布洛赫原理：映入半阿贝尔簇子簇的全纯映射

山野井克俊

Abstract. 我们将高维值分布理论中关于半阿贝尔簇 X 子簇中整曲线的一条基本定理推广到从单位圆盘到 X的全纯映射序列的情形。这一推广还推出了其他结论，例如，半阿贝尔簇中的对数一般型子簇是伪柯布亚西双曲的。作为另一项应用，我们改进了卡当在20世纪20年代关于满足博雷尔恒等式的单位圆盘上处处不消失的全纯函数系统的一条经典定理。

arXiv:2304.05715v1 [math.CV] 12 Apr 2023

Contents

1. 引言 1 2. Demailly 喷射空间 5 3. 正规性的充分条件：命题 3.20 的陈述 8 4. Nevanlinna 理论 13 5. 命题 3.20 证明的主要命题 18 6. 对数典范不等式的应用 39 7. Nevanlinna 理论与爆破 48 8. 命题 3.20 的证明 53 9. 闭子概形族与正则喷射 61 10. 水平可积性的充分条件 68 11. 正规性条件的验证：水平可积的 Z 74 的存在性 12. 定理 1.2 的证明 84 13. 定理 1.3 的证明 90 14. 定理 1.5 的证明 93 15. 定理 1.7 的证明 94 附录 A. 半阿贝尔簇 97 附录 B. 通过爆破进行平坦化 107 参考文献 108

1. Introduction

布洛赫原理是复函数论研究中广受认可的指导性原则。这一原则源自布洛赫在 1926 年发表的几篇论文中提出的一句著名格言“无限中无物不先存于有限之中”[1]（例如， [4, 第 311] 页）。在许多语境下，这句话被更具体地理解为以下启发式原则：在一个区域内，若一族全纯函数都具有某种性质 P，而非恒定整函数在复平面上不可能具有 P，那么这族函数很可能是正规族（例如， [38, 第 101] 页）。一个典型示例是皮卡小定理与蒙特尔定理之间的对应关系：在一个区域内，若一族全纯函数都不取 0 和 1 这两个值，则该函数族是正规族。关于布洛赫原理有若干很好的参考文献，包括 [3], [38,第 4], [47] 章。

[1]根据 Schiff [38, 第 101],页，这句话可以翻译为：在无限平面中，没有任何事物是有限圆盘中未曾发生过的。

受其原理启发，布洛赫 [4] 研究了有限圆盘上的一种理论，该理论对应于博雷尔对皮卡小定理的推广（参见定理 1.8）。卡当 [10] 随后继续了这项研究，并特别推广了上述蒙特尔定理（参见定理 1.9）。半个世纪后，Kiernan 和 Kobayashi [25] 在小林双曲几何的背景下阐释了布洛赫和卡当的研究成果。朗 [30, 在第 VIII 章]中对这些进展作了全面说明。稍后我们将讨论卡当定理的一项改进（参见定理 1.7）。

本文关注映入半阿贝尔簇子簇的全纯映射。在复平面 $\mathbb{C}$ 上的情形中，我们有如下由布洛赫[5],、落合 [36], 、川又 [22] 和野口 [34]得到的定理。

定理 1.1（布洛赫、落合、川又、野口）。设 A 为半阿贝尔簇，且 $X \subsetneq A$ 为 A 的真闭代数子簇。设 $f\colon \mathbb{C} \to X$ 为全纯映射。则存在一个真半阿贝尔子簇 $B \subsetneq A$，满足以下两个性质：

（1） $\varpi \circ f\colon \mathbb{C} \to A/B$ 是常值映射，其中 $\varpi\colon A \to A/B$ 是商映射。（2） $f(\mathbb{C}) \subset \bigcap_{b\in B}(X+b)$。

该定理的表述或许不太熟悉，但便于讨论布洛赫原理。一个等价的表述是，像 $f(\mathbb{C})$ 的扎里斯基闭包是半阿贝尔子簇 $B' \subset A$ 的一个平移（参见 [28, 定理 3.9。19]）。在定理 1.1 中，我们可以取 $B \subset A$ 为这个 B'。正如野口所指出的（参见 [35, 第 156] 页），该定理包含 Borel 对皮卡小定理的推广（参见定理 1.8）；我们将该定理应用于 A 为代数环面（$\mathbb{G}_m$）^{n} 且 $X \subset (\mathbb{G}_m)^n$ 是由线性方程 $x_1 + \cdots + x_n + 1 = 0$ 定义的子簇的情形，其中使用了（$\mathbb{G}_m$）$^n \subset \mathbb{C}^n$ 的坐标 x_1、...、 x_n。关于定理 1.1 的进一步讨论，请参阅读者可参考 [28, 第 3 节。9]和 [35, 第 4 节。8]。

现在我们将讨论定理 1.1 的一个相应推广，即从单位圆盘 $\mathbb{D}$ 出发的全纯映射的情形。为陈述主要定理，我们先引入 [30, 第 242] 页中的一个术语。设 $\gamma > 0$，且 $W \subset \mathbb{C}$ 是一个开集。若关于点 $w \in W$ 的断言对 γ-几乎所有 $w \in W$ 都成立，即对所有 $w \in W$ 都成立，至多除去包含在可数个闭圆盘中的 w，且这些闭圆盘的半径之和小于 γ，则称该断言成立。

设 $V \subset \overline{A}$ 是一个扎里斯基闭集，其中 $\overline{A}$ 是半阿贝尔簇 A 的等变紧化。关于半阿贝尔簇的必要知识，参见附录 A。设 $B \subset A$ 是一个半阿贝尔簇。我们定义

$$\mathrm{Sp}_B V = \bigcap_{b\in B}(V+b) \subset V.$$

那么，$\mathrm{Sp}_B V \subset \overline{A}$ 是一个扎里斯基闭子集。

以下是本文的主要结果。在下述陈述中，我们用 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ 表示从 $\mathbb{D}$ 到 X 的所有全纯映射组成的集合。对于 $0 < s < 1$，我们定义 $\mathbb{D}(s) = \{z \in \mathbb{D};\ |z| < s\}$。

定理 1.2. 设 A 为半阿贝尔簇。设 $X \subsetneq A$ 为真闭代数子簇。设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ 中全纯映射的序列。那么存在一个真半阿贝尔子簇 $B \subsetneq A$ 以及一个子列 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，满足以下两个性质：

(1) $(\varpi \circ f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到一个全纯映射 $g\colon \mathbb{D} \to A/B$，其中 $\varpi\colon A \to A/B$ 是商映射。(2) 令 $\overline{A}$ 为一个等变紧化，并令 $\overline{X} \subset \overline{A}$ 为 X 在 $\overline{A}$ 中的扎里斯基闭包。那么对于每个 $0 < s < 1$、 $\gamma > 0$ 以及 $\mathrm{Sp}_B \overline{X}$ 的开邻域 $U \subset \overline{A}$，存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $k \geq k_0$，都有 $f_{n_k}(z) \in U$ 对于 γ-几乎所有的 $z \in \mathbb{D}(s)$。

在讨论该定理的应用之前，我们先由定理 1.2 推导出定理 1.1。给定 $f\colon \mathbb{C} \to X$，我们定义一个序列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中各项属于全纯映射空间 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$，且满足 $\varphi_n(z) = f(nz)$。由定理 1.2 可知，存在一个子列 $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和一个真半阿贝尔子簇 $B \subsetneq A$

使得 $\{\varpi\circ\varphi_{n_k}\}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g\colon \mathbb{D}\to A/B$。我们断言 $\varpi\circ f\colon \mathbb{C}\to A/B$ 是常值的。反设 $\varpi\circ f$ 是非恒定的。那么存在一个全局全纯一形式 $\eta\in\Gamma(A/B,\Omega^1_{A/B})$，使得 $(\varpi\circ f)^*\eta=\zeta(z)dz$ 在 $\mathbb{C}$ 上非零。因此存在 $l\geq 0$ 使得 $\zeta^{(l)}(0)\neq 0$。令 $(\varpi\circ\varphi_n)^*\eta=\xi_n(z)dz$。于是 $\xi_n(z)=n\zeta(nz)$。因此，当 $n\to\infty$ 时，$|\xi_n^{(l)}(0)|=|n^{l+1}\zeta^{(l)}(0)|\to\infty$。另一方面，$\xi_{n_k}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $\xi(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上，其中 $g^*\eta=\xi(z)dz$。因此，当 $k\to\infty$ 时，$\xi_{n_k}^{(l)}(0)\to\xi^{(l)}(0)$。矛盾。因此 $\varpi\circ f$ 是常值的。为确保定理 1.1 的断言 (2)，我们取一个最小的半阿贝尔簇 $B\subsetneqq A$，使得 $\varpi\circ f$是常值的。考虑由 $f(0)$ 给出的平移后，不失一般性地可假设 $f(0)=0_A$，即 A的单位元。于是有 $f(\mathbb{C})\subset B$。令 $X'\subset B$为 $f(\mathbb{C})$ 的扎里斯基闭包。为证明 $X'=B$，反设 $X'\subsetneqq B$。那么，将上述论证应用于 $f\colon\mathbb{C}\to X'\subsetneqq B$，可得一个真半阿贝尔子簇 $B'\subsetneqq B$，使得 $\varpi'\circ f\colon\mathbb{C}\to B/B'$ 是常值映射，其中 $\varpi'\colon B\to B/B'$ 为商映射。这与 B的选取矛盾。因此 $X'=B$。由 $X'\subset X\cap B$，可得 $X\cap B=B$。因此，所需的 $f(\mathbb{C})\subset X\cap B\subset\bigcap_{b\in B}(b+X)$ 成立。由此便完成了由定理 1.2 推导定理 1.1。

请注意，在上述蕴含关系中，定理 1.2 的断言 (2) 并不起作用。然而，在下文对定理 1.2 的应用中，我们需要用到断言 (2)。

接下来，我们讨论定理 1.2 在小林双曲几何中的应用。首先介绍 [28, p. 245] 中的一些术语。设 W 是 M 的一个相对紧开域，Δ 是 M 的一个闭子集。若对于 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D},W)$ 中的每个序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，以下情形之一成立，则称 W 在 M 中模 Δ 拟正规嵌入：

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个子列 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，它在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到某个 $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D},M)$；

(2) 对每个紧集 $K\subset\mathbb{D}$ 和每个紧集 $L\subset M-\Delta$，都存在一个整数n_0，使得对所有 $n\geq n_0$，$f_n(K)\cap L=\emptyset$。

设 $X\subset A$ 是半阿贝尔簇 A 的一个闭代数子簇。设 $\overline{X}\subset\overline{A}$ 为其紧化，其中 $\overline{A}$ 是一个等变紧化。记

$$Z=\{x\in\overline{X}\,;\,\exists B\subset A,\text{a semi-abelian variety s.t. }\dim(x+B)\geq 1\text{ and }x+B\subset\overline{X}\}.$$

设 $S\subset\overline{X}$ 是 Z 的扎里斯基闭包。则 $S\subset\overline{X}$ 是一个扎里斯基闭集。根据 [34, 引理 4.1]，只要 X 是对数一般型，S 就是 $\overline{X}$ 的真子集。作为定理 1.2 的应用，我们得到以下定理。

定理 1.3。设 $X\subset A$ 是一个闭代数子簇。设 $\overline{A}$ 是一个光滑等变紧化，且设 $\overline{X}\subset\overline{A}$ 是该紧化。则在 $\overline{X}$ 中，X 模 S 拟正规嵌入。

Kiernan 和 Kobayashi 的一个定理 [25] 声称：如果 W 在 M 中模 Δ 拟正规嵌入，那么 W 在 M 中模 Δ 双曲嵌入（参见 [28, 定理 5.1。13], [30, 定理 1。4]）。因此，根据定理 1.3，我们立即得到以下推论。

推论1.4. 设 $X\subset A$ 是一个闭代数子簇。设$\overline{A}$ 是一个光滑等变紧化，并设$\overline{X}\subset\overline{A}$ 是该紧化。那么 X 在$\overline{X}$中模 S 双曲嵌入。特别地，如果 X 是对数一般型，那么 X 是伪柯布亚西双曲的。

当 A 是紧的，这些结果已在 [46] 中得到证明。在紧情形下，定理 1.2 给出了关于无穷小 Kobayashi-Royden伪度量 F_X 的一个结果，该伪度量定义如下。设 $\breve{}X$ 是一个代数簇。对于每个 $x\in X$，我们称所有 1-喷流构成的集合 T_xX 为 X 在 x 处的切锥，并称 $\breve{T}X=\cup_{x\in X}\breve{T}_xX$ 为 X 的切锥（参见 [28, 第 31] 页）。若 X 光滑，则 $\breve{}TX$ 与通常的切丛一致。对于 $v\in TX$，我们定义了

$$F_X(v)=\inf\left\{r>0;\exists f:\mathbb{D}\to X\text{ s.t. }f'(0)=\frac{1}{r}v\right\}.$$

假设存在一个全纯映射 $f\colon \mathbb{C} \to X$，使得 $f'(0) = v \in \breve{T}X$，那么我们有$F_X(v) = 0$。然而，反过来一般并不成立（参见示例 14.3）。定理 1.2 得出以下定理。我们不知道这一结论对于非紧半阿贝尔簇的子簇是否成立。

˘定理 1.5. 设 A 是一个阿贝尔簇。设 $X \subset A$ 是一个闭子簇。假设 $v \in TX$满足 $F_X(v) = 0$。那么存在一个全纯映射 $f\colon \mathbb{C} \to X$，使得 $f'(0) = v$。

现在我们回到有关布洛赫-嘉当定理的经典主题。为简化描述中复杂的指标，我们采用以下约定。

约定 1.6. 对于集合 E 和无限集 I，指标族 $(x_i)_{i\in I}$ 是一个函数$I \to E$。当 E 是无限集时，我们将 E 视为一个以 E 自身为指标集的指标族，其对应的映射为恒等映射 $E \to E$。设 S 是一个度量空间，其距离函数为 d。设 $(f_i)_{i\in I}$ 是定义在 $\mathbb{D}$上、取值于 S的函数指标族。我们称 $(f_i)_{i\in I}$ 在 $\mathbb{D}$ 上紧子集上一致收敛到某个 $f : \mathbb{D} \to S$，如果对于每个紧子集 $K \subset \mathbb{D}$ 和每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个有限子集 $F \subset I$，使得对于所有 $z \in K$和$i \in I - F$，均有 $d(f_i(z)\ f(z)) < \varepsilon$。当然，当 $I = \mathbb{N}$ 时，此定义与通常的在 $\mathbb{D}$ 上紧子集上一致收敛的定义一致。如果每个 f_i 都是连续的，那么 f 也是连续的。事实上，取一个由 I中互不相同的元素组成的序列 $i_1, i_2, i_3, \ldots$。那么序列 $(f_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$在 $\mathbb{D}$ 上紧子集上一致收敛到 f。因此 f 是连续的。类似地，如果 S 是一个复流形，且每个 f_i 都是全纯的，那么 f 也是全纯的。

定理 1.7. 设 $\mathcal{F}$ 是由 p 元组 $f = (f_1, \ldots, f_p)$ 构成的无限集，其中各项都是定义在 $\mathbb{D}$ 上的处处不消失的全纯函数，并满足以下恒等式

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p = 0. \tag{1.1}$$

那么，存在互不相交的非空子集 $I_1, \ldots, I_n \subset \{1, \ldots, p\}$，以及一个无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，具有以下性质:

(1) $n \geq 1$. (2) 设 $k \in \{1, \ldots, n\}$。则：(a) 对所有 $i, j \in I_k$，指标族 $(f_i/f_j)_{f\in\mathcal{G}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到一个处处不消失的全纯函数。(b) 对所有 $j \in I_k$，指标族 $(\sum_{i\in I_k} f_i/f_j)_{f\in\mathcal{G}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 0。特别地，I_k 至少包含两个元素。

(3) 令 $I = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n$。设 $i \in \{1, \ldots, p\} - I$。令 $\varepsilon > 0, s \in (0, 1)$，且 $\gamma > 0$。那么，存在一个有限子集 $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$，使得对所有 $f \in \mathcal{G} - \mathcal{E}$，都有

$$\frac{|f_i(z)|}{\sqrt{\sum_{j\in I} |f_j(z)|^2}} < \varepsilon$$

对于几乎所有的 $z \in \mathbb{D}(s)$，都有 γ。

需要作一些历史说明。Borel [7] 研究了恒等式 (1.1)，并将皮卡小定理推广如下。

定理 1.8（Borel）。设 $f_1, \ldots, f_p$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上满足恒等式 (1.1) 的处处不消失的全纯函数。那么存在一个指标划分 $\{1, \ldots, p\} = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n$，使得每个 I_k 都满足以下条件。

(1) 对每个 i、$j \in I_k$，商 f_i/f_j 是常数，且 (2) $\sum_{i\in I_k} f_i = 0$。

根据第二个结论，每个 I_k 至少有两个元素。特别地，当 $p = 3$时，我们有 $n = 1$ 和 $I_1 = \{1, 2, 3\}$。这如下推出皮卡小定理。令 $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0, 1\}$。我们设 $f_1(z) = g(z)$，$f_2(z) = 1 - g(z)$以及 $f_3(z) = -1$。于是，f_1、f_2 和 f_3 是在 $\mathbb{C}$ 上的处处不消失的全纯函数，并满足恒等式 $f_1 + f_2 + f_3 = 0$。因此根据Borel定理，$f_1/f_3 = -g$ 为常数，正如所需。

正如上文所述，关于圆盘 $\mathbb{D}$ 的相应理论由布洛赫 [4] 和卡当 [10, p. 312] 研究过。另见 [30, 第 VIII 章]。设 $\mathcal{F}$ 是 p 元组 $f = (f_1, \dots, f_p)$ 构成的无限集，其中各项都是 $\mathbb{D}$ 上处处不消失的全纯函数，并满足恒等式 (1.1)。若存在 $i \in I$，使得对所有 $j \in I$，序列 $(f_j/f_i)_{f\in\mathcal{F}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的每个紧集上都一致有界，且 $(\sum_{j\in I} f_j/f_i)_{f\in\mathcal{F}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 0，则称子集 $I \subset \{1, \dots, p\}$ 为 C类。

定理1.9（卡当）。存在一个无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，使得 $\{1, \dots, p\}$ 本身是 C类；或者存在两个不相交的子集 I_1、$I_2 \subset \{1, \dots, p\}$，使得二者都是 C类。

卡当猜想存在一个无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，使得集合 $\{1, \dots, p\}$ 可以划分为若干个 C类。然而，埃列缅科 [14] 反证了这一猜想。在 [15], 中，埃列缅科提出了卡当猜想的一个修正版，并证明了在情形 $p = 5$ 下该猜想成立。

定理1.7推出定理1.9如下。应用定理1.7可得到一个无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 和互不相交的子集 I_1、.....、$I_n \subset \{1, \dots, p\}$。若 $n \geq 2$，则无需进一步处理，因为根据定理1.7的第二个断言，每个 I_k 都是 C类。因此我们考虑情形 $n = 1$。令 $j \in I_1$。定理1.7的断言（2a）表明，$\left(\sqrt{\sum_{i\in I_1} |f_i|^2}/|f_j|\right)_{f\in\mathcal{G}}$ 在 $\mathbb{D}$ 上的紧子集上一致收敛。因此，定理1.7的第三个断言可表述如下：

> 设 $i \notin I_1$、$\varepsilon > 0$、$s \in (0, 1)$和 $\gamma > 0$。那么存在一个有限子集 $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$，使得对于所有 $f \in \mathcal{G} - \mathcal{E}$，我们有 $|f_i|/|f_j| < \varepsilon$，对于 γ-几乎所有 $z \in \mathbb{D}(s)$。

设 $i \notin I_1$。设 $K \subset \mathbb{D}$ 为紧集，并设 $\varepsilon > 0$。取 $s \in (0, 1)$ 以及 $\gamma > 0$ 使得$K \subset \mathbb{D}(s - 2\gamma)$。根据定理 1.7 的第三个断言，存在一个有限集 $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$，使得对于所有 $f \in \mathcal{G} - \mathcal{E}$，都有 $|f_i|/|f_j| < \varepsilon$，对 γ-几乎所有的 $z \in \mathbb{D}(s)$成立。设 $f \in \mathcal{G} - \mathcal{E}$。我们可以取 $s' \in (s - 2\gamma, s)$，使得 $|f_i|/|f_j| < \varepsilon$ 在圆 $\partial\mathbb{D}(s')$上成立。由于 f_i/f_j是全纯的，最大模原理推出对于所有 $z \in \mathbb{D}(s')$都有 $|f_i|/|f_j| < \varepsilon$，因而对于所有 $z \in K$ 均成立。因此，$(f_i/f_j)_{f\in\mathcal{G}}$ 在 K 上一致收敛于 0。因此，如果 $n = 1$，那么 $\{1, \dots, p\}$ 是 C类。这就完成了由定理 1.7 到定理1.9 的导子。□

本文内容安排如下：第 2 至第 12 节致力于证明定理 1.2。尽管定理 1.2 的证明篇幅较长，但结构相当简单。证明分为两部分。第一部分将为族 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$ 建立一种新的正规性判别准则，即命题 3.20。我们在第 2 节回顾 Demailly 喷射空间的相关概念，这些概念用于陈述该正规性判别准则。证明命题 3.20 的主要技术工具是 Nevanlinna 理论，第 4 节将围绕这一主题展开。做好准备工作后，我们在第 8 节证明命题 3.20。以上是第一部分。在第二部分，我们将找到 $B \subset A$，使得 $\{\varpi \circ f\}_{f\in\mathcal{F}}$ 满足该正规性判别准则。这一内容在命题 11.3 中陈述。该命题的证明是第 9 至第 11 节的主要内容。随后，我们在第 12 节证明定理 1.2。

在第 13、14 和 15 节中，我们依次证明定理 1.3、1.5 和 1.7。附录 A 讨论了本文所需的关于半阿贝尔簇的一些事实。附录 B 则专门证明本文所需的代数几何命题，即一个利用爆破的平坦化结果。

约定 1.10. 本文中，代数簇（或简称代数簇）是复数域 $\mathbb{C}$ 上的整分离有限型概形（参见例如 [18, 第 105] 页）。特别地，每个代数簇都是既约、不可约且非空的（参见 [18, 第 II 章, 命题 3.1]）。每个代数簇都有一个与之典范相关联的复空间结构（参见 [18,第 439] 页）。

2. Demailly jet spaces

我们引入 Demailly 喷射空间（参见 [12]）。设 M 是一个正维光滑代数簇。设 $V \subset TM$ 是一个秩为正的代数向量子丛。令

$\tilde{M} = P(V)$。设 $\pi\colon M \to M$ 为投影。我们按如下方式定义向量子丛 $V \subset TM$：对于每个与向量 $v \in V_x\backslash\{0\}$ 相关联的点 $(x,[v]) \in M$，令

$$\tilde{V}_{(x,[v])} = \{\xi \in T_{(x,[v])}\tilde{M} \ ; \ \pi_*(\xi) \in \mathbb{C}v\}, \tag{2.1}$$

其中 $\pi_*\colon TM \to TM$ 是诱导映射。设 $f\colon \mathbb{D} \to M$ 是一个非恒定全纯映射。若对所有 $z \in \mathbb{D}$，都有 $f'(z) \in V_{f(z)}$，则称 f 与 V 相切。若 f 与 V 相切，我们可以定义 $f_{[1]}\colon \mathbb{D} \to M$，使得 $f_{[1]}(z) = (f(z)\ [f'(z)])$。于是 $f_{[1]}$ 与 V 相切。

我们归纳地定义 Demailly 喷射空间 M_k 及其向量子丛 $V_k \subset TM_k$ 如下：

$$(M_0, V_0) = (M, TM), \qquad (M_k, V_k) = (\widetilde{M_{k-1}}, \widetilde{V_{k-1}}).$$

对于非恒定全纯映射 $f\colon \mathbb{D} \to M$，我们归纳地定义 $f_{[k]}\colon \mathbb{D} \to M_k$，使得 $f_{[0]} = f$ 且 $f_{[k]} = (f_{[k-1]})_{[1]}$。

对于 $k \geq 2$，我们如下定义奇异轨迹 $M_k^{\mathrm{sing}} \subset M_k$。注意到 $M_k \subset PTM_{k-1}$。我们有一个自然映射 $M_{k-1} \to M$，由此得到相对切丛 $T_{M_{k-1}/M} \subset TM_{k-1}$。令

$$M_k^{\mathrm{sing}} = M_k \cap PT_{M_{k-1}/M}. \tag{2.2}$$

那么 $M_k^{\mathrm{sing}} \subset M_k$ 是一个扎里斯基闭集。我们断言这是一个除子。为证明这一点，我们考虑映射 $M_{k-1} \to M_{k-2} \to M$，它诱导出 $TM_{k-1} \to TM_{k-2} \to TM$。对于 $v \in TM_{k-1}$，当且仅当 $(\pi_{k-1})_*(v) \in T_{M_{k-2}/M}$ 时，有 $v \in T_{M_{k-1}/M}$，其中 $\pi_{k-1}\colon M_{k-1} \to M_{k-2}$ 是自然投影。有理映射 $PTM_{k-1} \dashrightarrow PTM_{k-2}$ 诱导出全纯映射 $p\colon PTM_{k-1} - PT_{M_{k-1}/M_{k-2}} \to PTM_{k-2}$。于是

$$PT_{M_{k-1}/M} - PT_{M_{k-1}/M_{k-2}} = p^{-1}(PT_{M_{k-2}/M}). \tag{2.3}$$

注意，子丛 $T_{M_{k-1}/M_{k-2}} \subset TM_{k-1}$ 满足

$$T_{M_{k-1}/M_{k-2}} \subset V_{k-1}. \tag{2.4}$$

$T_{M_{k-1}/M_{k-2}}$ 的秩等于 $\dim M - 1$。令 $D_k = PT_{M_{k-1}/M_{k-2}} \subset PV_{k-1} = M_k$。则 D_k 是 M_k 上的除子。根据 (2.3)，我们有

$$M_k^{\mathrm{sing}} = D_k \cup \pi_k^{-1}(M_{k-1}^{\mathrm{sing}}), \tag{2.5}$$

其中 $\pi_k\colon M_k \to M_{k-1}$。因此，利用关于 k 的归纳法，M_k^{sing} 是 M_k 上的一个除子。

接下来我们考虑半阿贝尔簇的情形。设 A 是一个半阿贝尔簇。设 $m\colon A \times A \to A$ 是自然作用，使得 $(x,a) \mapsto x + a$。这诱导出

$$m_* : T(A \times A) \to TA.$$

我们有一个子丛

$$A \times TA \subset T(A \times A).$$

因此我们得到

$$(A \times TA)|_{A \times \{0_A\}} \to TA.$$

由 $T_{0_A}A = \mathrm{Lie}A$，我们得到

$$\psi : A \times \mathrm{Lie}A \to TA. \tag{2.6}$$

那么 ψ 是 A 上向量丛的一个同构。对于每个 $a \in A$，我们将由 a 定义的平移记为 $t_a : A \to A$。这诱导出一个同构

$$(t_a)_* : TA \to TA.$$

于是我们得到

$$(\psi^{-1} \circ (t_a)_* \circ \psi)(x,v) = (x + a, v). \tag{2.7}$$

令 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$。我们通过以下复合态射定义 $f_{\mathrm{Lie}A}\colon \mathbb{D} \to \mathrm{Lie}A$。

$$\mathbb{D} \xrightarrow{f'} TA \xrightarrow{\psi^{-1}} A \times \mathrm{Lie}A \to \mathrm{Lie}A.$$

对于 $a \in A$，我们定义 $f_a\colon\ \mathbb{D} \to A$ 由 $f_a(z) = f(z) + a$。由 (2.7)，我们有

$$(f_a)_{\mathrm{Lie}A} = f_{\mathrm{Lie}A}. \tag{2.8}$$

我们考虑 $M = A \times S$ 情形下的 Demailly 喷射空间，其中 S 是一个光滑代数簇。我们构造一个光滑代数簇 $S_{k,\ A}$ 以及一个向量子丛

$$V_k^\dagger \subset TS_{k,A} \times \mathrm{Lie}(A) \tag{2.9}$$

如下。设 $S_{0,\ A} = S$ 且 $V_0^\dagger = TS \times \mathbf{Lie}(A)$。假设给定 $S_{k-1,\ A}$ 和 $V_{k-1}^\dagger \subset TS_{k-1,\ A} \times \mathbf{Lie}(A)$。我们设

$$S_{k,A} = P(V_{k-1}^\dagger). \tag{2.10}$$

于是 $S_{k,\ A}$ 是一个光滑代数簇。令 $\tau : S_{k,\ A} \to S_{k-1,\ A}$ 为投影。我们有一个向量丛映射 $(\tau_*, \mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(A)}) : TS_{k,\ A} \times \mathbf{Lie}(A) \to TS_{k-1,\ A} \times \mathbf{Lie}(A)$。我们如下定义 $V_k^\dagger \subset TS_{k,\ A} \times \mathbf{Lie}(A)$。对于每个 $(x, [v]) \in S_{k,\ A}$，其中 $x \in S_{k-1,\ A}$ 且 $v \in V_{k-1}^\dagger \backslash \{0\}$，我们设

$$(V_k^\dagger)_{(x,[v])} = \{\xi \in T_{(x,[v])}S_{k,A} \times \mathrm{Lie}(A);\ (\tau_*, \mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(A)})(\xi) \in \mathbb{C} \cdot v\}. \tag{2.11}$$

由同构 (2.6)，我们有一个同构 $T(A \times S_{k,\ A}) \simeq A \times TS_{k,\ A} \times \mathbf{Lie}(A)$。利用此同构，我们将 $A \times V_k^\dagger$ 视为 $T(A \times S_{k,\ A})$ 的一个向量子丛。

接下来我们构造一个同构

$$\varphi_k : A \times S_{k,A} \to (A \times S)_k \tag{2.12}$$

如下。对于 $k = 0$，我们令 $\varphi_0 = \mathrm{id}_{A \times S}$。注意到 $(\varphi_0)_*(A \times V_0^\dagger) = V_0$。设给定一个同构 $\varphi_{k-1} : A \times S_{k-1,A} \to (A \times S)_{k-1}$ 使得 $(\varphi_{k-1})_*(A \times V_{k-1}^\dagger) = V_{k-1}$。则 $(\varphi_{k-1})_*$ 的射影化诱导出一个同构 $\varphi_k : A \times S_{k,A} \to (A \times S)_k$。在此同构下，我们有 $(\varphi_k)_*(A \times V_k^\dagger) = V_k$。因此，归纳地，我们构造出了同构 (2.12)。

在下文中，我们通过同构 (2.12) 将 $(A \times S)_k$ 与 $A \times S_{k,A}$ 视为同一对象。当 S 是一个单独的点时，我们记

$$P_{k,A} = \{\mathrm{pt}\}_{k,A}.$$

那么在同构 (2.12) 下，我们有 $A_k = A \times P_{k,A}$。

设 $f \in \mathbf{Hol}(\mathbb{D}, A \times S)$ 为非恒定映射。我们将 $f_S\colon\ \mathbb{D} \to S$ 定义为 $f\colon\ \mathbb{D} \to A \times S$ 与第二投影 $A \times S \to S$ 的复合态射。我们定义

$$f_{S_{k,A}} : \mathbb{D} \to S_{k,A} \tag{2.13}$$

如下。我们令 $f_{S_{0,A}} = f_S$。注意到 $((f_{S_{0,A}})', f_{\mathrm{Lie}A})(z) \in V_0^\dagger$。设 $f_{S_{k-1,A}} : \mathbb{D} \to S_{k-1,A}$，满足 $((f_{S_{k-1,A}})', f_{\mathrm{Lie}A})(z) \in V_{k-1}^\dagger$。我们通过 $((f_{S_{k-1,A}})', f_{\mathrm{Lie}A})$ 的射影化定义 $f_{S_{k,A}} : \mathbb{D} \to S_{k,A}$。于是有 $((f_{S_{k,A}})', f_{\mathrm{Lie}A})(z) \in V_k^\dagger$。因此，我们归纳地对所有 k 构造了 $f_{S_{k,A}} : \mathbb{D} \to S_{k,A}$。令 $f_A : \mathbb{D} \to A$ 为 $f\colon\ \mathbb{D} \to A \times S$ 与第一投影 $A \times S \to A$ 的复合态射。我们有 $\varphi_k \circ (f_A, f_{S_{k,A}}) = f_{[k]}$，这由构造可得。对于 $a \in A$，我们根据 $f_a(z) = (f_A(z) + a, f_S(z))$ 令 $f_a\colon\ \mathbb{D} \to A \times S$。然后由 (2.8)，我们有

$$(f_a)_{S_{k,A}} = f_{S_{k,A}} \tag{2.14}$$

对于所有 $a \in A$。

令 $k \geq 2$。我们定义 $S_k^{\mathrm{sing}}{}_{,\ A} \subset S_{k,\ A}$ 为

$$S_{k,A}^{\mathrm{sing}} = S_{k,A} \cap P(T_{S_{k-1,A}/S} \times \{0\}), \tag{2.15}$$

其中 $T_{S_{k-1,A}/S} \times \{0\} \subset TS_{k-1,A} \times$ 李A。于是我们有

$$A \times S_{k,A}^{\mathrm{sing}} = (A \times S)_k^{\mathrm{sing}} \tag{2.16}$$

在（2.12）的同构下。

以下定义在本文中起着重要作用。

定义 2.1. 设 $B \subset A$ 是一个半阿贝尔子簇。对于 $k \geq 1$，我们定义 $E_{k,\ A,\ A/B} \subset P_{k,\ A}$ 为 $E_{k,\ A,\ A/B} = P_{k,\ A} \cap P(TP_{k-1,\ A} \times \mathrm{Lie}B)$，其中 $TP_{k-1,\ A} \times \mathrm{Lie}B \subset TP_{k-1,\ A} \times \mathrm{Lie}A$。

于是我们有 $E_{k,\ A,\ A} \subset E_{k,\ A,\ A/B}$。此外，由于 $T_{P_{k-1,\ A}/\{点\}} = TP_{k-1,\ A}$，我们有

$$P^{\mathrm{sing}}_{k,A} = E_{k,A,A}. \tag{2.17}$$

引理 2.2. 设 $k \geq 1$。设 $\tau : P_{k+1,\ A} \to P_{k,\ A}$ 是投影。则 $\tau^{-1}(E_{k,\ A,\ A/B}) \subset E_{k+1,\ A,\ A/B}$。

证明。根据定义 (2.10)，我们有 $P_{k+1,A} = P(V_k^\dagger)$，其中 $V_k^\dagger \subset TP_{k,A} \times \mathrm{Lie}(A)$。令 $(y, [\xi]) \in P_{k+1,A} \backslash E_{k+1,A,A/B}$，其中 $y \in P_{k,A}$ 且 $\xi \in V_k^\dagger \backslash \{0\}$。于是 $\xi \notin TP_{k,A} \times \mathrm{Lie}(B)$。令 $y = (x, [v]) \in P(V_{k-1}^\dagger)$，其中 $x \in P_{k-1,A}$ 且 $v \in V_{k-1}^\dagger \backslash \{0\}$。于是根据 $V_k^\dagger$ 的定义（参见 (2.11)），ξ 在映射 $TP_{k,A} \times \mathrm{Lie}(A) \to TP_{k-1,A} \times \mathrm{Lie}(A)$ 下的像包含于线性空间 $\mathbb{C} \cdot v$。因此 $v \notin TP_{k-1,A} \times \mathrm{Lie}(B)$。因此 $y \in P_{k,A} \backslash E_{k,A,A/B}$。由此我们证明了 $\tau^{-1}(E_{k,A,A/B}) \subset E_{k+1,A,A/B}$。□

注记 2.3. 设 $k \geq 0$。我们有子丛 $V_k^\dagger \subset TP_{k,\ A} \times \mathrm{Lie}(A)$，使得 $P_{k+1,\ A} = P(V_k^\dagger)$。令 $S = P_{k,\ A}$。对于每个 $l \geq 0$，我们用 $V_{l\ ,\ S}^\dagger \subset TS_{l,\ A} \times \mathrm{Lie}(A)$ 表示 (2.9) 中的对象，使得 $S_{l+1,\ A} = P(V_{l\ ,\ S}^\dagger)$。于是对于每个 $l \geq 0$，存在一个自然嵌入

$$P_{k+l,A} \subset S_{l,A} \tag{2.18}$$

使得 $V_{k+l}^\dagger \subset V_{l\ ,S}^\dagger \cap (TP_{k+l,A} \times \mathrm{Lie}(A))$。其归纳构造如下。对于 $l = 0$，注意到 $P_{k,\ A} = S = S_{0,A}$ 和 $V_k^\dagger \subset TP_{k,A} \times \mathrm{Lie}(A) = V_{0\ ,S}^\dagger$。我们讨论从 l 到 $l+1$ 的归纳步骤。由 $P_{k+l,\ A} \subset S_{l,A}$ 和 $V_{k+l}^\dagger \subset V_{l\ ,S}^\dagger \cap (TP_{k+l} \times \mathrm{Lie}(A))$，可得 $P_{k+l+1,A} = P(V_{k+l}^\dagger) \subset P(V_{l\ ,S}^\dagger) = S_{l+1,A}$。$V_{k+l+1}^\dagger$ 和 $V_{l+1,S}^\dagger$（参见 (2.11)）的构造给出 $V_{k+l+1}^\dagger \subset V_{l+1,S}^\dagger \cap (TP_{k+l+1,A} \times \mathrm{Lie}(A))$。至此完成归纳步骤。

3. Sufficient condition for normality: Statement of Proposition 3.20

本节的目标是介绍命题 3.20。该命题给出了使 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$ 的一个子集正规化的充分条件，其中 A 是一个半阿贝尔簇。这个命题的证明相当冗长，因此我们用第 4 至第 8 节来证明它。为了陈述该命题，我们需要准备一些术语，下面将对此进行说明。

3.1. 全纯映射族与扎里斯基闭集。我们从以下两个定义开始。

定义 3.1. 设 S 为代数簇，$Z \subset S$ 为扎里斯基闭集。

(1)通过一个 Z-容许修改 $\varphi : S' \to S$，我们假设(a) φ 是射影且双有理的，并且(b)存在一个扎里斯基开集 $U \subset S$，使得 $Z \cap U \neq \emptyset$ 和 $\varphi^{-1}(U) \to U$ 是同构。

(2) 对于 Z-容许修改 $\varphi: S' \to S$，我们如下定义极小变换 $Z' \subset S'$。令 $\mathcal{U}$ 为满足上述性质 (b) 的所有扎里斯基开子集 $U \subset S$ 的集合。我们令 $Z' = \cap_{U \in \mathcal{U}} \varphi^{-1}(Z \cap U)$，其中 $\varphi^{-1}(Z \cap U) \subset S'$ 为扎里斯基闭包。

定义 3.2. 设 $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ 是 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, S)$ 中的一个无限指标族，其中 S 是一个代数簇。令 $Z \subset S$ 为一个扎里斯基闭集。

(1) 当以下条件成立时，我们记作 $\mathcal{F} \to Z$：对于每个 $0 < s < 1$、$\gamma > 0$ 以及作为 Z 的开邻域的 $U \subset S$，存在一个有限子集 $E \subset I$，使得对于所有 $i \in I - E$，$f_i(z) \in U$ 对于 γ- 几乎所有 $z \in \mathbb{D}(s)$ 均成立。(2) 当以下条件成立时，我们记作 $\mathcal{F} \Rightarrow Z$：

(a) 设 $V \subset S$ 是满足 $Z \not\subset V$ 的扎里斯基闭集。那么对于所有 $i \in I$，$f_i(\mathbb{D}) \not\subset V$，但有有限例外。

(b) 设 $S' \to S$ 是一个 Z-容许修改，且 $Z' \subset S'$ 是极小变换形式。那么 $\mathcal{F} \to Z'$。

注3.3.我们补充断言(2b)中的条件 $\mathcal{F} \to Z'$ 。存在一个扎里斯基开集 $U \subset S$，使得 φ: $S' \to S$ 满足定义 3.1 中的断言(1b)。然后根据 $Z \not\subset (S-U)$，存在一个有限子集 $E \subset I$，使得 $f_i(\mathbb{D}) \not\subset (S-U)$ 对所有 $i \in I-E$都成立。于是，对每个 $i \in I-E$，存在一个自然提升 f_i': $\mathbb{D} \to S'$ of f_i。断言 (2b) 中的 $\mathcal{F} \to Z'$ 是指 $(f_i')_{i\in I-E} \to Z'$。

注3.4.如果 $\mathcal{F} \to Z$，那么对于 $\mathcal{F}$ 的所有无限指标子族 $\mathcal{G}$，都有 $\mathcal{G} \to Z$。这里，如果 $J \subset I$ 是一个无限子集，我们称无限指标族 $\mathcal{G} = (f_j)_{j\in J}$ 是 $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ 的一个子族。如果 $\mathcal{F} \Rightarrow Z$，那么对于 $\mathcal{F}$ 的所有无限指标子族 $\mathcal{G}$，都有 $\mathcal{G} \Rightarrow Z$。

我们证明与定义 3.2 相关的几个基本性质。

引理 3.5。设 $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ 是 Hol($\mathbb{D}, S$)中的无限指标族。设 Z_1 和 Z_2 是 S 的扎里斯基闭子集。如果 $\mathcal{F} \to Z_1$ 和 $\mathcal{F} \to Z_2$，那么 $\mathcal{F} \to Z_1 \cap Z_2$。

证明。令 $S_o = S\backslash(Z_1 \cap Z_2)$。那么 $(Z_1 \cap S_o) \cap (Z_2 \cap S_o) = \emptyset$。因此存在开邻域 $U_1 \subset S_o$ 的 $Z_1 \cap S_o$ 以及 $U_2 \subset S_o$ 的 $Z_2 \cap S_o$，使得 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$。

我们取 $0 < s < 1$、$\gamma > 0$，以及 $U \subset S$ 的开邻域 $Z_1 \cap Z_2$。则 $U_1 \cup U \subset S$ 是 Z_1的开邻域。因此由 $\mathcal{F} \to Z_1$，存在一个有限集 $E_1 \subset I$，使得对于所有 $i \in I\backslash E_1$，有 $f_i(z) \in U_1 \cup U$，对于 $\gamma/2$-几乎所有的 $z \in \mathbb{D}(s)$。类似地，由 $\mathcal{F} \to Z_2$，存在一个有限集 $E_2 \subset I$，使得对于所有 $i \in I\backslash E_2$，有 $f_i(z) \in U_2 \cup U$，对于 $\gamma/2$-几乎所有$z \in \mathbb{D}(s)$。令 $E = E_1 \cup E_2$。则 E 是有限的。注意到 $(U_1 \cup U) \cap (U_2 \cup U) = U$。因此对于所有 $i \in I\backslash E$，有 $f_i(z) \in U$，对于 γ- 几乎所有的 $z \in \mathbb{D}(s)$。于是 $\mathcal{F} \to Z_1 \cap Z_2$。□

引理 3.6。令 $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ 是全纯映射空间($\mathbb{D}, S$)中的一个无限指标族。则存在一个扎里斯基闭子集 Y，使得扎里斯基闭子集 $Z \subset S$ 满足 $\mathcal{F} \to Z$ 当且仅当$Y \subset Z$。特别地，$\mathcal{F} \to Y$。

证明。我们将 $\mathcal{Z}$ 记为所有满足 $\mathcal{F} \to Z$的扎里斯基闭子集 $Z \subset S$ 所构成的集合。我们有 $\mathcal{F} \to S$，因此 $S \in \mathcal{Z}$。于是 $\mathcal{Z} \neq \emptyset$。由诺特性质，存在一个极小元 $Y \in \mathcal{Z}$。于是 $\mathcal{F} \to Y$。我们注意到，若 $Z \in \mathcal{Z}$，则 $Y \subset Z$。事实上，若非如此，则$Y \cap Z \subsetneq Y$。由 $\mathcal{F} \to Y$和 $\mathcal{F} \to Z$，我们有 $\mathcal{F} \to Y \cap Z$（参见引理 3.5），因此 $Y \cap Z \in \mathcal{Z}$。这与 Y的选取矛盾。因此 $Y \subset Z$。反过来，若扎里斯基闭集 $Z \subset S$满足 $Y \subset Z$，则由 $\mathcal{F} \to Y$，我们有 $\mathcal{F} \to Z$。于是 $Z \in \mathcal{Z}$。因此，$Z \in \mathcal{Z}$ 当且仅当$Y \subset Z$。□。

注记 3.7. 假设 $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ 在 $\mathbb{D}$ 上的紧子集上一致收敛于全纯映射 g: $\mathbb{D} \to S$。令 $V \subset S$ 为 $g(\mathbb{D})$ 的扎里斯基闭包。那么，引理 3.6 中的 Y 与 V 重合。为验证这一点，注意到 $\mathcal{F} \to V$，因此 $Y \subset V$。为验证反向结论，反设 $V \not\subset Y$。那么 $g(\mathbb{D}) \not\subset Y$。因此，$g^{-1}(Y) \subset \mathbb{D}$ 是一个离散子集。因此，我们可以取一个半径为正的闭圆盘 $K \subset \mathbb{D}\backslash g^{-1}(Y)$。我们取 Y 的一个开邻域 $U \subset S$，使得 $g(K) \cap \overline{U} = \emptyset$。由于 $\mathcal{F}$ 在 K 上一致收敛于 g，存在一个有限子集 $E \subset I$，使得对所有 $i \in I\backslash E$，都有 $f_i(K) \cap U = \emptyset$。这与$\mathcal{F} \to Y$矛盾。因此 $V \subset Y$。由此 $V = Y$。

引理 3.8. 设 φ: $S' \to S$ 是一个态射，且 $Z \subset S$ 是一个扎里斯基闭集。设 $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ 是 Hol($\mathbb{D}$, S') 中的一个无限指标族，满足 $(\varphi \circ f_i)_{i\in I} \to Z$。假设 φ: $S' \to S$ 是真态射。那么 $\mathcal{F} \to \varphi^{-1}(Z)$。

证明。令 $s \in (0,1)$ 和 $\gamma > 0$。令 $U \subset S'$ 为 $\varphi^{-1}(Z)$ 的一个开邻域。由于 φ是真映射，$\varphi(S'\backslash U)$ 是一个闭子集。设 $W = S\backslash\varphi(S'\backslash U)$。则 $W \subset S$ 是一个开集，使得 $Z \subset W$。我们有 $\varphi^{-1}(W) \subset U$。由 $(\varphi \circ f_i)_{i\in I} \to Z$，存在一个有限子集 $E \subset I$，使得对所有 $i \in I\backslash E$，我们有 $\varphi \circ f_i(z) \in W$，对 γ-几乎所有 $z \in \mathbb{D}(s)$ 都成立。于是，对所有 $i \in I\backslash E$，我们有 $f_i(z) \in U$，对 γ-几乎所有 $z \in \mathbb{D}(s)$ 都成立。因此 $\mathcal{F} \to \varphi^{-1}(Z)$。□

