_0))}.$$

定理 **2**的证明：

˜固定一个纯扭转旋转对称图形直线全等族 $\Sigma$，其在 $0 \in \Sigma$处有一个孤立复点˜。现在选取一个初始族，其中包含一系列互不相交的纯扭转旋转对称图形直线全等族，其边界位于 ˜ ˜Σ上，并以它们与 Σ相交时的角度 $\theta$ 为参数。

接下来，对每个叶片分别进行证明，方法与定理 1 的证明相同。由抛物型极大值原理可知，它们始终互不相交，而流收敛到由极大曲面构成的叶状分解。对于全纯边界条件 $C_1 = 0$，该叶状分解由全纯圆盘构成，即˜孤立复点 $0 \in \Sigma$的Bishop族。□

## References


[1] S. Altschuler、S.B. Angenent 和 Y. Giga, *Mean curvature flow through singularities for surfaces of rotation* **5 3** 1995 293 358, J. Geom. Anal. . ( ) – . [2] M. Athanassenas, *Volume-preserving mean curvature flow of rotationally symmetric surfaces*, Comment. Math. Helv. 72.1 (1997) 52–66. [3] E. Bishop, *Differentiable manifolds in complex Euclidean space*, Duke Math. J. 32.1 (1965) 1–21. [4] F. Di Giovanni, *Rotationally symmetric Ricci flow on* $\mathbb{R}^{n+1}$, Adv. Math. 381 (2021) 107621. [5] G. Dziuk, *On rotationally symmetric mean curvature flow*, J. Differential Equations 93.1 (1991) 142–149. [6] K. Ecker 和 G. Huisken, *Parabolic methods for the construction of spacelike slices of prescribed mean curvature in cosmological spacetimes* **135** 1991 595 613, Comm. Math. Phys. ( ) – . [7] Y. Eliashberg, *Filling by holomorphic discs and its applications*, 载于：S. Donaldson 和 C. Thomas（编）, Symplectic Manifolds and Jones-Witten Theory, Geometry of Low-Dimensional Manifolds 2 (1991) 45–67, 剑桥大学出版社。[8] F. Forstneri˘c, Stein 流形与全纯映射, Springer Berlin Heidelberg, 2011. [9] B. Guilfoyle 和 W. Klingenberg, *Evolving to non-round Weingarten spheres: integer linear Hopf flows* **2** 2021 72, Partial Differ. Equ. Appl. ( ) . [10] B. Guilfoyle 和 W. Klingenberg, *Proof of the Toponogov Conjecture on complete surfaces*, （2020 https://arxiv.org/abs/2002.12787）ArXiv：B. Guilfoyle 和 W. Klingenberg, [11] *Higher codimensional mean curvature flow of compact spacelike submanifolds* **372 9** 2019 6263 6281, Trans. Amer. Math. Soc. . ( ) – . [12] B. Guilfoyle 和 W. Klingenberg, *Proof of the Carathéodory Conjecture*, （2011）ArXiv https://arxiv.org/abs/0808.0851 [13] B. Guilfoyle 和 W. Klingenberg, *On area-stationary surfaces in certain neutral Kähler 4-manifolds* **49 2** 2008 481 490, Beitrage Algebra Geom. . ( ) – . [14] B. Guilfoyle 和 W. Klingenberg, *An indefinite Kähler metric on the space of oriented lines*, J. London Math. Soc. 72.2 (2005) 497–509. [15] B. Guilfoyle 和 W. Klingenberg, *Generalised surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Math. Proc. R. Ir. Acad. 104A (2004) 199–209. [16] B. Harvie, *Inverse mean curvature flow of rotationally symmetric hypersurfaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations 62.4 (2023) 125. [17] N.J. Hitchin, *Monopoles and geodesics*, Comm. Math. Phys. 83.4 (1982) 579–602. [18] G. Huisken 和 W. Klingenberg, *Flow of real hypersurfaces by the trace of the Levi form*, Math. Res. Lett. 6.6 (1999) 645–661. [19] J.A. McCoy、F.Y.Y. Mofarreh 和 G.H. Williams, *Fully nonlinear curvature flow of axially symmetric hypersurfaces with boundary conditions* 4 **193 5** 2014, Ann. Mat. Pura Appl. ( ) . ( ) 1443–1455. [20] K. Mohnke, *On fillings by holomorphic discs of the levels of a Morse function*, Differential Geom. Appl. 10.1 (1999) 27–42. [21] M. Salvai, *Global smooth fibrations of* $\mathbb{R}^3$ *by oriented lines*, Bull. Lond. Math. Soc. 41.1 (2009) 155–163. [22] A. Sukhov 和 A. Tumanov, *Filling hypersurfaces by discs in almost complex manifolds of dimension 2* **57 1** 2008 509 544, Indiana Univ. Math. J. . ( ) – . [23] V.A. Toponogov, *On conditions for existence of umbilical points on a convex surface*, Sib. Math. J. 36 (1995) 780–784.

Brendan Guilfoyle, School of Scienec Technology Engineering and Mathematics, Munster Technological University, Kerry, Tralee, Co. Kerry, Ireland.*Email address*: brendan.guilfoyle@mtu.ieWilhelm Klingenberg, Department of Mathematical Sciences, University of Durham,Durham DH1 3LE, United Kingdom*Email address*: wilhelm.klingenberg@durham.ac.uk