引理 3.9。设 $\mathcal{F}$ 是 Hol$(\mathbb{D}, S)$ 中的一个无限指标族。设 Z_1 和 Z_2 是 S 的扎里斯基闭子集。若 $\mathcal{F} \Rightarrow Z_1$ 和 $\mathcal{F} \Rightarrow Z_2$，则 $Z_1 \subset Z_2$ 或 $Z_2 \subset Z_1$。

证明。反设结论不成立。按概形论的意义，令 $V = Z_1 \cap Z_2$，即令 $\mathcal{I}_V = \mathcal{I}_{Z_1} + \mathcal{I}_{Z_2}$为 $\mathcal{O}_S$中的定义理层。令 $S' = \mathrm{Bl}_V S$，其中 $\varphi: S' \to S$。分别令 Z_1' 和 Z_2' 为 Z_1 和 Z_2的严格变换。于是

$$Z_1' \cap Z_2' = \emptyset. \tag{3.1}$$

我们来证明这一点。注意到 $\varphi^* V \subset S'$ 是一个卡蒂埃除子。因此，我们可以取一个闭子概形 $Z_1'' \subset S'$，使得 $\varphi^* Z_1 = \varphi^* V + Z_1''$。事实上，我们有 $\mathcal{I}_{\varphi^* Z_1} \subset \mathcal{I}_{\varphi^* V} \subset \mathcal{O}_{S'}$，其中$\mathcal{I}_{\varphi^* V}$是一个可逆层。因此，取 $Z_1'' \subset S'$ 使得 $\mathcal{I}_{Z_1''} = \mathcal{I}_{\varphi^* Z_1} \otimes (\mathcal{I}_{\varphi^* V})^{-1} \subset \mathcal{O}_{S'}$。于是$\mathcal{I}_{Z_1''} \cdot \mathcal{I}_{\varphi^* V} = \mathcal{I}_{\varphi^* Z_1}$。类似地，存在 $Z_2'' \subset S'$ 使得 $\mathcal{I}_{Z_2''} \cdot \mathcal{I}_{\varphi^* V} = \mathcal{I}_{\varphi^* Z_2}$。于是由$\mathcal{I}_{\varphi^* Z_1} + \mathcal{I}_{\varphi^* Z_2} = \mathcal{I}_{\varphi^* V}$，我们有 $(\mathcal{I}_{Z_1''} + \mathcal{I}_{Z_2''}) \cdot \mathcal{I}_{\varphi^* V} = \mathcal{I}_{\varphi^* V}$。因此 $\mathcal{I}_{Z_1''} + \mathcal{I}_{Z_2''} = \mathcal{O}_{S'}$。这表明$Z_1'' \cap Z_2'' = \emptyset$。由 $Z_1' \subset Z_1''$和 $Z_2' \subset Z_2''$，可得 (3.1)。

现在注意到爆破$_V S \to S$ 是 Z_1-可容许的。因此，根据 $\mathcal{F} \Rightarrow Z_1$，我们有 $\mathcal{F} \to Z_1'$。同样，$\mathcal{F} \to Z_2'$。这就产生了矛盾。□

引理 3.10. 设 $\mathcal{F}$ 是 Hol$(\mathbb{D}, S)$ 中的一个无限指标族。设 $Z \subset S$ 是一个扎里斯基闭集，使得 $\mathcal{F} \Rightarrow Z$。那么 Z 是不可约的。

证明。我们反设 $Z = Z_1 \cup Z_2$。在概形意义下令 $V = Z_1 \cap Z_2$。于是 $Z_1' \cap Z_2' = \emptyset$ 属于 $\mathrm{Bl}_V S$，其中 Z_1' 和 Z_2' 是严格变换（参见 (3.1)）。令 $\varphi: \mathrm{Bl}_V S \to S$，它是 Z-可容许的。令 $U_1 = S - Z_2$。于是 $V \cap U_1 = \emptyset$。因此 $\varphi^{-1}(U_1) \to U_1$ 是同构。此外，我们有 $Z \cap U_1 = Z_1 \cap U_1 \neq \emptyset$。因此，极小~~变换 $Z' \in \mathrm{Bl}_Z S$~~ 满足 $Z' \subset \varphi^{-1}(Z_1 \cap U_1) \subset Z_1'$。类似地，$Z' \subset Z_2'$。因此 $Z' = \emptyset$。这与 $\mathcal{F} \to Z'$矛盾。因此 Z 不可约。□

引理 3.11. 设 $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ 是 Hol$(\mathbb{D}, S)$ 中的一个无限指标族。设 $Z \subset S$ 是一个扎里斯基闭集，使得 $\mathcal{F} \Rightarrow Z$。设 $\varphi: S' \to S$ 是一个 Z-容许修改，令$Z' \subset S'$ 为极小变换。那么 $\mathcal{F} \Rightarrow Z'$。

证明。若 $V \subset S'$ 是一个扎里斯基闭集，使得 $Z' \not\subset V$，则 $Z \not\subset \varphi(V)$。对于除有限例外外的所有 $i \in I$，我们有 $f_i(\mathbb{D}) \not\subset \varphi(V)$，因此 $f_i'(\mathbb{D}) \not\subset V$，其中 $f_i': \mathbb{D} \to S'$ 是 f_i 的提升：$\mathbb{D} \to S$。令 $S'' \to S'$ 为一个 Z'-容许修改，并令 $Z'' \subset S''$ 为 Z' 的极小变换。则 $S'' \to S$ 是 Z- 容许的，且 Z 的极小变换与 Z'' 重合。这些结论可由 Z 的不可约性直接推出（参见引理 3.10）。因此 $\mathcal{F} \to Z''$。因此$\mathcal{F} \Rightarrow Z'$。□。

定义 3.12. 设 $\mathcal{F}$ 是 Hol$(\mathbb{D}, S)$ 中的一个无限指标族，$\{E_i\}_{i \in I}$ 是 S 中的一个可数扎里斯基闭集族。LIM$(\mathcal{F}; \{E_i\})$ 是 S 的一个扎里斯基闭集，并具有以下性质：

(1) $\mathcal{F} \Rightarrow$LIM$(\mathcal{F}; \{E_i\})$ 且 LIM$(\mathcal{F}; \{E_i\}) \not\subset \cup_{i \in I} E_i$(2) 对于每个真扎里斯基闭子集 $W \subsetneq$ LIM$(\mathcal{F}; \{E_i\})$ 以及 $\mathcal{F}$ 的每个无限指标子族 $\mathcal{G}$，要么 $\mathcal{G} \not\Rightarrow W$，要么 $W \subset \cup_{i \in I} E_i$。

注记 3.13. (1) 若 LIM$(\mathcal{F}; \{E_i\})$ 存在，则它是唯一的。这可由引理 3.9 得出。事实上，假设 Z_1、$Z_2 \subset S$ 都满足定义 3.12 的两个条件。那么 $\mathcal{F} \Rightarrow Z_1$ 且 $\mathcal{F} \Rightarrow Z_2$。根据引理 3.9，不妨设 $Z_1 \subset Z_2$。反设 $Z_1 \neq Z_2$。那么根据定义 3.12 的第二个条件，对于 $\mathcal{F} \Rightarrow Z_1$，我们有 $Z_1 \subset \cup_{i \in I} E_i$。这与定义 3.12 的第一个条件 $Z_1 \not\subset \cup_{i \in I} E_i$ 矛盾。因此 $Z_1 = Z_2$。这说明若 LIM$(\mathcal{F}; \{E_i\})$ 存在，则它是唯一的。

(2) LIM$(\mathcal{F}; \{E_i\})$ 是不可约的（如果它存在）。这由引理 3.10 得出。

(3) 如果 LIM$(\mathcal{F}; \{E_i\})$ 存在，那么对于 $\mathcal{F}$ 的任意无限子族 $\mathcal{G}$，LIM$(\mathcal{G}; \{E_i\})$ 存在，且 LIM$(\mathcal{G}; \{E_i\})$ =LIM$(\mathcal{F}; \{E_i\})$。这直接由定义 3.12 得出（参见注 3.4）。

引理 3.14. 设 $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ 是 Hol$(\mathbb{D}, S)$ 中的一个无限指标族。设 $\{E_j\}_{j \in J}$ 是 S 的一个可数扎里斯基闭集族。假设对于每个 $j \in J$，除有限多个外

$i \in I$ 均满足 $f_i(\mathbb{D}) \not\subset E_j$。那么，存在 $\mathcal{F}$ 的一个无限指标子族 $\mathcal{G}$，使得 LIM($\mathcal{G}$; $\{E_j\}$) 存在。

证明。我们用 $\mathcal{Z}$ 表示满足以下条件的扎里斯基闭子集的集合：对于无限多个 $i \in I$，有 $f_i(\mathbb{D}) \subset Z$。我们有 $S \in \mathcal{Z}$，因此 $\mathcal{Z} \neq \emptyset$。由诺特性质，我们可以取一个极小的 $Z \in \mathcal{Z}$。我们取一个无限子集 $I' \subset I$，使得对于所有 $i \in I'$，都有 $f_i(\mathbb{D}) \subset Z$。设 $\mathcal{F}' = (f_i)_{i \in I'}$。于是 $\mathcal{F}' \Rightarrow Z$。由引理 3.10，$Z$ 是不可约的。我们有 $Z \not\subset \cup E_j$。事实上，假设 $Z \subset \cup E_j$。那么，由于 J 是可数的，存在 $j \in J$ 使得 $Z \subset E_j$。因此，对于所有 $i \in I'$，都有 $f_i(\mathbb{D}) \subset E_j$，矛盾。故 $Z \not\subset \cup E_j$。

对于 $\mathcal{F}'$ 的一个无限子族 $\mathcal{G}$，我们将满足 $\mathcal{G} \Rightarrow W$ 和 $W \not\subset \cup_{j \in J} E_j$ 的扎里斯基闭子集 $W \subset S$ 组成的集合记为 $\mathcal{W}_\mathcal{G}$。由上述论证可知，$Z \in \mathcal{W}_\mathcal{G}$。因此，$\mathcal{W}_\mathcal{G} \neq \emptyset$。由引理 3.9 和诺特性质，我们可以取到唯一的极小元 $W_\mathcal{G} \subset \mathcal{W}_\mathcal{G}$。若 $\mathcal{G}'$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个无限子族，则 $W_\mathcal{G} \subset \mathcal{W}_{\mathcal{G}'}$。因此，$W_{\mathcal{G}'} \subset W_\mathcal{G}$。由诺特性质，我们可以取 $\mathcal{F}'$ 的一个无限子族 $\mathcal{G}$，使得对所有 $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$，都有 $W_\mathcal{G} = W_{\mathcal{G}'}$。那么 LIM($\mathcal{G}$; $\{E_j\}$) $= W_\mathcal{G}$。□

引理3.15. 设 $p: S_1 \to S_2$ 为簇的一个态射。设 $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ 为Hol($\mathbb{D}, S_1$)中的一个无限指标族。设 $Z \subset S_1$ 为一个扎里斯基闭集，使得 $\mathcal{F} \Rightarrow Z$。则$\{p \circ f_i\}_{i \in I} \Rightarrow p(Z)$，其中 $p(Z) \subset S_2$ 为 $p(Z)$ 的扎里斯基闭包。

证明。设 $V \subset S_2$ 是一个扎里斯基闭集，使得 $p(Z) \not\subset V$。那么我们有 $Z \not\subset p^{-1}(V)$。对于所有 $i \in I$，除有限例外外，我们有 $f_i(\mathbb{D}) \not\subset p^{-1}(V)$。因此，对于所有 $i \in I$，除有限例外外，我们有 $p \circ f_i(\mathbb{D}) \not\subset V$。

现在设 $S_2' \to S_2$ 是一个 $p(Z)$-容许修改。我们可以取一个 Z-容许修改 $S_1' \to S_1$，使得 $p': S_1' \to S_2'$ 存在。令 $Z' \subset S_1'$ 和 $p(Z)' \subset S_2'$ 分别为 Z 和 $p(Z)$的极小变换。于是 $p'(Z') \subset p(Z)'$。我们有 $\mathcal{F} \to Z'$。因此$\{p' \circ f_i\}_{i \in I} \to p(Z)'$。故 $\{p \circ f_i\}_{i \in I} \Rightarrow p(Z)$。□

3.2. 水平可积。设 $\iota: U \hookrightarrow A \times S$ 是一个浸入，即开浸入或闭浸入。假设 $q: U \to S$ 是 ´étale 的，其中 q 是浸入$U \hookrightarrow A \times S$与第二投影 $A \times S \to S$的复合态射。于是我们得到一个浸入 $D\iota: PTU \hookrightarrow PT(A \times S)$。由 (2.12)，我们有 $PT(A \times S) = A \times S_{1,\,A}$。因此，由浸入 $D\iota$与第二投影 $PT(A \times S) \to S_{1,\,A}$的复合态射，我们得到 $\iota': PTU \to S_{1,\,A}$。

定义 3.16。设 $Z \subset S_{1,\,A}$ 是一个不可约扎里斯基闭集。若存在一个浸入 $\iota: U \hookrightarrow A \times S$，使得 $q: U \to S$ 是 ´étale 的，且 $Z \cap \iota'(PTU) \subset Z$ 在 Z 中扎里斯基稠密，则称 Z 是水平可积的。

我们描述一个简单的示例。令 $S \hookrightarrow A \times S$ 是由常值映射 $S \to A$ 诱导的浸入，并令 $S^*_{1,\,A} \subset S_{1,\,A}$ 为 $PTS \to PT(A \times S) \to S_{1,\,A}$ 的像。也就是说，我们设

$$S^*_{1,A} = P(TS \times \{0\}). \tag{3.2}$$

那么，每个满足 $Z \subset S^*_{1,\,A}$ 的不可约扎里斯基闭集 $Z \subset S_{1,\,A}$ 都是水平可积的。

一般地，令 $\iota: U \hookrightarrow A \times S$ 为一个浸入，使得 $q: U \to S$ 是 ´étale。则诱导映射 $q': U_{1,\,A} \to S_{1,\,A}$ 也是 ´étale。令 $\varphi: U \to A$ 为 ι 与第一投影 $A \times S \to A$ 的复合态射。注意，浸入 $\iota: U \hookrightarrow A \times S$ 蕴含一个同构

$$\Phi: A \times U \to A \times U \tag{3.3}$$

在 U 上方，
由

$$\Phi(a, u) = (a - \varphi(u), u). \tag{3.4}$$

这定义了一个同构 $PT(A \times U) \to PT(A \times U)$。由此得到

$$D\Phi: U_{1,A} \to U_{1,A},$$

其为 U 上的同构。

引理 3.17。设$Z \subset S_{1,A}$是水平可积的。令 $\iota\colon U \hookrightarrow A\times S$为定义 3.16 中的一个浸入。则存在 $(q')^{-1}(Z)$ 的一个不可约分支$\Xi \subset U_{1,A}$，使得 $D\Phi(\Xi) \subset U^*_{1,A}$。

证明。浸入 ι 诱导了第二投影$A \times U \to U$的截面 $\iota_U\colon U \hookrightarrow A \times U$。随后，$\iota_U$如上所述诱导了 $\iota'_U\colon PTU \to U_{1,\ A}$。注意，$\iota'\colon PTU \to S_{1,\ A}$是$\iota'_U\colon PTU \to U_{1,\ A}$与 $q'\colon U_{1,\ A} \to S_{1,\ A}$的复合态射。设 $\Xi_1, \dots, \Xi_l$为 $(q')^{-1}(Z)$ 的不可约分支。那么我们有

$$\bigcup_i q'(\iota'_U(PTU) \cap \Xi_i) = \iota'(PTU) \cap Z.$$

存在 Ξ_i，使得 $q'(\iota'_U(PTU) \cap \Xi_i) \subset Z$在 Z 中扎里斯基稠密。我们记 $\Xi = \Xi_i$。由于 q'是 ´étale 的，因此 $\dim \Xi = \dim Z$。于是 $\iota'_U(PTU) \cap \Xi \subset \Xi$在 Ξ 中扎里斯基稠密。

由于 $U \xrightarrow{\iota_U} A\times U \xrightarrow{\Phi} A\times U$的复合态射是一个常值映射的图像，因此 $PTU \xrightarrow{\iota'_U} U_{1,\ A} \xrightarrow{D\Phi} U_{1,\ A}$的复合态射的像是$U^*_{1,\ A}$。因此 $\iota'_U(PTU) \subset (D\Phi)^{-1}U^*_{1,\ A}$，所以 $\Xi \cap \iota'_U(PTU) \subset (D\Phi)^{-1}U^*_{1,\ A}$。由于 $\Xi \cap \iota'_U(PTU)$ 在 Ξ中扎里斯基稠密，且 $(D\Phi)^{-1}U^*_{1,\ A}$是扎里斯基闭的，因此 $\Xi \subset (D\Phi)^{-1}U^*_{1,\ A}$。至此证明完毕。□

3.3. 命题 3.20 的陈述。我们称半阿贝尔簇 A 上的光滑正 (1, 1)-形式 ω_A 为不变的，若 ω_A 在 A 的平移下不变。

定义 3.18. 给定一个无限指标族 $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I} \in$ 全纯映射空间$(\mathbb{D}, A)$，我们将$\Pi(\mathcal{F})$记为满足以下性质的所有半阿贝尔子簇 $B \subset A$ 的集合：不存在无限子集 $J \subset I$，使得 $\{|(\varpi_B \circ f_i)'|_{\omega_{A/B}}\}_{i\in J}$在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于 0。其中，$\varpi_B\colon A \to A/B$ 是商映射，而 $|\cdot|_{\omega_{A/B}}$是 $T(A/B)$上的范数，该范数由 A/B上的一个不变的 (1,1)-形式$\omega_{A/B}$ 定义。

注意，每个半阿贝尔簇只包含至多可数多个半阿贝尔簇（参见[35, 推论 5.1。9]）。因此，$\Pi(\mathcal{F})$ 是一个可数集。我们注意到 $A \notin \Pi(\mathcal{F})$。因此，如果 $B \in \Pi(\mathcal{F})$，那么$E_{k,\ A,\ A/B} \subsetneq P_{k,\ A}$ 对所有 $k \geq 1$均成立。

对于非恒定全纯映射 $f\colon \mathbb{D} \to A\times S$，我们回顾一下 (2.13) 中的记号 $f_{S_{k,A}}\colon \mathbb{D} \to S_{k,A}$。若 $S = \{\mathrm{pt}\}$，则使用记号 $f_{P_{k,A}}\colon \mathbb{D} \to P_{k,A}$，其中 $P_{k,A} = \{\mathrm{pt}\}_{k,A}$。给定由 Hol$(\mathbb{D}, A)$ 中的非恒定全纯映射构成的无限指标族 $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$，我们定义 Hol$(\mathbb{D}, P_{k,A})$ 中的无限指标族 $\mathcal{F}_{P_{k,A}}$，如下所示

$$\mathcal{F}_{P_{k,A}} = ((f_i)_{P_{k,A}})_{i\in I}. \tag{3.5}$$

对于 Hol$(\mathbb{D}, A)$ 中由非恒定全纯映射构成的无限指标族 $\mathcal{F}$，我们考虑以下假设。

假设 3.19. 对所有 $k \geq 1$，LIM$(\mathcal{F}_{P_{k,A}}; \{E_{k,A,A/B}\}_{B\in\Pi(\mathcal{F})})$ 均存在。

若满足此假设，则记作 $T_k = \mathrm{LIM}(\mathcal{F}_{P_{k,A}}; \{E_{k,A,A/B}\}_{B\in\Pi(\mathcal{F})}) \subset P_{k,A}$。正如我们稍后将看到的（参见引理 12.2），Hol$(\mathbb{D}, A)$ 中的每个无限指标族 $\mathcal{F}$ 都包含一个满足此假设的无限子族。

现在，我们取一个满足假设 3.19 的无限指标族 $\mathcal{F} \in$全纯映射空间$(\mathbb{D}, A)$。令$k \geq 1$。我们断言

$$T_k \subset p(T_{k+1}), \tag{3.6}$$

其中 $p\colon P_{k+1,\ A} \to P_{k,\ A}$ 是自然映射。事实上，由引理 3.15，得 $\mathcal{F}_{P_{k,\ A}} \Rightarrow p(T_{k+1})$。因此，由引理 3.9，或者有 $T_k \subset p(T_{k+1})$，或者有 $p(T_{k+1}) \subsetneq T_k$。故反设 $p(T_{k+1}) \subsetneq T_k$。那么，根据 T_k的定义，得 $p(T_{k+1}) \subset \cup_{B\in\Pi(\mathcal{F})} E_{k,\ A,\ A/B}$。我们有 $p^{-1}(E_{k,\ A,\ A/B}) \subset E_{k+1,\ A,\ A/B}$（参见引理 2.2）。因此

$$T_{k+1} \subset p^{-1}(\cup_{B\in\Pi(\mathcal{F})} E_{k,A,A/B}) \subset \cup_{B\in\Pi(\mathcal{F})} E_{k+1,A,A/B}.$$

这是一个矛盾。因此，我们证明了（3.6）。

我们固定 $k \geq 0$。对于每个 $l \geq 1$，令 $p_l : P_{k+l,A} \to P_{k+1,A}$ 为自然映射。于是由 (3.6)，我们得到一个序列。

$$p_1(T_{k+1}) \subset p_2(T_{k+2}) \subset p_3(T_{k+3}) \subset \cdots .$$

根据注记 3.13 (2)，每个 $p_l(T_{k+l})$ 都是不可约的。因此，上述序列会稳定，即存在 $l_0 \geq 1$，使得对于所有 $l \geq l_0$，$p_l(T_{k+l}) = p_{l_0}(T_{k+l_0})$。我们令 $Z = p_{l_0}(T_{k+l_0})$，即

$$Z = \cup_{l \geq 1} p_l(T_{k+l}). \tag{3.7}$$

根据注记 2.3，我们有 $Z \subset P_{k+1,\,A} \subset (P_{k,\,A})_{1,\,A}$。

命题 3.20. 设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$ 是满足假设 3.19 的非恒定全纯映射的一个无限集。假设存在 $k \geq 0$，使得 $Z \subset P_{k+1,\,A} \subset (P_{k,\,A})_{1,\,A}$ 是水平可积的，其中 Z 由 (3.7) 定义。那么，对于每个光滑等变紧化 $\overline{A}$，$\mathcal{F}$ 都是正规的。也就是说，对于每个光滑等变紧化 $\overline{A}$ 以及 $\mathcal{F}$ 中的每个序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，都存在 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子列，它在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g : \mathbb{D} \to \overline{A}$。

此命题将在第 4–7 节的准备工作之后，于第 8 节中证明。

4. Nevanlinna theory

设 V 为一个代数簇。我们用 $\mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, V)$ 表示到 V 的所有多值全纯映射，即

$$\begin{array}{ccc} Y_f & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle \pi_f}\big\downarrow & & \\ \mathbb{D} & & \end{array}$$

其中 $\pi_f : Y_f \to \mathbb{D}$ 是一个真满射映射。

我们引入 Weil 函数的概念（例如参见 [44, 定义 2.2.1]）。设 V 为一个射影簇，$Z \subset V$ 为一个闭子概形。对于 Z，Weil 函数 λ_Z 是一个连续函数 $\lambda_Z : V - \mathrm{supp}\, Z \to \mathbb{R}$，满足以下条件。对于每个 $x \in V$，存在一个包含 x 的扎里斯基开邻域 $U \subset V$、定义 $Z \cap U$ 的全纯函数 $g_1, \ldots, g_l \in \Gamma(U, \mathcal{O}_V)$，以及定义在 U 上的连续函数 $\alpha : U \to \mathbb{R}$，使得

$$\left| \lambda_Z(y) + \log \max_{1 \leq i \leq l} \{|g_i(y)|\} \right| \leq \alpha(y)$$

对所有 $y \in U - \mathrm{supp}(Z \cap U)$。我们总结所需的 Weil 函数性质（参见 [44,第 2.2] 节）：

- 对于每个闭子概形，都存在一个 Weil 函数 λ_Z。$Z \subset V$
- 如果 λ_Z 和 λ'_Z 是 Z 的 Weil 函数，那么存在一个正常数 γ，使得 $|\lambda_Z(x) - \lambda'_Z(x)| \leq \gamma$ 对所有 $x \in V -$ 支集 Z 都成立。
- 若 λ_Z 是 Z 的 Weil 函数，则 λ_Z 有下界，即存在常数 γ 使得 $\lambda_Z(x) > \gamma$ 对所有 $x \in V -$ 支集 Z。特别地，我们可以选择一个 Weil 函数 λ_Z 使得 $\lambda_Z \geq 0$。
- 假设 $p : V \to V$ 是来自另一个射影代数簇 V 的态射。那么 $\lambda_Z \circ p$ 是拉回 $p^*Z \subset V$ 的 Weil 函数。
- 设 Z, Z' 是 V 的闭子概形。设 λ_Z 和 $\lambda_{Z'}$ 分别是 Z 和 Z' 的 Weil 函数。则 $\lambda_Z + \lambda_{Z'}$ 是 $Z + Z'$ 的 Weil 函数，其中 $Z + Z'$ 定义为 $\mathcal{I}_{Z+Z'} = \mathcal{I}_Z \cdot \mathcal{I}_{Z'}$。
- 设 Z, Z' 是 V 的闭子概形。假设 $\mathrm{supp}\ Z \subset \mathrm{supp}\ Z'$。则存在正常数 $\gamma_1 > 0$ 和 $\gamma_2 > 0$，使得 $\lambda_Z \leq \gamma_1 \lambda_{Z'} + \gamma_2$。
- 假设 V 是光滑的。令 D 为 V 上的一个有效 Cartier 除子。令 L 为与 D 相关联的 V 上的一个线丛，并令 h 为 L 上的一个光滑 Hermitian 度量。令 σ 为与 D 相关联的 L 的一个截面，使得对于所有 $x \in V$，都有 $h(\sigma(x)\ \sigma(x)) \leq 1$。那么 $\lambda_D(x) = -\log \sqrt{h(\sigma(x)\ \sigma(x))}$，其中 $x \in V - \mathrm{supp}\ D$，是 D 的一个 Weil 函数，且 $\lambda_D \geq 0$。

注 4.1. 在本文中，除非另有说明，我们总是假设 Weil 函数满足 $\lambda_Z \geq 0$ 。

我们引入 Nevanlinna 理论。设 V 是一个射影簇。设 $Z \subset V$ 是一个闭子概形。设 $f \in$ $\in$Hol$_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, V)$，使得 $f(Y_f) \not\subset$ 支集 Z。对于 $0 < s < r < 1$，定义

$$N_s(r, f, Z) = \frac{1}{\deg \pi_f} \int_s^r \left(\sum_{y \in Y_f(t)} \operatorname{ord}_y f^* Z \right) \frac{dt}{t},$$

其中 $Y_f(t) = \pi_f^{-1}(\mathbb{D}(t))$。设 λ_Z 是 Z 的 Weil 函数。定义

$$m(r, f, \lambda_Z) = \frac{1}{\deg \pi_f} \int_{y \in \partial Y_f(r)} \lambda_Z(f(y)) \frac{d \arg \pi_f(y)}{2\pi}.$$

定义

$$T_s(r, f, Z, \lambda_Z) = N_s(r, f, Z) + m(r, f, \lambda_Z) - m(s, f, \lambda_Z).$$

假设 V 光滑。设 ω 是 V 上的光滑 (1,1)-形式。设 $f \in$ $\in$Hol$_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, V)$。对于$0 \leq s < r < 1$，定义

$$T_s(r, f, \omega) = \frac{1}{\deg \pi_f} \int_s^r \frac{dt}{t} \int_{Y_f(t)} f^* \omega.$$

设 $D \subset V$ 是一个有效 Cartier 除子。设 L 是其关联线丛，且设 h 是 L 上的光滑 Hermitian 度量。设 $\omega_{(L,h)}$ 是赋度量线丛 (L, h) 的曲率形式。设 σ 是 L 的一个截面，使得 $D = (\sigma = 0)$。令 $\lambda_D(x) = -\log \sqrt{h(\sigma(x)\ \sigma(x))}$。第一主定理指出

$$T_s(r, f, \omega_{(L,h)}) = N_s(r, f, D) + m(r, f, \lambda_D) - m(s, f, \lambda_D). \tag{4.1}$$

我们给出证明的概要。由 Poincaŕe-Lelong 公式可得

$$2dd^c \log(1/||\sigma \circ f||) = -\sum_{y \in Y_f} (\operatorname{ord}_y f^* D)\delta_y + f^* \omega_{(L,h)},$$

其中， δ_y 是支撑在 y上的 Dirac 流。在 $Y_f(t)$上积分，得到

$$2\int_{Y_f(t)} dd^c \log(1/||\sigma \circ f||) = -\sum_{Y_f(t)} \operatorname{ord}_y f^* D + \int_{Y_f(t)} f^* \omega_{(L,h)}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} -N_s(r, f, D) + T_s(r, f, \omega_{(L,h)}) &= \frac{2}{\deg \pi_f} \int_s^r \frac{dt}{t} \int_{Y_f(t)} dd^c \log \left(\frac{1}{||\sigma \circ f||} \right) \\ &= \frac{2}{\deg \pi_f} \int_s^r \frac{dt}{t} \int_{\partial Y_f(t)} d^c \log \left(\frac{1}{||\sigma \circ f||} \right) \\ &= m(r, f, \lambda_D) - m(s, f, \lambda_D). \end{aligned}$$

这就证明了 (4.1)。

作为推论，我们有如下结论：设 V 是一个不一定光滑的射影代数簇。设 D 和 D' 是 V上线性等价的有效 Cartier 除子。则有

$$|T_s(r, f, D, \lambda_D) - T_s(r, f, D', \lambda_{D'})| \leq c \tag{4.2}$$

对所有 $0 < s < r < 1$，其中 c 是一个正常数，仅取决于 Weil 函数 λ_D 和 $\lambda_{D'}$的选择。事实上，若 D 和 D' 都非常 ample，则通过取嵌入 $\iota : V \hookrightarrow \mathbb{P}^k$ ，使得 $D = \iota^* H$ 和 $D' = \iota^* H'$ 分别为超平面截面 H 和 H'，便可将问题归结为射影空间的情形。在这种情况下，(4.2) 由 (4.1) 得出。一般而言，我们取一个有效 Cartier 除子 $E \subset V$，使得 $D + E$ 和 $D' + E$ 都非常 ample，从而将问题归结为前一种情形。

引理 4.2. 设 V 为一个射影簇。设 $D \subset V$ 为一个充足的有效 Cartier 除子。设 $Z \subset V$ 为一个闭子概形。设 $\lambda_D \geq 0$ 和 $\lambda_Z \geq 0$ 分别为D 和 Z的 Weil 函数。那么存在正常数 $c > 0$、 $c' > 0$，使得对于所有$f \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, V)$，若 $f(Y_f) \not\subset$支集 $D \cup$支集 Z，则有

$$T_s(r, f, Z, \lambda_Z) \leq cT_s(r, f, D, \lambda_D) + c'$$

对所有 $0 < s < r < 1$。

证明。令 $V' = \mathrm{Bl}_Z V$。令 $\varphi\colon V' \to V$为投影，并令 $\varphi^* Z \subset V'$为诱导的闭子概形。则 $\varphi^* Z$ 是 V'上的卡蒂埃除子。我们将其关联线丛记为 L。令 M 为与 D相关联的 V 上的丰沛线丛。则存在一个正整数 l，使得 $\varphi^* M^{\otimes l} \otimes L^{-1}$ 在 V' 上非常 ample（参见 [18, II, 命题 7.10 (b)]）。存在一个闭浸入 $\iota\colon V' \hookrightarrow \mathbb{P}^k$，使得 $\iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1) = \varphi^* M^{\otimes l} \otimes L^{-1}$。令 $H \subset \mathbb{P}^k$为来自 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)$ 的一个有效除子。则 $\varphi^*(lD)$ 与 $\varphi^* Z + \iota^* H$ 是线性等价的卡蒂埃除子。令 $h_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)}$为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)$ 上的 Fubini-Study 度量。令 σ 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)$ 的一个截面，使得
即 $H = (\sigma = 0)$。令 $\lambda_H(x) = -\log \sqrt{h_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)}(\sigma(x), \sigma(x))} \geq 0$。由 (4.2)，可得

$$T_s(r, f, Z, \lambda_Z) + T_s(r, \iota \circ f, H, \lambda_H) \leq lT_s(r, f, D, \lambda_D) + \alpha,$$

其中， α 是一个正常数，仅取决于 λ_D、 λ_Z 和 λ_H的选择。设$\omega_{\mathbb{P}^k} = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1), h_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)})$。由（4.1），我们有

$$T_s(r, \iota \circ f, H, \lambda_H) = T_s(r, \iota \circ f, \omega_{\mathbb{P}^k}) \geq 0.$$

因此我们得到

$$T_s(r, f, Z, \lambda_Z) \leq lT_s(r, f, D, \lambda_D) + \alpha.$$

这就完成了证明。 □

引理 4.3. 设 V 是一个光滑射影簇， V 上有一个光滑正 (1,1)-形式 ω_V。设 $Z \subset V$ 是一个带有 Weil 函数 $\lambda_Z \geq 0$ 的闭子概形。那么存在一个正常数 $c > 0$，使得对于所有满足 $f(Y_f) \not\subset \mathrm{supp}\ Z$ 的 $f \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, V)$，我们都有

$$m(r, f, \lambda_Z) \leq cT_s(r, f, \omega_V) + m(s, f, \lambda_Z) + c$$

对于所有 $s \in (0, 1)$ 和 $r \in (s, 1)$。

证明。由于 $N_s(r, f, Z) \geq 0$，我们有

$$m(r, f, \lambda_Z) - m(s, f, \lambda_Z) \leq T_s(r, f, Z, \lambda_Z).$$

设 $D_1, \ldots, D_l \subset V$ 为有效丰沛除子，使得 $D_1 \cap \cdots \cap D_l = \emptyset$。令 $\lambda_{D_i} \geq 0$ 为 D_i 的 Weil 函数。我们可以取 D_i，使得 $f(Y_f) \not\subset$支集 D_i。由引理 4.2，我们有

$$m(r, f, \lambda_Z) - m(s, f, \lambda_Z) \leq c_i T_s(r, f, D_i, \lambda_{D_i}) + c_i'.$$

由（4.1），我们有

$$T(r, f, D_i, \lambda_{D_i}) \leq c_i'' T_s(r, f, \omega_V). \tag{4.3}$$

我们令 $c = \max_{1 \leq i \leq l} \max\{c_i c_i'', c_i'\}$ 以使证明完备。 □

我们对 f 应用引理 4.3： $\mathbb{D} \to V$，其中 $f(0) \not\subset$支集 Z。那么当$s \to 0+$时， $m(s, f, \lambda_Z) \to \lambda_Z(f(0))$。因此我们得到

$$m(r, f, \lambda_Z) \leq cT_0(r, f, \omega_V) + \lambda_Z(f(0)) + c. \tag{4.4}$$

引理 4.4. 设 $p\colon \Sigma \to V$ 是射影簇之间的泛有限满射态射，其中 V 光滑。设 D 是 Σ 上的有效 Cartier 除子，并具有 Weil 函数 $\lambda_D \geq 0$。设 ω_V 是 V 上的光滑正 (1,1)-形式。设 $E \subset \Sigma$ 是 $\varphi\colon \Sigma \to \Sigma^+$ 的例外轨迹，其中 $\Sigma \to \Sigma^+ \to V$ 是 Stein 分解。设 $\lambda_E \geq 0$ 是 E 的 Weil 函数。则存在正常数 $c > 0$，使得对于所有 $f \in$全纯映射空间$_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, \Sigma)$，若 $f(Y_f) \not\subset$支集 $D \cup$支集 E，则有

$$T_s(r, f, D, \lambda_D) \leq cT_s(r, p \circ f, \omega_V) + cm(s, f, \lambda_E) + c$$

对于所有 $0 < s < r < 1$。

~证明。令 $D \subset \Sigma^+$ 为复合态射 $D \hookrightarrow \Sigma \to \Sigma^+$的概形论像。于是我们有 $\mathcal{I}_{\varphi^*\widetilde{D}} \subset \mathcal{I}_D \subset \mathcal{O}_\Sigma$。由于 $\mathcal{I}_D$ 是一个可逆层，我们有一个闭子概形 $Z \subset \widetilde{\Sigma}$，使得 $\varphi^*D = D + Z$。由于 $\Sigma - E \to \Sigma^+$ 是一个开浸入，注意到支集 $Z \subset E$。因此存在一个正常数 $c' > 0$，使得 $\lambda_Z \le c'\lambda_E + c'$。于是

$$\begin{aligned} T_s(r, f, D, \lambda_D) &\le T_s(r, f, \varphi^*\widetilde{D}, \varphi^*\lambda_{\widetilde{D}}) + m(s, f, \lambda_Z) \\ &\le T_s(r, \varphi \circ f, \widetilde{D}, \lambda_{\widetilde{D}}) + c'm(s, f, \lambda_E) + c'. \end{aligned}$$

令 G_1、...、$G_\nu \subset V$ 为有效丰沛除子，使得 $G_1 \cap \cdots \cap G_\nu = \emptyset$。由于 $q\colon\ \Sigma^+ \to V$是有限的，$q^*G_j \subset \Sigma^+$是丰沛的。我们可以取 G_j，使得 $\varphi \circ f(Y_f) \not\subset$ 支集 q^*G_j。根据引理 4.2，我们得到

$$\begin{aligned} T_s(r, \varphi \circ f, \widetilde{D}, \lambda_{\widetilde{D}}) &\le \gamma_j T_s(r, \varphi \circ f, q^*G_j, \lambda_{G_j} \circ q) + \gamma_j' \\ &= \gamma_j T_s(r, p \circ f, G_j, \lambda_{G_j}) + \gamma_j' \end{aligned}$$

由 (4.1)，我们有

$$T_s(r, p \circ f, G_j, \lambda_{G_j}) \le \mu_j T_s(r, p \circ f, \omega_V).$$

我们令 $c = \max_{1 \le j \le \nu} \max\{\gamma_j\mu_j, c' + \gamma_j'\}$ 以完成证明。 □

引理4.5。设 $p : \Sigma \to V$ 是光滑射影簇之间的泛有限满射态射。设 ω_Σ 和 ω_V 分别是 Σ 和 V 上的光滑正 (1,1)-形式。设 $E \subset \Sigma$是 $\varphi : \Sigma \to \Sigma^+$的例外轨迹，其中 $\Sigma \to \Sigma^+ \to V$ 是 Stein 分解。设 $\lambda_E \ge 0$ 是 E的 Weil函数。则存在正常数 $c > 0$，使得对于所有 $f \in$全纯映射空间$_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, \Sigma)$，满足 $f(Y_f) \not\subset$支集 E，我们有

$$T_s(r, f, \omega_\Sigma) \le cT_s(r, p \circ f, \omega_V) + cm(s, f, \lambda_E) + c$$

对所有 $0 < s < r < 1$。

证明。令 $D_1, \ldots, D_l \subset \Sigma$ 为线性等价的有效丰沛除子，使得 $D_1 \cap \cdots \cap D_l = \emptyset$。令 L 为 Σ 上的关联线丛。由于 L 是充足的，因此 L 上存在光滑的 Hermitian 度量 h，使得关联曲率形式 $\omega_{(L,\ h)}$ 为正。于是存在正常数 $\alpha > 0$，使得 $\omega_\Sigma < \alpha\omega_{(L,\ h)}$。令 σ_i 为 L 的一个截面，使得 ~~$D_i = (\sigma_i = 0)$~~。设 $\lambda_{D_i}(x) = -\log \sqrt{h(\sigma_i(x)}$ $\sigma_i(x))} \ge 0$。我们可以取 D_i，使得 $f(Y_f) \not\subset$支集 D_i。由 (4.1)，我们得到

$$T_s(r, f, \omega_\Sigma) \le \alpha T_s(r, f, D_i, \lambda_{D_i}).$$

由引理 4.4，我们有

$$T_s(r, f, D_i, \lambda_{D_i}) \le c_i T_s(r, p \circ f, \omega_V) + c_i m(s, f, \lambda_E) + c_i$$

对所有 $0 < s < r < 1$ 成立。令 $c = \max_{1 \le i \le l}\{\alpha c_i\}$，即可完成证明。 □

注 4.6。令 V 为光滑射影簇，令 $Z \subset V$ 为闭子概形。假设 $\mathrm{Bl}_Z V$ 是光滑的。那么存在正常数 $c > 0$，使得对所有 $f\colon\ \mathbb{D} \to V$ 满足 $f(\mathbb{D}) \not\subset$ 支集 Z，我们有

$$T_s(r, f, \omega_{\mathrm{Bl}_Z V}) \le cT_s(r, f, \omega_V) + cm(s, f, \lambda_{\mathrm{supp}\, Z}) + c \tag{4.5}$$

对所有 $s \in (0, 1)$ 和 $r \in (s, 1)$ 均成立。这由引理 4.5 应用于爆破 $_Z V \to V$ 得出。事实上，我们有 $m(s, f, \lambda_E) \le cm(s, f, \lambda_{\mathrm{supp}\, Z})$。

注 4.7. 设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, V)$ 是一个无限集，且 $Z \subset V$ 是一个扎里斯基闭集。对于 $s \in (0, 1)$、$\gamma > 0$ 以及 Z 的一个开邻域 $U \subset V$，我们定义

$$\mathcal{F}_{s,\gamma,U} = \{f \in \mathcal{F};\ f(z) \in U \text{ for } \gamma\text{-almost all } z \in \mathbb{D}(s)\}.$$

那么，如果 $s' \ge s$、$\gamma' \le \gamma$ 和 $U' \subset U$，则有 $\mathcal{F}_{s',\ \gamma',\ U'} \subset \mathcal{F}_{s,\ \gamma,\ U}$。我们指出，以下两个事实可直接由定义推出。

(1) $\mathcal{F} \not\to Z$ 当且仅当存在 $s \in (0,1)$、$\gamma > 0$、$Z \subset U \subset V$，使得 $\mathcal{F} - \mathcal{F}_{s,\gamma,U}$ 是无限的。
(2) 对所有无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，$\mathcal{G} \not\to Z$ 当且仅当存在 $s \in (0,1)$、$\gamma > 0$、$Z \subset U \subset V$，使得 $\mathcal{F}_{s,\gamma,U}$是有限的。此外，若 $f(\mathbb{D}) \not\subset Z$对所有 $f \in \mathcal{F}$都成立，则我们可以取 s、γ、U，使得 $\mathcal{F}_{s,\gamma,U} = \emptyset$。

引理 4.8. 设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, V)$ 是一个无限集，且 $Z \subset V$是一个扎里斯基闭集。假设 $\mathcal{F} \not\to Z$。那么存在一个无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，使得对于所有$f \in \mathcal{G}$，$f(\mathbb{D}) \not\subset Z$；并且对于所有无限子集 $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$，都有 $\mathcal{G}' \not\to Z$。

证明。我们可以取 $s \in (0,1)$、$\gamma > 0$、$Z \subset U \subset V$，使得 $\mathcal{F} - \mathcal{F}_{s,\gamma,U}$ 是无限集。令$\mathcal{G} = \mathcal{F} - \mathcal{F}_{s,\gamma,U}$。于是 $\mathcal{G}_{s,\gamma,U} = \mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{s,\gamma,U} = \emptyset$。因此，对于所有无限子集 $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$，都有 $\mathcal{G}' \not\to Z$。注意，对于所有 $f \in \mathcal{G}$，$f(\mathbb{D}) \not\subset Z$。□

引理 4.9. 设 V 是一个光滑射影簇。设 ω_V 是一个光滑正 (1,1)-形式。设$\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, V)$ 是一个无限子集。设 $Z \subset V$ 是一个闭子概形，其 Weil 函数为λ_Z。假设对于所有无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，$\mathcal{G} \not\to \mathrm{supp}\ Z$，并且对于所有$f \in \mathcal{F}$，$f(\mathbb{D}) \not\subset \mathrm{supp}\ Z$。那么存在 $\sigma \in (0,1)$ 和 $\alpha > 0$，使得对于所有 $s \in (\sigma, 1)$、$r \in (s, 1)$ 和 $f \in \mathcal{F}$，我们有

$$m(r, f, \lambda_Z) \le \frac{\alpha}{(r-s)} T_s(r, f, \omega_V) + \alpha.$$

为证明这个引理，我们从以下考虑开始。设 $w \in \mathbb{D}(r)$。令

$$\varphi_{w,r}(z) = r^2 \frac{w - z}{r^2 - \overline{w} z}, \tag{4.6}$$

它是一个同构 $\varphi_{w,\,r} : \mathbb{D}(r) \to \mathbb{D}(r)$，满足 $\varphi_{w,\,r}(0) = w$。我们有 $\varphi'_{w,\,r}(z) = r^2 \frac{|w|^2 - r^2}{(r^2 - wz)^2}$。在 $\mathbb{D}(r)$ 上应用最大值原理和最小值原理，得到

$$\frac{r - |w|}{r + |w|} \le |\varphi'_{w,r}(z)| \le \frac{r + |w|}{r - |w|} \tag{4.7}$$

对所有 $z \in \mathbb{D}(r)$ 均成立。

引理 4.10。设 $0 < \sigma < r < 1$。那么，对于 $\partial\mathbb{D}(r)$ 上的任意非负函数 Λ，以及$w \in \mathbb{D}(\sigma)$，我们有

$$\frac{r - \sigma}{r + \sigma} \int_0^{2\pi} \Lambda(\varphi_{w,r}(re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} \le \int_0^{2\pi} \Lambda(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \le \frac{r + \sigma}{r - \sigma} \int_0^{2\pi} \Lambda(\varphi_{w,r}(re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

证明。我们有

$$\int_0^{2\pi} \Lambda(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \Lambda(\varphi_{w,r}(re^{i\theta})) |\varphi'_{w,r}(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

因此，由 (4.7) 可得

$$\frac{r - |w|}{r + |w|} \int_0^{2\pi} \Lambda(\varphi_{w,r}(re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} \le \int_0^{2\pi} \Lambda(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \le \frac{r + |w|}{r - |w|} \int_0^{2\pi} \Lambda(\varphi_{w,r}(re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

由于 $r \in (\sigma, 1)$ 且 $w \in \mathbb{D}(\sigma)$，我们得到 $\frac{r+|w|}{r-|w|} < \frac{r+\sigma}{r-\sigma}$。证明完成。 □

在引理 4.9 的证明中，我们需要用到 [19, 引理 6.17]中的以下估计：若 μ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个总质量有限的质量分布 M，且 γ 是满足 $0 < \gamma < 1$的常数，则有

$$\int_{\mathbb{C}} \log \frac{1}{|z - w|} d\mu_z \le \tau_\gamma M \tag{4.8}$$

对于几乎所有的 $w \in \mathbb{C}$，其中 $\tau_\gamma > 0$ 是一个依赖于 γ 的正常数。例如，我们可以取 $\tau_\gamma = \log(6/\gamma)$。另见 [30, VIII, §3]。

引理4.9 的证明。根据注4.7，存在 $s_0 \in (0,1)$、$\gamma_0 > 0$ 以及支集 Z的一个开邻域 $U_0 \subset V$，使得 $\mathcal{F}_{s_0,\gamma_0,U_0} = \emptyset$。我们固定 $\sigma \in (s_0,1)$。令 $f \in \mathcal{F}$。根据引理 4.3，我们得到

$$m(r,f,\lambda_Z) \le cT_\sigma(r,f,\omega_V) + m(\sigma,f,\lambda_Z)$$

对所有 $r \in (\sigma,1)$，其中 $c>0$ 是一个仅依赖于 ω_V 和 λ_Z 的正常数。给定一个同构 $\varphi_{w,\sigma}\colon \mathbb{D}(\sigma) \to \mathbb{D}(\sigma)$，使得 $w \in \mathbb{D}(s_0)$ 且 $f(w) \notin$ 支集 Z，我们得到（参见 (4.4) ）

$$m(\sigma, f\circ\varphi_{w,\sigma},\lambda_Z) \le cT_0(\sigma, f\circ\varphi_{w,\sigma},\omega_V) + \lambda_Z(f(w)).$$

由引理 4.10 可得

$$m(\sigma,f,\lambda_Z) \le \frac{\sigma+s_0}{\sigma-s_0} m(\sigma, f\circ\varphi_{w,\sigma},\lambda_Z) \le \frac{2}{\sigma-s_0} m(\sigma, f\circ\varphi_{w,\sigma},\lambda_Z).$$

因此我们得到

$$m(\sigma,f,\lambda_Z) \le \frac{2c}{\sigma-s_0} T_0(\sigma, f\circ\varphi_{w,\sigma},\omega_V) + \frac{2}{\sigma-s_0}\lambda_Z(f(w)),$$

从而

$$m(r,f,\lambda_Z) \le cT_\sigma(r,f,\omega_V) + \frac{2c}{\sigma-s_0} T_0(\sigma, f\circ\varphi_{w,\sigma},\omega_V) + \frac{2}{\sigma-s_0}\lambda_Z(f(w)). \tag{4.9}$$

现在我们估计该估计式右侧。应用 (4.8)。我们选取 $w \in \mathbb{D}(s_0)$，使得 $f(w) \notin U_0$ 且

$$\int_{\mathbb{C}} \log\frac{1}{|z-w|} d\mu_z \le \tau_{\gamma_0} \int_{\mathbb{D}(\sigma)} f^*\omega_V,$$

其中 $\mu = \mathbb{I}_{\mathbb{D}(\sigma)} f^*\omega_V$。令 $\eta = \sup_{x\in V-U_0} \lambda_Z(x)$。于是我们有

$$\lambda_Z(f(w)) \le \eta. \tag{4.10}$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\sigma \frac{dt}{t}\int_{\mathbb{D}(t)} (f\circ\varphi_{w,\sigma})^*\omega_V &= \int_{\mathbb{C}} \log\frac{\sigma}{|\xi|} d(\varphi_{w,\sigma}^*\mu)_\xi = \int_{\mathbb{C}} \log\frac{\sigma}{|\varphi_{w,\sigma}^{-1}(z)|} d\mu_z \\ &= \int_{\mathbb{C}} \log\frac{|\sigma - (\overline{w}/\sigma)z|}{|z-w|} d\mu_z \le (\tau_{\gamma_0}+\log 2)\int_{\mathbb{D}(\sigma)} f^*\omega_V.\end{aligned}$$

因此

$$T_0(\sigma, f\circ\varphi_{w,\sigma},\omega_V) \le \frac{\tau_{\gamma_0}+\log 2}{r-s} T_s(r,f,\omega_V) \tag{4.11}$$

对于 $\sigma < s < r < 1$，我们有

$$T_\sigma(r,f,\omega_V) \le \frac{1}{\sigma(r-s)} T_s(r,f,\omega_V) \tag{4.12}$$

对于 $\sigma < s < r < 1$。将 (4.10)-(4.12) 代入 (4.9)，即可完成证明。这里我们设

$$\alpha = \max\left\{\frac{c}{\sigma} + \frac{2c(\tau_{\gamma_0}+\log 2)}{\sigma-s_0}, \frac{2\eta}{\sigma-s_0}\right\},$$

它与 $s \in (\sigma,1)$、$r \in (s,1)$ 和 $f \in \mathcal{F}$ 的选取无关。 □

5. Main proposition for the proof of Proposition 3.20

我们回顾 (2.13) 中的记号$f_{s_k,\,A}$。下面的命题在命题 3.20 的证明中起着重要作用。

命题 5.1. 设 $\overline{A}$ 是半阿贝尔簇 A的光滑射影等变紧化。设 S 是光滑射影簇。设 $\tau: S_{1,A} \to S$ 是自然投影。设 $Z \subset S_{1,A}$ 是不可约扎里斯基闭集。假设 Z 水平可积。那么存在一个真扎里斯基闭集 $W \subsetneq \tau(Z)$，具有如下性质：设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A \times S)$ 是非恒定全纯映射的一个无限集，满足 $(f_{S_{1,A}})_{f\in\mathcal{F}} \Rightarrow Z$。设 $\omega_{\overline{A}}$ 和 ω_S 分别是 $\overline{A}$ 和 S上的光滑正 (1, 1) 形式。设 $\lambda_W \geq 0$ 是 W的一个 Weil 函数。设 $s \in (1/2, 1)$ 且 $\delta > 0$。那么存在正常数 $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$，使得对于所有满足 $f_S(\mathbb{D}) \not\subset W$ 的 $f \in \mathcal{F}$，我们有

$$T_s(r, f_A, \omega_{\overline{A}}) \leq c_1 T_s(r, f_S, \omega_S) + c_2 m((s+r)/2, f_S, \lambda_W) + c_3 \tag{5.1}$$

对所有 $r \in (s,1)$，在某个例外集 $E \subset (s, 1)$ 之外，且其线性测度为 $|E| < \delta$。

本截余下部分将用于证明命题 5.1。

5.1. 命题 5.1 的证明概要。我们简要概述命题 5.1 的证明。回顾一下，半阿贝尔簇 A 是一个具有如下表达式的代数群。

$$0 \to T \to A \xrightarrow{\rho} A_0 \to 0, \tag{5.2}$$

其中 A_0 是阿贝尔簇，$T \simeq \mathbb{G}_m^l$ 是代数环面（参见附录 A）。

该 st 证明 (5.1 左端估计的出发点是以下结果).

引理 5.2. 设 $\overline{A}$ 是半阿贝尔簇 A的光滑射影等变紧化。设 $\rho: A \to A_0$ 是 (5.2) 中的典范商。设 $\omega_{\overline{A}}$ 是 $\overline{A}$ 上的光滑正 (1, 1)-形式，ω_{A_0} 是 A_0上的不变正 (1, 1)-形式。对于 ∂A的一个不可约分支 D，设 $\lambda_D \geq 0$ 是一个 Weil 函数。那么存在正常数 $c > 0$，使得对于所有 $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$，我们有

$$T_s(r, g, \omega_{\overline{A}}) \leq c T_s(r, \rho \circ g, \omega_{A_0}) + c \sum_{D\subset\partial A} |m(r, g, \lambda_D) - m((s+r)/2, g, \lambda_D)| + c \tag{5.3}$$

对于所有 $s \in (1/2, 1)$ 和 $r \in (s, 1)$，其中 $D \subset \partial A$ 遍历 ∂A的所有不可约分支 .

证明。我们首先注意到

$$T_s(r, g, \omega_{\overline{A}}) \leq 4 T_\sigma(r, g, \omega_{\overline{A}}) \tag{5.4}$$

对于所有 $1/2 < s < r < 1$，其中 $\sigma = (s + r)/2$。

令 $\overline{A} = (\overline{T} \times A)/T$（参见引理 A.6）。那么 $\overline{T} \subset \overline{A}$ 是射影的。由于 T 的皮卡群是平凡的，我们可以在 $\overline{T}$ 上取一个（不一定有效的）非常丰沛除子 D_0，使得 $\mathrm{supp}\ D_0 \subset \partial T$。注意，$D_0$是 T-不变的。令 $D = (D_0 \times A)/T$。那么 D是 $\overline{A}$上的卡蒂埃除子。我们取 A_0的一个扎里斯基开覆盖 $\{U_i\}$，使得 $\bar{\rho}^{-1}(U_i) = U_i \times \overline{T}$，其中 $\bar{\rho}: \overline{A} \to A_0$是 ρ的延拓。于是有 $D \cap \bar{\rho}^{-1}(U_i) = D_0 \times U_i$。因此，对于 [17, Def. 13.52]意义下的 $\bar{\rho}$，$\mathcal{O}_{\overline{A}}(D)$ 是非常丰沛的。由于 A_0 是射影的，我们可以在 A_0上取一个丰沛线丛 L。根据 [17, Prop. 13.65]，，存在正整数 $n \geq 1$，使得 $\mathcal{O}_{\overline{A}}(D) \otimes \bar{\rho}^* L^{\otimes k}$在 $\overline{A}$上是丰沛的。根据 D的正部和负部，我们将其写作 $D = D^+ - D^-$。由 (4.1)，存在正常数 $\alpha > 0$ 和 $\alpha' > 0$，使得对于所有 $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$，我们有

$$T_s(r, g, \omega_{\overline{A}}) \leq \alpha T_s(r, \rho \circ g, \omega_{A_0}) + \alpha' T_\sigma(r, g, D^+, \lambda_{D^+}) - \alpha' T_\sigma(r, g, D^-, \lambda_{D^-}) + \alpha \tag{5.5}$$

对所有 $1/2 < s < r < 1$（参见 (5.4)）。对于 $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$，我们有 $N_\sigma(r, g, D^+) = 0$，因此

$$T_\sigma(r, g, D^+, \lambda_{D^+}) = m(r, g, \lambda_{D^+}) - m(\sigma, g, \lambda_{D^+}).$$

同理，我们有 $T_\sigma(r, g, D^-, \lambda_{D^-}) = m(r, g, \lambda_{D^-}) - m(\sigma, g, \lambda_{D^-})$。因此

$$T_\sigma(r, g, D^+, \lambda_{D^+}) - T_\sigma(r, g, D^-, \lambda_{D^-}) \leq \sum_{D\subset\partial A} |m(r, g, \lambda_D) - m(\sigma, g, \lambda_D)|,$$

其中，$D \subset \partial A$ 遍历 ∂A的所有不可约分支。将此估计与 (5.5) 结合，我们便完成了引理的证明。这里设 $c = \max\{\alpha, \alpha'\}$。□

命题 5.1 的证明大致如下。由于 $Z \subset S_{1,\ A}$ 是水平可积的，我们可以取定义 3.16 中的 $U \hookrightarrow A \times S$。然后，如同 (3.3) 中那样，我们得到一个同构 $\hat{\Phi}\colon\ A \times U \to A \times U$。对于每个 $f \in \mathcal{F}$，我们可以取一个提升 $f \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, A \times \Sigma)$，使得 $\hat{}\{(\Phi \circ f)_{U_{1,\ A}}\}_{f\in\mathcal{F}}$借助引理 3.17，变得非常接近 $U^*_{1,\ A}$。构造 f 的详细过程见第 5.2 小节。于是，$(\Phi \circ f)_A$ 的导数有界于 $\hat{}\,\hat{}\,(\Phi \circ f)_U$ 的导数。因此，相较于 f，更容易证明 $\Phi \circ f$ 的估计 (5.1)。

然而，要严谨地完成这一论证，还有若干问题需要解决。

- $\{(\Phi \circ f)\hat{}_{U_{1,A}}\}_{f\in\mathcal{F}}$仅在某个分支 $\Omega'_f \to \Omega_f$ 上的某个区域$\Omega_f \subset \mathbb{D}$内才会变得非常接近$U^*_{1,A}$。具体情况将在下文的定义 5.3 中说明。
- 我们需要将 U 紧化。此外，为了严谨地完成论证，我们需要仔细地进行紧化 Σ。这是第 5.3 小节的主题。
  在对 U进行紧化后，Φ 只能延拓为有理映射$\overline{A} \times \Sigma \dashrightarrow \overline{A} \times \Sigma$。$\hat{}$因此 $(\Phi \circ f)_{\ A}$ 可能会触及 $\overline{A}$ 的边界。
- 我们分别估计（5.3）右侧的第一项和第二项。参见引理 5.11和5.17。第一项更容易估计。原因是，由于 $(\rho\circ f_A)^*\omega_{A_0}$ 是次调和的，我们可以根据引理7.1]，直接利用 $\rho\circ f_A$ 在Ω_f上的信息来估计 $T_s(r, \rho\circ f_A, \omega_{A_0})$。估计第二项的主要技术将在第 5.5–5.7 小节中讨论。

现在我们引入以下定义。

定义 5.3。设 V 是一个代数簇。设 $\mathcal{G} = ((g_i, \Omega_i, \Omega'_i))_{i\in I}$ 是三元组 $(g_i, \Omega_i, \Omega'_i)$ 的一个无限指标族，其中 $g_i \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, V)$，$\Omega_i \subset \mathbb{D}$ 是一个连通开子集，且 $\Omega'_i \subset Y_{g_i}$ 是 $\pi^{-1}_{g_i}(\Omega_i)$ 的一个连通分支。设 $T \subset V$ 是一个扎里斯基闭集。若满足以下条件，我们就记作 $\mathcal{G} \rightsquigarrow T$：对于任意 $0 < s < 1$、$\gamma > 0$ 以及满足 $T \subset U$ 的开子集 $U \subset V$，都存在一个有限子集 $E \subset I$，使得对于每个 $i \in I - E$，都有

- $z \in \Omega_i$ 对于几乎所有 γ $z \in \mathbb{D}(s)$,
- $g_i(\Omega'_i) \subset U$。

我们在上述定义的语境下，准备一些 Nevanlinna 理论中的记号。设Σ 是一个射影簇，$Z \subset \Sigma$ 是一个带有 Weil 函数 λ_Z的闭子概形。设 (g, Ω, Ω') 是定义 5.3 中的三元组，即 $g \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, \Sigma)$，$\Omega \subset \mathbb{D}$ 是一个连通开子集，且 $\Omega' \subset Y_g$ 是 $\pi^{-1}_g(\Omega)$ 的一个连通分支。假设 $g(Y_g) \not\subset$ 支集Z。令

$$m(r, (g, \Omega, \Omega'), \lambda_Z) = \frac{1}{\deg(\pi_g|_{\Omega'})} \int_{y\in\Omega'\cap\partial Y_g(r)} \lambda_Z(g(y)) \frac{d \arg \pi_g(y)}{2\pi}, \tag{5.6}$$

其中 $\deg(\pi_g|_{\Omega'})$ 是限制 $\pi_g|_{\Omega'} : \Omega' \to \Omega$ 的次数。

假设 Σ 光滑。设 ω 是 Σ上的一个光滑 (1, 1)-形式。令

$$T_s(r, (g, \Omega, \Omega'), \omega) = \frac{1}{\deg(\pi_g|_{\Omega'})} \int_s^r \frac{dt}{t} \int_{\Omega'\cap Y_g(t)} g^*\omega. \tag{5.7}$$

在本节余下部分，A 是一个半阿贝尔簇，S 是一个光滑射影簇，而$Z \subset S_{1,\ A}$ 是一个水平可积的不可约扎里斯基闭集。

5.2. $f \in \mathcal{F}$的良好提升。由于$Z \subset S_{1,\ A}$是水平可积的，我们取定义 3.16 中的 $\iota\colon\ U \hookrightarrow A\times S$。由此得到同构

$$\Phi : A \times U \to A \times U$$

由（3.3）得到。我们应用引理 3.17，得到 $(q')^{-1}(Z)$ 的一个不可约分支$\Xi \subset U_{1,\ A}$，使得

$$D\Phi(\Xi) \subset U^*_{1,A}, \tag{5.8}$$

其中 $q' : U_{1,A} \to S_{1,A}$ 由 $q\colon\ U \to S$诱导。令 $\Theta \subset U$ 为 Ξ 在$U_{1,A} \to U$下的像。由于$U_{1,\ A} \to U$ 是真映射，Θ 是 U 的扎里斯基闭子集。令 Σ 为一个光滑的

对 U 的紧化，使得 $q: U \to S$ 延拓为一个态射 $\bar{q}: \Sigma \to S$。我们将$\overline{\Theta} \subset \Sigma$ 记为 Θ 在 Σ中的扎里斯基闭包。

备注 5.4。（1）设 $g \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, A \times \Sigma)$ 满足 $g_\Sigma(Y_g) \not\subset \partial U$。那么我们可以定义

$$\Phi \circ g : Y_g \to \overline{A} \times \Sigma$$

如下。令 $Q_g = (g_\Sigma)^{-1}(\partial U)$。那么 $Q_g \subset Y_g$ 是一个离散子集。因此我们得到

$$\Phi \circ (g|_{Y_g \backslash Q_g}) : Y_g \backslash Q_g \to A \times U \subset \overline{A} \times \Sigma.$$

由于$\overline{A} \times \Sigma$是紧的且 $\Phi: \overline{A} \times \Sigma \dashrightarrow \overline{A} \times \Sigma$是有理的，$\Phi \circ (g|_{Y_{\hat{f}} \backslash Q_f})$延拓为全纯映射 $\Phi \circ g : Y_g \to \overline{A} \times \Sigma$。根据构造，我们有$(\Phi \circ g)_{\overline{A}}(Y_g) \not\subset \partial A$。

(2) 设 $h \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, \overline{A} \times \Sigma)$ 是非恒定的，且 $h_{\overline{A}}(Y_h) \not\subset \partial A$。那么我们可以如下定义$h_{\Sigma_{1,A}}: Y_h \to \Sigma_{1,A}$。令 $R_h = (h_{\overline{A}})^{-1}(\partial A)$。那么 $R_h \subset Y_h$ 是一个离散子集。我们得到$h|_{Y_h \backslash R_h}: Y_h \backslash R_h \to A \times \Sigma$。由于 h 是非恒定的，这诱导出 $(h|_{Y_h \backslash Q_h})_{\Sigma_{1,A}}: Y_h \backslash Q_h \to \Sigma_{1,A}$。由于 $\Sigma_{1,A}$ 是紧的，我们得到 $h_{\Sigma_{1,A}}: Y_h \to \Sigma_{1,A}$。

采用这些记号，我们陈述以下引理。

引理 5.5. 设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A \times S)$ 是一个由非恒定全纯映射组成的无限集，且满足 $(f_{S_{1,A}})_{f \in \mathcal{F}} \Rightarrow Z$。那么存在一个有限子集 $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$，具有以下性质：对于每个 $f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{E}$，存在

- 一个 $f \in \hat{\mathrm{Hol}}(\mathbb{D}, A \times S)$ 的提升 $\hat{f} \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, A \times \Sigma)$,
- 一个连通开子集 $\Omega_f \subset \mathbb{D}$,
- $\pi^{-1} \circ f(\Omega_f) \subset Y \circ f$ 的一个连通分支 Ω'_f

使得

$$\hat{f}_\Sigma(Y_{\hat{f}}) \not\subset \partial U, \tag{5.9}$$

$$((\hat{f}_\Sigma, \Omega_f, \Omega'_f))_{f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{E}} \rightsquigarrow \overline{\Theta}, \tag{5.10}$$

$$(((\Phi \circ \hat{f})_{\Sigma_{1,A}}, \Omega_f, \Omega'_f))_{f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{E}} \rightsquigarrow \Sigma^*_{1,A} \tag{5.11}$$

and

$$\deg \pi_{\hat{f}} \leq [\mathbb{C}(S) : \mathbb{C}(\Sigma)]. \tag{5.12}$$

在证明这个引理之前，我们需要做一些准备。

5.2.1. 证明引理 5.5 的预备引理。

引理 5.6. 设 $s \in (0,1)$ 且 $\gamma > 0$。设 $V \subset \mathbb{D}(s)$ 是一个开集，使得对于几乎所有 $z \in \mathbb{D}(s)$, $z \in V$ forγ。设 $s' \in (0, s)$。则存在一个开子集 $\Omega \subset V$，使得 Ω 连通，且对于几乎所有 $z \in \mathbb{D}(s')$, $z \in \Omega$ for 2γ。

证明。令 $K = \overline{\mathbb{D}(s')} \backslash V$。则 K 是紧的。我们首先证明存在有限个闭圆盘的修正 $D_1, \ldots, D_n$，使得

(1) $K \subset \cup_{i=1}^n D_i$，且 (2) $\sum_{i=1}^n r_i < 2\gamma$，其中 r_i 是 D_i 的半径。

事实上，令 $\{E_i\}$ 为一个闭圆盘的可数集，使得 $\mathbb{D}(s) \backslash V \subset \cup E_i$，且 E_i 的半径之和小于 γ。令 O_i 为开圆盘，其中心与 E_i 的中心相同，半径为 E_i 半径的两倍。我们有 $K \subset \cup O_i$。因此，我们可以取 O_1、O_2、.....、O_n，使得 $K \subset O_1 \cup \cdots \cup O_n$，且 O_i 的半径之和小于 2γ。于是，闭圆盘 $\overline{O_1}$、.....、$\overline{O_n}$ 满足我们的要求。

现在令 n 为满足以下条件的最小值：存在闭圆盘 $D_1, \ldots, D_n$，使其具有上述性质 (1) 和 (2)。我们声称，对于 $i \neq j$, $D_i \cap D_j = \emptyset$。为证明这一点，反设存在 $i \neq j$，使得 $D_i \cap D_j \neq \emptyset$。不失一般性，我们可以假设 $i = 1$ 且 $j = 2$。令 p_1, p_2 分别为 D_1, D_2 的中心。令 p 为这样的点：它

将线段 $\overline{p_1p_2}$ 按 $\overline{p_1p}:\overline{pp_2}=r_2:r_1$ 的比例内分。令 D 为以 p 为中心、半径等于 r_1+r_2 的闭圆盘。于是 $D_1\cup D_2\subset D$。因此，闭圆盘 $D, D_3, \ldots, D_n$ 满足上述性质 (1) 和 (2)。这与 n 的选取矛盾。因此，我们证明了对于 $i\neq j$， $D_i\cap D_j=\emptyset$。现在令 $\Omega=\mathbb{D}(s')\setminus\cup_{i=1}^n D_i$。那么 Ω 是开且连通的。对于几乎所有 2γ- $z\in\mathbb{D}(s')$，我们有 $z\in\Omega$。□

引理 5.7. 设 V 和 V 为光滑射影簇。设 $p: V\to V$ 为一个真、满射且一般有限的态射。设 $V_0\subset V$ 为一个非空扎里斯基开集，使得 $p: V\to V$ 在 V_0 上是拟有限的。设 $Z\subset V$ 为一个不可约扎里斯基闭集。设 $Z\subset V$ 为 $p^{-1}(Z)$ 的一个不可约分支，满足 $\tilde{Z}\cap\tilde{V}_0\neq\emptyset$。设 $\mathcal{G}=(g_i)_{i\in I}$ 为 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, V)$ 中的一个无限指标族，满足 $\mathcal{G}\Rightarrow Z$。那么，除有限多个 $i\in I$ 外，存在

- 一个 g_i 的提升 $\tilde{g}_i\in\mathrm{H\tilde{o}l}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, V)$，
- 一个连通开子集 $\Omega_i\subset\mathbb{D}$，以及
- 一个连通分支 Ω_i' 属于 $\pi_{\tilde{g}_i}^{-1}(\Omega_i)\subset Y_{\tilde{g}_i}$

使得

- $((\tilde{g}_i, \Omega_i, \Omega_i'))_{i\in I}\rightsquigarrow\tilde{Z}$，
- 次数 $\deg\pi_{\tilde{g}_i}\leq[\mathbb{C}(V):\mathbb{C}(V)]$，且
- $\tilde{g}_i(Y_{\tilde{g}_i})\not\subset V\setminus V_0$。

证明。我们构造一个 Z-容许修改 $V'\to V$ 和一个 Z-容许修改 $V'\to V$，使其满足以下性质（参见定义 3.1）：

- p 诱导出一个态射 $p': V'\to V'$，其具有如下交换图

$$\begin{array}{ccc}\tilde{V} & \longleftarrow & \tilde{V}' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ V & \longleftarrow & V'\end{array}$$

- p' 在 Z' 的某个邻域上是拟有限的，其中 $Z'\subset V'$ 是极小变换。
- $(p')^{-1}(Z')=Z'\amalg E$，其中 $Z'\subset V'$ 是极小变换。

我们如下构造这些对象。我们将 $p^{-1}(Z)$ 分解为不可约分支，即 $p^{-1}(Z)=\tilde{Z}\cup F_1\cup\cdots\cup F_k$，并令 $F=F_1\cup\cdots\cup F_k$。将 $\tilde{V}$ 替换为 $\mathrm{Bl}_{\tilde{Z}\cap F}\tilde{V}$ 后，不妨设 $Z\cap F_j=\emptyset$，如果 $p(F_j)=Z$（参见（3.1）的证明）。根据引理 B.2，我们可以取一个 Z-容许的修改 $V'\to V$，使得 $V'|_{Z'}\to Z'$ 是平坦的。此外，我们可以假设 V' 是光滑的。于是 $\tilde{V}'|_{Z'}\to Z'$ 是一个开映射。因此，$(p')^{-1}(Z')$ 的每个不可约分支都支配 Z'。所以 $\tilde{Z}'$ 是 $(p')^{-1}(Z')$ 的一个连通分支。因此 $\tilde{Z}'\to Z'$ 是平坦的，从而是有限的。因此，p' 在 $\tilde{Z}'$ 的某个邻域上是拟有限的，并且 $(p')^{-1}(Z')=\tilde{Z}'\amalg E$。

取 $T\subset V'$ 为 Z' 的扎里斯基开邻域，使得 $p'|_T: T\to V'$ 拟有限且 $T\cap E=\emptyset$。于是，根据扎里斯基主定理，存在一个紧化 $T\subset\overline{T}$ 和一个有限映射

$$p'': \overline{T}\to V'$$

使得 $p''|_T=p'|_T$。我们有 $(p'')^{-1}(Z')=\tilde{Z}'\amalg E'$。取 $\tilde{Z}'\subset O_{\tilde{Z}'}$ 和 $E'\subset O_{E'}$ 为 $\overline{T}$ 中的开邻域，使得 $O_{\tilde{Z}'}\cap O_{E'}=\emptyset$。不妨设 $O_{\tilde{Z}'}\subset T$。注意，$p''\left(\overline{T}-(O_{\tilde{Z}'}\cup O_{E'})\right)\subset V'$ 是紧的，且与 Z' 不相交。因此，我们可以取一个开邻域 $Z'\subset O_{Z'}$，使其与 $p''\left(\overline{T}-(O_{\tilde{Z}'}\cup O_E)\right)$ 不相交。于是 $(p'')^{-1}(O_{Z'})\subset O_{\tilde{Z}'}\cup O_{E'}$。我们用 $(p'')^{-1}(O_{Z'})\cap O_{\tilde{Z}'}$ 替换 $O_{\tilde{Z}'}$。于是 $p''|_{O_{\tilde{Z}'}}: O_{\tilde{Z}'}\to O_{Z'}$ 是一个真映射。由于 V' 光滑，根据雷默特开映射定理，有限映射 $p'': \overline{T}\to V'$ 是开映射。因此，$p''|_{O_{\tilde{Z}'}}: O_{\tilde{Z}'}\to O_{Z'}$ 是真且开的。

根据 $\mathcal{G}\Rightarrow Z$，我们有 $\mathcal{G}\to Z'$。在此，我们从 I 中移除有限个元素后，假设每个 $g_i: \mathbb{D}\to V$ 都有唯一的提升 $\mathbb{D}\to V'$（参见注 3.3），并继续使用相同的记号 g_i。设 $O_{Z'}\ni U_1\ni U_2\ni\cdots$ 是 Z' 的一个开邻域序列，使得

$O_{Z'}$ 中 Z' 的每个开邻域，对于充分大的 n，都包含某个 U_n。令 $\gamma_n = \frac{1}{2^{n+1}}$，并且

$$I_n = \{i \in I;\ g_i(z) \in U_n \text{ for } \gamma_n\text{-almost all } z \in \mathbb{D}(1-\gamma_n)\}.$$

于是我们得到一个递降序列 $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$。根据 $\mathcal{G} \to Z'$，对于每个n， $I\backslash I_n$ 都是一个有限集。我们设 $I_\infty = \cap_n I_n$。

对于 $i \in I_1$，我们将构造一个提升 $\tilde{g}_i \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, \overline{T})$、一个连通开集 $\Omega_i \subset \mathbb{D}$以及 $\pi_{\tilde{g}_i}^{-1}(\Omega_i)$ 的一个连通分支 $\Omega_i' \subset Y_{\tilde{g}_i}$。我们先考虑 $i \notin I_\infty$ 的情形。我们固定$i \in I_1\backslash I_\infty$。我们取 n_i，使得 $i \in I_{n_i}$，但 $i \notin I_{n_i+1}$。由引理 5.6，我们可以取一个开集 $\Omega_i \subset g_i^{-1}(U_{n_i}) \cap \mathbb{D}(1-2\gamma_{n_i})$，使得 Ω_i 连通，并且对 $2\gamma_{n_i}$-几乎所有$z \in \mathbb{D}(1-2\gamma_{n_i})$，都有 $z \in \Omega_i$。我们取 h：通过拉回得到 $\mathcal{Y} \to \overline{T}$，其中 $\mathcal{Y}$ 是一个具有有限映射 $q : \mathcal{Y} \to \mathbb{D}$ 的一维解析空间。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{h} & \overline{T} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p''} \\ \mathbb{D} & \xrightarrow[g_i]{} & V' \end{array}$$

令 $\mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_l$ 为 $\mathcal{Y}$ 的不可约分支。我们可以取 $\mathcal{Y}_j$，其中 $1 \le j \le l$，使得 $h(\mathcal{Y}_j) \cap O_{\tilde{Z}'} \neq \emptyset$。于是 $h|_{\mathcal{Y}_j} : \mathcal{Y}_j \to \overline{T}$定义了 g_i的一个提升 $\tilde{g}_i \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, \overline{T})$，使得$\tilde{g}_i(Y_{\tilde{g}_i}) \cap O_{\tilde{Z}'} \neq \emptyset$。我们取 $\pi_{\tilde{g}_i}^{-1}(\Omega_i)$ 的一个连通分支 Ω_i'，使得 $\tilde{g}_i(\Omega_i') \cap O_{\tilde{Z}'} \neq \emptyset$。由 $g_i(\Omega_i) \subset U_{n_i} \subset O_{Z'}$，可得 $\tilde{g}_i(\Omega_i') \subset O_{\tilde{Z}'} \cup O_E$。因此，由于 Ω_i' 连通，我们有

$$\tilde{g}_i(\Omega_i') \subset O_{\tilde{Z}'} \tag{5.13}$$

当 $i \in I_\infty$ 时，我们有 $g_i(\mathbb{D}) \subset Z'$。由于 $Z' \to Z'$ 是一个有限映射，我们有 g_i的提升 $\tilde{g}_i : Y_{\tilde{g}_i} \to Z'$。我们设 $\Omega_i = \mathbb{D}$ 和 $\Omega_i' = Y_{\tilde{g}_i}$。因此，我们构造了 $\tilde{g}_i \in$ 复平面$_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, \overline{T})$、$\Omega_i$ 和 Ω_i'，对所有 $i \in I_1$均成立。

我们声称，对所有 $i \in I_n$，都有 $\tilde{g}_i(\Omega_i') \subset (p'')^{-1}(U_n) \cap O_{\tilde{Z}'}$。由 $\tilde{g}_i(Y_{\tilde{g}_i}) \subset Z'$，这对$i \in I_\infty$ 显然成立。当 $i \notin I_\infty$时，我们有 $n_i \ge n$，因此 $g_i(\Omega_i) \subset U_{n_i} \subset U_n$。于是$\tilde{g}_i(\Omega_i') \subset (p'')^{-1}(U_n) \cap O_{\tilde{Z}'}$（参见（5.13））。这就证明了我们的断言。

现在我们证明 $((\tilde{g}_i, \Omega_i, \Omega_i'))_{i\in I_1} \rightsquigarrow Z'$。设 $M \subset T$ 是 Z' 的一个开邻域。取 $s \in (0,1)$ 且满足 $\delta > 0$。我们取充分大的 n，使得 $s < 1-2\gamma_n$ 且 $2\gamma_n < \delta$。注意到$O_{\tilde{Z}'}\backslash M$是 $O_{\tilde{Z}'}$的一个闭子集。由 $(p'')^{-1}(Z') = \Xi' \amalg E'$，我们有 $(p'')^{-1}(Z') \cap O_{\tilde{Z}'} = \tilde{Z}'$。因此 $Z' \cap p''(O_{\tilde{Z}'}\backslash M) = \emptyset$。由于 $p''|_{O_{\tilde{Z}'}} : O_{\tilde{Z}'} \to O_{Z'}$是真， $p''(O_{\tilde{Z}'}\backslash M)$是 $O_{Z'}$的一个闭子集。因此存在 n'，使得 $U_{n'} \cap p''(O_{\tilde{Z}'}\backslash M) = \emptyset$。由此我们有 $(p'')^{-1}(U_{n'}) \cap O_{\tilde{Z}'} \subset M$。设 $n'' = \max\{n, n'\}$。于是对所有 $i \in I_{n''}$，都有 $\tilde{g}_i(\Omega_i') \subset M$，并且对 δ- 几乎所有 $z \in \mathbb{D}(s)$，都有 $z \in \Omega_i$。因此 $((\tilde{g}_i, \Omega_i, \Omega_i'))_{i\in I_1} \rightsquigarrow Z'$。

到目前为止，我们考虑的是 $\tilde{g}_i$ 到 $\overline{T}$中的映射。由于双有理映射 $\overline{T} \dashrightarrow V'$ 在 T和 $O_{\tilde{Z}'} \subset T$上是一个同构，因此在考虑 的情况下，我们有 $((\tilde{g}_i, \Omega_i, \Omega_i'))_{i\in I_1} \rightsquigarrow Z'$ $\tilde{g}_i \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, V')$。因此，在考虑 $\tilde{g}_i \in$ 的情况下，我们有 $((\tilde{g}_i, \Omega_i, \Omega_i'))_{i\in I_1} \rightsquigarrow Z$ $\mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, V)$。根据构造，我们有 $\deg \pi_{\tilde{g}_i} \le [\mathbb{C}(V) : \mathbb{C}(V)]$。

现在令 $V_0' \subset V'$ 为 $V' \to V$映射下 V_0 的逆像。我们定义 $J \subset I_1$ 为满足以下条件的 集合： $i \in I_1$ 使得 $\tilde{g}_i(Y_{\tilde{g}_i}) \subset V'\backslash V_0'$，其中考虑 $\tilde{g}_i \in$ 全纯映射空间$_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, V')$。为证明$J$ 是有限的，我们反设 J 是无限的。于是存在一个不可约分支 D属于 $V'\backslash V_0'$，使得 $\tilde{g}_i(Y_{\tilde{g}_i}) \subset D$对无穷多个 $i \in J$成立。由 $((\tilde{g}_i, \Omega_i, \Omega_i'))_{i\in I_1} \rightsquigarrow Z'$，我们有$D \cap Z' \neq \emptyset$。因此 $T \cap D \neq \emptyset$。因此，对无穷多个 $i \in J$， $Z' \not\subset p'(D)$且 $g_i(\mathbb{D}) \subset p'(D)$。这与假设 $\mathcal{G} \Rightarrow Z$ 矛盾。□

5.2.2. 引理 5.5 的证明。我们首先固定$\Sigma_{1,A}$ 的一个修改，如下所示。同构$D\Phi : U_{1,A} \to U_{1,A}$ 诱导出一个有理映射 $\Sigma_{1,A} \dashrightarrow \Sigma_{1,A}$。我们还有一个有理映射$\widetilde{\Sigma_{1,A}} \dashrightarrow S_{1,A}$。通过作一个双有理修改 $\Sigma_{1,A} \to \Sigma_{1,A}$，我们可以假设

- $p : \widetilde{\Sigma_{1,A}} \to S_{1,A}$ 是一般有限且满射的，并且
- $D\Phi : \Sigma_{1,\ A} \to \Sigma_{1,\ A}$ 是全纯的。

注意，自然映射 $U_{1,A} \to S_{1,A}$ 是 étale 的，并且 $D\Phi$ 在 $U_{1,A}$ 上是全纯的。因此我们可以假设 $U_{1,A} \subset \Sigma_{1,A}$。令 $\Xi \subset \Sigma_{1,A}$ 为 $\Xi \subset U_{1,A}$ 的闭包。那么 $\overline{\Xi}$ 是 $p^{-1}(Z)$ 的一个不可约分支，使得

$$\overline{\Xi} \cap U_{1,A} \neq \emptyset. \tag{5.14}$$

现在给定非恒定全纯映射的一个无限子集 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A \times S)$，使得 $(f_{S_{1,A}})_{f\in\mathcal{F}} \Rightarrow Z$。根据 (5.14) 和 $(f_{S_{1,A}})_{f\in\mathcal{F}} \Rightarrow Z$，我们可以对 p 应用引理 5.7：$\Sigma_{1,A} \to S_{1,A}$ 以及 $(f_{S_{1,A}})_{f\in\mathcal{F}}$。于是存在一个有限子集 $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$，使得对于每个 $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{E}$，$\widetilde{\ }$ 存在一个提升 $g \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, \Sigma_{1,A})$，它是 $f_{S_{1,A}}$ 的提升；还存在一个连通开子集 $\Omega_f \subset \mathbb{D}$，以及 $\pi_g^{-1}(\Omega f) \subset Y_g$ 的一个连通分支 Ω'_f，使得

$$((g, \Omega_f, \Omega'_f))_{f\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{E}} \rightsquigarrow \overline{\Xi}, \tag{5.15}$$

$$\deg \pi_g \leq [\mathbb{C}(S_{1,A}) : \mathbb{C}(\Sigma_{1,A})], \tag{5.16}$$

and

$$g(Y_g) \not\subset \widetilde{\Sigma_{1,A}} \backslash U_{1,A}. \tag{5.17}$$

令 $\tau' : \Sigma_{1,A} \to \Sigma$ 为自然投影。于是得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} Y_g & \xrightarrow{g} & \widetilde{\Sigma_{1,A}} & \xrightarrow{\tau'} & \Sigma \\ {\scriptstyle \pi_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{q}} \\ \mathbb{D} & \xrightarrow[f_{S_{1,A}}]{} & S_{1,A} & \xrightarrow[\tau]{} & S \end{array} \tag{5.18}$$

对于 $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{E}$，我们令 $\hat{f} = (f_A, \tau' \circ g) \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, A \times \Sigma)$。于是得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} Y_{\hat{f}} & \xrightarrow{\hat{f}} & A \times \Sigma & \longrightarrow & \Sigma \\ {\scriptstyle \pi_{\hat{f}}}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{q}} \\ \mathbb{D} & \xrightarrow[f]{} & A \times S & \longrightarrow & S \end{array} \tag{5.19}$$

这里 $Y_{\hat{f}} = Y_g$。注意，$\tau'(\overline{\Xi}) = \overline{\Theta}$。因此，由 (5.15) 得到 (5.10)。

接下来证明 (5.9) 和 (5.12)。设 $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{E}$。由 (5.17) 得到 (5.9)。注意，$[\mathbb{C}(S) : \mathbb{C}(\Sigma)] = [\mathbb{C}(S_{1,A}) : \mathbb{C}(\Sigma_{1,A})]$。因此，由 (5.16) 得到 (5.12)。

最后证明 (5.11)。我们有参见 (5.19) 因此得到 (5.18)）以及 $p \circ (\hat{f})_{\widetilde{\Sigma_{1,A}}} = p \circ g$。

$$p \circ g = p \circ (\hat{f})_{\widetilde{\Sigma_{1,A}}}. \tag{5.20}$$

根据 f 的定义，得到 $\tau' \circ g = f_\Sigma$。由 (5.19) 可知，$\tau' \circ (f)_{\widetilde{\Sigma_1}, A} = f_\Sigma$。因此得到

$$\tau' \circ g = \tau' \circ (\hat{f})_{\widetilde{\Sigma_{1,A}}}. \tag{5.21}$$

由于 $U_{1,A} = S_{1,A} \times_S U$，两个关系式 (5.20) 和 (5.21) 得出 $(f)_{\widetilde{\Sigma_1}, A} = g$。因此，由 (5.15) 可得

$$(((\hat{f})_{\widetilde{\Sigma_{1,A}}}, \Omega_f, \Omega'_f))_{f\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{E}} \to \bar{\Xi}. \tag{5.22}$$

由 (5.8) 可得

$$D\Phi(\overline{\Xi}) \subset \Sigma^*_{1,A}.$$

因此由 (5.22)，我们得到 $((D\Phi \circ f_{\widetilde{\Sigma_1}, A}, \Omega f, \Omega'_f))_{f\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{E}} \to \Sigma^*_{1,A}$。由 $D\Phi \circ f_{\widetilde{\Sigma_1}, A} = (\Phi \circ f)_{\Sigma_{1,A}}$，我们得到 (5.11)。□

5.3. U的良好紧化。

引理 5.8. 设 S 是一个光滑射影簇。设 $q\colon U\to S$ 是从光滑簇 U 出发的一个 ´étale 态射。设 $\Theta\subset U$ 是一个不可约扎里斯基闭集。则存在

- 一个光滑紧化 Σ，使得 U 满足：$U\to S$ 延拓为一个态射 $\bar{q}\colon\Sigma\to S$,
- 一个扎里斯基开集 $\Sigma^o\subset\Sigma$，使得 $\overline{\Theta}\subset\Sigma^o$，其中 Θ在 Σ中的扎里斯基闭包为 $\overline{\Theta}\subset\Sigma$，
- 一个定义在 Σ 上的光滑半正 (1, 1)-形式 $\eta\geq 0$，使得 $\eta>0$ 在 Σ^o上成立,
- 一个真扎里斯基闭子集 $W\subset S$，满足 $W\subsetneqq\bar{q}(\overline{\Theta})$

满足以下性质：

(1) 设 $\Delta\subset\Sigma$ 是 ∂U 的一个不可约分支，使得 $\Delta\cap\overline{\Theta}\neq\emptyset$。那么 $\bar{q}(\Delta)\subset W$。(2) 设 ω_S 是 S 上的光滑正 (1, 1)-形式，并设 $\lambda_W\geq 0$ 是W 的一个 Weil 函数。那么存在一个正常数 $c>0$，使得对于所有满足$\bar{q}\circ g(Y_g)\not\subset W$ 的 $g\in\mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D},\Sigma)$，我们有

$$T_s(r,g,\eta)\leq cT_s(r,\bar{q}\circ g,\omega_S)+cm((s+r)/2,\bar{q}\circ g,\lambda_W)+c$$

对于所有的 $s\in(1/2,1)$ 和 $r\in(s,1)$。

为证明这个引理，我们从以下引理开始。

引理5.9.设 X 为一个射影簇。设 V 和 V' 为 X 的非空扎里斯基开子集，使得 $V\cap V'$ 光滑。则存在一个真双有理态射 $p\colon X'\to X$，其来自射影簇 X'，使得 $p^{-1}(V)$光滑且 $p^{-1}(V')$与 $\to V'$ 同构。

证明。通过对 V进行强消解奇点，我们得到一个序列

$$V=V_0\leftarrow V_1\leftarrow V_2\leftarrow\cdots\leftarrow V_k$$

使得

- V_k 光滑，并且
- 每个 $V_{i+1}\to V_i$ 都是一个爆破 $V_{i+1}=\mathrm{Bl}_{C_i}V_i$，其中心 $C_i\subset V_i$ 满足$p_i(C_i)\subset V\backslash(V\cap V')$, 其中 $p_i\colon V_i\to V$是自然态射。

我们归纳地构造一个带有开浸入 $V_i\subset X_i$ 的射影簇 X_i 如下。令 $X_0=X$。那么 $V_0\subset X_0$。假设我们已经构造了 X_i，且有 $V_i\subset X_i$。令$\overline{C_i}\subset X_i$ 为 $C_i\subset V_i$的（概形）闭包。我们令 $X_{i+1}=\mathrm{Bl}_{\overline{C_i}}X_i$。则 $V_i\subset X_i$在投影 $X_{i+1}\to X_i$ 下的逆像等于 $V_{i+1}\subset X_{i+1}$。由于 X_i 是射影的，爆破X_{i+1} 也是射影的。因此，对于所有 $i=0$，1，...，k，我们构造出了带有开浸入$V_i\subset X_i$的射影簇 X_i。

根据构造，我们有 $\bar{p}_i\colon X_i\to X$ 的 p_i扩张。由 $p_i(C_i)\subset V\backslash(V\cap V')$，我们有 $\bar{p}_i(\overline{C_i})\subset X\backslash V'$。因此 $\bar{p}_i\colon X_i\to X$ 在 V' 上对所有 i都是同构。此外，我们有$\bar{p}_i^{-1}(V)=V_i$ 对所有 i均成立。我们令 $X'=X_k$ 和 $p=\bar{p}_k$ 以完成证明。□

引理 5.8 的证明。我们首先构造 Σ 和 Σ^o。对拟有限映射 $q\colon U\to S$ 应用扎里斯基主定理。于是我们得到一个开浸入 $U\hookrightarrow\Sigma_1$ 和一个有限映射

$$\bar{q}_1:\Sigma_1\to S.$$

由于 S 是射影的，Σ_1 是射影的。由于 U 是光滑的，我们可以假设 Σ_1 是正规的。令

$$\Sigma_2=\mathrm{Bl}_{\overline{\Theta}_1\cap\partial U}\Sigma_1, \tag{5.23}$$

w这里 $\overline{\Theta}_1\subset\Sigma_1$ 是 Σ_1中 $\Theta\subset U$ 的扎里斯基闭包。因此 Σ_2 是射影的。Se t

$$p_1:\Sigma_2\to\Sigma_1.$$

那么 p_1 在 $U\subset\Sigma_1$上同构。因此 $U\subset\Sigma_2$。设$\overline{\Theta}_2\subset\Sigma_2$ 为$\Theta\subset U$在 Σ_2中的扎里斯基闭包。若 $\Delta\subset\Sigma_2$是 $\Sigma_2\backslash U$的一个不可约分支，且满足 $\Delta\cap\overline{\Theta}_2\neq\emptyset$，则

$$p_1(\Delta)\subsetneqq\overline{\Theta}_1. \tag{5.24}$$

设 $V \subset \Sigma_2$ 为由 $V = \Sigma_2 \backslash \bigcup_{\Delta'} \Delta'$定义的扎里斯基开集，其中 Δ' 遍历 $\Sigma_2 \backslash U$ 的所有满足 $\Delta' \cap \overline{\Theta}_2 = \emptyset$的不可约分支。于是我们有

$$\overline{\Theta}_2 \subset V. \tag{5.25}$$

我们定义扎里斯基闭集 $D \subset \Sigma_2$ 为 $D = \bigcup_{\Delta} \Delta$，其中 Δ 遍历 $\Sigma_2 \backslash U$的所有不可约分支，并满足 $\Delta \cap \overline{\Theta}_2 \neq \emptyset$。我们有 $U = V \cap (\Sigma_2 \backslash D)$，其中 U是光滑的。根据引理 5.9，存在一个真双有理修改

$$p_2 : \Sigma_3 \to \Sigma_2$$

使得 $p_2^{-1}(V)$ 是光滑的，并且 p_2 在 $\Sigma_2 \backslash D$上同构。我们通过一个光滑修改定义 Σ

$$p_3 : \Sigma \to \Sigma_3$$

它在 $p_2^{-1}(V) \subset \Sigma_3$上是一个同构。我们令 $\Sigma^o = (p_3 \circ p_2)^{-1}(V)$。由 (5.25)，我们有$\overline{\Theta} \subset \Sigma^o$。

我们构造 $W \subset S$，使得 $W \subsetneqq \bar{q}(\overline{\Theta})$，并证明 (1)。我们将 p_1 的例外轨迹记为：$\Sigma_2 \to \Sigma_1$ 为 $E_1 \subset \Sigma_2$。我们令

$$W = \bar{q}_1 \circ p_1(E_1 \cup D) \subset S.$$

由 (5.23)，我们有 $p_1(E_1) \subsetneqq \overline{\Theta}_1$。由 (5.24)，我们有 $p_1(D) \subsetneqq \overline{\Theta}_1$。因此，我们有 $W \subsetneqq \bar{q}(\overline{\Theta})$。根据 $D \subset \Sigma_2$ 的定义，得出断言 (1)。

令 $E \subset \Sigma_3$ 为 $\Sigma_3 \to \Sigma_1$ 的例外轨迹。我们断言

$$\bar{q}_1 \circ p_1 \circ p_2(E) \subset W. \tag{5.26}$$

为证明这一点，我们将 $p_2 : \Sigma_3 \to \Sigma_2$ 的例外轨迹记为 $E_2 \subset \Sigma_3$。于是我们有$E \subset p_2^{-1}(E_1) \cup E_2$。因此 $p_2(E) \subset E_1 \cup p_2(E_2)$。由于 $p_2 : \Sigma_3 \to \Sigma_2$ 在 $\Sigma_2 \backslash D$ 上同构，我们有 $p_2(E_2) \subset D$。因此 $p_2(E) \subset E_1 \cup D$。由此，我们证明了 (5.26)。

接下来我们构造 η 并证明性质 (2)。由于 Σ_3 是射影的，我们有一个浸入$\iota : \Sigma_3 \hookrightarrow \mathbb{P}^n$。令 $\omega_{\mathbb{P}^n}$ 为 $\mathbb{P}^n$ 上的 Fubini-Study度量。令 $\varphi : \Sigma \to \mathbb{P}^n$ 为$\Sigma \to \Sigma_3 \to \mathbb{P}^n$ 的复合态射。我们设

$$\eta = \varphi^* \omega_{\mathbb{P}^n}.$$

那么 η 在 Σ 上是半正定的，并在 Σ^o 上是正定的，因为 $\Sigma^o \hookrightarrow \Sigma \to \Sigma_3$ 的复合是一个开浸入。

现在我们证明(2)。令 $H_1, \ldots, H_l \subset \mathbb{P}^n$ 为超平面，使得 $H_1 \cap \cdots \cap H_l = \emptyset$。令 h为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$上的 Fubini-Study度量。令 τ_i 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ 的截面，使得 $H_i = (\tau_i = 0)$。设 $\lambda_{H_i}(x) = -\log \sqrt{h(\tau_i(x)\ \tau_i(x))} \geq 0$。根据引理4.4，存在一个正常数 $c_i > 0$，使得对于所有 $h \in$ 全纯映射空间$_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, \Sigma_3)$，满足 $h(Y_h) \not\subset E \cup \iota^* H_i$，我们有

$$T_\sigma(r, \iota \circ h, H_i, \lambda_{H_i}) \leq c_i T_\sigma(r, \bar{q}_1 \circ p_1 \circ p_2 \circ h, \omega_S) + c_i m(\sigma, h, \lambda_E) + c_i \tag{5.27}$$

对所有 $0 < \sigma < r < 1$。

设 $g \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, \Sigma)$ 满足 $\bar{q} \circ g(Y_g) \not\subset W$。我们可取 H_i 使得 $\varphi \circ g(Y_g) \not\subset$ 支集 H_i，其中 $\varphi : \Sigma \to \mathbb{P}^n$ 是上述态射。于是由 (4.1)，我们有

$$T_\sigma(r, g, \eta) = T_\sigma(r, \varphi \circ g, \omega_{\mathbb{P}^n}) = T_\sigma(r, \varphi \circ g, H_i, \lambda_{H_i})$$

对所有 $0 < \sigma < r < 1$。由 (5.26) 和 (5.27)，我们有

$$T_\sigma(r, \varphi \circ g, H_i, \lambda_{H_i}) \leq c_i T_\sigma(r, \bar{q} \circ g, \omega_S) + c_i m(\sigma, \bar{q} \circ g, \lambda_W) + c_i.$$

我们令 $c' = \max\limits_{1 \leq i \leq l} \{c_i\}$。于是有

$$T_\sigma(r, g, \eta) \leq c' T_\sigma(r, \bar{q} \circ g, \omega_S) + c' m(\sigma, \bar{q} \circ g, \lambda_W) + c'.$$

现在，对于 $1/2 < s < r < 1$ 和 $\sigma = (s + r)/2$，我们有

$$T_s(r, g, \eta) \leq 4 T_\sigma(r, g, \eta) \leq 4c' T_\sigma(r, \bar{q} \circ g, \omega_S) + 4c' m(\sigma, \bar{q} \circ g, \lambda_W) + 4c'.$$

我们设定 $c = 4c'$。由 $T_\sigma(r, \bar{q} \circ g, \omega_S) \leq T_s(r, \bar{q} \circ g, \omega_S)$，得证。 □

注 5.10. 设 A 是一个半阿贝尔簇， S 是一个光滑射影簇。设$Z \subset S_{1,\ A}$ 是一个不可约扎里斯基闭集。假设 Z 是水平可积的。那么我们取定以下对象：

- 浸入 $U \hookrightarrow A \times S$，如定义 3.16。
- 一个同构 $\Phi\colon\ A \times U \to A \times U$ 来自 (3.3)。
- 一个不可约分支 $\Xi \subset U_{1,A}$，来自引理 3.17 中的 $(q')^{-1}(Z)$，其中 $q'\colon U_{1,A} \to S_{1,A}$ 由 $q\colon\ U \to S$诱导。

- $\Theta \subset U$ $\Xi U_{1,\ A} \to U$的像。由于$U_{1,\ A} \to U$ 是真， Θ 是 U的不可约扎里斯基闭子集。

我们可以 对 $q\colon\ U \to S$ 和 $\Theta \subset U$ 应用引理 5.8，以得到并固定以下对象。 S:

- 一个 U 的光滑紧化 Σ，使得 $q\colon\ U \to S$ 可扩张为态射 $\bar{q}\colon\ \Sigma \to S$。

- 一个扎里斯基开集 $\Sigma^o \subset \Sigma$，使得 $\overline{\Theta} \subset \Sigma^o$，其中 $\overline{\Theta} \subset \Sigma$ 是 Θ在 Σ中的扎里斯基闭包。

- 在 Σ 上的光滑半正 (1, 1)-形式 $\eta \geq 0$，使得 $\eta > 0$ 在 Σ^o上成立。
- 一个真扎里斯基闭子集 $W \subset S$，满足 $W \subsetneqq \bar{q}(\overline{\Theta})$。

根据 $\bar{q}(\overline{\Theta}) = \tau(Z)$，我们有 $W \subsetneqq \tau(Z)$，其中 $\tau\colon\ S_{1,A} \to S$是自然映射。

5.4. 右端 (5.3) 第一项的估计。设 A为一个半阿贝尔簇，其商 $\rho\colon\ A \to A_0$ 如 (5.2) 所示。设 S 为一个光滑射影簇。设 $Z \subset S_{1,A}$ 为一个不可约扎里斯基闭集。假设 Z 水平可积。我们回顾注 5.10 中的 $W \subset S$。

引理 5.11。设 $\mathcal{F} \subset$ 全纯映射空间$(\mathbb{D}, A \times S)$ 是一个无限集，其中的元素均为非恒定全纯映射，并且 $(f_{S_{1,A}})_{f\in\mathcal{F}} \Rightarrow Z$。设 ω_{A_0} 是 A_0 上的一个不变正 (1,1)-形式，设 ω_S 是 S上的一个光滑正 (1,1)-形式。设 $\lambda_W \geq 0$是 W的一个Weil 函数。设 $s \in (1/2, 1)$ 且$\delta > 0$。则存在一个正常数 $\alpha > 0$，使得对于所有满足 $f_S(\mathbb{D}) \not\subset W$ 的 $f \in \mathcal{F}$，都有

$$T_s(r, \rho \circ f_A, \omega_{A_0}) \leq \alpha T_s(r, f_S, \omega_S) + \alpha m((s + r)/2, f_S, \lambda_W) + \alpha$$

对于某个线性测度为 $|E| < \delta$的例外集 $E \subset (s, 1)$ 之外的所有 $r \in (s, 1)$。

证明。我们使用注 5.10 中固定的对象。注意，同构 $\Phi\colon\ A\times U \to A\times U$ 诱导出同构 $\Phi_0\colon$ $A_0 \times \Sigma \to A_0 \times \Sigma$，并有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} A \times U & \xrightarrow{\Phi} & A \times U \\ {\scriptstyle (\rho,i)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (\rho,i)} \\ A_0 \times \Sigma & \xrightarrow[\Phi_0]{} & A_0 \times \Sigma \end{array} \tag{5.28}$$

这里 $i\colon\ U \to \Sigma$ 是开浸入。

我们证明这一断言。令 $\varphi\colon\ U \to A$ 为浸入 $\iota\colon\ U \hookrightarrow A \times U$ 与第一投影 $A \times S \to A$的复合态射。于是 $\Phi\colon\ A \times U \to A \times U$由 $\Phi(a, u) = (a - \varphi(u)\ u)$ 定义（参见 (3.4)）。我们有一个有理映射 $\rho \circ \varphi\colon$ $\Sigma \dashrightarrow A_0$。由于 A_0 是阿贝尔簇且 Σ光滑，这个有理映射可延拓为态射 $\rho \circ \varphi\colon\ \Sigma \to A_0$。接着，对于 $(b, u) \in A_0 \times \Sigma$， Φ_0 由$\Phi_0(b, u) = (b - \rho \circ \varphi(u)\ u)$ 定义。于是 Φ_0适合交换图 (5.28)。

我们设

$$\delta' = \delta/801. \tag{5.29}$$

我们取 $\overline{\Theta} \subset \Sigma$ 的一个开邻域 $O_{\overline{\Theta}} \subset \Sigma$，使得 $\overline{O_{\overline{\Theta}}} \subset \Sigma^o$，其中回忆一下， $\Sigma^o \subset \Sigma$来自注 5.10。我们在 Σ 上取一个光滑正 (1, 1)-形式 ω_Σ，使得

$$\omega_\Sigma \leq \eta \tag{5.30}$$

在 $O_{\overline{\Theta}}$上，其中我们回顾一下 η 注 5.10。

我们应用引理 5.5，得到一个有限子集 $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$，使得对于每个 $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{E}$，我们都得到 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A \times S)$的一个提升 $f \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, A \times \Sigma)$、一个连通开集 $\Omega_f \subset \mathbb{D}$ 以及 $\pi^{-1} \circ f(\Omega f)$的一个连通分支 $\Omega'_f \subset Y \circ f$，并具有引理 5.5 中所述的性质 (5.9)–(5.12)。于是我们有（参见 (5.10)）

$$((\hat{f}_\Sigma, \Omega_f, \Omega'_f))_{f\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{E}} \rightsquigarrow \overline{\Theta}.$$

因此存在一个有限子集 $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{F}$，其中 $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_1$，使得对于所有 $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{E}_1$，我们有$z \in \Omega f$，对于 δ'-几乎所有的 $z \in \mathbb{D}(1-\delta')$，并且

$$\hat{f}_\Sigma(\Omega'_f) \subset O_{\overline{\Theta}}. \tag{5.31}$$

设 ω_A 是 A 上的一个不变正 (1, 1)-形式，使得

$$\rho^* \omega_{A_0} \le \omega_A. \tag{5.32}$$

我们取一个开邻域 $O_{\Sigma^*_{1,\ A}} \subset \Sigma_{1,\ A}\ \Sigma^*_{1,\ A}$，使得

$$|v_{\mathrm{Lie}A}|_{\omega_A} \le |v_\Sigma|_{\omega_\Sigma} \tag{5.33}$$

对于所有的 $(v_\Sigma, v_{\mathrm{Lie}A}) \in T\Sigma \times 李A$，其中 $[(v_\Sigma, v_{\mathrm{Lie}A})] \in O_{\Sigma^*_{1,\ A}} \subset \Sigma_{1,\ A}$。我们有（参见 (5.11)）

$$(((\Phi \circ \hat{f})_{\Sigma_{1,A}}, \Omega_f, \Omega'_f))_{f\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{E}} \rightsquigarrow \Sigma^*_{1,A}.$$

因此，存在 e 存在一个有限子集 $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{F}$，其中 $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$，使得对所有 $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{E}_2$，我们有 e

$$(\Phi \circ \hat{f})_{\Sigma_{1,A}}(\Omega'_f) \subset O_{\Sigma^*_{1,A}}. \tag{5.34}$$

现在我们取 $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{E}_2$使得 $f_S(\mathbb{D}) \not\subset W$。由于对于 δ'-几乎所有的 $z \in \mathbb{D}(1-\delta')$，$z \in \Omega f$，我们可以应用 [46,引理 7.1] 得到

$$T_s(r, \rho \circ f_A, \omega_{A_0}) \le 8 \int_s^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{D}(t)\cap\Omega_f} (\rho \circ f_A)^* \omega_{A_0} \tag{5.35}$$

对于所有 $r \in (s, 1-\delta')$（在某个例外集 $E' \subset (s, 1-\delta')$之外），其线性测度满足

$$|E'| \le 800\delta'. \tag{5.36}$$

^根据$f_A = f_A \circ \pi \circ f$，我们有

$$\int_s^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{D}(t)\cap\Omega_f} (\rho \circ f_A)^* \omega_{A_0} = T_s(r, (\rho \circ \hat{f}_A, \Omega_f, \Omega'_f), \omega_{A_0}). \tag{5.37}$$

这里回顾（5.7），以定义右侧。

设 $\Phi_0\colon\ A_0 \times \Sigma \to A_0 \times \Sigma$ 为上述同构（参见（5.28））。设 $\nu_1\colon\ A_0 \times \Sigma \to A_0$ 为第一投影，且 $\nu_2\colon\ A_0 \times \Sigma \to \Sigma$ 为第二投影。于是存在正常数 $\alpha_1 > 0$ 使得

$$(\nu_1 \circ \Phi_0^{-1})^* \omega_{A_0} \le \alpha_1(\nu_1^* \omega_{A_0} + \nu_2^* \omega_\Sigma).$$

我们定义精细 $\tilde{\rho}\colon\ A \times \Sigma \to A_0 \times \Sigma$ 通过 $\tilde{\rho}(a, s) = (\rho(a)\ s)$ 对于 $(a, s) \in A \times \Sigma$。然后，我们得到

$$\begin{aligned} &T_s(r, (\rho \circ \hat{f}_A, \Omega_f, \Omega'_f), \omega_{A_0}) \\ &\qquad \le \alpha_1 T_s(r, ((\Phi_0 \circ \tilde{\rho} \circ \hat{f})_{A_0}, \Omega_f, \Omega'_f), \omega_{A_0}) + \alpha_1 T_s(r, (\hat{f}_\Sigma, \Omega_f, \Omega'_f), \omega_\Sigma). \end{aligned} \tag{5.38}$$

根据 (5.33) 和 (5.34)，有

$$T_s(r, ((\Phi \circ \hat{f})_A, \Omega_f, \Omega'_f), \omega_A) \le T_s(r, (\hat{f}_\Sigma, \Omega_f, \Omega'_f), \omega_\Sigma).$$

由 (5.28) 和 (5.32) 的交换性，我们有

$$T_s(r, ((\Phi_0 \circ \tilde{\rho} \circ \hat{f})_{A_0}, \Omega_f, \Omega'_f), \omega_{A_0}) \le T_s(r, ((\Phi \circ \hat{f})_A, \Omega_f, \Omega'_f), \omega_A).$$

因此我们得到

$$T_s(r, ((\Phi_0 \circ \tilde{\rho} \circ \hat{f})_{A_0}, \Omega_f, \Omega'_f), \omega_{A_0}) \le T_s(r, (\hat{f}_\Sigma, \Omega_f, \Omega'_f), \omega_\Sigma). \tag{5.39}$$

因此，由（5.35）、（5.37）、（5.38）和（5.39）可得

$$T_s(r,\rho\circ f_A,\omega_{A_0})\le 16\alpha_1 T_s(r,(\hat{f}_\Sigma,\Omega_f,\Omega'_f),\omega_\Sigma)$$

对所有 $r\in(s,1-\delta')\backslash E'$。利用 (5.30) 和 (5.31)，我们有

$$T_s(r,(\hat{f}_\Sigma,\Omega_f,\Omega'_f),\omega_\Sigma)\le T_s(r,(\hat{f}_\Sigma,\Omega_f,\Omega'_f),\eta)\le(\deg\pi_{\hat{f}})T_s(r,\hat{f}_\Sigma,\eta).$$

因此得到

$$T_s(r,\rho\circ f_A,\omega_{A_0})\le\alpha_2 T_s(r,\hat{f}_\Sigma,\eta) \tag{5.40}$$

对于所有 $r\in(s,1-\delta')\backslash E'$，其中我们令 $\alpha_2=16\alpha_1[\mathbb{C}(S):\mathbb{C}(\Sigma)]$（参见（5.12））。我们令 $\sigma=(r+s)/2$。由引理 5.8 可得

$$T_s(r,\hat{f}_\Sigma,\eta)\le\alpha_3 T_s(r,f_S,\omega_S)+\alpha_3 m(\sigma,f_S,\lambda_W)+\alpha_3, \tag{5.41}$$

其中 $\alpha_3>0$ 是与 $f\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{E}_2$的选择无关的正常数。我们令$\alpha=\alpha_2\alpha_3$和 $E=E'\cup(1-\delta',1)$。由 (5.29) 和 (5.36)，可得 $|E|\le\delta$。再由 (5.40) 和 (5.41)，得到 $f\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{E}_2$的所需估计，其中 $f_S(\mathbb{D})\not\subset W$。

最后我们将 $\alpha>0$ 扩大，使得

$$\max_{f\in\mathcal{E}_2} T_s\left(1-\delta,\rho\circ f_A,\omega_{A_0}\right)\le\alpha$$

以完成该引理的证明。 □

5.5. Weil 函数的估计。设 ω_A 是 A 上的不变正 (1, 1)-形式。给定 x、$y\in A$，我们用 $d(x,y)$ 表示关于 ω_A 的距离。设 $\pi\colon\mathbb{C}^n\to A$ 是一个万有覆盖，其中 $n=$ 维 A。我们用 $d_{\mathbb{C}^n}$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 上的欧氏距离。注意，$\pi^*\omega_A$ 是关于 $\mathbb{C}^n$ 的加法结构的 $\mathbb{C}^n$ 上的不变正 (1, 1)-形式。因此，存在正常数 $\alpha>1$ 使得

$$\frac{1}{\alpha}d(x,y)\le d_{\mathbb{C}^n}(\pi^{-1}(x),\pi^{-1}(y))\le\alpha d(x,y) \tag{5.42}$$

对所有 $x,y\in A$。

引理 5.12。设 $B\subset A$ 为半阿贝尔子簇。设 d_B 为关于 B 上某个不变正 (1, 1)-形式的 B 距离函数。则存在正常数 $\beta>1$ 使得

$$\frac{1}{\beta}d_B(x,y)\le d(x,y)\le\beta d_B(x,y)$$

对所有 $x,y\in B$。

证明。设 $\mathbb{C}^k\to B$ 是一个万有覆盖，其中 $k=\dim B$。那么 $B\subset A$ 诱导出一个浸入 $\mathbb{C}^k\subset\mathbb{C}^n$，映入 A的万有覆盖。这是一个线性子空间。因此，对于$p,q\in\mathbb{C}^k$，我们有 $d_{\mathbb{C}^k}(p,q)=d_{\mathbb{C}^n}(p,q)$。由此根据 (5.42)，得到引理。□

引理 5.13。设 $\overline{A}$ 是一个光滑等变紧化。设 $D\subset\partial A$ 是一个不可约分支，其 Weil 函数为 λ_D。存在一个正常数 $c>0$，使得

$$\lambda_D(y)\le\lambda_D(x)+cd(x,y)+c$$

对所有 $x,y\in A$。

证明。我们先考虑 A 是一个代数环面的情形，然后再证明一般情形。

代数环面的情形。证明采用关于 A维数的归纳法。当 $\dim A=1$ 时，我们有 $A=\mathbb{G}_m$ 和 $\overline{A}=\mathbb{P}^1$。我们可以假设 $D=(\infty)$。于是

$$|\lambda_D(x)-\lambda_D(y)|\le|\log^+|x|-\log^+|y||\le|\log|x/y||.$$

另一方面，由 (5.42) 可得

$$|\log|x/y||\le\alpha d(x,y). \tag{5.43}$$

这就证明了我们在一维情形下的估计。

现在我们考虑维数为 $A \geq 2$ 的情形，并假设对于维数小于 A的代数环面，我们的引理成立。设 $D \subset \partial A$ 为一个不可约分支。设 D的各向同性群为 $I \subset A$ 。那么 $I = \mathbb{G}_m$。令 $B = A/I$。我们取 B的一个紧化$\overline{B}$ ，使得 $\overline{B} = D$。由引理 A.11，存在 $D \subset \overline{A}$的一个 Zariski 开邻域 $U \subset \overline{A}$ 以及一个典范投影 $p : U \to D$ ，它延拓了 $A \to B$。注意， $p : U \to D$ 是$\overline{B}$ 上的一个线丛的全空间，其零截面为 D。设 $p :U \to \overline{B}$为该线丛上的一个光滑 Hermitian 度量。我们通过 $\mu(x) = \log(1/||x||)$定义 $\mu : U\backslash D \to \mathbb{R}$ ，其中 $x \in U$。我们分几步证明引理 5.13 中的估计。

步骤 1。我们首先证明存在一个正常数 $c_1 > 0$ ，使得

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq c_1 d(x, y) + c_1 \tag{5.44}$$

对于满足 $p(x) = p(y)$ 的所有 $x, y \in A$ 。为证明这一点，我们取一个有限仿射覆盖$\overline{B} = \cup_{i\in I} V_i$，使得 $U|_{V_i} = V_i \times \mathbb{C}$。令 $\tau_i \colon U|_{V_i} \to \mathbb{C}$ 为第二投影。我们可以取一个开集 $W_i \Subset V_i$，使得 $B = \cup_{i\in I} W_i$ 且 $|\mu(x) - \log |1/\tau_i(x)|| < \gamma_i$ 在 $x \in p^{-1}(W_i)\backslash D$ 上成立。我们令 $\gamma = \max_{i\in I} \gamma_i$。现在，给定满足 $p(x) = p(y)$ 的 $x, y \in A$ ，我们取 $i \in I$ ，使得$p(x) \in W_i$。于是有

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq |\log |1/\tau_i(x)| - \log |1/\tau_i(y)|| + 2\gamma.$$

由一维情形（参见 (5.43)），我们有

$$|\log |1/\tau_i(x)| - \log |1/\tau_i(y)|| \leq \alpha d_{\mathbb{G}_m}(\tau_i(x), \tau_i(y)).$$

因此我们得到

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq \alpha d_{\mathbb{G}_m}(\tau_i(x), \tau_i(y)) + 2\gamma.$$

我们取 $g \in I$ 使得 $y = g \cdot x$。由于 τ_i 是 $\mathbb{G}_m$ 等变的，我们有 $\tau_i(y) = g \cdot \tau_i(x)$。因此有 $d_{\mathbb{G}_m}(\tau_i(x), \tau_i(y)) = d_{\mathbb{G}_m}(e_{\mathbb{G}_m}, g)$。因此我们得到

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq \alpha d_{\mathbb{G}_m}(e_{\mathbb{G}_m}, g) + 2\gamma.$$

同理，我们有 $d(x, y) = d(e_A, g)$。由引理 5.12，我们有 $d_I(e_A, g) \leq \beta d(e_A, g)$。因此，当 $c_1 = \max\{\alpha\beta, 2\gamma\}$ 时，我们得到 (5.44)。

步骤 2。由 [6, 推论，第 115], 页，商 $A \to B$ 有一个截面 $s : B \to A$ 群簇。接下来我们证明

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq c_2 d(x, y) + c_2 \tag{5.45}$$

对所有 $x, y \in s(B)$ 均成立。由截面 $s \colon B \to A$，我们得到一个有理截面 $\bar{s} \colon \overline{B} \dashrightarrow U$，它在 B 上全纯且无零点。令 $(s) = E - F$。则对于 $b \in B$，有 $\mu(s(b)) = \lambda_E(b) - \lambda_F(b)$。根据归纳假设，对于满足 $x = s(b)$ 且 $y = s(b')$ 的 $b, b' \in B$ ，我们有

$$\begin{aligned} |\mu(x) - \mu(y)| &= |(\lambda_E(b) - \lambda_F(b)) - (\lambda_E(b') - \lambda_F(b'))| \\ &\leq |\lambda_E(b) - \lambda_E(b')| + |\lambda_F(b) - \lambda_F(b')| \\ &\leq \gamma d_B(b, b') + \gamma. \end{aligned}$$

由引理 5.12，我们有 $d_B(b, b') \leq \alpha d(x, y)$。因此，取 $c_2 = \max\{\alpha\gamma, \gamma\}$，即可得到 (5.45)。

步骤 3。现在我们取 $x, y \in A$ 使得 $x \in s(B)$。于是由 (5.44) 和 (5.45)，我们有

$$\begin{aligned} |\mu(x) - \mu(y)| &\leq |\mu(x) - \mu(s(p(y)))| + |\mu(s(p(y))) - \mu(y)| \\ &\leq c_2 d(x, s(p(y))) + c_1 d(s(p(y)), y) + c_1 + c_2. \end{aligned}$$

By

$$d(s(p(y)), y) \leq d(x, s(p(y))) + d(x, y),$$

我们得到

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq (c_1 + c_2) d(x, s(p(y))) + c_1 d(x, y) + c_1 + c_2.$$

由于 $s((p(x)) = x$，引理 5.12 得出 $d(x, s(p(y))) \leq \alpha d_B(p(x), p(y))$ 。因此

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq (c_1 + c_2)\alpha d_B(p(x), p(y)) + c_1 d(x, y) + c_1 + c_2.$$

由于 $p|_A: A \to B$ 是群同态，我们有

$$d_B(p(x), p(y)) \le \alpha' d(x, y). \tag{5.46}$$

事实上，$(p|_A)^*\omega_B$ 是 A上的不变(1,1)-形式，其中 ω_B 是 B 上的不变正(1,1)-形式，用于定义 d_B。因此存在正常数 $\alpha' > 0$，使得$(p|_A)^*\omega_B \le \alpha'\omega_A$。最后，我们得到

$$|\mu(x) - \mu(y)| \le cd(x, y) + c,$$

其中 $c = \max\{(c_1 + c_2)\alpha\alpha' + c_1, c_1 + c_2\}$。

步骤 4. 现在我们对一般的 $x, y \in A$ 进行讨论。取 $g \in I$ 使得 $s(p(x)) = g \cdot x$。于是得到

$$|\mu(x) - \mu(y)| = |\mu(g \cdot x) - \mu(g \cdot y)| \le cd(g \cdot x, g \cdot y) + c = cd(x, y) + c.$$

因此

$$|\lambda_D(x) - \lambda_D(y)| \le |\mu(x) - \mu(y)| \le cd(x, y) + c,$$

这就完成了归纳步骤。因此，我们得到了代数环面情形下的引理。

T半阿贝尔簇的一般情形。我们按照(5.2)中的方法处理一般情形 :

$$0 \to T \to A \xrightarrow{\rho} A_0 \to 0.$$

我们通过万有覆盖 $\pi : \mathbb{C}^n \to A_0$ 拉回该序列以得到

$$0 \to T \to A \times_{A_0} \mathbb{C}^n \xrightarrow{r} \mathbb{C}^n \to 0.$$

我们有一个复李群的截面 $s : \mathbb{C}^n \to A \times_{A_0} \mathbb{C}^n$。令 $p : A \times_{A_0} \mathbb{C}^n \to A$ 为自然投影。我们设定

$$\psi = p \circ s : \mathbb{C}^n \to A.$$

那么 p 和 ψ 是复李群的态射。我们取一个以原点为中心的闭球 $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n$，使得 $\pi(\mathbb{B}) = A_0$。

我们首先证明存在一个正常数 $\alpha_1 > 0$，使得对于所有 $g \in T$ 和 $z, w \in \mathbb{B}$，都有

$$|\lambda_D(g \cdot \psi(z)) - \lambda_D(g \cdot \psi(w))| \le \alpha_1. \tag{5.47}$$

我们证明这一点。令 $\overline{A}$ 对应于一个环面嵌入 $T \subset \overline{T}$（参见引理 A.6）。注意到ρ：$A \to A_0$ 延拓为 $\bar{\rho}$：$\overline{A} \to A_0$。于是 r：$A \times_{A_0} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 延拓为 $\bar{r}$：$\overline{A} \times_{A_0} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$。截面 s：$\mathbb{C}^n \to A \times_{A_0} \mathbb{C}^n$ 诱导出一个（非典范的）分裂 $\overline{A} \times_{A_0} \mathbb{C}^n = \overline{T} \times \mathbb{C}^n$，使得复合态射 $q \circ s$：$\mathbb{C}^n \to T$ 与第一投影 q：$\overline{A} \times_{A_0} \mathbb{C}^n \to \overline{T}$的复合是恒等于 e_T 的常值映射。

$$\begin{array}{ccccc} \overline{A} & \xleftarrow{p} & \overline{A} \times_{A_0} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{q} & \overline{T} \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\rho}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{r}} & & \\ A_0 & \xleftarrow[\pi]{} & \mathbb{C}^n & & \end{array}$$

注意到 $p^*\lambda_D(x) - (\lambda_D|_{\rho^{-1}(0)})(q(x))$ 在 $\overline{A} \times_{A_0} \mathbb{C}^n$ 上连续。由于 $\bar{r}^{-1}(\mathbb{B})$ 是紧的，存在正常数 $\alpha_1' > 0$，使得对所有 $x \in \bar{r}^{-1}(\mathbb{B})$，都有 $|p^*\lambda_D(x) - (\lambda_D|_{\rho^{-1}(0)})(q(x))| < \alpha_1'$。注意到对于所有 $g \in T$ 和 $z \in \mathbb{C}^n$，$q(g \cdot s(z)) = g$。因此，对于所有 $z \in \mathbb{B}$ 和 $g \in T$，我们有

$$|p^*\lambda_D(g \cdot s(z)) - (\lambda_D|_{\rho^{-1}(0)})(g)| \le \alpha_1'.$$

因此，根据

$$|\lambda_D(g \cdot \psi(z)) - \lambda_D(g \cdot \psi(w))| \le |p^*\lambda_D(g \cdot s(z)) - (\lambda_D|_{\rho^{-1}(0)})(g)| + |p^*\lambda_D(g \cdot s(w)) - (\lambda_D|_{\rho^{-1}(0)})(g)|,$$

我们得到带有 $\alpha_1 = 2\alpha_1'$ 的 (5.47)。

接下来我们证明，存在一个正常数 $\alpha_2 > 0$，使得对所有 $g \in T$ 和 $z, w \in \mathbb{B}$，都有

$$d(g \cdot \psi(z), g \cdot \psi(w)) \le \alpha_2. \tag{5.48}$$

我们来证明这一点。由于 $\psi\colon \mathbb{C}^n \to A$ 是群同态，$\psi^*\omega_A$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的不变（1, 1）形式。因此，对所有 $z, w \in \mathbb{C}^n$，有 $d(\psi(z)\ \psi(w)) \le \alpha_2' d_{\mathbb{C}^n}(z,w)$。参见 (5.46) 的证明。于是

$$d(g\cdot\psi(z), g\cdot\psi(w)) = d(\psi(z),\psi(w)) \le \alpha_2' d_{\mathbb{C}^n}(z,w)$$

对于所有 $g \in T$ 和 z、$w \in \mathbb{C}^n$。由于 $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n$ 是紧的，存在一个正常数 $\gamma > 0$，使得 $d_{\mathbb{C}^n}(z,w) < \gamma$ 对所有 z、$w \in \mathbb{B}$ 都成立。因此，我们得到带有 $\alpha_2 = \alpha_2'\gamma$ 的 (5.48)。

现在，对于 x、$y \in A$，我们取 x'、$y' \in r^{-1}(\mathbb{B})$，使得 $p(x') = x$ 以及 $p(y') = y$。我们取g_x、$g_y \in T$，使得 $g_x \cdot s(r(x')) = x'$ 以及 $g_y \cdot s(r(y')) = y'$。然后根据上述环面情形，我们有

$$|\lambda_D(g_x\cdot\psi(0)) - \lambda_D(g_y\cdot\psi(0))| \le c_1 d_T(g_x\cdot\psi(0), g_y\cdot\psi(0)) + c_1.$$

由引理 5.12 可得 $d_T(g_x\cdot\psi(0)\ g_y\cdot\psi(0)) \le \beta d(g_x\cdot\psi(0)\ g_y\cdot\psi(0))$。因此

$$|\lambda_D(g_x\cdot\psi(0)) - \lambda_D(g_y\cdot\psi(0))| \le c_1\beta d(g_x\cdot\psi(0), g_y\cdot\psi(0)) + c_1. \tag{5.49}$$

我们有

$$\begin{aligned}|\lambda_D(x) - \lambda_D(y)| \le{}& |\lambda_D(g_x\cdot\psi(r(x'))) - \lambda_D(g_x\cdot\psi(0))| \\ &+ |\lambda_D(g_x\cdot\psi(0)) - \lambda_D(g_y\cdot\psi(0))| + |\lambda_D(g_y\cdot\psi(0)) - \lambda_D(g_y\cdot\psi(r(y')))|.\end{aligned}$$

因此由 (5.47) 和 (5.49) 可得

$$|\lambda_D(x) - \lambda_D(y)| \le c_1\beta d(g_x\cdot\psi(0), g_y\cdot\psi(0)) + c_1 + 2\alpha_1.$$

由 (5.48)，我们有

$$\begin{aligned}d(g_x\cdot\psi(0), g_y\cdot\psi(0)) &\le d(g_x\cdot\psi(0), g_x\cdot\psi(r(x'))) \\ &\quad + d(g_x\cdot\psi(r(x')), g_y\cdot\psi(r(y'))) + d(g_y\cdot\psi(r(y')), g_y\cdot\psi(0)) \\ &\le d(x,y) + 2\alpha_2.\end{aligned}$$

因此得到

$$|\lambda_D(x) - \lambda_D(y)| \le c d(x,y) + c,$$

其中 $c = \max\{c_1\beta, 2c_1\alpha_2\beta + c_1 + 2\alpha_1\}$。证明完毕。 □

5.6. 引理 5.13 的应用。我们回顾 (5.6) 中的记号。

引理 5.14. 设 $\overline{A}$ 是半阿贝尔簇 A 的光滑等变紧化，且 Σ 是光滑射影簇。设 $D \subset \partial A$ 是一个不可约分支，其 Weil 函数为 $\lambda_D \ge 0$。设 ω_A 是 A 上的不变正 (1, 1)-形式。那么存在一个正常数 $c > 0$，具有以下性质：设 (g, Ω, Ω') 是定义 5.3 中的三元组，其中$g \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, \overline{A})$，且 $g(Y_g) \not\subset \partial A$。取 $r, r' \in (0,1)$，使得 $\partial\mathbb{D}(r) \subset \Omega$ 且 $\partial\mathbb{D}(r') \subset \Omega$。取 $\theta \in \mathbb{R}$，使连接 $re^{i\theta}$ 与 $r'e^{i\theta}$ 的线段 γ 满足 $\gamma \subset \Omega$。假设 $\partial\mathbb{D}(r') \cup \partial\mathbb{D}(r) \cup \gamma \subset \Omega$ 不包含映射 $\pi_g\colon Y_g \to \mathbb{D}$ 的临界值。那么我们有

$$\begin{aligned}&|m(r,(g,\Omega,\Omega'),\lambda_D) - m(r',(g,\Omega,\Omega'),\lambda_D)| \\ &\qquad \le \frac{c}{\deg(\pi_g|_{\Omega'})}\ell_{\omega_A}(g(\Omega' \cap \pi_g^{-1}(\partial\mathbb{D}(r) \cup \partial\mathbb{D}(r') \cup \gamma))) + c.\end{aligned} \tag{5.50}$$

证明。由引理 5.13，存在正常数 $\alpha > 0$，使得

$$|\lambda_D(x) - \lambda_D(y)| \le \alpha d(x,y) + \alpha \tag{5.51}$$

对所有 x、$y \in A$，其中 $d(x,y)$ 是关于 ω_A 的距离。

设 (g, Ω, Ω') 是定义 5.3 中的三元组，其中 $g \in$ 全纯映射空间$_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, \overline{A})$，且 $g(Y_g) \not\subset \partial A$。对于每个 $z \in \Omega$，我们定义

$$\mu_g(z) = \frac{1}{\deg(\pi_g|_{\Omega'})} \sum_{y \in \Omega' \cap \pi_g^{-1}(z)} \lambda_D(g(y)).$$

我们有

$$m(r,(g,\Omega,\Omega'),\lambda_D)=\int_{z\in\Omega\cap\partial\mathbb{D}(r)}\mu_g(z)\frac{d\arg\pi_g(z)}{2\pi} \tag{5.52}$$

设 z、$z'\in\Omega$ 是由 Ω 中的一条光滑弧 σ 连接的两个点。假设 $\sigma\subset\Omega$ 不包含 π_g 的临界值: $Y_g\to\mathbb{D}$。那么我们断言

$$|\mu_g(z)-\mu_g(z')|\le\frac{\alpha}{\deg(\pi_g|_{\Omega'})}\ell_{\omega_A}(g(\Omega'\cap\pi_g^{-1}(\sigma)))+\alpha. \tag{5.53}$$

为证明这一点，令 $\Omega'\cap\pi_g^{-1}(z)=\{y_1,\dots,y_k\}$ 和 $\Omega'\cap\pi_g^{-1}(z)=\{y_1',\dots,y_k'\}$，其中$k=\deg(\pi_g|_{\Omega'})$。不妨设 y_i 和 y_i' 由 Ω' 中的一条光滑弧 σ_i 连接，其中σ_i 是 σ的提升。于是由 (5.51) 得

$$|\mu_g(z)-\mu_g(z')|\le\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|\lambda_D(g(y_i))-\lambda_D(g(y_i'))|\le\frac{\alpha}{k}\sum_{i=1}^{k}d(g(y_i),g(y_i'))+\alpha.$$

由 $d(g(y_i),g(y_i'))\le\ell_{\omega_A}(g(\sigma_i))$，可得 (5.53)。

现在取 r、$r'\in(0,1)$、$\theta\in\mathbb{R}$ 和 γ，如引理 5.14 中所述。我们有 $\partial\mathbb{D}(r)\subset\Omega$，$\partial\mathbb{D}(r')\subset\Omega$ 以及 $\gamma\subset\Omega$。此外，$\partial\mathbb{D}(r')\cup\partial\mathbb{D}(r)\cup\gamma\subset\Omega$ 不包含 π_g 的临界值：$Y_g\to\mathbb{D}$。由 (5.53)，我们有

$$|\mu_g(re^{i\theta'})-\mu_g(re^{i\theta})|\le\frac{\alpha}{\deg(\pi_g|_{\Omega'})}\ell_{\omega_A}(g(\Omega'\cap\pi_g^{-1}(\partial\mathbb{D}(r))))+\alpha$$

对所有 $\theta'\in\mathbb{R}$。因此，由 (5.52) 可得

$$|m(r,(g,\Omega,\Omega'),\lambda_D)-\mu_g(re^{i\theta})|\le\frac{\alpha}{\deg(\pi_g|_{\Omega'})}\ell_{\omega_A}(g(\Omega'\cap\pi_g^{-1}(\partial\mathbb{D}(r))))+\alpha.$$

类似地，我们有

$$|m(r',(g,\Omega,\Omega'),\lambda_D)-\mu_g(r'e^{i\theta})|\le\frac{\alpha}{\deg(\pi_g|_{\Omega'})}\ell_{\omega_A}(g(\Omega'\cap\pi_g^{-1}(\partial\mathbb{D}(r'))))+\alpha.$$

由 (5.53) 可得

$$|\mu_g(re^{i\theta})-\mu_g(r'e^{i\theta})|\le\frac{\alpha}{\deg(\pi_g|_{\Omega'})}\ell_{\omega_A}(g(\Omega'\cap\pi_g^{-1}(\gamma)))+\alpha.$$

最后三个估计给出 (5.50)，其中 $c=3\alpha$。 □

5.7. 面积-长度方法的应用。对于 $r\in(\frac{1}{2},1)$ 和 $\theta\in[0,2\pi]$，记连接 $\frac{1}{2}e^{i\theta}$ 与 $re^{i\theta}$ 的线段为 $\gamma_{r,\theta}\subset\mathbb{D}$。设 Σ 是一个光滑射影簇，其上有一个光滑半正 (1, 1)-形式 η。我们将 Σ 中相对于 η 的曲线长度记为 ℓ_η。下一个引理是面积-长度方法的一个应用。

引理 5.15. 设 $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D},\Sigma)$ 且 $s\in(\frac{1}{2},1)$。设 $\delta>0$。 ( )

1 存在一个子集 $E_1\subset(s,1)$ *with* $|E_1|\le\delta$ 使得，对于所有 $r\in(s,1)\backslash E_1$，我们有

$$\ell_\eta(f(\pi_f^{-1}(\partial\mathbb{D}(r))))\le c_1(\deg\pi_f)^2T_s(r,f,\eta)+c_1(\deg\pi_f)^2,$$

其中 $c_1>0$ 是一个仅依赖于 δ的正常数。

(2) 存在一个子集 $E_2\subset(s,1)$，满足 $|E_2|\le\delta$，使得对于所有 $r\in(s,1)\backslash E_2$，我们有

$$\ell_\eta(f(\pi_f^{-1}(\gamma_{r,\theta})))\le c_2(\deg\pi_f)T_s(r,f,\eta)+c_2(\deg\pi_f)$$

对于所有 $\theta\in(0,2\pi)$，除去某个例外集 $E_3\subset(0,2\pi)$，其线性测度为 $|E_3|<\delta$。这里$c_2>0$ 是一个仅依赖于 δ的正常数。

证明。设 $f^*\eta=\varphi^2\pi_f^*(dx\wedge dy)$，其中 $z=x+iy$。令

$$A(r)=\int_{Y_f(r)}f^*\eta$$

and

$$T(r) = T_s(r, f, \eta).$$

于是我们有

$$A(r) = r(\deg \pi_f)T'(r) \le (\deg \pi_f)T'(r).$$

By

$$A(r) = \int_0^r dt \int_{\pi_f^{-1}(\partial\mathbb{D}(t))} \varphi^2 t d\arg \pi_f,$$

我们有

$$A'(r) = \int_{\pi_f^{-1}(\partial\mathbb{D}(r))} \varphi^2 r d\arg \pi_f.$$

令 $L(r) = \ell_\eta(f(\pi_f^{-1}(\partial\mathbb{D}(r))))$. 则

$$L(r) = \int_{\pi_f^{-1}(\partial\mathbb{D}(r))} \varphi r d\arg \pi_f.$$

因此，根据柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$L(r)^2 \le 2\pi r(\deg \pi_f) \int_{\pi_f^{-1}(\partial\mathbb{D}(r))} \varphi^2 r d\arg \pi_f \le 2\pi(\deg \pi_f)A'(r).$$

我们估计右侧。注意，由于 η 是半正的，对于所有 $r \in (0, 1)$，都有 $A'(r) \ge 0$。因此，我们可以对 $A(r)$ 应用 Borel 增长引理（下文的引理 5.16）。令 $\varepsilon = \sqrt{2} - 1$ 和 $\delta' = \delta/2$，我们有

$$A'(r) \le \frac{2}{\varepsilon\delta'} \max\{1, A(r)^{1+\varepsilon}\} \le \frac{2}{\varepsilon\delta'}(\deg \pi_f)^{1+\varepsilon} \max\{1, (T'(r))^{1+\varepsilon}\}$$

对于所有 $r \in (s, 1)$，在某个例外集 $E_1' \subset (s, 1)$ 外，该例外集的线性测度小于 δ'。再次由引理 5.16，我们有

$$(T'(r))^{1+\varepsilon} \le \left(\frac{2}{\varepsilon\delta'}\right)^{1+\varepsilon} \max\left\{1, T(r)^{(1+\varepsilon)^2}\right\}$$

对于所有 $r \in (s, 1)$，在某个例外集 $E_1'' \subset (s, 1)$ 外，该例外集的线性测度小于 δ'。因此

$$A'(r) \le \left(\frac{2}{\varepsilon\delta'}\right)^{2+\varepsilon} (\deg \pi_f)^{1+\varepsilon} \max\{1, T(r)^{(1+\varepsilon)^2}\}$$

对所有位于 $E_1 = E_1' \cup E_1''$ 外部的 $r \in (s, 1)$，其中 $|E_1| < \delta$，我们得到

$$L(r)^2 \le 2\pi \left(\frac{2}{\varepsilon\delta'}\right)^{2+\varepsilon} (\deg \pi_f)^{2+\varepsilon} \max\{1, T(r)^2\},$$

thus

$$L(r) \le \sqrt{2\pi} \left(\frac{2}{\varepsilon\delta'}\right)^{1+\varepsilon/2} (\deg \pi_f)^{1+\varepsilon/2} \max\{1, T(r)\}$$

$$\le c_1(\deg \pi_f)^2 T(r) + c_1(\deg \pi_f)^2$$

对所有位于 E_1 外部的 $r \in (s, 1)$。这里我们设 $c_1 = \sqrt{2\pi}\left(\frac{2}{\varepsilon\delta'}\right)^{1+\varepsilon/2}$，它仅依赖于 δ。这是第一个估计。

接下来我们证明第二个估计。设 $L_\gamma(r, \theta) = \ell_\eta(f(\pi_f^{-1}(\gamma_{r,\theta})))$。那么

$$L_\gamma(r, \theta) = \int_{\pi_f^{-1}(\gamma_{r,\theta})} \varphi d|\pi_f|.$$

由于 $|\pi_f| > \frac{1}{2}$ 在 $\pi_f^{-1}(\gamma_{r,\theta})$ 上，我们有

$$L_\gamma(r, \theta) \le 2 \int_{\pi_f^{-1}(\gamma_{r,\theta})} \varphi|\pi_f| d|\pi_f|.$$

根据柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$L_\gamma(r,\theta)^2 \le 4(\deg \pi_f)\int_{\pi_f^{-1}(\gamma_{r,\theta})} \varphi^2 |\pi_f| d|\pi_f|,$$

因此

$$\int_0^{2\pi} L_\gamma(r,\theta)^2 d\theta \le 4(\deg \pi_f)A(r) \le 4(\deg \pi_f)^2 T'(r).$$

根据引理 5.16，令 $\varepsilon = 1$，我们有

$$\int_0^{2\pi} L_\gamma(r,\theta)^2 d\theta \le \frac{8(\deg \pi_f)^2}{\delta}\max\{1, T(r)^2\}$$

对所有 $r \in (s,1)\backslash E_2$ 满足 $|E_2| < \delta$。于是，对于每个 $r \in (s,1)\backslash E_2$，我们得到

$$L_\gamma(r,\theta)^2 \le \frac{8(\deg \pi_f)^2}{\delta^2}\max\{1, T(r)^2\}$$

对于所有 $\theta \in (0, 2\pi)$，在某个例外集 E_3 之外有 $|E_3| < \delta$。因此

$$L_\gamma(r,\theta) \le \frac{2\sqrt{2}\deg \pi_f}{\delta}\max\{1, T(r)\}$$

对于所有 $\theta \in (0,2\pi)\backslash E_3$。因此，令 $c_2 = 2\sqrt{2}/\delta$，即可得到第二个估计，而它仅依赖于 δ。□

引理 5.16. 设 g 是定义在 $[s,1$ 上的连续可微递增函数，且 $g(s) \ge 0$。设 $\delta > 0$ 和 $0 < \varepsilon \le 1$。则我们有

$$g'(r) \le \frac{2}{\varepsilon\delta}\max\{1, g(r)^{1+\varepsilon}\}$$

对于所有不属于某个满足 $|E| < \delta$ 的集合 E 的 $r \in (s,1)$。

证明。令

$$E = \left\{ r \in (s,1); g'(r) > \frac{2}{\varepsilon\delta}\max\{1, g(r)^{1+\varepsilon}\} \right\}.$$

若 $E = \emptyset$，则我们的断言显然成立。假设 $E \ne \emptyset$。我们有

$$|E| < \frac{\varepsilon\delta}{2}\int_E \frac{g'(r)}{\max\{1, g(r)^{1+\varepsilon}\}}dr \le \frac{\varepsilon\delta}{2}\int_s^1 \frac{g'(r)}{\max\{1, g(r)^{1+\varepsilon}\}}dr.$$

我们分以下三种情况讨论。

情况 1：对于所有 $r \in [s,1$，$g(r) \ge 1$。于是我们有

$$\int_s^1 \frac{g'(r)}{\max\{1, g(r)^{1+\varepsilon}\}}dr = \int_s^1 \frac{g'(r)}{g(r)^{1+\varepsilon}}dr = \lim_{t\to 1-0}\left[\frac{-1}{\varepsilon g(r)^\varepsilon}\right]_s^t \le \frac{1}{\varepsilon}.$$

情况 2：对于所有 $r \in [s,1$，$g(r) \le 1$。于是我们有

$$\int_s^1 \frac{g'(r)}{\max\{1, g(r)^{1+\varepsilon}\}}dr = \int_s^1 g'(r)dr \le 1.$$

情况 3：否则，我们有 $g(s) < 1$ 且 $\lim_{r\to 1-0} g(r) > 1$。令 $\kappa = \sup\{r \in [s,1);\ g(r) \le 1\}$。于是我们有 $s < \kappa < 1$ 且 $g(\kappa) = 1$。因此我们有

$$\int_s^1 \frac{g'(r)}{\max\{1, g(r)^{1+\varepsilon}\}}dr = \int_s^\kappa g'(r)dr + \int_\kappa^1 \frac{g'(r)}{g(r)^{1+\varepsilon}}dr \le 1 + \lim_{t\to 1-0}\left[\frac{-1}{\varepsilon g(r)^\varepsilon}\right]_\kappa^t \le \frac{2}{\varepsilon}.$$

因此，在所有情况下，我们都已证明 $|E| < \delta$。 □

5.8. 对（5.3）右端第二项的估计。设 A 是一个半阿贝尔簇，其光滑射影等变紧化为 $\overline{A}$。设 S 是一个光滑射影簇。设 $Z \subset S_{1,\ A}$ 是一个不可约扎里斯基闭集。假设 Z 是水平可积的。我们回顾注 5.10 中的 $W \subset S$。

引理 5.17. 设 $D \subset \overline{A}$ 是 ∂A 的一个不可约分支，其 Weil 函数为 $\lambda_D \geq 0$。设$\mathcal{F} \subset$ Hol($\mathbb{D}$, $A \times S$) 是一个非恒定全纯映射的无限集，使得 $(f_{S_{1,A}})_{f\in\mathcal{F}} \Rightarrow Z$。设 ω_S 是 S 上的一个光滑正 (1, 1) 形式，并设 $\lambda_W \geq 0$ 是 W 的一个 Weil 函数。设$s \in (1/2, 1)$ 和 $\delta > 0$。那么存在一个正常数 $\alpha > 0$，使得对于所有满足$f_S(\mathbb{D}) \not\subset W$ 的 $f \in \mathcal{F}$，我们有

$$|m(r, f_A, \lambda_D) - m((s + r)/2, f_A, \lambda_D)| \leq \alpha T_s(r, f_S, \omega_S) + \alpha m((s + r)/2, f_S, \lambda_W) + \alpha$$

对于所有 $r \in (s,1)\backslash E$，其中 $E \subset (s, 1)$ 是一个具有 $|E| < \delta$ 的例外集。

证明。我们回顾注 5.10 中固定的对象。令 $\partial U = \Sigma - U$ 配备一个 Weil 函数$\lambda_{\partial U} \geq 0$。于是由引理 5.8 (1)，我们得到

$$\bigcup_{\Delta} \bar{q}(\Delta) \subset W, \tag{5.54}$$

其中，Δ 遍历所有不可约分支 $\Delta \subset \partial U$，使得 $\Delta \cap \overline{\Theta} \neq \emptyset$。这里，$\bar{q}\colon\ \Sigma \to S$是 $q\colon U \to S$的延拓。令 $K \subset \Sigma$ 为$\overline{\Theta} \subset \Sigma$的一个紧邻域。我们假设 $K \subset \Sigma^o$ 并且

$$\Delta' \cap K = \emptyset \tag{5.55}$$

对于所有满足 $\Delta' \cap \overline{\Theta} = \emptyset$ 的不可约分支 $\Delta' \subset \partial U$。由（5.54）和（5.55），存在一个正常数 $\alpha_1 > 0$，使得

$$\lambda_{\partial U}(x) \leq \alpha_1 \lambda_W(q(x)) + \alpha_1 \tag{5.56}$$

对所有 $x \in K$。

由于 $\overline{A}$ 是一个等变紧化，同构 $\Phi\colon\ A \times U \to A \times U$ 可延拓为一个态射

$$\overline{\Phi} : \overline{A} \times U \to \overline{A} \times U$$

由该 de 定义（3.4）。那么逆映射 $\overline{\Phi}^{-1}\colon\ \overline{A} \times U \to \overline{A} \times U$ 诱导出一个有理映射。

$$\overline{\Phi}^{-1} : \overline{A} \times \Sigma \dashrightarrow \overline{A} \times \Sigma,$$

在 $\overline{A} \times U \subset \overline{A} \times \Sigma$ 上全纯。令 $\nu_1\colon\ \overline{A} \times \Sigma \to \overline{A}$ 为第一投影，令 $\nu_2 : \overline{A} \times \Sigma \to \Sigma$ 为第二投影。我们断言，存在一个正常数 $\alpha_2 > 0$，使得

$$|\lambda_D(\nu_1(x)) - \lambda_D(\nu_1 \circ \Phi^{-1}(x))| \leq \alpha_2 \lambda_{\partial U}(\nu_2(x)) + \alpha_2 \tag{5.57}$$

对所有 $x \in A \times U \subset \overline{A} \times \Sigma$ 均成立。事实上，由于 $D \subset \overline{A}$ 是 A-不变的，我们有 $\overline{\Phi}(D \times U) = D \times U$。因此我们有

$$\left(\nu_1 \circ \overline{\Phi}^{-1}\right)^{-1}(D)|_{\overline{A}\times U} = \nu_1^{-1}(D)|_{\overline{A}\times U}$$

在 $\overline{A} \times U$ 上。因此，根据 [44, 命题 2.2.9 (7)], ，我们得到 (5.57)。

现在给定一个由非恒定全纯映射构成的无限子集 $\mathcal{F} \subset$ Hol($\mathbb{D}, A \times S$)，使得 $(f_{S_{1,\ A}})_{f\in\mathcal{F}} \Rightarrow Z$。我们应用引理 5.5，得到一个有限子集 $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$，使得对每个 $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{E}$，我们都能得到一个 $f \in$Hol($\mathbb{D}, A \times S$) 的提升 $f \in$Hol$_{\mathrm{m}}$($\mathbb{D}, A \times \Sigma$)、一个连通开集 $\Omega_f \subset \mathbb{D}$，以及 $\pi^{-1} \cdot f$(Ωf) 的一个连通分支 $\Omega'_f \subset Y_{\cdot f}$，它们具有引理 5.5 中所述的性质 (5.9)–(5.12)。

设给定 $s \in (1/2,1)$、$\delta > 0$。令

$$\delta' = \delta/11.$$

我们有（参见 (5.10)）

$$((\hat{f}_\Sigma, \Omega_f, \Omega'_f))_{f\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{E}} \rightsquigarrow \overline{\Theta}.$$

因此，存在一个有限子集 $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{F}$，其中 $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_1$，使得对于所有 $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{E}_1$，我们有$z \in \Omega_f$，对 δ'-几乎所有 $z \in \mathbb{D}(1-\delta')$ 都成立，并且

$$\hat{f}_\Sigma(\Omega'_f) \subset K. \tag{5.58}$$

令 ω_Σ 为 Σ 上的光滑正 (1, 1)-形式，使得

$$\omega_\Sigma \leq \eta \tag{5.59}$$

在 K 上。这里我们回顾注 5.10 中的 η。取 Σ_1^* 的一个开邻域 $O \subset \Sigma_{1,A}$,$_A$，使得

$$|v_{\mathrm{Lie}A}|_{\omega_A} \leq |v_\Sigma|_{\omega_\Sigma} \tag{5.60}$$

对于所有满足 $[(v_\Sigma, v_{\mathrm{Lie}A})] \in O \subset \Sigma_{1,A}$ 的 $(v_\Sigma, v_{\mathrm{Lie}A}) \in T\Sigma \times \mathrm{Lie}A$，我们有（参见 (5.11)）

$$(((\Phi \circ \hat{f})_{\Sigma_{1,A}}, \Omega_f, \Omega'_f))_{f\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{E}} \rightsquigarrow \Sigma_{1,A}^*.$$

因此，我们可以取一个有限子集 $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{F}$，使得 $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$，从而对于所有 $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{E}_2$，都有

$$(\Phi \circ \hat{f})_{\Sigma_{1,A}}(\Omega'_f) \subset O. \tag{5.61}$$

令 $f \in \mathcal{G}\backslash\mathcal{E}_2$ 满足 $f_S(\mathbb{D}) \not\subset W$。于是由 (5.56) 和 (5.58)，我们有

$$m(r, (\hat{f}_\Sigma, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_{\partial U}) \leq \alpha_1 m(r, f_S, \lambda_W) + \alpha_1 \tag{5.62}$$

对于所有 $r \in (0, 1)$。我们设

$$E_1 = \{r \in (s, 1-\delta'); (\mathbb{D}\backslash\Omega_f) \cap \partial\mathbb{D}(r) \neq \emptyset\} \cup \{r \in (s, 1-\delta'); (\mathbb{D}\backslash\Omega_f) \cap \partial\mathbb{D}(\sigma) \neq \emptyset\},$$

其中 $\sigma = (s+r)/2$。通过向 E_1 中添加有限个点，我们可以假设，若 $r \in (s, 1-\delta')\backslash E_1$，则 $\partial\mathbb{D}(r) \cup \partial\mathbb{D}(\sigma)$ 包含于 Ω_f，且不包含 $\pi_{\hat{f}}$ 的临界值：$Y_f \to \mathbb{D}$。于是我们有

$$|E_1| \leq 6\delta'.$$

对于所有 $r \in (s, 1-\delta')\backslash E_1$，我们有

$$m(r, f_A, \lambda_D) = m(r, (\hat{f}_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D)$$

and

$$m(\sigma, f_A, \lambda_D) = m(\sigma, (\hat{f}_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D).$$

由 (5.57) 和 (5.62)，我们得到

$$|m(r, ((\Phi \circ \hat{f})_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D) - m(r, (\hat{f}_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D)| \leq \alpha_3 m(r, f_S, \lambda_W) + \alpha_3,$$

其中 $\alpha_3 = \alpha_2\alpha_1 + \alpha_2$。类似地，我们有

$$|m(\sigma, ((\Phi \circ \hat{f})_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D) - m(\sigma, (\hat{f}_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D)| \leq \alpha_3 m(\sigma, f_S, \lambda_W) + \alpha_3.$$

因此，对于 $r \in (s, 1-\delta')\backslash E_1$，我们有

$$\begin{aligned}|m(r, f_A, \lambda_D) - m(\sigma, f_A, \lambda_D)| &= |m(r, (\hat{f}_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D) - m(\sigma, (\hat{f}_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D)| \\ &\leq |m(r, ((\Phi \circ \hat{f})_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D) - m(\sigma, ((\Phi \circ \hat{f})_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D)| \\ &\quad + \alpha_3 m(r, f_S, \lambda_W) + \alpha_3 m(\sigma, f_S, \lambda_W) + 2\alpha_3.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|m(r, f_A, \lambda_D) - m(\sigma, f_A, \lambda_D)| &\leq |m(r, ((\Phi \circ \hat{f})_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D) - m(\sigma, ((\Phi \circ \hat{f})_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D)| \\ &\quad + \alpha_3 m(r, f_S, \lambda_W) + \alpha_3 m(\sigma, f_S, \lambda_W) + 2\alpha_3.\end{aligned} \tag{5.63}$$

接下来我们断言

$$|m(r, ((\Phi \circ \hat{f})_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D) - m(\sigma, ((\Phi \circ \hat{f})_A, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D)| \leq \alpha_4 T_s(r, \hat{f}_\Sigma, \eta) + \alpha_4 \tag{5.64}$$

对所有的 $r \in (s, 1)\backslash E_2$，其中 $E_2 \subset (0, 1)$ 是一个例外集，且满足 $|E_2| < 11\delta'$。这里 $\alpha_4 > 0$ 是一个正常数，不依赖于 $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{E}_2$ 的选择。

我们证明如下。设 $\gamma_{r,\ \theta}$： $te^{i\theta}, 1/2 \le t \le r$。如果 $\partial\mathbb{D}(\sigma) + \gamma_{r,\ \theta} + \partial\mathbb{D}(r) \subset \Omega_f$，那么根据（5.60）和（5.61），我们有

$$\ell_{\omega_A}((\Phi \circ \hat{f})_{\overline{A}}(\Omega'_f \cap \pi_{\hat{f}}^{-1}(\partial\mathbb{D}(r) \cup \partial\mathbb{D}(\sigma) \cup \gamma_{r,\theta}))) \le \ell_{\omega_\Sigma}(\hat{f}_\Sigma(\Omega'_f \cap \pi_{\hat{f}}^{-1}(\partial\mathbb{D}(r) \cup \partial\mathbb{D}(\sigma) \cup \gamma_{r,\theta}))).$$

由 (5.58) 和 (5.59)，我们有

$$\ell_{\omega_\Sigma}(\hat{f}_\Sigma(\Omega'_f \cap \pi_{\hat{f}}^{-1}(\partial\mathbb{D}(r) \cup \partial\mathbb{D}(\sigma) \cup \gamma_{r,\theta}))) \le \ell_\eta(\hat{f}_\Sigma(\Omega'_f \cap \pi_{\hat{f}}^{-1}(\partial\mathbb{D}(r) \cup \partial\mathbb{D}(\sigma) \cup \gamma_{r,\theta}))$$

因此，由引理 5.14 可得

$$\begin{aligned}(5.65)\quad &|m(r, ((\Phi \circ \hat{f})_{\overline{A}}, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D) - m(\sigma, ((\Phi \circ \hat{f})_{\overline{A}}, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D)| \\ &\le \frac{c}{\deg(\pi_{\hat{f}}|_{\Omega'_{\hat{f}}})} \ell_\eta(\hat{f}_\Sigma(\pi_{\hat{f}}^{-1}(\partial\mathbb{D}(r) \cup \partial\mathbb{D}(\sigma) \cup \gamma_{r,\theta}))) + c,\end{aligned}$$

前提是 $\partial\mathbb{D}(r) \cup \partial\mathbb{D}(\sigma) \cup \gamma_{r,\ \theta} \subset \Omega_f$ 不包含 $\pi_{\hat{f}}$ 的临界值： $Y_{\hat{f}} \to \mathbb{D}$。这里， $c > 0$ 是一个正常数，它出现在引理 5.14 中，因此与 $f \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{E}_2$、 r 和 θ 的选择无关。

现在应用引理 5.15，得到

$$\ell_\eta(\hat{f}_\Sigma(\pi_{\hat{f}}^{-1}(\partial\mathbb{D}(r)))) \le \alpha_5(\deg \pi_{\hat{f}})^2 T_s(r, \hat{f}_\Sigma, \eta) + \alpha_5(\deg \pi_{\hat{f}})^2,$$

对于某个例外集 $E_3 \subset (s, 1)$ 之外的所有 $r \in (s, 1)$，有

$$|E_3| < \delta'.$$

这里 $\alpha_5 > 0$ 仅取决于 δ'。我们通过 $r \in E_4$ 当且仅当 $(s + r)/2 \in E_3$ 来定义 $E_4 \subset (s, 1)$。我们有

$$|E_4| \le 2|E_3| \le 2\delta'.$$

那么对于 $r \in (s, 1 - \delta')\backslash(E_1 \cup E_4)$，我们有

$$\ell_\eta(\hat{f}_\Sigma(\pi_{\hat{f}}^{-1}(\partial\mathbb{D}(\sigma)))) \le \alpha_5(\deg \pi_{\hat{f}})^2 T_s(\sigma, \hat{f}_\Sigma, \eta) + \alpha_5(\deg \pi_{\hat{f}})^2,$$

and $\partial\mathbb{D}(\sigma) \subset \Omega_f$。因此对于 $r \in (s, 1 - \delta')\backslash(E_1 \cup E_3 \cup E_4)$，估计式 (5.65) 得出 s

$$\begin{aligned}&|m(r, ((\Phi \circ \hat{f})_{\overline{A}}, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D) - m(\sigma, ((\Phi \circ \hat{f})_{\overline{A}}, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D)| \\ &\le 2c\alpha_5(\deg \pi_{\hat{f}}) T_s(r, \hat{f}_\Sigma, \eta) + 2c\alpha_5(\deg \pi_{\hat{f}}) + c + \frac{c}{\deg(\pi_{\hat{f}}|_{\Omega'_{\hat{f}}})} \ell_\eta(\hat{f}_\Sigma(\pi_{\hat{f}}^{-1}(\gamma_{r,\theta})))\end{aligned}$$

只要 $\gamma_{r,\theta}$ 包含于 Ω_f 中且不包含 $\pi_{\hat{f}}$ 的临界值： $Y_{\hat{f}} \to \mathbb{D}$。根据引理 5.15 (2)，存在 $E_5 \subset (s, 1)$ 使得

$$|E_5| < \delta'$$

使得对于每个 $r \in (s, 1 - \delta')\backslash E_5$，我们可以选择 $\theta \in (0, 2\pi)$，使得 $\gamma_{r,\theta} \subset \Omega_f$、 $\gamma_{r,\theta}$ 不包含 $\pi_{\hat{f}}$ 的临界值： $Y_{\hat{f}} \to \mathbb{D}$，并且

$$\ell_\eta(\hat{f}_\Sigma(\pi_{\hat{f}}^{-1}(\gamma_{r,\theta}))) \le \alpha_6(\deg \pi_{\hat{f}}) T_s(r, \hat{f}_\Sigma, \eta) + \alpha_6(\deg \pi_{\hat{f}}).$$

这里的 $\alpha_6 > 0$ 仅依赖于 δ'。因此，我们得到

$$\begin{aligned}&|m(r, ((\Phi \circ \hat{f})_{\overline{A}}, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D) - m(\sigma, ((\Phi \circ \hat{f})_{\overline{A}}, \Omega_f, \Omega'_f), \lambda_D)| \\ &\le c(2\alpha_5 + \alpha_6)(\deg \pi_{\hat{f}}) T_s(r, \hat{f}_\Sigma, \eta) + c(2\alpha_5 + \alpha_6)(\deg \pi_{\hat{f}}) + c\end{aligned}$$

对所有 $r \in (s, 1)\backslash E_2$，其中

$$(5.66)\qquad E_2 = E_1 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup (1 - \delta', 1).$$

我们有

$$|E_2| < 11\delta' = \delta.$$

这就完成了 (5.64) 的证明，其中我们设 $\alpha_4 = c(2\alpha_5 + \alpha_6)[\mathbb{C}(S) : \mathbb{C}(\Sigma)] + c$。

现在由（5.63）和（5.64），我们得到

$$|m(r,f_A,\lambda_D)-m(\sigma,f_A,\lambda_D)|\le\alpha_7T_s(r,\hat{f}_\Sigma,\eta)+\alpha_7m(r,f_S,\lambda_W)+\alpha_7m(\sigma,f_S,\lambda_W)+\alpha_7$$

对所有 $r\in(s,1)\backslash E_2$，其中 $\alpha_7=2\alpha_3+\alpha_4$。这里注意到 $E_1\cup(1-\delta',1)\subset E_2$（参见(5.66)）。由引理5.8，得

$$T_s(r,\hat{f}_\Sigma,\eta)\le\alpha_8T_s(r,\bar{q}\circ\hat{f}_\Sigma,\omega_S)+\alpha_8m(\sigma,f_S,\lambda_W)+\alpha_8$$

对所有 $r\in(1/2,1)$。这里，$\alpha_8>0$ 是一个正常数，且不依赖于$f\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{E}_2$的选取。因此得

$$|m(r,f_A,\lambda_D)-m(\sigma,f_A,\lambda_D)|\le\alpha_9T_s(r,f_S,\omega_S)+\alpha_9m(r,f_S,\lambda_W)+\alpha_9m(\sigma,f_S,\lambda_W)+\alpha_9$$

对所有 $r\in(s,1)\backslash E_2$，其中 $\alpha_9=\alpha_7\alpha_8+\alpha_7$。由引理4.3，得

$$m(r,f_S,\lambda_W)\le\alpha_{10}T_\sigma(r,f_S,\omega_S)+m(\sigma,f_S,\lambda_W)+\alpha_{10}$$

对所有 $r\in(1/2,1)$。这里，$\alpha_{10}>0$ 是一个正常数，且不依赖于$f\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{E}_2$的选取。因此得

$$|m(r,f_A,\lambda_D)-m(\sigma,f_A,\lambda_D)|\le\alpha T_s(r,f_S,\omega_S)+\alpha m(\sigma,f_S,\lambda_W)+\alpha \tag{5.67}$$

对所有 $r\in(s,1)\backslash E_2$，其中 $\alpha=\max\{2\alpha_9,\alpha_9\alpha_{10}+\alpha_9\}$。这就证明了所需的估计：对于$f\in\mathcal{F}\backslash\mathcal{E}_2$，有 $f_S(\mathbb{D})\not\subset W$。

最后我们将 $\alpha>0$ 扩大，使得

$$2\sup_{r\in(s,1-\delta)}m(r,f,\lambda_D)\le\alpha$$

对所有 $f\in\mathcal{E}_2$ 均成立。于是(5.67)对所有满足 $f_S(\mathbb{D})\not\subset W$ 的 $f\in\mathcal{F}$ 均成立。 □

5.9. 命题5.1的证明。我们取 $W\subset S$，如注5.10所述。于是我们有 $W\subsetneq\tau(Z)$（参见注5.10）。令 $\mathcal{F}\subset$全纯映射空间$(\mathbb{D},A\times S)$、$\omega_{\overline{A}}$、ω_S、λ_W、$s\in(1/2,1)$、$\delta>0$如命题5.1所给定。令 $\rho:A\to A_0$ 为典范商（参见(5.2)），并令ω_{A_0} 为 A_0上的不变正(1,1)-形式。注意，我们给定了一个光滑射影等变紧化 $\overline{A}$。对于 ∂A 的一个不可约分支 $D\subset\overline{A}$，令 $\lambda_D\ge0$ 为一个Weil函数。

现在取 $f\in\mathcal{F}$，使得 $f_S(\mathbb{D})\not\subset W$。由引理5.2，得到

$$T_s(r,f_A,\omega_{\overline{A}})\le c'T_s(r,\rho\circ f_A,\omega_{A_0})+c'\sum_{D\subset\partial A}|m(r,f_A,\lambda_D)-m(\sigma,f_A,\lambda_D)|+c'$$

对所有 $r\in(s,1$ ），其中 $c'>0$ 与 $f\in\mathcal{F}$ 的选取无关。由引理5.11，得到

$$T_s(r,\rho\circ f_A,\omega_{A_0})\le\alpha T_s(r,f_S,\omega_S)+\alpha m((s+r)/2,f_S,\lambda_W)+\alpha$$

对所有 $r\in(s,1)\backslash E'$，且满足 $|E'|<\delta/2$。这里 $\alpha>0$ 与 $f\in\mathcal{F}$ 的选取无关。令 D_1，.....，D_l 为 ∂A 的不可约分支。由引理5.17，得到

$$|m(r,f_A,\lambda_{D_i})-m((s+r)/2,f_A,\lambda_{D_i})|\le\beta_iT_s(r,f_S,\omega_S)+\beta_im((s+r)/2,f_S,\lambda_W)+\beta_i$$

对所有 $r\in(s,1)\backslash E_i$，其中 $E_i\subset(s,1)$ 是一个满足 $|E_i|<\delta/2l$ 的例外集。这里 $\beta_i>0$ 与 $f\in\mathcal{F}$ 的选取无关。设 $c_1=c_2=c'(\alpha+\sum_{i=1}^l\beta_i)$、$c_3=c'+c'(\alpha+\sum_{i=1}^l\beta_i)$，且 $E=E'\cup\cup_{i=1}^lE_i$。于是 $|E|<\delta$。这证明了(5.1)，其中 $c_1>0$、$c_2>0$、$c_3>0$ 与 $f\in\mathcal{F}$ 的选取无关。证明完毕。□

6. Application of logarithmic tautological inequality

6.1. 对数典范不等式。设 X 是一个带有光滑正(1,1)-形式 ω_X的光滑射影簇。设 $D\subset X$ 是一个简单正规交叉除子。我们设$\overline{T}X(-\log D)=P(TX(-\log D)\oplus\mathcal{O}_X)$，它是 $TX(-\log D)$的光滑紧化。设 $\partial TX(-\log D)$是边界上的卡蒂埃除子，它对应于$\mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1)$的一个截面。若 $f\in$Hol$(\mathbb{D},X)$是全纯映射，且 $f(\mathbb{D})\not\subset D$，则 f的导数诱导出一个全纯映射 $f':\mathbb{D}\to\overline{T}X(-\log D)$。

引理 6.1. 设 $\varepsilon > 0$、 $\delta > 0$ 和 $s \in (0, 1)$。设 $\lambda_{\partial TX(-\text{对数 } D)}$ 和 λ_D 分别为 $\partial TX(-\text{对数 } D) \subset \overline{T}X(-\text{对数 } D)$ 和 $D \subset X$ 的 Weil 函数。则存在一个正常数 $\mu > 0$，使得对于所有 $f \in$ 全纯映射空间$(\mathbb{D}, X)$ 满足 $f(\mathbb{D}) \not\subset D$ 时，我们有

$$m(r, f', \lambda_{\partial TX(-\log D)}) \leq \varepsilon T_s(r, f, \omega_X) + \varepsilon m(r, f, \lambda_D) + \mu$$

对于所有不属于某个线性测度小于 δ 的例外集的 $r \in (s, 1)$。

这个引理是 R. Kobayashi[27] 和 McQuillan [32]关于整曲线 $f : \mathbb{C} \to X$ 的估计的一种变体。关于精确表述及其简化证明，请参见 Vojta [43, 定理 A.2]。我们指出，将 [43, 定理 A.2] 应用于整曲线 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ 和 $D = (0) + (\infty)$ 时，可得经典的对数导数奈望林纳引理；而 Vojta 对 [43, 定理 A.2] 的证明则以奈望林纳引理为基础。下文我们采用 [45, 定理 4.8],中所述的另一种方法，该方法不使用奈望林纳引理。另见 [9, 第 2] 节。

引理 6.1 的证明。证明分为三个步骤。以下证明与 [45, 定理 4.8] 的证明相似。

步骤 1。设 $\overline{T}X = P(TX \oplus \mathcal{O}_X)$ 是 TX 的一个光滑紧化，令 ∂TX 为边界上对应于 $\mathcal{O}_{\overline{T}X}(1)$ 的一个截面的卡蒂埃除子。令 $\lambda_{\partial TX}$ 为由 $\lambda_{\partial TX}(v) = \log \sqrt{1 + |v|^2_{\omega_X}}$ 对 $v \in TX$ 定义的 ∂TX 的 Weil 函数，其中 $|\cdot|_{\omega_X}$ 是 TX 上由 ω_X 定义的一个范数。我们证明，对所有满足 $g(Y_g) \not\subset D$ 的 $g \in \mathrm{Hol}_{\mathrm{m}}(\mathbb{D}, X)$，以下估计成立：

$$m(r, g', \lambda_{\partial TX(-\log D)}) \leq m(r, g, \lambda_D) + m(r, g', \lambda_{\partial TX}) + \mu_1 \tag{6.1}$$

对所有 $r \in (0, 1)$ 均成立。这里 $\mu_1 > 0$ 是一个仅取决于 Weil 函数选取的正常数。

我们来证明这一点。自然态射 $\iota_1 : TX(-\log D) \to TX$ 诱导一个双有理映射

$$\psi : \overline{T}X \dashrightarrow \overline{T}X(-\log D).$$

令 $Z \subset \overline{T}X$ 为 ψ 的不定轨迹。令 $p\colon \overline{T}X \to X$ 为投影。于是我们有

$$(\psi|_{\overline{T}X\setminus Z})^* \partial TX(-\log D) = (p^*D + \partial TX)|_{\overline{T}X\setminus Z}. \tag{6.2}$$

~~设 $\alpha : \overline{T}X \to \overline{T}X$ 是一个修改，使得 ψ 诱导态射 $\psi\colon \overline{T}X \to \overline{T}X(-\text{对数 } D)$。~~那么存在一个有效 Cartier 除子 $E \subset \overline{T}X$，使得

$$\widetilde{\psi}^* \partial TX(-\log D) = \alpha^*(p^*D + \partial TX) - E. \tag{6.3}$$

事实上，由 (6.2) 可得

$$(\psi|_{\overline{T}X\setminus Z})^* \mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1) = (p^*\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_{\overline{T}X}(1))|_{\overline{T}X\setminus Z}. \tag{6.4}$$

设 $p^{\log}\colon \overline{T}X(-\text{对数 } D) \to X$ 为投影。存在一个自然满射

$$(p^{\log})^*(p^{\log})_* \mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1) \to \mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1). \tag{6.5}$$

我们沿 $\psi|_{\overline{T}X\setminus Z}\colon \overline{T}X\setminus Z \to \overline{T}X(-\text{对数 } D)$ 拉回此映射，并与 (6.4) 结合。于是我们在 $\overline{T}X\setminus Z$ 上得到如下满射：

$$p^*(p^{\log})_* \mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1)|_{\overline{T}X\setminus Z} \to p^*\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_{\overline{T}X}(1)|_{\overline{T}X\setminus Z}.$$

由于 Z 的余维数大于一，该态射可延拓至整个 $\overline{T}X$。我们将由 (6.5) 得到的下述满射的核记为 K：

$$\widetilde{\psi}^*(p^{\log})^*(p^{\log})_* \mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1) \to \widetilde{\psi}^* \mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1).$$

那么，以下映射的复合

$$K \to \alpha^* p^*(p^{\log})_* \mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1) \to \alpha^* \left(p^*\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_{\overline{T}X}(1)\right)$$

~~在 $\alpha^{-1}(\overline{T}X\setminus Z)$ 上是零映射，因此在 $\overline{T}X$ 上也是如此。由此我们得到一个态射~~

$$\widetilde{\psi}^* \mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1) \to \alpha^* \left(p^*\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_{\overline{T}X}(1)\right).$$

因此，存在一个定义在 $\overline{T}X$ 上的有效 Cartier 除子 E，使得 (6.3) 成立。由此，我们得到 (6.1)。

步骤 2。我们估计 $m(r,g',\lambda_{\partial TX})$，其中

$$m(r,g',\lambda_{\partial TX})=\frac{1}{\deg\pi_g}\int_{y\in\partial Y_g(r)}\log\sqrt{1+|g'(y)|^2_{\omega_X}}\frac{d\arg\pi_g(y)}{2\pi}$$

利用对数凹性，我们有

$$m(r,g',\lambda_{\partial TX})\le\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{\deg\pi_g}\int_{y\in\partial Y_g}|g'(y)|^2_{\omega_X}\frac{d\arg\pi_g(y)}{2\pi}\right).$$

我们令

$$\tau(r)=\frac{1}{\deg\pi_g}\int_s^r dt\int_{Y_g(t)}g^*\omega_X.$$

于是我们有

$$\frac{1}{2\pi r}\frac{d^2}{dr^2}\tau(r)=\frac{1}{\deg\pi_g}\int_{y\in\partial Y_g(r)}|g'(y)|^2_{\omega_X}\frac{d\arg\pi_g(y)}{2\pi}.$$

因此

$$m(r,g',\lambda_{\partial TX})\le\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2\pi r}\frac{d^2}{dr^2}\tau(r)\right).$$

因此对于 $r>s$，我们有

$$m(r,g',\lambda_{\partial TX})\le\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2\pi s}\frac{d^2}{dr^2}\tau(r)\right).$$

现在我们两次应用引理 5.16。我们有

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dr^2}\tau(r)&\le\frac{4}{\delta}\max\left\{1,(\tau'(r))^2\right\}\\&\le\frac{4}{\delta}\max\left\{1,\left(\frac{4}{\delta}\max\{1,\tau(r)^2\}\right)^2\right\}\\&=\frac{4^3}{\delta^3}\max\left\{1,\tau(r)^4\right\}\\&\le\frac{4^3}{\delta^3}+\frac{4^3}{\delta^3}\tau(r)^4\end{aligned}$$

对于 $r\in(s,1)$，在某个例外集 E 之外，满足 $|E|<\delta$。因此根据 $\tau(r)\le T_s(r,g,\omega_X)$，我们得到

$$m(r,g',\lambda_{\partial TX})\le\frac{1}{2}\log\left(1+c+cT_s(r,g,\omega_X)^4\right)\tag{6.6}$$

对于 E 之外的 $r\in(s,1)$，其中 $c=\frac{4^3}{2\pi s\delta^3}$。

步骤 3. 我们取一个正整数 l，使得 $\frac{1}{l}<\varepsilon$。存在一个分歧覆盖φ：$X'\to X$，满足 (1) X' 光滑，(2) $D':=(\varphi^*D)_{\mathrm{red}}$ 为正规交叉，(3) $lD'\subset\varphi^*D$（参见 [23, 定理 17]）。我们取一个全纯映射 g：$Y\to X'$，其中 Y 是一个黎曼曲面，带有一个真满射全纯映射 π_g：$Y\to\mathbb{D}$，并满足以下交换图。

$$\begin{array}{ccc}Y&\xrightarrow{g}&X'\\\downarrow{\scriptstyle\pi_g}&&\downarrow{\scriptstyle\varphi}\\\mathbb{D}&\xrightarrow[f]{}&X\end{array}$$

于是我们有

$$lm(r,g,\lambda_{D'})\le m(r,g,\lambda_{\varphi^*D})=m(r,f,\lambda_D).$$

态射 $TX'(-\log D') \to TX(-\log D)$ 诱导出一个有理映射 $\Phi\colon \overline{T}X'(-\log D') \dashrightarrow \overline{T}X(-\log D)$。令 $Z' \subset \overline{T}X'(-\log D')$ 为 Φ 的不定轨迹。于是我们有

$$(\Phi|_{\overline{T}X'(-\log D')\setminus Z'})^*(\partial TX(-\log D)) = \partial TX'(-\log D')|_{\overline{T}X'(-\log D')\setminus Z'}. \tag{6.7}$$

令 $\beta\colon \widetilde{X'(-\log D')} \to \overline{T}X'(-\log D')$ 是一个修改，使得 Φ 诱导出一个态射 $\widetilde{\Phi}\colon \overline{T}X'(-\log D') \to \overline{T}X(-\log D)$。那么，利用与证明 (6.3) 类似的论证，我们有

$$\widetilde{\Phi}^*(\partial TX(-\log D)) = \beta^*(\partial TX'(-\log D')) - E', \tag{6.8}$$

其中 $E' \subset \widetilde{\overline{T}X'(-\log D')}$ 是一个有效 Cartier 除子。

我们来证明这一点。由 (6.7)，在 $\overline{T}X'(-\log D')\setminus Z'$ 上有：

$$(\Phi|_{\overline{T}X'(-\log D')\setminus Z'})^*\mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1) = \mathcal{O}_{\overline{T}X'(-\log D')}(1)|_{\overline{T}X'(-\log D')\setminus Z'}. \tag{6.9}$$

我们将 (6.5) 沿 $\Phi|_{\overline{T}X'(-\log D')\setminus Z'}\colon \overline{T}X'(-\log D')\setminus Z' \to \overline{T}X(-\log D)$ 拉回，并与 (6.9) 结合。于是，在 $\overline{T}X'(-\log D')\setminus Z'$ 上有如下满射：

$$((p')^{\log})^*(p^{\log})_*\mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1)|_{\overline{T}X'(-\log D')\setminus Z'} \to \mathcal{O}_{\overline{T}X'(-\log D')}(1)|_{\overline{T}X'(-\log D')\setminus Z'},$$

其中，$(p')^{\log}\colon \overline{T}X'(-\log D') \to X'$ 是投影。由于 Z' 的余维数大于一，此态射可延拓到整个 $\overline{T}X'(-\log D')$ 上。我们将由 (6.5) 得到的下列满射的核记为 K：

$$\widetilde{\Phi}^*(p^{\log})^*(p^{\log})_*\mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1) \to \widetilde{\Phi}^*\mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1).$$

那么，以下映射的复合

$$K \to \beta^*((p')^{\log})^*(p^{\log})_*\mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1) \to \beta^*\mathcal{O}_{\overline{T}X'(-\log D')}(1)$$

在 $\beta^{-1}(\overline{T}X'(-\log D')\setminus Z')$ 上是零映射，因此在 $\widetilde{\overline{T}X'(-\log D')}$ 上也是如此。因此我们得到一个态射

$$\widetilde{\Phi}^*\mathcal{O}_{\overline{T}X(-\log D)}(1) \to \beta^*\mathcal{O}_{\overline{T}X'(-\log D')}(1).$$

因此，在 E' 上存在一个有效 Cartier 除子 $\widetilde{TX'(-\log D')}$，使得 (6.8) 成立。现在由 (6.8)，我们有

$$m(r, f', \lambda_{\partial TX(-\log D)}) \le m(r, g', \lambda_{\partial TX'(-\log D')}) + \mu_2.$$

这里 $\mu_2 > 0$ 是一个仅取决于 Weil 函数的选取的正常数。对（X'，D'）这一对使用 (6.1)，而非（X，D），我们得到

$$\begin{aligned} m(r, f', \lambda_{\partial TX(-\log D)}) &\le m(r, g', \lambda_{\partial TX'(-\log D')}) + \mu_2 \\ &\le m(r, g, \lambda_{D'}) + m(r, g', \lambda_{\partial TX'}) + \mu_1 + \mu_2 \\ &\le \frac{1}{l} m(r, f, \lambda_D) + m(r, g', \lambda_{\partial TX'}) + \mu_1 + \mu_2 \\ &\le \varepsilon m(r, f, \lambda_D) + m(r, g', \lambda_{\partial TX'}) + \mu_1 + \mu_2. \end{aligned}$$

根据针对 $(X', \omega_{X'})$ 而非 (X, ω_X) 的 (6.6)，我们得到

$$m(r, f', \lambda_{\partial TX(-\log D)}) \le \varepsilon m(r, f, \lambda_D) + \frac{1}{2}\log\left(1 + c + cT_s(r, g, \omega_{X'})^4\right) + \mu_1 + \mu_2$$

对于某个线性测度小于 δ 的例外集之外的所有 $r \in (s,1)$。由于 $\varphi\colon X' \to X$ 是有限的，存在正常数 $c' > 0$ 和 $c'' > 0$，使得

$$T_s(r, g, \omega_{X'}) \le c' T_s(r, g, \varphi^*\omega_X) + c'' = c' T_s(r, f, \omega_X) + c''$$

对所有 $r \in (s, 1)$ 均成立，其中 c' 和 c'' 与 g 的选取无关（参见引理 4.5）。因此我们得到

$$m(r, f', \lambda_{\partial TX(-\log D)}) \le \varepsilon m(r, f, \lambda_D) + \frac{1}{2}\log\left(1 + c + c(c' T_s(r, f, \omega_X) + c'')^4\right) + \mu_1 + \mu_2$$

对所有 $r \in (s, 1)$ 均成立，但需排除某个线性测度小于 δ的例外集。取正常数 $\mu > 0$ 使得

$$\frac{1}{2}\log\left(1 + c + c(c'x + c'')^4\right) + \mu_1 + \mu_2 \leq \varepsilon x + \mu$$

对于 $x \geq 0$。然后我们得到我们的估计。 □

6.2. 半阿贝尔簇的情形。设 $\overline{A}$ 是半阿贝尔簇 A 的等变紧化。设 $\mathcal{G}$ 是 Hol($\mathbb{D}, A$) 中的无限指标族。我们考虑以下假设。

假设 6.2。设 $D \subset \partial A$ 是一个不可约分支。那么，对于 $\mathcal{G}$ 的每个无限子族 $\mathcal{G}'$， $\mathcal{G}' \not\to D$。

我们还指出，由此可以得到以下结果。 定义 3.18 中的所有 $\Pi(\mathcal{G})$。在本小节中，我们证明以下引理 a.

引理6.3。令 A 为一个半阿贝尔簇，并令 S 为一个光滑射影簇。令 $\overline{A}$ 为一个光滑射影等变紧化。令 $\omega_{\overline{A}}$ 和 ω_S 分别为$\overline{A}$ 和 S 上的光滑正 (1,1)-形式。令 $\mathcal{F} \subset$ 全纯映射空间($\mathbb{D}, A \times S$)为一个无限集，使得 $\mathcal{F}_A = (f_A)_{f\in\mathcal{F}}$ 满足假设6.2。假设 $\{0\} \in \Pi(\mathcal{F}_A)$，并且对于所有 $f \in \mathcal{F}$， f_A 都是非恒定的。

设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。设 $\omega_{S_{k,\ A}}$ 是 $S_{k,\ A}$ 上的光滑正 (1,1)-形式。那么存在 $\sigma \in \in(0, 1)$，具有以下性质：设 $s \in (\sigma, 1)$、 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$。那么存在正常数$\mu_1 > 0$、 $\mu_2 > 0$，使得对所有 $f \in \mathcal{F}$，估计式

$$T_s(r, f_{S_{k,A}}, \omega_{S_{k,A}}) \leq \varepsilon T_s(r, f_A, \omega_{\overline{A}}) + \mu_1 T_s(r, f_S, \omega_S) + \mu_2$$

对某个线性测度小于 δ 的例外集之外的所有 $r \in (s, 1)$ 均成立。

为证明这一点，我们先准备几个引理。

引理 6.4. 设 $\overline{A}$ 是光滑射影等变紧化。设 $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ 是 Hol($\mathbb{D}, A$) 中的一个无限指标族，并且满足假设 6.2。那么存在$\sigma \in \in(0, 1)$，具有以下性质：设 $s \in (\sigma, 1)$ 且 $\delta > 0$。那么存在正常数 $c > 0$，使得对所有 $i \in I$，都有

$$m(r, f_i, \lambda_{\partial A}) \leq cT_s(r, f_i, \omega_{\overline{A}}) + c$$

对于所有 $r \in (s + \delta, 1)$。

证明。我们首先考虑子集

$$\mathcal{F}_o = \{f_i;\ i \in I\} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$$

是有限的情形。在这种情况下，我们的估计由引理 4.3 得出。因此，我们假设 $\mathcal{F}_o$ 是无限的。那么， $\mathcal{F}_o$ 满足假设 6.2。用 $\mathcal{F}_o$ 替换 $\mathcal{F}$ 后，不妨假设 $\mathcal{F}$ 是 Hol($\mathbb{D}, A$) 的子集。

设 $D_1, \ldots, D_n$ 是 ∂A 的不可约分支。于是，对于每个 $j = 1, \ldots, n$，根据假设 6.2，我们应用引理 4.9，得到 $\sigma_j \in (0, 1)$ 和 $\alpha_j > 0$，使得对于 $s \in (\sigma_j, 1)$ 和 $\delta > 0$，有

$$m(r, f, \lambda_{D_j}) \leq \frac{\alpha_j}{\delta} T_s(r, f, \omega_{\overline{A}}) + \alpha_j$$

对于所有 $r \in (s + \delta, 1)$ 以及所有 $f \in \mathcal{F}$。令 $\sigma = \max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ 和 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$。设 $s \in (\sigma, 1)$ 和 $\delta > 0$。那么对于所有 $f \in \mathcal{F}$，我们有

$$m(r, f, \lambda_{\partial A}) = \sum_{j=1}^{n} m(r, f, \lambda_{D_j}) \leq \frac{\alpha}{\delta} T_s(r, f, \omega_{\overline{A}}) + \alpha$$

对所有 $r \in (s + \delta, 1)$。我们令 $c = \max\{\alpha, \alpha/\delta\}$，从而得出证明。 □

设 V_1 和 V_2 是光滑代数簇。设 $p_1 \colon V_1 \times V_2 \to V_1$ 为第一投影， $p_2 \colon V_1 \times V_2 \to V_2$ 为第二投影。设 ω_{V_1} 和 ω_{V_2} 分别是V_1 和 V_2上的光滑 (1, 1)-形式。我们定义

$$\omega_{V_1\times V_2} = p_1^*\omega_{V_1} + p_2^*\omega_{V_2}. \tag{6.10}$$

设 $w \in \mathbb{D}(r)$。我们回顾 (4.6) 中的 $\varphi_{w,r} : \mathbb{D}(r) \to \mathbb{D}(r)$。

引理 6.5. 设 S 是光滑射影簇。设 $\overline{A}$ 是光滑射影等变紧化。设 $\omega_{\overline{A}}$ 和 ω_S 分别是 $\overline{A}$ 和 S 上的光滑正 (1,1)-形式。设 ω_A 是 A 上的不变正 (1, 1)-形式。设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A \times S)$ 是满足 $\mathcal{F}_A = (f_A)_{f\in\mathcal{F}}$ 满足假设 6.2 的全纯映射的无限集。则存在 $\sigma \in \in (0, 1)$，具有如下性质：设 $\varepsilon > 0$、 $s \in (\sigma, 1)$ 和 $\delta > 0$。则存在正常数 $\mu > 0$，使得对于所有 $f \in \mathcal{F}$ 和 $w \in \mathbb{D}(\sigma)$，我们有

$$\int_0^{2\pi} \log |(f \circ \varphi_{w,r})'(re^{i\theta})|_{\omega_{A\times S}} \frac{d\theta}{2\pi} \le \varepsilon T_s(r, f, \omega_{\overline{A}\times S}) + \mu$$

对于所有 $r \in (s, 1)$，除去某个线性测度小于 δ 的例外集。

证明。我们首先对 $\mathcal{F}_A = (f_A)_{f\in\mathcal{F}}$ 应用引理 6.4，从而得到 $\sigma \in \in (0, 1)$。设 $\varepsilon > 0$、 $s \in (\sigma, 1)$、$\delta > 0$ 已给定。

令 $D = \partial A \times S \subset \overline{A} \times S$。首先注意，由引理 A.16 可知

$$T(\overline{A} \times S)(-\log D) = T\overline{A}(-\log \partial A) \times TS = \overline{A} \times \mathrm{Lie} A \times TS.$$

因此， $\omega_{A\times S}$ 在 $T(\overline{A} \times S)(-\log D)$ 上定义了一个 Hermitian 度量。因此，我们可以将 Weil 函数定义为

$$\lambda_{\partial T(\overline{A}\times S)(-\log D)}(v) = \log \sqrt{1 + |v|^2_{\omega_{A\times S}}}, \tag{6.11}$$

其中 $v \in T(\overline{A} \times S)(-\log D)$。

由引理 6.4，存在 $c > 0$ 使得

$$m(r, f_A, \lambda_{\partial A}) \le cT_s(r, f_A, \omega_{\overline{A}}) + c$$

对所有 $f \in \mathcal{F}$ 和 $r \in (s + \delta', 1)$ 均成立，其中 $\delta' = \delta/2$。令 $\varepsilon' = \frac{(s-\sigma)\varepsilon}{(s+\sigma)(1+c)}$。由引理 6.1，存在 $\mu_0 > 0$ 使得

$$m(r, f', \lambda_{\partial T(\overline{A}\times S)(-\log D)}) \le \varepsilon' T_s(r, f, \omega_{\overline{A}\times S}) + \varepsilon' m(r, f, \lambda_D) + \mu_0$$

对所有 $f \in \mathcal{F}$ 和 $r \in (s, 1)$ 均成立，但某个线性测度小于 δ' 的例外集除外。因此，我们有

$$m(r, f', \lambda_{\partial T(\overline{A}\times S)(-\log D)}) \le \varepsilon'(1 + c)T_s(r, f, \omega_{\overline{A}\times S}) + \varepsilon' c + \mu_0 \tag{6.12}$$

对所有不属于某个线性测度小于 $2\delta'$ 的例外集的 $f \in \mathcal{F}$ 和 $r \in$ （s, 1）。

现在我们有

$$|(f \circ \varphi_{r,w})'(z)|_{\omega_{A\times S}} = |f' \circ \varphi_{r,w}(z)|_{\omega_{A\times S}} \times |\varphi'_{r,w}(z)|.$$

因此，由（4.7）可得

$$\int_0^{2\pi} \log |(f \circ \varphi_{w,r})'(re^{i\theta})|_{\omega_{A\times S}} \frac{d\theta}{2\pi} \le \int_0^{2\pi} \log |f' \circ \varphi_{w,r}(re^{i\theta})|_{\omega_{A\times S}} \frac{d\theta}{2\pi} + \frac{s + \sigma}{s - \sigma}$$

对所有 $r \in$ （s, 1）。利用（6.11），可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \log |f' \circ \varphi_{r,w}(re^{i\theta})|_{\omega_{A\times S}} \frac{d\theta}{2\pi} &\le \int_0^{2\pi} \log \sqrt{1 + |f' \circ \varphi_{r,w}(re^{i\theta})|^2_{\omega_{A\times S}}} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= m(r, f' \circ \varphi_{r,w}, \lambda_{\partial T(\overline{A}\times S)(-\log D)}).\end{aligned}$$

由引理 4.10 可得

$$m(r, f' \circ \varphi_{r,w}, \lambda_{\partial T(\overline{A}\times S)(-\log D)}) \le \frac{s + \sigma}{s - \sigma} m(r, f', \lambda_{\partial T(\overline{A}\times S)(-\log D)})$$

对于所有 $r \in (s, 1)$。因此

$$\int_0^{2\pi} \log |(f \circ \varphi_{w,r})'(re^{i\theta})|_{\omega_{A\times S}} \frac{d\theta}{2\pi} \le \frac{s + \sigma}{s - \sigma} m(r, f', \lambda_{\partial T(\overline{A}\times S)(-\log D)}) + \frac{s + \sigma}{s - \sigma}$$

对所有 $r \in (s, 1)$。将其与（6.12）结合，我们得到我们的引理。这里我们令 $\mu = \frac{s+\sigma}{s-\sigma}(\varepsilon' c + \mu_0 + 1)$.
□

设 μ 是 $\mathbb{D}(r)$ 上的一个非负质量。对于 $|w| < s < r$，我们定义

$$T_s^w(r, \mu) = \int_s^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{D}(t)} \varphi_{w,r}^* \mu.$$

引理 6.6. 设 $0 < \sigma < s < r < 1$。则对于 $\mathbb{D}(r)$ 上任意非负质量 μ 以及 $w \in \mathbb{D}(\sigma)$，我们有

$$\frac{s(s-\sigma)}{s+\sigma} T_s^w(r, \mu) \leq T_s(r, \mu) \leq \frac{s+\sigma}{s(s-\sigma)} T_s^w(r, \mu).$$

为证明此引理，我们先准备以下两个估计：设 $|w| < \sigma < s < r < 1$，则有

$$|\varphi_{w,r}(z)| \geq \frac{s+\sigma}{s-\sigma}(|z| - r) + r, \tag{6.13}$$

$$|\varphi_{w,r}(z)| \leq \frac{s-\sigma}{s+\sigma}(|z| - r) + r, \tag{6.14}$$

对所有 $z \in \mathbb{D}(r)$。事实上，我们有

$$r^2 \frac{|z| - |w|}{r^2 - |w||z|} \leq |\varphi_{w,r}(z)| \leq r^2 \frac{|w| + |z|}{r^2 + |w||z|} \tag{6.15}$$

对所有 $z \in \mathbb{D}(r)$。我们有

$$r^2 \frac{|z| - |w|}{r^2 - |w||z|} = r \frac{r + |w|}{r^2 - |w||z|}(|z| - r) + r.$$

对于 $z \in \mathbb{D}(r)$，我们有

$$\frac{r + |w|}{r^2 - |w||z|} \leq \frac{r + |w|}{r(r - |w|)} \leq \frac{s + \sigma}{r(s - \sigma)}.$$

因此，将这些结果与 (6.15) 结合，我们得到 (6.13)。为证明 (6.14)，注意到

$$r^2 \frac{|w| + |z|}{r^2 + |w||z|} = r \frac{r - |w|}{r^2 + |w||z|}(|z| - r) + r.$$

对于 $z \in \mathbb{D}(r)$，我们有

$$\frac{r - |w|}{r^2 + |w||z|} \geq \frac{r - |w|}{r(r + |w|)} \geq \frac{s - \sigma}{r(s + \sigma)}.$$

因此，将这些结果与 (6.15) 结合，我们得到 (6.14)。

引理 6.6 的证明。我们设

$$U_s^w(r, \mu) = \int_s^r dt \int_{\mathbb{D}(t)} \varphi_{w,r}^* \mu.$$

于是我们有

$$U_s^w(r, \mu) \leq T_s^w(r, \mu) \leq \frac{1}{s} U_s^w(r, \mu)$$

对于所有 $r \in (s, 1)$。

我们固定 $r \in (s, 1)$ 和 $w \in \mathbb{D}(\sigma)$。对于 $x \in (0, r)$，我们设定

$$\Lambda(x) = \min\{r - x, r - s\}.$$

于是我们得到

$$U_s^w(r, \mu) = \int_{\mathbb{D}(r)} \Lambda(|z|) \varphi_{w,r}^* \mu_z.$$

特别是,

$$U_s^0(r, \mu) = \int_{\mathbb{D}(r)} \Lambda(|z|) \mu_z.$$

首先由 (6.13)，我们有

$$r-|\varphi_{w,r}(z)|\le\frac{s+\sigma}{s-\sigma}(r-|z|)$$

对于 $|z|\le r$。因此我们有

$$\Lambda(|\varphi_{w,r}(z)|)\le r-|\varphi_{w,r}(z)|\le\frac{s+\sigma}{s-\sigma}\Lambda(|z|)$$

对于 $s\le|z|\le r$。根据 $\Lambda(|\varphi_{w,r}(z)|)\le r-s$，这对所有 $|z|\le r$ 都成立。因此我们得到

$$U_s^0(r,\mu)=\int_{\mathbb{D}(r)}\Lambda(|z|)\mu_z=\int_{\mathbb{D}(r)}\Lambda(|\varphi_{w,r}(z)|)\varphi_{w,r}^*\mu_z\le\frac{s+\sigma}{s-\sigma}U_s^w(r,\mu).$$

Thus

$$T_s(r,\mu)\le\frac{1}{s}U_s^0(r,\mu)\le\frac{s+\sigma}{s(s-\sigma)}T_s^w(r,\mu).$$

接下来由 (6.14)，我们得到

$$\frac{s-\sigma}{s+\sigma}(r-|z|)\le r-|\varphi_{w,r}(z)|$$

对于 $|z|\le r$。因此我们有

$$\Lambda(|\varphi_{w,r}(z)|)\ge\frac{s-\sigma}{s+\sigma}\Lambda(|z|)$$

对 $|z|\le r$，只要 $s\le|\varphi_{w,\,r}(z)|\le r$。根据 $\Lambda(|z|)\le r-s$，这对所有 $|z|\le r$ 都成立。因此我们得到

$$U_s^0(r,\mu)=\int_{\mathbb{D}(r)}\Lambda(|z|)\mu_z=\int_{\mathbb{D}(r)}\Lambda(|\varphi_{w,r}(z)|)\varphi_{w,r}^*\mu_z\ge\frac{s-\sigma}{s+\sigma}U_s^w(r,\mu).$$

Thus

$$T_s(r,\mu)\ge U_s^0(r,\mu)\ge\frac{s(s-\sigma)}{s+\sigma}T_s^w(r,\mu).$$

这就完成了我们引理的证明。 □

引理 6.3 的证明。我们通过对 k归纳来证明该引理。因此，我们首先考虑 $k=1$的情形。令 $D=\partial(A\times S)$。于是$D\subset\overline{A}\times S$是一个简单正规交叉除子。由引理 A.16 可知，$\omega_{A\times S}$ 在 $PT(\overline{A}\times S)(-\log D)$上的典范线丛$\mathcal{O}_{PT(\overline{A}\times S)(-\log D)}(1)$上诱导出一个 Hermitian 度量。令$\omega_{\mathcal{O}_{PT(\overline{A}\times S)(-\log D)}(1)}$为该典范线丛所对应的曲率形式。类似地，我们注意到 $\omega_{A\times S}$ 在$S_{1,A}$上的典范线丛$\mathcal{O}_{P(TS\times\mathrm{Lie}A)}(1)$上诱导出一个 Hermitian 度量。令$\omega_{\mathcal{O}_{P(TS\times\mathrm{Lie}A)}(1)}$为该典范线丛所对应的曲率形式。由 $PT(\overline{A}\times S)(-\log D)=\overline{A}\times S_{1,A}$，可得$q^*\omega_{\mathcal{O}_{P(TS\times\mathrm{Lie}A)}(1)}=\omega_{\mathcal{O}_{PT(\overline{A}\times S)(-\log D)}(1)}$，其中 $q\colon\overline{A}\times S_{1,A}\to S_{1,A}$是投影。存在正常数 α_1 和 α_2，使得

$$\omega_{S_{1,A}}\le\alpha_1\tau^*\omega_S+\alpha_2\omega_{\mathcal{O}_{P(TS\times\mathrm{Lie}A)}(1)},\tag{6.16}$$

其中 $\tau\colon S_{1,\,A}\to S$。

首先，我们选取引理 6.5 中出现的 $\sigma\in(0,1)$。我们将 σ 修改如下。设 ω_A 是 A 上的一个不变正 (1, 1)-形式。对于每个 $n\in\mathbb{Z}_{\ge2}$，令 $\mathcal{E}_n\subset\mathcal{F}$ 为满足以下条件的 $f\in\mathcal{F}$ 的集合：

$$\sup_{z\in\mathbb{D}(1-\frac{1}{n})}|f_A'(z)|_{\omega_A}\le\frac{1}{n}.$$

于是我们有 $\mathcal{E}_2\supset\mathcal{E}_3\supset\cdots$。根据假设 $\{0\}\in\Pi(\mathcal{F}_A)$，我们可以取 $n_0\in\mathbb{Z}_{\ge2}$，使得 $\mathcal{E}_{n_0}$ 是有限的。由于对所有 $f\in\mathcal{F}$，f_A 都是非恒定的，我们可以取 $n_1\ge n_0$，使得$\mathcal{E}_{n_1}=\emptyset$。必要时扩大 σ，我们可以假设 $1-\frac{1}{n_1}\le\sigma<1$。于是对所有 $f\in\mathcal{F}$，我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{D}(\sigma)}|f_A'(z)|_{\omega_A}\ge1-\sigma.$$

对于每个 $f \in \mathcal{F}$，我们取 $w_f \in \overline{\mathbb{D}(\sigma)}$，使得

$$|f_A'(w_f)|_{\omega_A} = \sup_{z\in\mathbb{D}(\sigma)} |f_A'(z)|_{\omega_A}.$$

令 $s \in (\sigma, 1)$，并令 $f \in \mathcal{F}$。对于 $r \in (s, 1)$，取 $\varphi_{w_f,\ r}\colon\ \mathbb{D}(r) \to \mathbb{D}(r)$，如（4.6）中所示，并设$g = f \circ \varphi_{w_f,\ r}$。于是由（6.16），可得

$$T_s(r, g_{S_{1,A}}, \omega_{S_{1,A}}) \le \alpha_1 T_s(r, g_S, \omega_S) + \alpha_2 T_s(r, g_{[1]}, \omega_{\mathcal{O}_{PT(\overline{A}\times S)(-\log D)}(1)}).$$

由引理 6.6，可得

$$T_s(r, f_{S_{1,A}}, \omega_{S_{1,A}}) \le \frac{s+\sigma}{s(s-\sigma)} T_s(r, g_{S_{1,A}}, \omega_{S_{1,A}})$$

and

$$T_s(r, f_S, \omega_S) \ge \frac{s(s-\sigma)}{s+\sigma} T_s(r, g_S, \omega_S).$$

因此我们得到

$$T_s(r, f_{S_{1,A}}, \omega_{S_{1,A}}) \le \frac{\alpha_1 (s+\sigma)^2}{s^2(s-\sigma)^2} T_s(r, f_S, \omega_S) + \frac{\alpha_2 (s+\sigma)}{s(s-\sigma)} T_s(r, g_{[1]}, \omega_{\mathcal{O}_{PT(\overline{A}\times S)(-\log D)}(1)}). \tag{6.17}$$

接下来估计右侧的第二项。我们断言

$$T_s(r, g_{[1]}, \omega_{\mathcal{O}_{PT(\overline{A}\times S)(-\log D)}(1)}) \le \int_0^{2\pi} \log |g'(re^{i\theta})|_{\omega_{A\times S}} \frac{d\theta}{2\pi} - \int_0^{2\pi} \log |g'(se^{i\theta})|_{\omega_{A\times S}} \frac{d\theta}{2\pi}, \tag{6.18}$$

其中$|\cdot|_{\omega_{A\times S}}$ 是关于 $\omega_{A\times S}$的长度。证明如下。度量$\omega_{A\times S}$定义了 $\mathcal{O}_{PT(\overline{A}\times S)(-\log D)}(-1)$ 上的 Hermitian 度量$|\cdot|_{\omega_{A\times S}}$，其曲率形式为$-\omega_{\mathcal{O}_{PT(\overline{A}\times S)(-\log D)}(1)}$。由 Poincar´e–Lelong 公式，可得

$$-(g_{[1]})^* \omega_{\mathcal{O}_{PT(\overline{A}\times S)(-\log D)}(1)} = [(g')^* Z] - 2dd^c \log |g'|_{\omega_{A\times S}}$$

作为 $\mathbb{D}$ 上的流，其中 Z 是 $\mathcal{O}_{PT(\overline{A}\times S)(-\log D)}(-1)$ 的零截面。由詹森公式，得到（6.18）。与（4.1）的证明比较。

现在令 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$。我们设 $\varepsilon' = {}^{s}\overline{(\alpha_2 \frac{s-\sigma}{s+\sigma}\ \varepsilon)}()$。由引理 6.5，得到

$$\int_0^{2\pi} \log |g'(re^{i\theta})|_{\omega_{A\times S}} \frac{d\theta}{2\pi} \le \varepsilon' T_s(r, f, \omega_{\overline{A}\times S}) + \mu$$

对于 $r \in (s, 1)$，除去某个线性测度小于 δ 的例外集。这里，$\mu > 0$ 是引理 6.5 中出现的一个正常数。特别地，μ 与 $f \in \mathcal{F}$和 w_f的选取无关。由于 $\log |g_A'|_{\omega_A}$是次调和的，我们有

$$\int_0^{2\pi} \log |g'(se^{i\theta})|_{\omega_{A\times S}} \frac{d\theta}{2\pi} \ge \int_0^{2\pi} \log |g_A'(se^{i\theta})|_{\omega_A} \frac{d\theta}{2\pi} \ge \log |g_A'(0)|_{\omega_A}.$$

注意，由 (4.7) 可得

$$|g_A'(0)|_{\omega_A} = |f_A'(w_f)|_{\omega_A} |\varphi_{w_f,r}'(0)| \ge (1-\sigma)\frac{s-\sigma}{s+\sigma}.$$

因此，将 (6.18) 中的这些估计考虑在内，可得

$$T_s(r, g_{[1]}, \omega_{\mathcal{O}_{PT(\overline{A}\times S)(-\log D)}(1)}) \le \varepsilon' T_s(r, f, \omega_{\overline{A}\times S}) + \mu' \tag{6.19}$$

对于 $r \in (s,1)$，除去某个线性测度小于 δ 的例外集。这里我们设 $\mu' = \mu + \log {}^{s+\sigma}_{(1-\sigma)(s-\sigma)}$。

结合 (6.17) 和 (6.19)，得到

$$T_s(r, f_{S_{1,A}}, \omega_{S_{1,A}}) \le \varepsilon T_s(r, f_A, \omega_{\overline{A}}) + \mu_1 T_s(r, f_S, \omega_S) + \mu_2$$

对于某个线性测度小于 δ 的例外集之外的 $r \in (s,1)$。这里令 $\mu_1 = \frac{\alpha_1\ s+\sigma\ ^2}{s^2\ s-\sigma}()()^2 + {}^{\alpha_2}_{(\ \ s+\sigma\ \varepsilon'\ )}$ $()$，$\mu_2 = \frac{\alpha_2}{(\ s+\sigma}\mu'\ )()$，~~以此完成~~ $k = 1$ 情形的证明。

我们假设 $k \geq 2$，并且引理对 $k-1$ 成立。根据 $S_{k,A}$ 的构造，我们有 $S_{k,A} \subset (S_{k-1,A})_{1,A}$ （参见（2.10））。因此，存在一个正常数 $\alpha > 0$，使得$\omega_{S_{k,A}} \leq \alpha \omega_{(S_{k-1,A})_{1,A}}$ 在 $S_{k,A}$ 上成立。因此我们有

$$T_s(r, f_{S_{k,A}}, \omega_{S_{k,A}}) \leq \alpha T_s(r, (f_{[k-1]})_{(S_{k-1,A})_{1,A}}, \omega_{(S_{k-1,A})_{1,A}}). \tag{6.20}$$

将第一步应用于 $A \times S_{k-1,\ A}$ 和 $\{f_{[k-1]};\ f \in \mathcal{F}\} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A \times S_{k-1,\ A})$，我们得到 $\sigma' \in (0,1)$，具有以下性质：对于 $s \in (\sigma', 1)$、$\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$，存在 $\mu_1' = \mu_1'(s,\varepsilon,\delta) > 0$和 $\mu_2' = \mu_2'(s,\varepsilon,\delta) > 0$，使得对所有 $f \in \mathcal{F}$，均有

(6.21)

$$T_s(r, (f_{[k-1]})_{(S_{k-1,A})_{1,A}}, \omega_{(S_{k-1,A})_{1,A}}) \leq \frac{\varepsilon}{2\alpha} T_s(r, f_A, \omega_{\overline{A}}) + \mu_1' T_s(r, (f_{[k-1]})_{S_{k-1,A}}, \omega_{S_{k-1,A}}) + \mu_2'$$

对所有 $r \in (s,1)$，除去某个线性测度小于 $\delta/2$ 的例外集。现在由归纳假设，我们得到 $\sigma \in (\sigma', 1)$，具有以下性质：对于 $s \in (\sigma, 1)$、$\varepsilon > 0$和$\delta > 0$，存在 $\mu_1'' > 0$ 和 $\mu_2'' > 0$，使得对所有 $f \in \mathcal{F}$，均有

$$T_s(r, (f_{[k-1]})_{S_{k-1,A}}, \omega_{S_{k-1,A}}) \leq \frac{\varepsilon}{2\alpha\mu_1'(s,\varepsilon,\delta)} T_s(r, f_A, \omega_{\overline{A}}) + \mu_1'' T_s(r, f_S, \omega_S) + \mu_2'' \tag{6.22}$$

对某个线性测度小于 $\delta/2$ 的例外集之外的 $r \in (s,1)$ 成立。因此，由 (6.20)–(6.22)，我们的 σ 满足所需性质，从而得出归纳步骤。这里我们令 $\mu_1 = \alpha\mu_1'\mu_1''$ 和 $\mu_2 = \alpha(\mu_1'\mu_2'' + \mu_2')$。□

7. Nevanlinna theory and blowing-ups

在本截面中，我们将证明引理 7.4。为此，我们从一个一般估计开始（参见引理 7.2）。

7.1. 一般估计。

引理 7.1. 设 S 是一个光滑射影簇。设 $W \subset S$ 是一个不可约扎里斯基闭集。设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, S)$ 是一个无限子集，使得对于所有 $f \in \mathcal{F}$，$\mathcal{F} \not\Rightarrow W$ 和 $f(\mathbb{D}) \not\subset W$（有限例外除外）。那么存在一个无限子集 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ 以及一个 W-容许修改φ: $S' \to S$，使得以下两个性质成立：

(1) $S' =$爆破$_Y S$，其中存在某个闭子概形 $Y \subset S$，使得支集 $Y \subsetneqq W$ 且 $f(\mathbb{D}) \not\subset$支集 Y，对所有 $f \in \mathcal{F}'$ 均成立。(2) $\mathcal{F}' \not\Rightarrow W'$，其中 $W' \subset S'$ 是严格变换。

此外，我们可以取 S' 为光滑的。

证明。我们考虑以下两种情况。

情况 1. 存在一个扎里斯基闭集 $Z \subset S$，使得 $W \not\subset Z$ 和 $f(\mathbb{D}) \subset Z$ 对无限多个 $f \in \mathcal{F}$ 成立。在这种情况下，我们取一个无限子集 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$，使得对所有 $f \in \mathcal{F}'$，$f(\mathbb{D}) \subset Z$ 成立。令 $Y = W \cap Z$ 为一个闭子概形。于是 supp $Y \subsetneqq W$。令 $S' = \mathrm{Bl}_Y S$。那么 $Z' \cap W' = \emptyset$属于 S'，其中 Z' 和 W' 分别是 Z 和 W 的严格变换（参见 (3.1)）。由 supp $Y \subset W$，对于除有限例外外的所有 $f \in \mathcal{F}'$，我们有 $f(\mathbb{D}) \not\subset$supp Y。因此从 $\mathcal{F}'$ 中去掉这些有限个元素后，我们可以假设对所有 $f \in \mathcal{F}'$，$f(\mathbb{D}) \not\subset$supp Y 成立。因此，对所有 $f \in \mathcal{F}'$，我们可以将其视为 $f(\mathbb{D}) \subset Z'$。因此 $\mathcal{F}' \not\Rightarrow W'$。

^^情况 2。否则，存在一个 W-容许修改 $S \to S$，使得 $\mathcal{F} \not\Rightarrow W$，^^其中 $W \subset S$ 是极小变换。根据 [18, 第 171 页，习题 7.11 (c)], ，存在一个闭子概形 $Z \subset S$，使得 $S = \mathrm{Bl}_Z S$且 $W \not\subset$支集 Z。设 $Y = W \cap Z$为 S的闭子概形。于是支集 $Y \subsetneqq W$。由于我们处于情况 2，$W \not\subset$支集 Z意味着只有有限多个$f \in \mathcal{F}$满足 $f(\mathbb{D}) \subset$支集 Z。从 $\mathcal{F}$中移除这些有限多个元素后，我们得到 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$，使得对所有 $f \in \mathcal{F}'$，$f(\mathbb{D}) \not\subset$支集 Z。

现在我们令 $S' =$ 爆破$_Y S$，其中 $\varphi:\ S' \to S$。存在一个闭子概形 $Z^\dagger \subset S'$，使得 $\mathcal{I}_{\varphi^* Z} = \mathcal{I}_{\varphi^* Y} \cdot \mathcal{I}_{Z^\dagger}$。事实上，由于 $\varphi^* Y \subset S'$ 是一个卡蒂埃除子，$\mathcal{I}_{\varphi^* Y}$是一个可逆层。根据 $\mathcal{I}_{\varphi^* Z} \subset \mathcal{I}_{\varphi^* Y} \subset \mathcal{O}_{S'}$，我们取 $Z^\dagger \subset S'$，使得 $\mathcal{I}_{Z^\dagger} = \mathcal{I}_{\varphi^* Z} \otimes (\mathcal{I}_{\varphi^* Y})^{-1} \subset \mathcal{O}_{S'}$。类似地，存在 $W^\dagger \subset S'$，使得 $\mathcal{I}_{\varphi^* W} = \mathcal{I}_{\varphi^* Y} \cdot \mathcal{I}_{W^\dagger}$。于是根据 $\mathcal{I}_{\varphi^* Z} + \mathcal{I}_{\varphi^* W} = \mathcal{I}_{\varphi^* Y}$，我们有

$\mathcal{I}_{\varphi^*Y}\cdot(\mathcal{I}_{Z^\dagger}+\mathcal{I}_{W^\dagger})=\mathcal{I}_{\varphi^*Y}$，使得 $\mathcal{I}_{Z^\dagger}+\mathcal{I}_{W^\dagger}=\mathcal{O}_{S'}$。因此 $Z^\dagger\cap W^\dagger=\emptyset$。注意， $W'\subset W^\dagger$，其中 $W'\subset S'$ 是严格变换。因此我们得到

$$Z^\dagger\cap W'=\emptyset.$$

~ ~^ 我们令 $S=$爆破$_{Z^\dagger}S'$。那么由于（$\varphi\circ p$）$^*Z$ 是一个卡蒂埃除子，$S\to S$ 存在。

$$\begin{array}{ccccc} S' & = & \mathrm{Bl}_Y S & \xleftarrow{p} & \mathrm{Bl}_{Z^\dagger}S' & = & \tilde{S} \\ & & \varphi\downarrow & & \downarrow & & \\ & & S & \longleftarrow & \mathrm{Bl}_Z S & = & \hat{S} \end{array}$$

~ ~ ^ ~设 $W\subset S$为严格变换。于是由 $\mathcal{F}\not\to W$，我们有 $\mathcal{F}'\not\to W$。另一方面，由 $Z^\dagger\cap W'=\emptyset$，态射 $p\colon\ \tilde{S}\to S'$在 $\tilde{W}$的一个邻域上是同构。因此$\mathcal{F}'\not\to W'$。

现在假设 S' 不光滑。于是我们取一个双有理修改 $S''\to S'$，使得 S''光滑。由于 S 光滑，我们可以假设 $S''\to S$ 在 $S\backslash$ 支集 Y 上是同构。根据 [18, 第 171 页，习题 7.11 (c)],，我们可以取一个闭子概形 $Y'\subset S$，使得 $S''=$ 爆破 $_{Y'}S$ 且支集 $Y'\subset$ 支集 Y。我们用 S''替换 S'。引理的证明完成。□

引理 7.2. 设 S 是一个带有光滑正 (1,1)-形式 ω_S的光滑射影簇。设$W\subset S$ 是一个带有 Weil 函数 $\lambda_W\geq 0$的扎里斯基闭集。设 $\mathcal{F}\subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D},S)$ 是一个全纯映射的无限集，并设 $\{E_i\}_{i\in I}$ 是S的一个扎里斯基闭子集可数集。假设 $\mathrm{LIM}(\mathcal{F},\{E_i\}_{i\in I})$ 存在且 $\mathrm{LIM}(\mathcal{F},\{E_i\}_{i\in I})\not\subset W$。那么存在 $\sigma\in(0,1),\beta>0$, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，一个带有 Weil 函数 $\lambda_E\geq 0$ 的扎里斯基闭集 $E\subset\cup E_i$，以及一个无限子集 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$，满足以下两个性质。

(1) 对所有 $f\in\mathcal{G}$，我们有 $f(\mathbb{D})\not\subset E\cup W$。

(2) 设 $s\in(\sigma,1)$ 且 $f\in\mathcal{G}$。那么我们有

$$m(r,f,\lambda_W)\leq\frac{\beta}{(r-s)^k}T_s(r,f,\omega_S)+\frac{\beta}{(r-s)^k}m\left(s,f,\lambda_E\right)+\frac{\beta}{(r-s)^k},$$

对于所有 $r\in(s,1)$。

证明。证明通过对 W 作诺特归纳法进行。令 $\mathcal{P}$ 为所有使我们的引理对 W 不成立的扎里斯基闭集$W\subset S$ 的集合。为了证明 $\mathcal{P}=\emptyset$，我们反设 $\mathcal{P}\neq\emptyset$。取一个极小元 $W\in\mathcal{P}$。下面我们将证明，我们的引理对W成立。

令 $\mathcal{F}\subset\mathrm{Hol}(\mathbb{D},S)$ 和 $\{E_i\}_{i\in I}$ 为引理中出现的对象。因此，$\mathrm{LIM}(\mathcal{F},\{E_i\}_{i\in I})$ 存在，且 $\mathrm{LIM}(\mathcal{F},\{E_i\}_{i\in I})\not\subset W$。

我们首先注意到 W 是不可约的。否则，我们有 $W=W_1\cup W_2$。设 $\lambda_{W_1}\geq 0$ 和$\lambda_{W_2}\geq 0$ 为满足 $\lambda_W\leq\lambda_{W_1}+\lambda_{W_2}$的 Weil 函数。由 $W_1\subsetneq W$，我们有 $W_1\notin\mathcal{P}$。注意 $\mathrm{LIM}(\mathcal{F},\{E_i\}_{i\in I})\not\subset W_1$。因此，我们可以取 $\sigma_1\in(0,1)$、 $\beta_1>0$、 $k_1\in\mathbb{N}$，一个带有 Weil 函数$\lambda_{E_1}\geq 0$ 的扎里斯基闭集 $E_1\subset\cup E_i$，以及一个无限子集 $\mathcal{G}_1\subset\mathcal{F}$，使得对所有$f\in\mathcal{G}_1$，我们有 $f(\mathbb{D})\not\subset E_1\cup W_1$ 并且

$$m(r,f,\lambda_{W_1})\leq\frac{\beta_1}{(r-s)^{k_1}}T_s(r,f,\omega_S)+\frac{\beta_1}{(r-s)^{k_1}}m\left(s,f,\lambda_{E_1}\right)+\frac{\beta_1}{(r-s)^{k_1}},$$

其中 $\sigma_1<s<r<1$。现在 $\mathrm{LIM}(\mathcal{G}_1,\{E_i\}_{i\in I})$ 存在，且

$$\mathrm{LIM}(\mathcal{G}_1,\{E_i\}_{i\in I})=\mathrm{LIM}(\mathcal{F},\{E_i\}_{i\in I})\not\subset W_2.$$

因此由 $W_2\notin\mathcal{P}$，我们可以取 $\sigma_2\in(0,1)$、 $\beta_2>0$、 $k_2\in\mathbb{N}$，一个带有 Weil 函数 $\lambda_{E_2}\geq 0$ 的扎里斯基闭集 $E_2\subset\cup E_i$，以及一个无限子集 $\mathcal{G}_2\subset\mathcal{G}_1$，使得对所有 $f\in\mathcal{G}_2$，都有$f(\mathbb{D})\not\subset E_2\cup W_2$，并且

$$m(r,f,\lambda_{W_2})\leq\frac{\beta_2}{(r-s)^{k_2}}T_s(r,f,\omega_S)+\frac{\beta_2}{(r-s)^{k_2}}m\left(s,f,\lambda_{E_2}\right)+\frac{\beta_1}{(r-s)^{k_2}},$$

其中 $\sigma_2 < s < r < 1$。我们令 $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $k = \max\{k_1, k_2\}$, $E = E_1 \cup E_2$,$\mathcal{G} = \mathcal{G}_2$。我们取一个 Weil 函数 λ_E，使得 $\lambda_E \geq \max\{\lambda_{E_1}, \lambda_{E_2}\}$。于是由 $m(r, f, \lambda_W) \leq m(r, f, \lambda_{W_1}) + m(r, f, \lambda_{W_2})$，引理的两个性质均得到满足。因此 $W \notin \mathcal{P}$，矛盾。因此我们可以假设 W 是不可约的。

我们考虑两种情况。

情况 1： $W \subset \cup E_i$。在这种情况下，我们令 $\sigma = 1/2$、 $E = W$ 和 $\lambda_E = \lambda_W$。由 LIM($\mathcal{F}$; $\{E_i\}$) $\not\subset W$，只有有限多个 $f \in \mathcal{F}$ 满足 $f(\mathbb{D}) \subset W$。我们从 $\mathcal{F}$ 中去掉这些 f，得到一个无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$。于是，对所有 $f \in \mathcal{G}$， $f(\mathbb{D}) \not\subset E \cup W$。由引理 4.3，存在一个正常数 $c > 0$，使得

$$m(r, f, \lambda_W) \leq cT_s(r, f, \omega_S) + cm(s, f, \lambda_W)$$

对所有 $s \in (\sigma, 1)$、 $r \in (s, 1)$ 和 $f \in \mathcal{G}$，均成立。由 $\lambda_W = \lambda_E$，我们的引理对 W 成立。这里我们令 $\beta = c$ 和 $k = 0$。

情况 2： $W \not\subset \cup E_i$。由 LIM($\mathcal{F}$; $\{E_i\}$) $\not\subset W$ 和 $W \not\subset \cup E_i$，我们得到 $\mathcal{F} \not\Rightarrow W$（参见引理 3.9）。由引理 7.1，存在一个无限子集 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ 和一个闭子概形 $\mathcal{Z} \subset S$，使得

(1) 支集 $\mathcal{Z} \subsetneq W$，(2) $f(\mathbb{D}) \not\subset$对所有 $f \in \mathcal{F}'$ 均成立，

支集 $\mathcal{Z}$，(3) $\mathcal{F}' \not\to W'$，其中 $W' \subset$爆破$_{\mathcal{Z}}S$是严格变换。

设 $S' =$爆破$_{\mathcal{Z}}S$。我们可以假设 S' 是光滑的。根据引理 4.8，将 $\mathcal{F}'$ 替换为其无限子集后，我们可以假设，对于所有无限子集 $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}'$， $\mathcal{F}'' \not\to W'$，并且

$$f(\mathbb{D}) \not\subset W' \tag{7.1}$$

对所有 $f \in \mathcal{F}'$。设 $\lambda_{W'} \geq 0$ 为 W' 的 Weil 函数，设 $\omega_{S'}$ 为 S' 上的光滑正 (1, 1)-形式。由引理 4.9，存在 $\sigma_0 \in (0, 1)$ 和 $\alpha > 0$，使得对所有 $\rho \in (\sigma_0, 1)$、$r \in (\rho, 1)$ 以及 $f \in \mathcal{F}'$，我们有

$$m(r, f, \lambda_{W'}) \leq \frac{\alpha}{r - \rho} T_\rho(r, f, \omega_{S'}) + \alpha. \tag{7.2}$$

令 $Z =$支集 $\mathcal{Z}$，并取一个 Weil 函数 $\lambda_Z \geq 0$。由 $Z \subsetneq W$，有 $Z \notin \mathcal{P}$。注意，LIM($\mathcal{F}'$; $\{E_i\}$) 存在，且 LIM($\mathcal{F}'$; $\{E_i\}$) $=$LIM($\mathcal{F}$; $\{E_i\}$)。因此 LIM($\mathcal{F}'$; $\{E_i\}$) $\not\subset Z$。于是由归纳假设，我们得到 $\sigma_1 \in (0, 1)$、 $\beta_1 > 0$、 $k_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、 $E \subset \cup E_i$，其中 $\lambda_E \geq 0$ 且 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}'$，使得对所有 $s \in (\sigma_1, 1)$、 $r \in (s, 1)$ 和 $f \in \mathcal{G}$，均有

$$m(r, f, \lambda_Z) \leq \frac{\beta_1}{(r - s)^{k_1}} T_s(r, f, \omega_S) + \frac{\beta_1}{(r - s)^{k_1}} m(s, f, \lambda_E) + \frac{\beta_1}{(r - s)^{k_1}} \tag{7.3}$$

且 $f(\mathbb{D}) \not\subset E \cup Z$。由 (7.1)，有

$$f(\mathbb{D}) \not\subset E \cup W \tag{7.4}$$

对所有 $f \in \mathcal{G}$。

现在令 $\sigma = \max\{\sigma_0, \sigma_1\}$。设 $s \in (\sigma, 1)$ 且 $r \in (s, 1)$。令 $\rho = (s + r)/2$。于是由 (4.5)，存在正常数 $c > 0$，使得

$$T_\rho(r, f, \omega_{S'}) \leq cT_\rho(r, f, \omega_S) + cm(\rho, f, \lambda_Z) + c$$

对所有 $f \in \mathcal{G}$ 均成立。然后将（7.3）应用于 $r = \rho$，可得

$$T_\rho(r, f, \omega_{S'}) \leq \frac{\beta_2}{(r - s)^{k_1}} T_s(r, f, \omega_S) + \frac{\beta_2}{(r - s)^{k_1}} m(s, f, \lambda_E) + \frac{\beta_2}{(r - s)^{k_1}},$$

其中 $\beta_2 = \max\{c + 2^{k_1} c\beta_1, 2^{k_1} c\beta_1\}$。结合（7.2），可得

$$m(r, f, \lambda_{W'}) \leq \frac{2\alpha\beta_2}{(r - s)^{k_1+1}} T_s(r, f, \omega_S) + \frac{2\alpha\beta_2}{(r - s)^{k_1+1}} m(s, f, \lambda_E) + \frac{\alpha + 2\alpha\beta_2}{(r - s)^{k_1+1}}. \tag{7.5}$$

存在正常数 $c'>0$，使得 $m(r,f,\lambda_W)\le c'm(r,f,\lambda_Z)+m(r,f,\lambda_{W'})$ 对所有 $f\in\mathcal{G}$ 均成立。结合 (7.3) 和 (7.5)，我们得到对所有 $f\in\mathcal{G}$,

$$m(r,f,\lambda_W)\le\frac{\beta}{(r-s)^k}T_s(r,f,\omega_S)+\frac{\beta}{(r-s)^k}m(s,f,\lambda_E)+\frac{\beta}{(r-s)^k}.$$

这里令 $\beta=\alpha+c'\beta_1+2\alpha\beta_2$ 和 $k=k_1+1$。由此以及 (7.4) 可得 $W\notin\mathcal{P}$。

现在，在上述两种情形下，我们都有 $W\notin\mathcal{P}$。这就产生了矛盾。因此 $\mathcal{P}=\emptyset$。引理得证。□

7.2. 半阿贝尔簇的情形。我们回顾定义 2.1 中的 $E_{k,A,A/B}\subset P_{k,A}$ 以及定义 3.18 中的 $\Pi(\mathcal{G})$。证明中采用 (6.10) 的约定。

引理 7.3. 设 $\overline{A}$ 是一个光滑射影等变紧化。设 $\omega_{\overline{A}}$ 是 $\overline{A}$上的光滑正 (1, 1)-形式。设 $\mathcal{F}\subset\mathrm{Hol}(\mathbb{D},A)$ 是一个无限集，且 $\mathcal{F}$满足假设 6.2。设 $B\subset A$是一个半阿贝尔子簇，使得 $B\in\Pi(\mathcal{F})$，并且对所有 $f\in\mathcal{F}$，$\varpi_B\circ f$均为非恒定，其中 $\varpi_B:A\to A/B$ 是商映射。设 $k\in\mathbb{Z}_{\ge1}$。设 $\lambda_{E_{k,A,A/B}}\ge0$ 是 $E_{k,A,A/B}\subset P_{k,A}$的 Weil 函数。那么存在 $\sigma\in(0,1)$，具有如下性质：设 $s\in(\sigma,1)$、$\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$。那么存在正常数 $\beta>0$，使得对所有 $f\in\mathcal{F}$，估计式

$$m(r,f_{P_{k,A}},\lambda_{E_{k,A,A/B}})\le\varepsilon T_s(r,f,\omega_{\overline{A}})+\beta$$

h对于所有 $r\in(s,1)$，除去线性测度小于 δ 的某个例外集 .

证明。我们首先如下取 $\sigma_0\in(0,1)$。设 $\omega_{A/B}$ 是A/B上的一个不变正 (1, 1)-形式。对于每个 $n\in\mathbb{Z}_{\ge2}$，令 $\mathcal{E}_n\subset\mathcal{F}$ 为满足以下条件的 $f\in\mathcal{F}$ 集合：

$$\sup_{z\in\mathbb{D}(1-\frac{1}{n})}|(\varpi_B\circ f)'(z)|_{\omega_{A/B}}\le\frac{1}{n}.$$

于是我们有 $\mathcal{E}_2\supset\mathcal{E}_3\supset\cdots$。根据假设 $B\in\Pi(\mathcal{F})$，我们可以取 $n_0\in\mathbb{Z}_{\ge2}$，使得$\mathcal{E}_{n_0}$为有限集。由于对于所有 $f\in\mathcal{F}$，$\varpi_B\circ f$都是非恒定的，我们可以取 $n_1\ge n_0$，使得 $\mathcal{E}_{n_1}=\emptyset$。我们取 $\sigma_0\in(0,1)$，使得$1-\frac{1}{n_1}\le\sigma_0<1$。于是我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{D}(\sigma_0)}|(\varpi_B\circ f)'(z)|_{\omega_{A/B}}\ge1-\sigma_0$$

对于所有 $f\in\mathcal{F}$。对于每个 $f\in\mathcal{F}$，我们取 $w_f\in\overline{\mathbb{D}}(\sigma_0)$，使得

$$|(\varpi_B\circ f)'(w_f)|_{\omega_{A/B}}\ge1-\sigma_0. \tag{7.6}$$

接下来我们如下取 $\sigma\in(\sigma_0,1)$。设 $\omega_{P_{k-1,A}}$ 是 $P_{k-1,A}$ 上的光滑正 (1, 1)-形式。注意，由 $B\in\Pi(\mathcal{F})$，我们有 $\{0\}\in\Pi(\mathcal{F})$。我们首先应用引理 6.3，得到具有以下性质的 $\sigma_1\in(\sigma_0,1)$：对于 $s\in(\sigma_1,1)$、$\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在正常数 $\mu_1=\mu_1(s,\varepsilon,\delta)>0$，使得对所有 $f\in\mathcal{F}$，我们有

$$T_s(r,f_{P_{k-1,A}},\omega_{P_{k-1,A}})\le\frac{\varepsilon}{2}T_s(r,f,\omega_{\overline{A}})+\mu_1 \tag{7.7}$$

对于某个线性测度小于 $\delta/2$ 的例外集之外的所有 $r\in(s,1)$。设 ω_A 是 A 上的不变正 (1, 1)-形式。由引理 6.5，我们得到具有以下性质的 $\sigma\in(\sigma_1,1)$：对于 $s\in(\sigma,1)$、$\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在正常数 $\mu_2=\mu_2(s,\varepsilon,\delta)>0$，使得对所有 $f\in\mathcal{F}$ 和 $w\in\mathbb{D}(\sigma)$，我们有

$$\int_0^{2\pi}\log|(f_{[k-1]}\circ\varphi_{w,r})'(re^{i\theta})|_{\omega_{A\times P_{k-1,A}}}\frac{d\theta}{2\pi}\le\frac{\varepsilon}{2}T_s(r,f_{[k-1]},\omega_{\overline{A}\times P_{k-1,A}})+\mu_2 \tag{7.8}$$

对于某个线性测度小于 $\delta/2$ 的例外集之外的所有 $r\in(s,1)$。这里回顾一下$\varphi_{w,\,r}$：由 (4.6) 得到 $\mathbb{D}(r)\to\mathbb{D}(r)$。

设 $s\in(\sigma,1)$、 $\varepsilon>0$和 $\delta>0$。令 $\varepsilon'=\varepsilon\frac{s-\sigma}{s+\sigma}$。设 $f\in\mathcal{F}$。给定 $r\in(s,1)$，令 $g=f\circ\varphi_{w_f,\ r}$。于是有 $g_{[k-1]}=f_{[k-1]}\circ\varphi_{w_f,\ r}$。因此，将 (7.7) 和 (7.8) 均应用于 ε'，可得

$$\int_0^{2\pi}\log|(g_{[k-1]})'(re^{i\theta})|_{\omega_{A\times P_{k-1,A}}}\frac{d\theta}{2\pi}\le\varepsilon' T_s(r,f,\omega_{\overline{A}})+\mu_1'+\mu_2' \tag{7.9}$$

对所有不属于某个线性测度小于 δ 的例外集的 $r\in(s,1)$。这里令 $\mu_1'=\mu_1(s,\varepsilon',\delta)$ 和 $\mu_2'=\mu_2(s,\varepsilon',\delta)$。

令 $p:A\times P_{k-1,\ A}\to A/B$ 为第一投影与 ϖ_B 的复合态射。则存在正常数 $c>0$，使得对所有满足 $[v]\in A\times P_{k,\ A}\subset PT(A\times P_{k-1,\ A})$ 的 $v\in T(A\times P_{k-1,\ A})$，都有

$$\lambda_{E_{k,A,A/B}}([v]_{P_{k,A}})\le\log\left(\frac{|v|_{\omega_{A\times P_{k-1,A}}}}{|p'(v)|_{\omega_{A/B}}}\right)+c,$$

其中 $[v]_{P_{k,\ A}}\in P_{k,\ A}$ 是 $[v]\in A\times P_{k,\ A}$ 在第二投影 $A\times P_{k,\ A}\to P_{k,\ A}$ 下的像。因此，对所有 $f\in\mathcal{F}$ 和 $r\in(s,1)$，都有

$$m(r,g_{P_{k,A}},\lambda_{E_{k,A,A/B}})\le\int_0^{2\pi}\log\frac{|(g_{[k-1]})'(re^{i\theta})|_{\omega_{A\times P_{k-1,A}}}}{|(p\circ g_{[k-1]})'(re^{i\theta})|_{\omega_{A/B}}}\frac{d\theta}{2\pi}+c.$$

由于 $\lambda_{E_{k,\ A,\ A/B}}\ge0$ 和 $g_{[k]}=f_{[k]}\circ\varphi_{w_f,\ r}$，引理 4.10 得出

$$\begin{aligned}m(r,f_{P_{k,A}},\lambda_{E_{k,A,A/B}})&\le\frac{r+\sigma}{r-\sigma}m(r,g_{P_{k,A}},\lambda_{E_{k,A,A/B}})\\&\le\frac{s+\sigma}{s-\sigma}m(r,g_{P_{k,A}},\lambda_{E_{k,A,A/B}})\end{aligned}$$

对所有 $r\in(s,1)$。因此我们得到

$$m(r,f_{P_{k,A}},\lambda_{E_{k,A,A/B}})\le\frac{s+\sigma}{s-\sigma}\int_0^{2\pi}\log\frac{|(g_{[k-1]})'(re^{i\theta})|_{\omega_{A\times P_{k-1,A}}}}{|(p\circ g_{[k-1]})'(re^{i\theta})|_{\omega_{A/B}}}\frac{d\theta}{2\pi}+c\frac{s+\sigma}{s-\sigma}$$

对所有 $r\in(s,1)$。将此估计与 (7.9) 结合，得到

$$\begin{aligned}m(r,f_{P_{k,A}},\lambda_{E_{k,A,A/B}})\le\varepsilon T_s(r,f,\omega_{\overline{A}})+\frac{s+\sigma}{s-\sigma}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|(p\circ g_{[k-1]})'(re^{i\theta})|_{\omega_{A/B}}}\frac{d\theta}{2\pi}\\+\frac{s+\sigma}{s-\sigma}(\mu_1'+\mu_2'+c)\end{aligned}\tag{7.10}$$

对所有 $r\in(s,1)$，但某个线性测度小于 δ 的例外集除外。

接下来，由于 $\log|(\varpi_B\circ g)'|_{\omega_{A/B}}$ 的次调和性，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|(p\circ g_{[k-1]})'(re^{i\theta})|_{\omega_{A/B}}}\frac{d\theta}{2\pi}&=\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|(\varpi_B\circ g)'(re^{i\theta})|_{\omega_{A/B}}}\frac{d\theta}{2\pi}\\&\le\log\frac{1}{|(\varpi_B\circ g)'(0)|_{\omega_{A/B}}}\end{aligned}$$

对所有 $r\in(s,1)$。由 (4.7) 和 (7.6)，我们有

$$|(\varpi_B\circ g)'(0)|_{\omega_{A/B}}=|(\varpi_B\circ f)'(w_f)|_{\omega_{A/B}}|\varphi'_{w_f,r}(0)|\ge\frac{(1-\sigma)(s-\sigma)}{s+\sigma}.$$

因此

$$\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|(p\circ g_{[k-1]})'(re^{i\theta})|_{\omega_{A/B}}}\frac{d\theta}{2\pi}\le\log\left(\frac{s+\sigma}{(1-\sigma)(s-\sigma)}\right)\tag{7.11}$$

对所有 $r\in(s,1)$。利用（7.10）和（7.11），并令

$$\beta=\frac{s+\sigma}{s-\sigma}\left(\mu_1'+\mu_2'+\log\left(\frac{s+\sigma}{(1-\sigma)(s-\sigma)}\right)+c\right),$$

我们使证明完备。 □

引理 7.4. 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。设 $\overline{A}$ 是一个光滑射影等变紧化。设$\omega_{\overline{A}}$ 是 $\overline{A}$上的光滑正 (1, 1)-形式。设 $W \subset P_{k,A}$ 是一个带有 Weil 函数 $\lambda_W \geq 0$的闭子概形。设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$ 是一个无限集，满足 $\mathcal{F}$ 满足假设 6.2，且 $\{0\} \in \Pi(\mathcal{F})$。设 $\Pi' \subset \Pi(\mathcal{F})$ 是一个子集，使得 $\mathrm{LIM}(\mathcal{F}_{P_k,A}; \{E_{k,A,A/B}\}_{B\in\Pi'})$ 存在，其中 $\mathcal{F}_{P_k,A} = (f_{P_k,A})_{f\in\mathcal{F}}$。假设 $\mathrm{LIM}(\mathcal{F}_{P_k,A}; \{E_{k,A,A/B}\}_{B\in\Pi'}) \not\subset$ 支集 W。那么存在 $\sigma \in (0, 1)$ 以及一个无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，具有如下性质：设 $s \in (\sigma, 1)$， $\varepsilon > 0$,$\delta > 0$。那么存在一个正常数 $\beta > 0$，使得对所有 $f \in \mathcal{G}$，都有

$$m(r, f_{P_{k,A}}, \lambda_W) \leq \varepsilon T_s(r, f_A, \omega_{\overline{A}}) + \beta$$

对所有不属于某个线性测度小于 δ 的例外集的 $r \in (s, 1)$，均成立。

证明。我们首先考虑子集

$$\{f_{P_{k,A}};\ f \in \mathcal{F}\} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, P_{k,A}) \tag{7.12}$$

是有限的情形。通过从 $\mathcal{F}$ 中移除有限个元素，我们可以选取一个无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，使得对所有 $f \in \mathcal{G}$, $f_{P_{k,\ A}}(\mathbb{D}) \not\subset$ 支集 W。于是，对这个 $\mathcal{G}$ 以及任意 $\sigma \in (0, 1)$，我们的估计均成立。事实上，只需令 $\beta = \max_{f\in\mathcal{G}} \sup_{r\in(s,1-\delta)} m(r, f_{P_{k,\ A}}, \lambda_W)$ 即可。因此，在下文中，我们假设集合 (7.12) 是无限的。将 $\mathcal{F}$ 替换为其无限子集后，我们可以假设集合 (7.12) 是无限的，且映射 $\mathcal{F} \ni f \mapsto f_{P_{k,\ A}} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, P_{k,\ A})$ 是单射的。因此，我们可以假设无限指标族 $\mathcal{F}_{P_{k,\ A}}$ 是 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, P_{k,\ A})$ 的一个无限子集。

存在正常数 $c > 0$ 使得 $\lambda_W \leq c\lambda_{\mathrm{supp}\, W} + c$。因此，我们可以假设 W 是既约的。设 $\omega_{P_{k,\ A}}$ 是 $P_{k,\ A}$ 上的光滑正 (1, 1)-形式。应用引理 7.2，可得 $\sigma \in (0, 1)$、 $\beta_0 > 0$、 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 以及扎里斯基闭集 $E \subset \cup_{B\in\Pi'} E_{k,\ A,\ A/B}$，并存在其对应的 Weil 函数 $\lambda_E \geq 0$，使得

$$m(r, f_{P_{k,A}}, \lambda_W) \leq \frac{\beta_0}{(r-\rho)^l} T_\rho(r, f_{P_{k,A}}, \omega_{P_{k,A}}) + \frac{\beta_0}{(r-\rho)^l} m(\rho, f_{P_{k,A}}, \lambda_E) + \frac{\beta_0}{(r-\rho)^l} \tag{7.13}$$

对所有 $\sigma < \rho < r < 1$ 和 $f \in \mathcal{G}$ 均成立。我们可以取一个有限子集 $\Lambda \subset \Pi'$，使得令 $E_\Lambda = \cup_{B\in\Lambda} E_{k,\ A,\ A/B}$ 后，有 $E \subset E_\Lambda$。注意， $\mathcal{G}$ 满足假设 6.2。从 $\mathcal{G}$ 中移除有限个元素后，我们可以假设对所有 $B \in \Lambda$ 和 $f \in \mathcal{G}$， $\varpi_B \circ f$ 都是非恒定的。如有必要，通过扩大 $\sigma \in (0,1)$，我们可以假设对每个 $B \in \Lambda$， σ 都符合引理 7.3。注意， $\{0\} \in \Pi(\mathcal{G})$。因此，再次扩大 $\sigma \in (0,1)$，我们可以假设 σ 符合引理 6.3。

现在我们固定 $s \in (\sigma, 1)$、 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$。令 $\varepsilon' = \frac{\varepsilon\delta^l}{2^{2l+1}\beta_0}$。取 $f \in \mathcal{G}$。应用引理 7.3 得到

$$m(\rho, f_{P_{k,A}}, \lambda_{E_\Lambda}) \leq \varepsilon' T_s(\rho, f, \omega_{\overline{A}}) + \beta_1$$

对于所有不属于某个线性测度小于 $\delta/4$ 的例外集的 $\rho \in (s, 1)$。因此，我们可以取满足此性质的 $\rho \in (s, s + \delta/4)$。由（7.13）可得

$$m(r, f_{P_{k,A}}, \lambda_W) \leq \frac{4^l\beta_0}{\delta^l} T_s(r, f_{P_{k,A}}, \omega_{P_{k,A}}) + \varepsilon' \frac{4^l\beta_0}{\delta^l} T_s(r, f, \omega_{\overline{A}}) + \frac{4^l\beta_0(1+\beta_1)}{\delta^l}$$

对于所有 $r \in (s + \delta/2, 1)$。应用引理 6.3 得到

$$T_s(r, f_{P_{k,A}}, \omega_{P_{k,A}}) \leq \varepsilon' T_s(r, f_A, \omega_{\overline{A}}) + \mu$$

对于所有不属于某个线性测度小于 $\delta/2$ 的例外集的 $r \in (s, 1)$。结合这两个估计，我们得到所要证明的结论。在此我们令 $\beta = \frac{4^l\beta_0\ (1+\beta_1+\mu)\ \delta^l}{\circ}$ □

8. Proof of Proposition 3.20

设 $\overline{A}$ 为一个光滑等变紧化。给定 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$ 中的一个无限指标族 $\mathcal{F}$，令

$$\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \{D;\ \partial A\text{的不可约分支，使得 } \exists \mathcal{F}' \text{ 是 } \mathcal{F} \text{ 的子族，满足 } \mathcal{F}' \to D\}$$

对于不可约分支 $D \subset \partial A$，令 $I_D \subset A$ 为 D的各向同性群。于是 $I_D = \mathbb{G}_m$。令 $I_{\mathcal{F}} = I_{D_1} \cdots I_{D_l} \subset A$，其中 $\{D_1, \ldots, D_l\} = \mathcal{I}(\mathcal{F})$。在下一个引理中，对于 $\tau \in A$，我们对映射 $\tau\colon\ \overline{A} \to \overline{A}$ 使用由 $a \mapsto a + \tau$定义的相同记号。

引理 8.1. 设 $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ 是 Hol$(\mathbb{D}, A)$ 中的一个无限指标族。对于 $i \in I$，存在$\tau_i \in I_{\mathcal{F}}$，使得 $(\tau_i \circ f_i)_{i\in I}$ 满足假设 6.2。

在下面的证明中，我们使用如下定义的一维无界 Hausdorff 内容的记号。设 $K \subset \mathbb{C}$，记

$$C_H^1(K) = \inf\left\{\sum_j r_j; \exists \text{a countable cover of } K \text{ by closed discs with radii } r_j > 0\right\}. \tag{8.1}$$

引理 8.1 的证明。若 $\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \emptyset$，则引理显然成立。因此我们假设 $\mathcal{I}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$。取 $D \in \mathcal{I}(\mathcal{F})$。对于每个 $i \in I$，我们将证明存在 $\tau_{i,\ D} \in I_D$，使得指标族 $\mathcal{F}' = (\tau_{i,\ D} \circ f_i)_{i\in I}$ 满足以下两个性质：

- $D \notin \mathcal{I}(\mathcal{F}')$。
- 若 $E \notin \mathcal{I}(\mathcal{F})$，则 $E \notin \mathcal{I}(\mathcal{F}')$。

我们将构造 $\tau_{i,\ D}$。对于每个 $E \notin \mathcal{I}(\mathcal{F})$，存在 $s_E \in (0, 1)$、$\gamma_E > 0$、E的一个开邻域 $U_E \subset \overline{A}$ 以及一个有限子集 $J_E \subset I$，使得

$$C_H^1(\mathbb{D}(s_E)\backslash f_i^{-1}(U_E)) \geq \gamma_E \tag{8.2}$$

对所有 $i \in I\backslash J_E$ 均成立（参见注 4.7）。此外，我们可以假设，若 $E\cap D = \emptyset$，则 $U_E \Subset \overline{A}-D$。我们令 $s =$ 为 $_{E\notin\mathcal{I}(\mathcal{F})}\{s_E\}$ 的最大值、$\gamma =$ 为 $_{E\notin\mathcal{I}(\mathcal{F})}\{\gamma_E\}$ 的最小值，并令 $\gamma' = \gamma/2$。

应用引理 A.11，得到 $p\colon W \to D$，其中 $W \subset \overline{A}$ 是 D 的一个扎里斯基开邻域，而 W 是 D 上一个线丛的全空间。令 $||\cdot||$ 为此线丛 $p\colon W \to D$ 上的一个光滑 Hermitian 度量。我们令 $U_D = \{x \in W;\ ||x|| < 1\}$。于是 $U_D \subset \overline{A}$ 是 D 的一个开邻域。必要时替换 $||\cdot||$ 后，我们可以假设若 $D \cap E = \emptyset$，则 $U_D \cap U_E = \emptyset$。注意，I_D 通过 scholar 积作用于 W（参见引理 A.11）。因此，对于 $a \in I_D$，我们可以将其范数 $|a|$ 定义为：对于 $x \in W - D$，$|a| = ||a \cdot x||/||x||$。我们令 $U'_D = \{x \in W;\ ||x|| < 1/2\}$。于是$U'_D \Subset U_D$。

设 $i \in I$。在下面两种情况下，我们选择$\tau_{i,D} \in I_D$。

情况1。$f_i(z) \in U'_D$ 对于 γ'-几乎所有 $z \in \mathbb{D}(s)$。我们设

$$\sigma_i = \sup\{|\tau|;\ \tau \in I_D \text{ and } \tau \circ f_i(z) \in U'_D \text{ for } \gamma'\text{-almost all } z \in \mathbb{D}(s)\}.$$

注意，如果 $\tau \in I_D$满足 $|\tau|\min_{z\in\overline{\mathbb{D}(s)}}||f_i(z)|| \geq 1/2$，那么 $\tau \circ f_i(z) \notin U'_D$对所有 $z \in \mathbb{D}(s)$ 均成立。因此 $\sigma_i < \infty$。我们取 $\tau_{i,D} \in I_D$ 使得$|\tau_{i,D}| = \sigma_i$。于是我们有

$$|\tau_{i,D}| \geq 1. \tag{8.3}$$

这由 $\sigma_i \geq |e_{I_D}|$得出，其中 e_{I_D} 是 I_D 的单位元。

情况 2。否则，我们令 $\tau_{i,D} = e_{I_D}$。

我们设 $\Omega_i = \mathbb{D}(s) \cap(\tau_{i,D} \circ f_i)^{-1}(U_D)$。我们将 $G \subset I$定义为满足 f_i属于情况 1 的 $i \in I$ 所构成的集合。根据$\tau_{i,D}$的定义，我们有

$$C_H^1(\mathbb{D}(s)\backslash\Omega_i) < \gamma' \tag{8.4}$$

对所有 $i \in G$。我们证明 $\mathcal{F}' = (\tau_{i,D} \circ f_i)_{i\in I}$ 满足我们的要求。我们首先注意到$D \notin \mathcal{I}(\mathcal{F}')$。为证明这一点，令 $U''_D = \{x \in W;\ ||x|| < 1/4\}$，使得 $U''_D \Subset U'_D$。于是有$C_H^1(\mathbb{D}(s)\backslash(\tau_{i,D} \circ f_i)^{-1}(U''_D)) \geq \gamma'$对所有 $i \in I$。因此 $D \notin \mathcal{I}(\mathcal{F}')$。

接下来我们取 $E \notin \mathcal{I}(\mathcal{F})$。首先考虑 $E \cap D = \emptyset$ 的情形。由 $U_E \cap U_D = \emptyset$ 和 (8.4)，可得 $C_H^1(\mathbb{D}(s) \cap(\tau_{i,\ D} \circ f_i)^{-1}(U_E)) < \gamma'$，只要 $i \in G$ 成立。由 (8.2)，对于所有 $i \in I\backslash(G \cup J_E)$，都有 $C_H^1(\mathbb{D}(s_E)\backslash(\tau_{i,\ D} \circ f_i)^{-1}(U_E)) \geq \gamma_E$。因此，如所求，$E \notin \mathcal{I}(\mathcal{F}')$。

下面我们考虑 $E\cap D\neq\emptyset$ 的情形。取 E 的一个开邻域 $U'_E\subset U_E$，使得 $U'_E\cap U_D\subset U_D-p^{-1}(p(\overline{U_D}-U_E))$。那么，对于满足 $|\tau|\geq 1$ 的 $\tau\in I_D$，我们有

$$U'_E\cap U_D\subset\tau(U_E). \tag{8.5}$$

由 $\tau_{i,\ D}\circ f_i(\Omega_i)\ \subset U_D$，可得

$$(\tau_{i,D}\circ f_i)^{-1}(U'_E)\cap\Omega_i\subset(\tau_{i,D}\circ f_i)^{-1}(U'_E\cap U_D).$$

由 (8.3) 和 (8.5)，可得

$$(\tau_{i,D}\circ f_i)^{-1}(U'_E\cap U_D)\subset(\tau_{i,D}\circ f_i)^{-1}(\tau_{i,D}(U_E))=f_i^{-1}(U_E).$$

因此得到

$$(\tau_{i,D}\circ f_i)^{-1}(U'_E)\cap\Omega_i\subset f_i^{-1}(U_E). \tag{8.6}$$

由 (8.2) 以及 s和 γ的定义，对于所有 $i\in I\backslash J_E$，可得 $C^1_H(\mathbb{D}(s)\backslash f_i^{-1}(U_E))\ \geq\gamma$。于是由 (8.4) 得，对于所有 $i\in G\backslash J_E$，有 $C^1_H(\Omega_i\backslash f_i^{-1}(U_E))\ \geq\gamma'$。因此由 (8.6)，有$C^1_H(\Omega_i\backslash(\tau_{i,\ D}\circ f_i)^{-1}(U'_E))\geq\gamma'$，从而对于所有 $i\in G\backslash J_E$，有 $C^1_H(\mathbb{D}(s)\backslash(\tau_{i,\ D}\circ f_i)^{-1}(U'_E))\ \geq\gamma'$。由 (8.2)，对所有 $i\in I\backslash J_E$，结论同样成立。因此 $E\notin\mathcal{I}(\mathcal{F}')$，如所求。

现在从 $\mathcal{F}$开始，我们令 $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}'$。归纳地，我们通过 $\mathcal{F}_{k+1}=\mathcal{F}'_k$得到 $\mathcal{F}_2$、$\mathcal{F}_3$，.....。然后根据上述考虑，我们有 $\mathcal{I}(\mathcal{F}_k)\supsetneqq\mathcal{I}(\mathcal{F}_{k+1})$。因此，对于某个 n，我们得到 $\mathcal{I}_{\mathcal{F}_n}=\emptyset$。然后 $\mathcal{F}_n$ 满足假设 6.2。□

引理 8.2。设 $p:\ W\to V$ 是一个向量丛，其中 V 是一个光滑射影簇。我们用零截面将 $V\subset W$ 视为子集。设 $\mathcal{F}=(f_i)_{i\in I}$ 是 Hol$(\mathbb{D},W)$ 中的一个无限指标族。假设 $\mathcal{F}\to V$，且 $\{p\circ f_i\}_{i\in I}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g:\ \mathbb{D}\to V$。那么 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 g。

证明。我们在 W 上赋予一个光滑的 Hermitian 度量。我们用 $||\cdot||_W$ 表示 $p\colon W\to V$ 的每个纤维上相应的欧几里得范数。设 $O_1,\dots,O_n\subset V$ 是 V 的标准拓扑中的一个开集，使得 $V\subset O_1\cup\cdots\cup O_n$。假设 $W|_{O_j}=\mathbb{C}^k\times O_j$，并且令 $\varphi_j\colon W|_{O_j}\to\mathbb{C}^k$ 为第一投影，存在一个正常数 $c_j>1$ 使得

$$\frac{1}{c_j}||\varphi_j(x)||\leq||x||_W\leq c_j||\varphi_j(x)|| \tag{8.7}$$

对于所有 $x\in W|_{O_j}$。令 δ 为 V 上确定 V 上标准拓扑的距离函数。设 $O'_j\Subset O_j$ 为一个开集，使得 $V\subset O'_1\cup\cdots\cup O'_l$。存在正常数 $\alpha>0$，使得对于所有 $j=1,\dots,n$，我们有

$$\delta(\overline{O'_j},V-O_j)>\alpha. \tag{8.8}$$

令 $\tau\colon V\times W\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 定义为

$$\tau(x,y)=\delta(x,p(y))+||y||_W.$$

设 $r\in(0,\alpha/2)$ 且 $s\in(0,1)$。我们断言存在一个有限集 $E\subset I$，使得对于所有$i\in I\backslash E$ 和 $z\in\mathbb{D}(s)$，都有

$$\tau(g(z),f_i(z))<r. \tag{8.9}$$

我们来证明这一点。令 $s'\in(s,1)$。由于 $\{p\circ f_i\}_{i\in I}$ 在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致收敛到 g，因此存在一个有限子集 $E_1\subset I$，使得对于所有 $i\in I\backslash E_1$ 和 $z\in\mathbb{D}(s')$，我们有

$$\delta(g(z),p\circ f_i(z))<r/2. \tag{8.10}$$

设 $c=$最大值$_{1\leq j\leq n}\{c_j\}$ 和

$$U=\{x\in W;\ ||x||_W<r/2c^2\}.$$

由于 $||\cdot||_W\colon\ W\to\mathbb{R}_{\geq 0}$是连续的，$U\subset W$是 $V\subset W$ 的开邻域。我们取 $\gamma\in(0,\frac{s'-s}{2})$，使得如果 $\Delta\subset\mathbb{D}(s')$ 是半径为 γ 的圆盘，那么对于所有 z、$z'\in\Delta$，我们有

$$\delta(g(z),g(z'))<\alpha/2. \tag{8.11}$$

By $\mathcal{F} \to V$，存在一个有限子集 $E_2 \subset I$ 使得，对于所有 $i \in I \backslash E_2$，我们有

$$C_H^1(\mathbb{D}(s') \backslash f_i^{-1}(U)) < \gamma', \tag{8.12}$$

其中 $\gamma' = \gamma/4$。令 $E = E_1 \cup E_2$。对于所有 $i \in I \backslash E$ 和 $z \in \mathbb{D}(s)$，我们断言

$$||f_i(z)||_W < r/2. \tag{8.13}$$

为证明这一点，我们取 $z \in \mathbb{D}(s)$ 和 $i \in I \backslash E$。给定 $\rho \in (0, \gamma)$，记以 z 为中心、半径为 ρ 的圆盘为 Δ_ρ。由 $\gamma < \frac{s'-s}{2}$，我们有 $\overline{\Delta_\rho} \subset \mathbb{D}(s')$。取 O_j'，使得 $g(z) \in O_j'$。为证明 $p \circ f_i(\Delta_\rho) \subset O_j$，我们取 $w \in \Delta_\rho$。于是由 (8.11)，我们有 $\delta(g(z)\ g(w)) < \alpha/2$。由 $w \in \mathbb{D}(s')$，估计式 (8.10) 得到 $\delta(g(w)\ p \circ f_i(w)) < \alpha/4$。因此我们有 $\delta(g(z)\ p \circ f_i(w)) < \alpha$。于是由 (8.8)，我们有 $p \circ f_i(w) \in O_j$。这表明 $p \circ f_i(\Delta_\rho) \subset O_j$，从而 $f_i(\Delta_\rho) \subset W|_{O_j}$。由 (8.12)，存在 $\rho \in (0, \gamma)$，使得 $f_i(\partial\Delta_\rho) \subset U$。由 (8.7)，对于所有 $w \in \partial\Delta_\rho$，我们有 $||\varphi_j \circ f_i(w)|| < r/2c_j$。由于 $||\varphi_j \circ f_i||$ 在 Δ_ρ 上是次调和的，最大值原理给出 $||\varphi_j \circ f_i(z)|| < r/2c_j$。由 (8.7)，得到 (8.13)。因此由 (8.10) 和 (8.13)，得到 (8.9)。

对于 $r > 0$ 和 $x \in V$，我们令 $B_x(r) = \{y \in W;\ \ \tau(x, y) < r\}$。注意到 $\tau(x, y)$相对于 $y \in W$是连续的。因此，$B_x(r) \subset W$ 是一个开子集。令 d 为W 上的距离函数，该函数在 W 上诱导出拓扑。令 $\varepsilon > 0$。然后我们可以取正常数 $r_\varepsilon > 0$使得

$$\sup_{y \in B_x(r_\varepsilon)} d(x, y) < \varepsilon \tag{8.14}$$

对所有 $x \in V$ 均成立。为证明这一点，我们注意到，对于每个 $x \in V$，可取 $r_{\varepsilon,x} > 0$，使得 $\sup_{y \in B_x(r_{\varepsilon,x})} d(x, y) < \varepsilon/4$。我们考虑 $V \subset W$ 的开覆盖 $\{B_x(r_{\varepsilon,x}/2)\}_{x \in V}$。由于$V$是紧的，存在 $x_1, \ldots, x_l \in V$，使得 $V \subset B_{x_1}(r_{\varepsilon,x_1}/2) \cup \cdots \cup B_{x_l}(r_{\varepsilon,x_l}/2)$。我们令 $r_\varepsilon = \min_{1 \le j \le l}\{r_{\varepsilon,x_j}/2\}$。设 $x \in V$。则存在 x_j，使得 $x \in B_{x_j}(r_{\varepsilon,x_j}/2)$。令$y \in B_x(r_\varepsilon)$。于是我们有

$$\tau(x_j, y) \le \delta(x_j, x) + \tau(x, y) < r_{\varepsilon,x_j}.$$

因此 $y \in B_{x_j}(r_{\varepsilon,\ x_j})$。于是 $d(x, y) \le d(x_j, x) + d(x_j, y) < \varepsilon/2$。这证明了（8.14）。

现在我们证明 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 g。令 $s \in (0, 1)$，并令 $\varepsilon > 0$。那么将 (8.9) 应用于 $r = \min\{\alpha/3, r_\varepsilon\}$，可得存在一个有限子集 $E \subset I$，使得对所有 $i \in I \backslash E$，都有

$$\tau(g(z), f_i(z)) < r_\varepsilon$$

对所有 $z \in \mathbb{D}(s)$ 成立。由 (8.14)，我们有 $d(g(z)\ f_i(z)) < \varepsilon$ 对所有 $z \in \mathbb{D}(s)$ 和 $i \in I \backslash E$成立。因此 $\mathcal{F}$在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 g。□

引理 8.3. 设 $\overline{A}$ 是 A 的光滑等变紧化，且 $\omega_{\overline{A}}$ 是 $\overline{A}$ 上的光滑正 (1, 1)-形式。设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$ 是满足假设 6.2 的全纯映射无限集。假设对所有 $0 < r < 1$，我们都有

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \int_{\mathbb{D}(r)} f^* \omega_{\overline{A}} \right\} < \infty.$$

因此存在一个无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，使得 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到某个 $g:\ \mathbb{D} \to A$。

证明。证明分为三个步骤。

步骤 1。我们首先考虑 A 是阿贝尔簇的情形。在这种情况下，我们有 $\overline{A} = A$。我们可以假设 ω_A 是正的不变（1, 1）形式。设 $\sigma \in (0, 1)$。我们将证明 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}(\sigma)$ 上等度连续。也就是说，我们证明

$$\sup_{w \in \mathbb{D}(\sigma)} \sup_{f \in \mathcal{F}} \{|f'(w)|_{\omega_A}\} < \infty.$$

设 $s \in (\sigma, 1)$。我们定义

$$c = \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \int_{\mathbb{D}(s)} f^* \omega_A \right\}.$$

设 $w \in \mathbb{D}(\sigma)$。回忆一下由 (4.6) 得到的 $\varphi_{w,\ s}\colon\ \mathbb{D}(s) \to \mathbb{D}(s)$。于是

$$\int_{\mathbb{D}(s)} (f \circ \varphi_{w,s})^* \omega_A = \int_{\mathbb{D}(s)} f^* \omega_A \leq c.$$

对于 $r \in (0, s)$，我们设

$$u(r) = \int_0^{2\pi} |(f \circ \varphi_{w,s})'(re^{i\theta})|^2_{\omega_A} d\theta.$$

由于 $|(f \circ \ \varphi_{w,\ s})'(z)|^2_{\omega_A}$ 在 $\mathbb{D}(s)$ 上是次调和的，因此我们有 $2\pi|(f \circ \varphi_{w,\ s})'(0)|^2_{\omega_A} \leq u(r)$。因此 e

$$\int_{\mathbb{D}(s)} (f \circ \varphi_{w,s})^* \omega_A = \int_0^s u(r) r dr \geq \pi s^2 |(f \circ \varphi_{w,s})'(0)|^2_{\omega_A}.$$

这表明

$$|(f \circ \varphi_{w,s})'(0)|_{\omega_A} \leq \sqrt{\frac{c}{\pi s^2}}.$$

因此，由 (4.7) 可得

$$|f'(w)|_{\omega_A} \leq \frac{s+\sigma}{s-\sigma} \sqrt{\frac{c}{\pi s^2}}.$$

因此，$\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}(\sigma)$ 上等度连续。由 Arzel´a-Ascoli 定理，存在一个子列$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，使得 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到某个 $g : \mathbb{D} \to A$。

步骤 2。我们考虑 $A = (\mathbb{G}_m)^k$ 的情形。给定一个等变紧化 $\overline{A}$。于是由引理 6.4，存在 $s_0 \in (0, 1)$，使得对所有 $r \in (s_0, 1)$，都有

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \{m(r, f, \lambda_{\partial A})\} < \infty. \tag{8.15}$$

¯令 $p_i\colon\ A \to \mathbb{G}_m$ 为第 i 个投影。令 $\tau_i\colon\ W_i \to A$ 为一个光滑修改，使得 $p_i\colon\ A \to \mathbb{G}_m$ 延拓为 $\overline{p_i} : W_i \to \mathbb{P}^1$。于是我们有

$$\operatorname{supp} \overline{p_i}^* ((0) + (\infty)) \subset \operatorname{supp} \tau_i^* \partial A.$$

因此由 (8.15)，得到

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ m(r, p_i \circ f, \lambda_{(0)+(\infty)}) \right\} < \infty \tag{8.16}$$

对所有 $r \in (s_0, 1)$ 均成立。注意，$m(r, p_i \circ f, \lambda_{(0)+(\infty)})$ 是 r 上的递增函数。因此 (8.16) 对所有 $r \in (0, 1)$ 均成立。于是由蒙特尔定理（参见 $[30,$ 定理 1.6，第 $230]$ 页，或 $[13,$ 第 $233]$ 页），存在一个无限子集 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}$，使得 $(p_1 \circ f)_{f \in \mathcal{G}_1}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g_1\colon\ \mathbb{D} \to \mathbb{C}$。由 (8.16)，有 $g_1 \not\equiv 0$。因此我们有 $g_1\colon\ \mathbb{D} \to \mathbb{G}_m$。用同样的论证，存在一个无限子集 $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$，使得 $(p_2 \circ f)_{f \in \mathcal{G}_2}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g_2\colon\ \mathbb{D} \to \mathbb{C}$。同样有 $g_2\colon\ \mathbb{D} \to \mathbb{G}_m$。如此一来，我们得到 $\mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{G}_k$。令 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_k$。那么 $\mathcal{G}$ 是一个无限集，并在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $(g_1, \ldots, g_k) : \mathbb{D} \to (\mathbb{G}_m)^k$。

步骤 3。我们考虑一般情形，其中有 $0 \to T \to A \xrightarrow{p} A_0 \to 0$。根据引理 A.6，存在一个等变紧化 $\overline{T}$，使得 $\overline{A} = (\overline{T} \times A)/T$。我们取普遍覆盖 $\tilde{A}_0 \to A_0$。我们考虑 $0 \to T \to A \times_{A_0} \tilde{A}_0 \xrightarrow{p} \tilde{A}_0 \to 0$，它具有一个分裂。于是我们有 $\overline{A} \times_{A_0} A_0 = T \times A_0$。令 $q\colon\ A \times_{A_0} A_0 \to T$ 为第一投影，$\pi\colon\ A \times_{A_0} A_0 \to \overline{A}$ ˜为自然映射。我们继续记 $p : \overline{A} \to A_0$ 和 $\tilde{p} : \overline{A} \times_{A_0} A_0 \to A_0$。

$$\begin{array}{ccccc} \overline{A} & \xleftarrow{\pi} & \overline{A} \times_{A_0} \tilde{A}_0 & \xrightarrow{q} & \overline{T} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \\ A_0 & \longleftarrow & \tilde{A}_0 & & \end{array}$$

现在我们断言，存在一个无限子集 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$，使得 $(p \circ f)_{f \in \mathcal{F}'}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛。事实上，如果 $\{p \circ f;\ f \in \mathcal{F}\} \subset$ 全纯映射空间$(\mathbb{D}, A_0)$ 是一个有限子集，我们取一个无限子集 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$，使得 $p \circ f$ 对所有 $f \in \mathcal{F}'$ 都相同；否则我们应用

第一步，对无限子集 $\{p\circ f;\ f\in\mathcal{F}\}\subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D},A_0)$，取一个无限子集 $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$，使得 $(p\circ f)_{f\in\mathcal{F}'}$ 在 $\mathbb{D}$ 上的紧子集上一致收敛。对每个 $f\in\mathcal{F}'$，我们取~一个提升 $\tilde f:\ \mathbb{D}\to A\times_{A_0}A_0$。我们可以假设 $(\tilde p\circ \tilde f)_{f\in\mathcal{F}'}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧~子集上一致收敛到 $h:\ \mathbb{D}\to A_0$。对每个固定的 $r\in\overline{(0,1)}$，存在一个紧集 $K_r\subset A_0$，使得 $h(\mathbb{D}(r))\subset K_r^o$，其中 K_r^o 是 K_r 的内部。于是，对所有仅有有限例外的 $f\in\mathcal{F}'$，~我们有 $\tilde p\circ\tilde f(\mathbb{D}(r))\subset K_r^o$。令 $\omega_{\overline{T}}$ 为 $\overline{T}$ 上的光滑正 $(1,1)$-形式。注意，存在一个正常数 $c_r>0$，使得 $q^*\omega_{\overline{T}}\le c_r\pi^*\omega_{\overline{A}}$ 在 $\tilde p^{-1}(K_r)$ 上成立。因此我们有

$$\sup_{f\in\mathcal{F}'}\left\{\int_{\mathbb{D}(r)}(q\circ\tilde f)^*\omega_{\overline{T}}\right\}<\infty.$$

~接下来我们断言，$(q\circ f)_{f\in\mathcal{F}'}$ 满足假设 6.2。设 $D\subset\partial T$ 为一个不可约分支。那么，$(D\times A)/T$ 是 ∂A 的一个不可约分支，且 $\pi(q^{-1}(D))=(D\times A)/T$。由于 $\mathcal{F}'$ 满足假设 6.2，因此存在一个开邻域 $(D\times A)/T\subset U_0\subset\overline{A}$、$s_0\in(0,1)$、$\gamma_0>0$ 以及一个有限子集 $\mathcal{E}\subset\mathcal{F}'$，使得

$$C_H^1(\mathbb{D}(s_0)\backslash f^{-1}(U_0))\ge\gamma_0$$

对所有 $f\in\mathcal{F}'\backslash\mathcal{E}$ 均成立（参见注 4.7）。注意，$q(\tilde p^{-1}(K_{s_0})\backslash\pi^{-1}(U_0))\subset\overline{T}$ 是紧的。令 $W=\overline{T}\backslash q(\tilde p^{-1}(K_{s_0})\backslash\pi^{-1}(U_0))$。那么，$W$ 是 D 的一个开邻域。我们有 $q^{-1}(W)\cap\tilde p^{-1}(K_{s_0})\subset\pi^{-1}(U_0)$。因此，对于所有满足 $\tilde p\circ\tilde f(\mathbb{D}(s_0))\subset K_{s_0}^o$ 的 $f\in\mathcal{F}'\backslash\mathcal{E}$，均有

$$C_H^1(\mathbb{D}(s_0)\backslash(q\circ\tilde f)^{-1}(W))\ge\gamma_0.$$

~因此，$(q\circ f)_{f\in\mathcal{F}'}$ 满足假设 6.2。因此，存在一个无限子集 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}'$，使得~$(q\circ f)_{f\in\mathcal{G}}$ 在 $\mathbb{D}$ 上的紧子集上一致收敛。事实上，如果 $\{q\circ f;\ f\in\mathcal{F}'\}\subset\mathrm{Hol}(\mathbb{D},T)$ 是一个有限子集，我们取无限子集 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}'$，使得 $q\circ f$ 对所有 $f\in\mathcal{G}$ 都相同；~否则，我们对无限子集 $\{q\circ f;\ f\in\mathcal{F}'\}\subset\mathrm{Hol}(\mathbb{D},T)$ 应用第二步，从而得到~一个无限子集 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}'$，使得 $(q\circ f)_{f\in\mathcal{G}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛。于是，$\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛。□

命题 3.20 的证明。注意，Z 是 $P_{k+1,\ A}$ 的不可约扎里斯基闭集。在下文中，我们固定 $l\ge1$，使得自然映射 $T_{k+l}\to Z$ 在映射 $P_{k+l,\ A}\to P_{k+1,\ A}$ 下是满射。我们将证明分为以下几个步骤。

步骤 1。给定 $\mathcal{F}$ 中的一个序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 以及一个光滑等变紧化 $\overline{A}$。暂时进一步假设 $\overline{A}$ 是射影的。将 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 替换为其子列后，不妨设该序列由 $\mathcal{F}$ 中的互不相同的元素组成；否则，存在收敛子列是显然的。将 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 替换为其子列后，不妨设对于每个不可约分支 $D\subset\partial A$，或者有 (1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\to D$，或者对于 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的每个子序列 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，都有 (2) $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\not\to D$。具体构造如下。设 D_1，……，D_k 是 ∂A 的所有不可约分支。我们如下定义 (f_n) 的一个子列 $\mathcal{G}_1$。如果 (f_n) 包含一个子序列 $(f_{n'})$，使得 $(f_{n'})\to D_1$，则令 $\mathcal{G}_1=(f_{n'})$。否则，令 $\mathcal{G}_1=(f_n)$。如果 $\mathcal{G}_1$ 包含一个子序列 $(f_{n''})$，使得 $(f_{n''})\to D_2$，则令 $\mathcal{G}_2=(f_{n''})$。否则令 $\mathcal{G}_2=\mathcal{G}_1$。继续这一过程即可得到 $\mathcal{G}_k$。于是 $\mathcal{G}_k$ 满足我们的要求。我们将 (f_n) 替换为 $\mathcal{G}_k$。

我们用 $\mathcal{I}$ 表示 ∂A 的所有不可约分支 D_i 的集合，使得 $(f_n)\to D_i$。令 $V=\cap_{D_i\in\mathcal{I}}D_i$。当 $\mathcal{I}=\emptyset$ 时，我们将 $V=\overline{A}$ 读作。由引理 3.5，得

$$(f_n)\to V. \tag{8.17}$$

步骤 2。我们可以假设 $\{0\}\in\Pi((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$，否则显然存在一个收敛子列。应用引理 8.1，得到 V 的各向同性群中的一个元素 τ_n，使得 $(\tau_n\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足假设 6.2。根据引理 A.11，取 $p:\ W\to V$，其中 $W\subset\overline{A}$ 是 V 上向量丛的全空间。于是有

$$p\circ\tau_n\circ f_n=p\circ f_n \tag{8.18}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}\in$全纯映射空间$(\mathbb{D},V)$。

令 $S = P_{k,\ A}$。于是有 $P_{k+1,\ A} \subset S_{1,\ A}$。由于 $\mathcal{F}$ 的所有元素都是非恒定的，$\tau_n \circ f_n$：对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathbb{D} \to A$ 都是非恒定的。因此得到 $(\tau_n \circ f_n)^{[k]}$：$\mathbb{D} \to A \times S$，从而

$$((\tau_n \circ f_n)_{[k]})_{S_{1,A}} : \mathbb{D} \to S_{1,A}.$$

那么在包含映射 $\iota : P_{k+1,A} \hookrightarrow S_{1,A}$ 下，我们有 $((\tau_n \circ f_n)^{[k]})_{S_{1,A}} = \iota \circ (\tau_n \circ f_n)_{P_{k+1,A}}$。注意到 $Z \subset P_{k+1,\ A} \subset S_{1,A}$。

现在我们断言 $(((\tau_n \circ f_n)^{[k]})_{S_{1,A}})_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow Z$。事实上，我们有

$$(\tau_n \circ f_n)_{P_{k+l,A}} = (f_n)_{P_{k+l,A}} \tag{8.19}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ (参见 (2.14))。根据 $\mathcal{F}_{P_{k+l,A}} \Rightarrow T_{k+l}$ 和注 3.4，我们有 $((f_n)_{P_{k+l,A}})_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow T_{k+l}$。因此根据引理 3.15，我们得到 $((\tau_n \circ f_n)_{P_{k+1,A}})_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow Z$。因此再次根据引理 3.15，我们得到 $(((\tau_n \circ f_n)^{[k]})_{S_{1,A}})_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow Z$。

接下来，我们将证明存在一个子列 $(\tau_{n_k} \circ f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，它在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到一个全纯映射 $\mathbb{D} \to A$。令

$$\mathcal{G} = \{\tau_n \circ f_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A).$$

若 $\mathcal{G}$ 是有限集，则此类 $(\tau_{n_k} \circ f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 的存在性显然。因此，以下我们假设 $\mathcal{G}$ 是无限集。我们注意到以下几点：

- $\{0\} \in \Pi(\mathcal{G})$。
- $\mathcal{G}$ 满足假设 6.2。
- $((\varphi^{[k]})_{S_{1,\ A}})_{\varphi\in\mathcal{G}} \Rightarrow Z$，其中 $\varphi^{[k]}$：$\mathbb{D} \to A \times S$。

这些性质可由本步骤（步骤 2）的讨论得出。

步骤 3. 设 $\omega_{\overline{A}}$ 和 ω_S 分别是 $\overline{A}$ 和 S上的光滑正 (1,1) 形式。应用引理 6.3 可得 $\sigma_1 \in (0, 1)$，其具有如下性质：设 $s \in (\sigma_1, 1)$、$\varepsilon > 0$、$\delta > 0$。则存在 $\mu > 0$，使得对于所有 $\varphi \in \mathcal{G}$，我们有

$$T_s(r, \varphi_S, \omega_S) \le \varepsilon T_s(r, \varphi, \omega_{\overline{A}}) + \mu \tag{8.20}$$

对于某个线性测度小于 δ 的例外集之外的所有 $r \in (s,1)$。接下来由 (8.19) 和注记 3.13（3），我们有

$$\mathrm{LIM}(\mathcal{G}_{P_{k+l,A}}, \{E_{k+l,A,A/B}\}_{B\in\Pi(\mathcal{F})}) = T_{k+l}.$$

由于 $Z \subset S_{1,A}$ 是水平可积的，我们可以取Proposition5.1 中出现的一个扎里斯基闭子集 $W \subsetneq t(Z) \subset S$，其中 $t : S_{1,A} \to S$ 是自然投影。令 $\pi : P_{k+l,A} \to S$ 为自然投影。由 $\pi(T_{k+l}) = t(Z)$，我们有 $T_{k+l} \not\subset \pi^{-1}(W)$。令 $\lambda_W \ge 0$ 为 W的一个 Weil 函数。则 $\lambda_W \circ \pi$是 $\pi^*W \subset P_{k+l,A}$的一个 Weil 函数。由 $\Pi(\mathcal{G}) \supset \Pi(\mathcal{F})$，我们可以应用引理 7.4，得到一个无限子集 $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ 以及 $\sigma_2 \in (0, 1)$，其具有以下性质：令 $s \in (\sigma_2, 1)$，$\varepsilon > 0$，$\delta > 0$。则存在 $\beta > 0$，使得对所有 $\varphi \in \mathcal{G}'$，我们都有

$$m(r, \varphi_{P_{k+l,A}}, \lambda_W \circ \pi) \le \varepsilon T_s(r, \varphi, \omega_{\overline{A}}) + \beta \tag{8.21}$$

fo对所有 $r \in (s, 1)$，除去某个线性测度小于.....的例外集 δ.

我们设 $\sigma = \{1/2, \sigma_1, \sigma_2\}$。注意，由 (8.21) 可知，对所有 $\varphi \in \mathcal{G}'$，都有 $\varphi_S(\mathbb{D}) \not\subset W$。

步骤 4. 现在任取 $s \in (\sigma, 1)$。我们设

$$\delta = (1 - s)/5.$$

由命题 5.1 应用于 $\{\varphi_{[k]};\ \varphi \in \mathcal{G}\} \subset$ 全纯映射空间$(\mathbb{D}, A \times S)$，可得存在 $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$，使得对所有满足 $\varphi_S(\mathbb{D}) \not\subset W$ 的 $\varphi \in \mathcal{G}$，都有

$$T_s(r, \varphi, \omega_{\overline{A}}) \le c_1 T_s(r, \varphi_S, \omega_S) + c_2 m((s + r)/2, \varphi_S, \lambda_W) + c_3$$

对于某个线性测度小于 δ 的例外集之外的所有 $r \in (s,1)$。将 $\varepsilon = 1/3c_2$ 代入 (8.21)，可得对于所有 $\varphi \in \mathcal{G}'$，有

$$m((s + r)/2, \varphi_S, \lambda_W) \le \frac{1}{3c_2} T_s(r, \varphi, \omega_{\overline{A}}) + \beta$$

对于某个线性测度小于 2δ 的例外集之外的所有 $r \in (s, 1)$。因此，对于所有 $\varphi \in \mathcal{G}'$，可得

$$T_s(r, \varphi, \omega_{\overline{A}}) \leq \frac{1}{3} T_s(r, \varphi, \omega_{\overline{A}}) + c_1 T_s(r, \varphi_S, \omega_S) + c_2\beta_2 + c_3$$

对所有不在某个线性测度小于 3δ 的例外集内的 $r \in (s, 1)$。由 (8.20)，令 $\varepsilon = 1/3c_1$，可得对所有 $\varphi \in \mathcal{G}'$，有

$$T_s(r, \varphi, \omega_{\overline{A}}) \leq \frac{2}{3} T_s(r, \varphi, \omega_{\overline{A}}) + c_1\mu + c_2\beta_2 + c_3$$

对所有不在某个线性测度小于 4δ 的例外集内的 $r \in (s,1)$。因此，对所有 $\varphi \in \mathcal{G}'$，有

$$T_s(r, \varphi, \omega_{\overline{A}}) \leq c$$

对所有不在某个线性测度小于 4δ 的例外集内的 $r \in (s, 1)$，其中 $c = 3(c_1\mu + c_2\beta_2 + c_3)$。我们可以对某个 $r \in (s + \delta, 1)$ 应用此估计。因此有

$$T_s(s + \delta, \varphi, \omega_{\overline{A}}) \leq c,$$

thus

$$\int_{\mathbb{D}(s)} \varphi^* \omega_{\overline{A}} \leq \frac{(s + \delta)c}{\delta}$$

对所有 $\varphi \in \mathcal{G}'$。因此，由引理 8.3，存在一个子列 $(\tau_{n_k} \circ f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，它收敛到全纯映射 $g\colon \mathbb{D} \to A$。

步骤 5。现在我们证明 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $p \circ g$，其中 $p\colon W \to V$。注意，$(p \circ \tau_{n_k} \circ f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $p \circ g$。由 (8.18)，$(p \circ f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 也在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $p \circ g$。我们应用引理 8.2。于是，由 (8.17)，$(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到$p \circ g$。

步骤 6. 到目前为止，我们假设 $\overline{A}$ 是射影的。现在令 $\overline{A}$ 为任意光滑等变紧化。我们可以取一个等变修改 $q\colon A \to \overline{A}$，使得 A 光滑且射影（参见引理 A.8）。然后，我们可以取一个子列 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，它在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g\colon \mathbb{D} \to A$。接着，$(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $q \circ g : \mathbb{D} \to \overline{A}$。证明至此完成。□

推论 8.4. 设 $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ 是 Hol($\mathbb{D}, A$) 中满足假设 3.19 的非恒定全纯映射的无限指标族。假设存在 $k \geq 0$，使得 $Z \subset P_{k+1,\ A} \subset (P_{k,\ A})_{1,\ A}$ 水平可积，其中 Z 由 (3.7) 定义。设 A 为光滑等变紧化。则存在 $\mathcal{F}$ 的无限子族 $\mathcal{G}$，使得 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g\colon \mathbb{D} \to A$。

证明。令 $\mathcal{F}_o = \{f_i;\quad i \in I\} \subset$ 全纯映射空间($\mathbb{D}, A$)。不妨设映射 $I \to \mathcal{F}_o$ 是有限对一映射。事实上，否则我们可以取一个无限子集 $J \subset I$，使得对于所有 $i \in J$，f_i 都相同，于是断言显然成立。因此我们假设映射 $I \to \mathcal{F}_o$ 是有限对一映射。特别地，$\mathcal{F}_o$ 是一个无限集。注意到 $\Pi(\mathcal{F}_o) = \Pi(\mathcal{F})$。通过取 $I \to \mathcal{F}_o$的一个截面，我们取一个无限子集 $I_o \subset I$，使得 $I_o \to \mathcal{F}_o$ 是双射。根据注记 3.13（3），我们有

$$\mathrm{LIM}((\mathcal{F}_o)_{P_{k,A}}; \{E_{k,A,A/B}\}_{B\in\Pi(\mathcal{F}_o)}) = \mathrm{LIM}(\mathcal{F}_{P_{k,A}}; \{E_{k,A,A/B}\}_{B\in\Pi(\mathcal{F})}).$$

因此，命题 3.20 的假设对 $\mathcal{F}_o$ 成立。由此，根据 $\mathcal{F}_o$ 的命题 3.20，我们可以取一个无限子集 $\mathcal{G}_o \subset \mathcal{F}_o$，使得 $\mathcal{G}_o$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛。然后，我们可以取一个无限子集 $J \subset I_o$，使得 $J \to \mathcal{G}_o$ 是双射。我们设定 $\mathcal{G} = (f_i)_{i\in J}$，从而完成证明。□

9. Families of closed subschemes and regular jets

我们设 Λ_k =Spec $\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{k+1})$。于是我们有一个闭浸入序列

$$\Lambda_0 \hookrightarrow \Lambda_1 \hookrightarrow \Lambda_2 \hookrightarrow \cdots . \tag{9.1}$$

设 S 为光滑簇。给定概形的态射 $\eta : \Lambda_k \to S$，我们得到导数η'： η的 $\Lambda_{k-1} \to TS$。此映射满足以下性质：设 φ 为 S上的局部全纯函数。设 $d : \mathcal{O}_S \to \Omega^1_S$ 为导子。则有

$$(\eta')^* d\varphi = \frac{d}{d\varepsilon}\eta^*\varphi, \tag{9.2}$$

其中 $\frac{d}{d\varepsilon}$： $\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{k+1}) \to \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^k)$ 为导子。正则的 k-jet 是满足 $\eta'(0) \notin 0_{TS}$ 的态射 $\eta : \Lambda_k \to S$，其中 $0_{TS} \subset TS$ 为零截面。因此，通过 η' 和 $TS - 0_{TS} \to S_1$ 的复合态射，我们得到 $\eta_{[1]}$: $\Lambda_{k-1} \to S_1$。归纳地，我们得到 $\eta_{[l]}$： $\Lambda_{k-l} \to S_l$。特别地，我们得到一个点 $\eta_{[k]}(0) \in S_k$。

设 $Z \subset S$ 是一个闭子概形。我们如下定义闭子概形 $\mathcal{D}Z \subset S_1$。设 $W \subset S$ 是一个仿射开集，在该开集上 $Z \cap W$ 由 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \subset \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ 定义。然后我们通过 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, d\varphi_1, \ldots, d\varphi_n$ 定义这个闭子概形 $\widetilde{Z \cap W} \subset TW$。那么，$Z \cap W$ 的这一定义不依赖于生成元 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 的选择，因此在 W 上定义良好。一般而言，我们用仿射开集 $\{W_i\}$ 覆盖 S，并构造闭子概形 $\widetilde{Z \cap W_i} \subset TW_i$。然后将这些子概形粘合起来，定义子概形 $Z \subset TS$。根据构造， Z 在 $TS \to S$ 的纤维上对 $\mathbb{C}^*$-作用保持不变。因此我们得到一个闭子概形 $\mathcal{D}Z = Z/\mathbb{C}^* \subset S_1$。

9.1. 闭子概形族。设 V 和 S 是光滑簇，且 $X \subset V \times S$是一个闭子概形。对于 $k \geq 0$，我们归纳地定义一个闭子概形 $\mathcal{P}_k X \subset V \times S_k$ 如下。我们有 $V \times TS = T_{(V\times S)/V} \subset T(V \times S)$。因此得到 $V \times S_1 \subset (V \times S)_1$。我们将 $\mathcal{P}_1 X \subset V \times S_1$ 定义为把 $\mathcal{D}X \subset (V \times S)_1$ 限制到 $V \times S_1 \subset (V \times S)_1$上。现在假设我们得到一个闭子概形 $\mathcal{P}_k X \subset V \times S_k$。我们有 $S_{k+1} \subset (S_k)_1$。因此，我们将$\mathcal{P}_{k+1} X \subset V \times S_{k+1}$ 定义为把

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{P}_k X) \subset V \times (S_k)_1 \tag{9.3}$$

限制到 $V \times S_{k+1} \subset V \times (S_k)_1$上。

引理 **9.1.** 设 V 和 S 是光滑簇， $X \subset V \times S$ 是一个闭子概形。设 ξ： $\Lambda_k \to S$ 是一个正则 k-阶喷流。设 $s_0 = \xi(0) \in S$ 且 $s_k = \xi_{[k]}(0) \in S_k$。假设自然映射 $(\mathcal{P}_k X)_{s_k} \to X_{s_0}$ 是概形间的同构。那么，$X_{\Lambda_k} = X_{s_0} \times \Lambda_k$ 作为 $V \times \Lambda_k$ 的闭子概形。这里， X_{Λ_k} 是 $X \to S$ 在 ξ 下的拉回。

在证明这个引理之前，我们先作一个初步观察。设 $W \subset V$ 是一个仿射开子集，并令 $Z = X \cap (W \times S)$。对于 $\nu = 0, \ldots, k$， 令 $I_\nu \subset \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Lambda_{k-\nu}]$ 为 $(\mathcal{P}_\nu Z)_{\Lambda_{k-\nu}}$ 的定义理，其中 $(\mathcal{P}_\nu Z)_{\Lambda_{k-\nu}}$ 是 $\mathcal{P}_\nu Z \subset W \times S_\nu$ 在 $\xi_{[\nu]}$: $\Lambda_{k-\nu} \to S_\nu$ 下的拉回。我们将 $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}$: $\mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Lambda_{k-\nu}] \to \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Lambda_{k-\nu-1}]$ 记为 $\mathrm{id}_{\mathbb{C}[W]} \otimes \frac{d}{d\varepsilon}$。

断言。若 $h \in I_\nu$， 则 $\frac{\partial}{\partial\varepsilon} h \in I_{\nu+1}$。

我们证明这一断言。设 $U \subset S_\nu$ 是一个仿射开集，使得 $\xi_{[\nu]}(0) \in U$。假设 $\mathcal{P}_\nu Z$ 在 $W \times U$ 上由 $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(W \times U, \mathcal{O}_{W\times U})$ 定义。那么 $(\mathcal{P}_\nu Z)_{\Lambda_{k-\nu}} \subset W \times \Lambda_{k-\nu}$ 由 $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Lambda_{k-\nu}]$ 定义，其中 $g_1, \ldots, g_n$ 是 $f_1, \ldots, f_n$ 在自然映射 $\mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[U] \to \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Lambda_{k-\nu}]$ 下的像。注意，(9.2) 给出了如下的 $\mathbb{C}[W]$-模交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[U] & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{C}[W]} \otimes \xi^*_{[\nu]}} & \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Lambda_{k-\nu}] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathbb{C}[W]} \otimes d_U} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \frac{\partial}{\partial\varepsilon}} \\ \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[TU] & \xrightarrow[\mathrm{id}_{\mathbb{C}[W]} \otimes (\xi'_{[\nu]})^*]{} & \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Lambda_{k-\nu-1}] \end{array}$$

因此，$(\mathcal{P}_{\nu+1}Z)^{\Lambda_{k-\nu-1}}$ 由以下内容定义

$$\bar{g}_1,\dots,\bar{g}_n,\frac{\partial}{\partial\varepsilon}g_1,\dots,\frac{\partial}{\partial\varepsilon}g_n. \tag{9.4}$$

这里，$\bar{g}_1,\dots,\bar{g}_k$是 $\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\Lambda_{k-\nu}]\to\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\Lambda_{k-\nu-1}]$下 $g_1,\dots,g_k$的像，其中 $\mathbb{C}[\Lambda_{k-\nu-1}]=\mathbb{C}[\Lambda_{k-\nu}]/(\varepsilon^{k-\nu})$（参见（9.1））。

现在令 $h\in I_\nu$。那么存在 $b_1,\dots,b_n\in\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\Lambda_{k-\nu}]$ 使得 $h=b_1g_1+\cdots+b_ng_n$。于是我们有 $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}h=\bar{g}_1\frac{\partial}{\partial\varepsilon}b_1+\bar{b}_1\frac{\partial}{\partial\varepsilon}g_1+\cdots+\bar{g}_n\frac{\partial}{\partial\varepsilon}b_n+\bar{b}_n\frac{\partial}{\partial\varepsilon}g_n$。因此 $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}h\in I_{\nu+1}$。这就证明了我们的断言。

引理 9.1 的证明。我们可以假设 S 是仿射的。令 $X\subset V\times S$ 在仿射开集 $W\subset V$ 上局部由 $f_1,\dots,f_n$ 定义。则 $X_{\Lambda_k}\subset V\times\Lambda_k$ 局部由 $g_1,\dots,g_n\in\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\Lambda_k]$ 定义，其中 $g_1,\dots,g_n$ 是 $f_1,\dots,f_n$ 在自然映射 $\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[S]\to\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\Lambda_k]$ 下的像。令 $\mathfrak{X}\subset V\times\Lambda_k$ 为 Λ_k 上的常值族 $\mathfrak{X}=(X_{s_0})\times\Lambda_k$。则 $\mathfrak{X}$ 局部由 $g_1|_{\varepsilon=0},\dots,g_n|_{\varepsilon=0}$ 定义。因此只需证明

$$(g_1,\dots,g_n)=(g_1|_{\varepsilon=0},\dots,g_n|_{\varepsilon=0})$$

作为 $\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\Lambda_k]$ 的理想。

我们首先断言

$$\frac{\partial^\nu g_i}{\partial\varepsilon^\nu}|_{\varepsilon=0}\in(g_1|_{\varepsilon=0},\dots,g_n|_{\varepsilon=0}) \tag{9.5}$$

对于 $\nu=0,\dots,k$，其中 $(g_1|_{\varepsilon=0},\dots,g_n|_{\varepsilon=0})\subset\mathbb{C}[W]$。为证明这一点，我们令 $s_\nu=\xi_{[\nu]}(0)\in S_\nu$。于是有 $(\mathcal{P}_kX)_{s_k}\subset(\mathcal{P}_{k-1}X)_{s_{k-1}}\subset\cdots\subset(\mathcal{P}_1X)_{s_1}\subset X_{s_0}$。因此，由假设 $(\mathcal{P}_kX)_{s_k}=X_{s_0}$，我们有 $(\mathcal{P}_\nu X)_{s_\nu}=X_{s_0}$。由上述断言可得 $\frac{\partial^\nu g_i}{\partial\varepsilon^\nu}\in I_\nu$。因此，$\frac{\partial^\nu g_i}{\partial\varepsilon^\nu}|_{\varepsilon=0}\in\mathbb{C}[W]$ 包含于 $(\mathcal{P}_kX)_{s_k}\cap W$的定义理中，进而包含于 $X_{s_0}\cap W$的定义理中。注意，$X_{s_0}\cap W$ 由 $(g_i|_{\varepsilon=0})_{i=1,\dots,n}$定义在 W 上。这就证明了 (9.5)。

现在我们有

$$g_i=g_i|_{\varepsilon=0}+\varepsilon\frac{\partial g_i}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0}+\cdots+\frac{1}{k!}\varepsilon^k\frac{\partial^k g_i}{\partial\varepsilon^k}|_{\varepsilon=0}. \tag{9.6}$$

因此，由 (9.5) 得到 $(g_1,\dots,g_n)\subset(g_1|_{\varepsilon=0},\dots,g_n|_{\varepsilon=0})$。

接下来我们证明 $(g_1|_{\varepsilon=0},\dots,g_n|_{\varepsilon=0})\subset(g_1,\dots,g_n)$。为此，我们只证明 $g_1|_{\varepsilon=0}\in(g_1,\dots,g_n)$，其他指标的情形处理方式相同。令 $J\subset(g_1,\dots,g_n)$ 为形如以下形式的元素所组成的子集

$$A=g_1|_{\varepsilon=0}+\varepsilon A_1+\cdots+\varepsilon^kA_k,$$

其中 $A_1,\dots,A_k\in(g_1|_{\varepsilon=0},\dots,g_n|_{\varepsilon=0})\subset\mathbb{C}[W]$。由 (9.5) 和 (9.6)，我们有 $g_1\in J$。因此$J\neq\emptyset$。对于每个元素 $A\in J$，我们令

$$\mu_A=\min\{j;A_j\neq0\},$$

其中我们令 $\mu_A=k+1$ if $A_j=0$ for all $j=1,\dots,k$。令 $\mu=\max_{A\in J}\mu_A$。我们要证明的是 $\mu=k+1$。因此，假设 $\mu\leq k$。取 $A\in J$ 使得 $\mu_A=\mu$。于是

$$A=g_1|_{\varepsilon=0}+\varepsilon^\mu A_\mu+\cdots+\varepsilon^kA_k.$$

由 $A_\mu\in(g_1|_{\varepsilon=0},\dots,g_n|_{\varepsilon=0})$，存在 $b_1,\dots,b_n\in\mathbb{C}[W]$，使得

$$A_\mu=b_1g_1|_{\varepsilon=0}+\cdots+b_ng_n|_{\varepsilon=0}.$$

那么由 (9.5) 和 (9.6)，我们有

$$A'=A-\varepsilon^\mu b_1g_1-\cdots-\varepsilon^\mu b_ng_n\in J.$$

此外，我们有 $\mu_{A'}>\mu$。这就产生了矛盾。因此，我们有 $\mu=k+1$，从而 $g_1|_{\varepsilon=0}\in(g_1,\dots,g_n)$。这就完成了引理的证明。□

9.2. 正则喷射与 Demailly 喷射空间。设 S 是一个光滑代数簇。我们将按照 [45, 第 4 节2]的方式引入喷射空间 J_kS 。这个定义等价于 [35, 第 4.6 节1]中所述的通常定义。参见下文注释 9.2。

令 $J_0S = S$ 和 $J_1S = TS$。对于 $k \geq 1$，空间 J_kS 是一个带有嵌入的光滑代数簇

$$J_kS \overset{\iota_k}{\hookrightarrow} TJ_{k-1}S,$$

其中令 ι_1： $J_1S \to TS$ 为恒等映射。我们归纳地定义 J_kS 如下。因此，假设光滑代数簇 J_kS 和嵌入 ι_k： $J_kS \hookrightarrow TJ_{k-1}S$ 已给定。令ϖ_k： $J_kS \to J_{k-1}S$为 ι_k： $J_kS \hookrightarrow TJ_{k-1}S$与投影 $TJ_{k-1}S \to J_{k-1}S$的复合态射。则 ϖ_k： $J_kS \to J_{k-1}S$ 诱导出如下交换图

$$\begin{array}{ccc} TJ_kS & \xrightarrow{p_k} & J_kS \\ {\scriptstyle (\varpi_k)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varpi_k} \\ TJ_{k-1}S & \xrightarrow[p_{k-1}]{} & J_{k-1}S \end{array}$$

这诱导出态射

$$\mu_k : TJ_kS \to J_kS \times_{J_{k-1}S} TJ_{k-1}S.$$

ι_k： $J_kS \to TJ_{k-1}S$ 的图定义了闭浸入

$$\hat{\iota}_k : J_kS \hookrightarrow J_kS \times_{J_{k-1}S} TJ_{k-1}S.$$

则 ι_{k+1}： $J_{k+1}S \hookrightarrow TJ_kS$ 由 $\hat{}\iota_k$ 沿 μ_k的基变换定义。

$$\begin{array}{ccc} J_{k+1}S & \xrightarrow{\iota_{k+1}} & TJ_kS \\ {\scriptstyle (\mu_k)'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_k} \\ J_kS & \xrightarrow[\hat{\iota}_k]{} & J_kS \times_{J_{k-1}S} TJ_{k-1}S \end{array}$$

通过这次基变换，我们得到一个映射 $(\mu_k)'$： $J_{k+1}S \to J_kS$ 。令 ϖ_{k+1}： $J_{k+1}S \to J_kS$ 为 ι_{k+1}: $J_{k+1}S \hookrightarrow TJ_kS$ 与投影 p_k: $TJ_kS \to J_kS$ 的复合态射。接着注意到

$$(\mu_k)' = \varpi_{k+1}. \tag{9.7}$$

事实上，我们有 $(\mu_k)' = \mathrm{id}_{J_kS} \circ (\mu_k)' = r_1 \circ \hat{}\iota_k \circ (\mu_k)'$，其中 r_1: $J_kS \times_{J_{k-1}S} TJ_{k-1}S \to J_kS$ 是第一投影。另一方面，我们有 $r_1 \hat{\alpha_k} \circ (\mu_k)' = r_1 \circ \mu_k \circ \iota_{k+1} = p_k \circ \iota_{k+1}$。因此得到 (9.7)。根据 [45, Cor. 4.4], ，映射 $\varpi_{k+1} : J_{k+1}S \to J_kS$ 是光滑的。因此 $J_{k+1}S$ 是光滑的。

注释 9.2。假设一个仿射开集 $W \subset S$具有坐标函数 χ_1、 . . . 、 χ_n，使得 TW分解为 $TW = W \times \mathbb{C}^n$，且 $(d\chi_1$、 . . . 、 $d\chi_n)$ 定义第二投影，其中 n =维数为 S。那么根据 [45, 推论 4.6], ，我们有 $J_kW = W \times \mathbb{C}^{kn}$，且 $(d\chi_1$、 . . . 、 $d\chi_n$、 . . . 、 $d^k\chi_1$、 . . . 、 $d^k\chi_n)$ 定义第二投影。这表明，我们对 J_kS 的定义与 [35, 第 4.6 节1]中所述的通常定义一致。

空间 ι_{k+1}： $J_{k+1}S \hookrightarrow TJ_kS$ 的刻画如下:

引理 9.3. 映射 η: $W \to TJ_kS$从概形 W因子分解 ι_{k+1}: $J_{k+1}S \hookrightarrow TJ_kS$当且仅当 $\iota_k \circ p_k \circ \eta = (\varpi_k)_* \circ \eta$. 特别地，如果我们考虑情形 $W =$ 谱 $\mathbb{C}$，我们有

$$J_{k+1}S = \{x \in TJ_kS \ ; \ \iota_k \circ p_k(x) = (\varpi_k)_*(x)\}. \tag{9.8}$$

证明。为证明这一点，我们假设 η： $W \to TJ_kS$ 满足 $\iota_k \circ p_k \circ \eta = (\varpi_k)_* \circ \eta$。我们断言，

$$\mu_k \circ \eta = \hat{\iota}_k \circ p_k \circ \eta. \tag{9.9}$$

为证明这一点，我们注意到

$$r_1 \circ \mu_k \circ \eta = p_k \circ \eta = r_1 \circ \hat{\iota}_k \circ p_k \circ \eta. \tag{9.10}$$

我们还有

$$r_2 \circ \mu_k \circ \eta = (\varpi_k)_* \circ \eta, \tag{9.11}$$

其中 r_2: $J_kS \times_{J_{k-1}S} TJ_{k-1}S \to TJ_{k-1}S$是纤维积的第二投影:

$$\begin{array}{ccc} J_kS \times_{J_{k-1}S} TJ_{k-1}S & \xrightarrow{r_2} & TJ_{k-1}S \\ {\scriptstyle r_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{k-1}} \\ J_kS & \xrightarrow[\varpi_k]{} & J_{k-1}S \end{array}$$

由我们的假设 $\iota_k \circ p_k \circ \eta = (\varpi_k)_* \circ \eta$, 可得

$$(\varpi_k)_* \circ \eta = \iota_k \circ p_k \circ \eta = r_2 \circ \hat{\iota}_k \circ p_k \circ \eta. \tag{9.12}$$

因此, 由 (9.11) 和 (9.12), 可得 $r_2 \circ \mu_k \circ \eta = r_2 \hat{\alpha_k} \circ p_k \circ \eta$。将其与 (9.10) 结合, 利用纤维积的泛性质可得 (9.9)。因此, 由 (9.9), 纤维积的泛性质给出映射 $(\eta, p_k \circ \eta)$: $W \to J_{k+1}S$, 使得与ι_{k+1}: $J_{k+1}S \to TJ_kS$的复合等于 η。因此, η经由 ι_{k+1}: $J_{k+1}S \hookrightarrow TJ_kS$分解。

为证明逆命题, 我们断言

$$\iota_k \circ p_k \circ \iota_{k+1} = (\varpi_k)_* \circ \iota_{k+1}. \tag{9.13}$$

Inde由 (9.7) 可得 $(\mu_k)' = p_k \circ \iota_{k+1}$。因此我们得到以下等式。

$$\iota_k \circ p_k \circ \iota_{k+1} = r_2 \circ \hat{\iota}_k \circ p_k \circ \iota_{k+1} = r_2 \circ \hat{\iota}_k \circ (\mu_k)' = r_2 \circ \mu_k \circ \iota_{k+1} = (\varpi_k)_* \circ \iota_{k+1}.$$

因此, 如果 η: $W \to TJ_kS$可分解为 ι_{k+1}: $J_{k+1}S \hookrightarrow TJ_kS$, 则有 $\iota_k \circ p_k \circ \eta = (\varpi_k)_* \circ \eta$。 □

令 $l \geq k$。给定一个态射 $\eta : \Lambda_l \to S$, 我们得到 $j_k\eta$: $\Lambda_{l-k} \to J_kS$ 使得

$$\iota_k \circ j_k\eta = (j_{k-1}\eta)'. \tag{9.14}$$

事实上, 为了通过对 k进行归纳法来证明 $j_k\eta$ 的存在性, 我们假设 k的存在性。于是我们有

$$\iota_k \circ p_k \circ (j_k\eta)' = \iota_k \circ j_k\eta = (j_{k-1}\eta)' = (\varpi_k)_* \circ (j_k\eta)'.$$

因此, 根据引理 9.3, 映射 $(j_k\eta)'$: $\Lambda_{l-k-1} \to TJ_kS$可分解为 ι_{k+1}: $J_{k+1}S \hookrightarrow TJ_kS$。由此可得 $j_{k+1}\eta$: $\Lambda_{l-k-1} \to J_{k+1}S$, 使得 $\iota_{k+1} \circ j_{k+1}\eta = (j_k\eta)'$。

令 $J_k^{\mathrm{reg}}S \subset J_kS$ 为在映射 $J_kS \to TS$ 下 $TS - \{0_{TS}\}$ 的原像这一扎里斯基开集, 假设 $k \geq 1$。我们设 $J_0^{\mathrm{reg}}S = S$。注意, 映射 $J_{k+1}S \to J_kS$ 诱导出 $J_{k+1}^{\mathrm{reg}}S \to J_{\text{正则}_k}S$。

引理 9.4. 设 S 和 M 为光滑代数簇。设 $V \subset TM$ 为代数向量~子丛, 并设 $M = P(V)$。设 $k \geq 0$。设 φ: $J_k^{\mathrm{reg}}S \to M$ 为一个态射, 使得其诱导映射 φ_*: $TJ_k^{\mathrm{reg}}S \to TM$ 满足 $\varphi_*(\iota_{k+1}(J_{\text{正则}_{k+1}}S)) \subset V\backslash\{0_V\}$。设 Φ: $J_{\text{正则}_{k+1}}S \to M$ 为以下态射的复合:

$$J_{k+1}^{\mathrm{reg}}S \xrightarrow{\varphi_* \circ \iota_{k+1}} V\backslash\{0_V\} \xrightarrow{\tau} \tilde{M}.$$

~ ~ ~那么, 诱导映射 Φ_*: $TJ_{k+1}^{\mathrm{reg}}S \to TM$满足 $\Phi_*(\iota_{k+2}(J_{\mathrm{reg}_{k+2}}S)) \subset V\backslash\{0_V\}$, 其中 $V \subset TM$ 由 (2.1) 定义。

证明。我们首先证明下图是交换图:

$$\begin{array}{ccc} J_{k+1}^{\mathrm{reg}}S & \xrightarrow{\Phi} & \tilde{M} \\ {\scriptstyle \varpi_{k+1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ J_k^{\mathrm{reg}}S & \xrightarrow[\varphi]{} & M \end{array} \tag{9.15}$$

事实上, $\pi \circ \Phi$ 是.....的复合态射

$$J_{k+1}^{\mathrm{reg}}S \xrightarrow{\iota_{k+1}} TJ_k^{\mathrm{reg}}S \xrightarrow{\varphi_*} TM \xrightarrow{q} M.$$

根据导子的定义，我们有 $q\circ\varphi_*=\varphi\circ p_k$，即下图是交换图。

$$\begin{array}{ccc} TJ_k^{\mathrm{reg}}S & \xrightarrow{\varphi_*} & TM \\ {\scriptstyle p_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ J_k^{\mathrm{reg}}S & \xrightarrow[\varphi]{} & M \end{array}$$

因此我们得到

$$\pi\circ\Phi=q\circ\varphi_*\circ\iota_{k+1}=\varphi\circ p_k\circ\iota_{k+1}=\varphi\circ\varpi_{k+1}.$$

这表明 (9.15) 是交换的。

现在由 (9.15)，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} J_{k+2}^{\mathrm{reg}}S & \xrightarrow{\iota_{k+2}} & TJ_{k+1}^{\mathrm{reg}}S & \xrightarrow{\Phi_*} & T\tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{q}} & \tilde{M} \\ {\scriptstyle\varpi_{k+2}}\downarrow & & {\scriptstyle(\varpi_{k+1})_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ J_{k+1}^{\mathrm{reg}}S & \xrightarrow[\iota_{k+1}]{} & TJ_k^{\mathrm{reg}}S & \xrightarrow[\varphi_*]{} & TM & \xrightarrow[q]{} & M \end{array} \tag{9.16}$$

事实上，唯一非平凡的部分是关系 $(\varpi_{k+1})_*\circ\iota_{k+2}=\iota_{k+1}\circ\varpi_{k+2}$。为证明这一点，我们注意到 $(\varpi_{k+1})_*\circ\iota_{k+2}=\iota_{k+1}\circ p_{k+1}\circ\iota_{k+2}$，这由引理 9.3 得出（参见 (9.13)）。因此，由 $p_{k+1}\circ\iota_{k+2}=\varpi_{k+2}$，我们得到 $(\varpi_{k+1})_*\circ\iota_{k+2}=\iota_{k+1}\circ\varpi_{k+2}$。于是上述图 (9.16) 是交换的。

我们取 $y\in J_{k+2}^{\mathrm{reg}}S$。我们要证明

$$\Phi_*\circ\iota_{k+2}(y)\in\tilde{V}_{\tilde{q}\circ\Phi_*\circ\iota_{k+2}(y)}. \tag{9.17}$$

令 $\tau:\ V\backslash\{0_V\}\to M$ 为投影。根据 Φ 的定义，我们有

$$\Phi\circ p_{k+1}\circ\iota_{k+2}=\Phi\circ\varpi_{k+2}=\tau\circ\varphi_*\circ\iota_{k+1}\circ\varpi_{k+2}=\tau\circ\pi_*\circ\Phi_*\circ\iota_{k+2}, \tag{9.18}$$

其中，最后一个等式由 (9.16) 的交换性得出。由于 Φ_* 是 $\Phi:\ J_{k+1}^{\mathrm{reg}}S\to M$ 的导子，我们有 $\tilde{q}\circ\Phi_*=\Phi\circ p_{k+1}$。结合 (9.18)，得到

$$\tilde{q}\circ\Phi_*\circ\iota_{k+2}=\Phi\circ p_{k+1}\circ\iota_{k+2}=\tau\circ\pi_*\circ\Phi_*\circ\iota_{k+2}.$$

因此我们注意到，$\tilde{q}(\Phi_*\circ\iota_{k+2}(y))\in M$ 是 $\pi_*(\Phi_*\circ\iota_{k+2}(y))$ 在映射 $\tau:\ V\backslash\{0\}\to M$ 下的像。因此，根据 $V\subset TM$ 的定义（参见 (2.1)），可得 (9.17)。根据 φ 的假设，我们有 $\pi_*(\Phi_*\circ\iota_{k+2}(y))\notin 0_{TM}$。因此 $\Phi_*\circ\iota_{k+2}(y)\notin 0_{T\tilde{M}}$。因此 $\Phi_*\circ\iota_{k+2}(y)\in V\backslash\{0_V\}$。证明完毕。□

对于每个 $k\geq 0$，我们按以下方式归纳地定义一个态射 $\varphi_k:\ J_k^{\mathrm{reg}}S\to S_k$。令 $\varphi_0:\ S\to S$ 为恒等映射，其中 $S_0=S$ 和 $J_0^{\mathrm{reg}}S=S$。于是有 $(\varphi_0)_*(\iota_1(J_1^{\mathrm{reg}}S))\subset V_0\backslash\{0\}$，其中 $V_0=TS$。假设我们已构造出满足 $(\varphi_k)_*(\iota_{k+1}(J_{k+1}^{\mathrm{reg}}S))\subset V_k\backslash\{0\}$ 的 $\varphi_k:\ J_k^{\mathrm{reg}}S\to S_k$。那么，我们将 $\varphi_{k+1}:\ J_{k+1}^{\mathrm{reg}}S\to S_{k+1}$ 定义为以下态射的复合态射：

$$J_{k+1}^{\mathrm{reg}}S\xrightarrow{(\varphi_k)_*\circ\iota_{k+1}}V_k\backslash\{0\}\to S_{k+1}.$$

根据引理 9.4，我们有 $(\varphi_{k+1})_*(\iota_{k+2}(J_{k+2}^{\mathrm{reg}}S))\subset V_{k+1}\backslash\{0\}$。因此，我们已归纳地构造出 $\varphi_k:\ J_k^{\mathrm{reg}}S\to S_k$。根据构造，有

$$(\varphi_k)_*(\iota_{k+1}(J_{k+1}^{\mathrm{reg}}S))\subset V_k\backslash\{0\} \tag{9.19}$$

对所有 $k\geq 0$ 均成立。由（9.15），下图对所有 $k\geq 1$ 均交换：

$$\begin{array}{ccc} J_k^{\mathrm{reg}}S & \xrightarrow{\varphi_k} & S_k \\ {\scriptstyle\varpi_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_k} \\ J_{k-1}^{\mathrm{reg}}S & \xrightarrow[\varphi_{k-1}]{} & S_{k-1} \end{array}$$

因此，对每个 $s \in J_{k-1}^{\mathrm{reg}} S$，我们得到限制映射

$$\varphi_k|_{\varpi_k^{-1}(s)} : \varpi_k^{-1}(s) \to \pi_k^{-1}(\varphi_{k-1}(s)). \tag{9.20}$$

这里 $\varpi_k^{-1}(s) \simeq \mathbb{C}^{\dim S}$和 $\pi_k^{-1}(\varphi_{k-1}(s)) \simeq \mathbb{P}^{\dim S-1}$。我们设 $S_k^{\mathrm{reg}} = S_k \backslash S_k^{\mathrm{sing}}$（参见 (2.2)）。

引理 9.5. 设 $k \geq 1$。那么对每个 $s \in J_{k-1}^{\mathrm{reg}} S$，映射 (9.20) 都是光滑的，并且 $\varphi_k(\varpi_k^{-1}(s)) = \pi_k^{-1}(\varphi_{k-1}(s)) \cap S_k^{\mathrm{reg}}$。

证明。我们对 k 使用归纳法来证明。于是，假设引理对 k 成立，并证明引理对 $k+1$成立。我们取 $s \in J_k^{\mathrm{reg}} S$。首先注意到

$$(\varphi_k)_{*,s}(T_{J_k^{\mathrm{reg}} S/J_{k-1}^{\mathrm{reg}} S,s}) = T_{S_k/S_{k-1},\varphi_k(s)}, \tag{9.21}$$

其中 $(\varphi_k)_{*,s} : T_s J_k^{\mathrm{reg}} S \to T_{\varphi_k(s)} S_k$ 是诱导映射。我们根据归纳假设如下证明这一点。我们有

$$T_{J_k^{\mathrm{reg}} S/J_{k-1}^{\mathrm{reg}} S,s} = T_s(\varpi_k^{-1}(\varpi_k(s))) \xrightarrow{(\varphi_k)_{*,s}} T_{\varphi_k(s)}(\pi_k^{-1}(\varphi_{k-1}(\varpi_k(s)))) = T_{S_k/S_{k-1},\varphi_k(s)},$$

这里我们注意到，在第一个和最后一个等式中， ϖ_k 和 π_k 是光滑的。根据归纳假设，(9.20) 对 k是光滑的。因此我们得到 (9.21)。

现在我们考虑以下交换图，其中 $(\varpi_k)_* \circ \iota_{k+1} = \iota_k \circ \varpi_{k+1}$ 由（9.13）推出（参见（9.16））。

$$\begin{array}{ccccccccc}
J_{k+1}^{\mathrm{reg}} S & \xrightarrow{\iota_{k+1}} & T J_k^{\mathrm{reg}} S & \xrightarrow{(\varphi_k)_*} & TS_k & \longleftarrow & V_k \backslash \{0_{V_k}\} & \longrightarrow & S_{k+1} \\
\downarrow{\scriptstyle \varpi_{k+1}} & & \downarrow{\scriptstyle (\varpi_k)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_k)_*} & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{k+1}} \\
J_k^{\mathrm{reg}} S & \xrightarrow[\iota_k]{} & T J_{k-1}^{\mathrm{reg}} S & \xrightarrow[(\varphi_{k-1})_*]{} & TS_{k-1} & \longleftarrow & V_{k-1} \backslash \{0_{V_{k-1}}\} & \longrightarrow & S_k
\end{array} \tag{9.22}$$

由（9.8），我们有

$$\iota_{k+1}(\varpi_{k+1}^{-1}(s)) = \{x \in T_s J_k^{\mathrm{reg}} S \,;\, (\varpi_k)_*(x) = \iota_k(s)\}, \tag{9.23}$$

其中 $\iota_k(s) \in T_{\varpi_k(s)} J_{k-1}^{\mathrm{reg}} S$。我们关注来自（9.22）的以下两个线性映射：

$$\begin{array}{ccc}
T_s J_k^{\mathrm{reg}} S & \xrightarrow{(\varphi_k)_{*,s}} & T_{\varphi_k(s)} S_k \\
{\scriptstyle (\varpi_k)_{*,s}}\downarrow & & \\
T_{\varpi_k(s)} J_{k-1}^{\mathrm{reg}} S & &
\end{array}$$

由（9.23），我们有 $(\varpi_k)_{*,s}^{-1}(\iota_k(s)) = \iota_{k+1}(\varpi_{k+1}^{-1}(s))$。因此由 $(\varpi_k)_{*,s}^{-1}(0) = T_{J_k^{\mathrm{reg}} S/J_{k-1}^{\mathrm{reg}} S,\, s}$，我们注意到 $\iota_{k+1}(\varpi_{k+1}^{-1}(s))$ 是线性空间$T_s J_k^{\mathrm{reg}} S$中的线性子空间 $T_{J_k^{\mathrm{reg}} S/J_{k-1}^{\mathrm{reg}} S,\, s}$ 的一个平移。因此由（9.21），我们观察到 $(\varphi_k)_{*,\,s}(\iota_{k+1}(\varpi_{k+1}^{-1}(s)))$ 是 $T_{S_k/S_{k-1},\,\varphi_k(s)}$ 的一个平移。由（9.19），我们有

$$(\varphi_k)_{*,s}(\iota_{k+1}(\varpi_{k+1}^{-1}(s))) \subset V_{k,\varphi_k(s)} \backslash \{0\}. \tag{9.24}$$

另一方面，我们有 $T_{S_k/S_{k-1},\varphi_k(s)} \subset V_{k,\varphi_k(s)}$（参见（2.4））以及 $PV_{k,\varphi_k(s)} = \pi_{k+1}^{-1}(\varphi_k(s))$。根据 $\varpi_k(s) \in J_{k-1}^{\mathrm{reg}} S$，归纳假设推出 $\varphi_k(s) \in S_k^{\mathrm{reg}}$。因此，超平面$PT_{S_k/S_{k-1},\varphi_k(s)} \subset PV_{k,\varphi_k(s)}$ 等于 $\pi_{k+1}^{-1}(\varphi_k(s)) \cap S_{k+1}^{\mathrm{sing}}$（参见（2.5））。由于 $(\varphi_k)_{*,s}(\iota_{k+1}(\varpi_{k+1}^{-1}(s)))$ 是 $V_{k,\varphi_k(s)}$ 线性空间中 $T_{S_k/S_{k-1},\varphi_k(s)}$ 的平移，由（9.24）可得

$$(\varphi_k)_{*,s}(\iota_{k+1}(\varpi_{k+1}^{-1}(s))) \to \pi_{k+1}^{-1}(\varphi_k(s)) \cap S_{k+1}^{\mathrm{reg}}$$

在射影化的限制下是一个同构 $V_{k,\,\varphi_k(s)} \backslash \{0\} \to PV_{k,\,\varphi_k(s)}$。现在我们来看这两个态射

$$\iota_{k+1}(\varpi_{k+1}^{-1}(s)) \xrightarrow{(\varphi_k)_{*,s}} (\varphi_k)_{*,s}(\iota_{k+1}(\varpi_{k+1}^{-1}(s))) \to \pi_{k+1}^{-1}(\varphi_k(s)) \cap S_{k+1}^{\mathrm{reg}},$$

其中第一个映射是线性映射 $T_{J_kS/J_{k-1}S,\ s} \to T_{S_k/S_{k-1},\ \varphi_k(s)}$ 的平移，根据 (9.21)，它是满射。因此 $\varpi_{k+1}^{-1}(s) \to \pi_{k+1}^{-1}(\varphi_k(s)) \cap S_{k+1}^{\mathrm{reg}}$ 是光滑的，并且 $\varphi_{k+1}(\varpi_{k+1}^{-1}(s)) = \pi_{k+1}^{-1}(\varphi_k(s)) \cap S_{k+1}^{\mathrm{reg}}$。至此完成归纳步骤。□

引理 9.6. 对每个 $k \geq 1$，我们有 $\varphi_k(J_k^{\mathrm{reg}}S) = S_k^{\mathrm{reg}}$。

证明。通过对 k 作归纳法证明。$k=1$ 的情形是显然的。因此我们假设 $k-1$ 的情形，并证明 k 的情形。令 $x \in S_k^{\mathrm{reg}}$。那么 $\pi_k(x) \in S_{k-1}^{\mathrm{reg}}$。因此，根据归纳假设，存在 $s \in J_{k-1}^{\mathrm{reg}}S$，使得 $\varphi_{k-1}(s) = \pi_k(x)$。接着由引理 9.5，存在 $s' \in \varpi_k^{-1}(s)$，使得 $\varphi_k(s') = x$。□

引理 9.7. 设 $\eta\colon \Lambda_l \to S$ 是一个正则 l-jet。则我们有 $\varphi_k \circ j_k\eta = \eta_{[k]}$，它们是 $\mathrm{Hom}(\Lambda_{l-k}, S_k)$ 中的元素。

证明。通过对 k 作归纳法证明。$k=0$ 的情形是显然的。因此我们假设 $k-1$ 的情形，并证明 k 的情形。根据归纳假设，我们有 $(\varphi_{k-1})_* \circ (j_{k-1}\eta)' = (\eta_{[k-1]})'$。由 (9.14)，我们有 $(\varphi_{k-1})_* \circ (j_{k-1}\eta)' = (\varphi_{k-1})_* \circ \iota_k \circ j_k\eta$。于是得到 $(\varphi_{k-1})_* \circ \iota_k \circ j_k\eta = (\eta_{[k-1]})'$。我们将这些映射与 $V_{k-1}\backslash\{0\} \to S_k$ 复合。接着根据 φ_k 和 $\eta_{[k]}$ 的定义，我们有$\varphi_k \circ j_k\eta = \eta_{[k]}$。这就完成了归纳步骤。□

引理 9.8. 设 $w \in J_k^{\mathrm{reg}}S$。则存在一个正则的 k-jet $\eta\colon \Lambda_k \to S$ 使得 $j_k\eta(0) = w$。

证明。我们首先考虑 $S = \mathbb{A}^1$ 的情形。设 x 是 $\mathbb{A}^1$ 的坐标。则 $J_k\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^{k+1}$，其中 x、dx、……、d^kx 是 $J_k\mathbb{A}^1$ 的坐标函数。设 $w = (w_0, w_1, \ldots\ldots, w_k)$。我们定义 $\eta\colon \Lambda_k \to \mathbb{A}^1$，如下：

$$x = w_0 + w_1\varepsilon + \frac{w_2}{2!}\varepsilon^2 + \cdots + \frac{w_k}{k!}\varepsilon^k.$$

于是有 $j_k\eta(0) = w$。由 $w \in J_k^{\mathrm{reg}}S$，可得 $w_1 \neq 0$。因此 η 是正则的。当 $S = \mathbb{A}^1$ 时，这就证明了我们的引理。

接下来我们考虑 $S = \mathbb{A}^n$ 的情形。在这种情况下，我们有自然分裂 $J_k\mathbb{A}^n = (J_k\mathbb{A}^1)^n$。设 $p_i\colon J_k\mathbb{A}^n \to J_k\mathbb{A}^1$ 为第 i 个投影。我们取 $\eta_i\colon \Lambda_k \to \mathbb{A}^1$，使得 $j_k\eta_i(0) = p_i(w)$。令 $\eta = (\eta_1, \ldots\ldots, \eta_k)$。于是有 $j_k\eta(0) = w$。由 $w \in J_k^{\mathrm{reg}}\mathbb{A}^n$，存在 i 使得 $p_i(w) \in J_k^{\mathrm{reg}}\mathbb{A}^1$。则 η_i 是正则的。因此 η 是正则的。当 $S = \mathbb{A}^n$ 时，这就证明了我们的引理。

一般而言，我们可以假设 S 是仿射的，并具有注释 9.2 中描述的局部坐标函数 $\chi_1, \ldots, \chi_n$。则 $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)\colon S \to \mathbb{A}^n$ 是 ´ 的 étale 态射。这诱导出 $\chi_*\colon J_kS \to J_k\mathbb{A}^n$，使得 $d^jx_i \circ \chi_* = d^j\chi_i$。我们有 $\chi_*(w) \in J_k^{\mathrm{reg}}\mathbb{A}^n$。根据前一步，存在一个正则的 k-jet $\xi\colon \Lambda_k \to \mathbb{A}^n$，使得 $j_k\xi(0) = \chi_*(w)$。我们取 $\eta\colon \Lambda_k \to S$，使得 $\chi \circ \eta = \xi$，且 $\eta(0)$ 是 w 在 $J_kS \to S$ 下的像。于是根据 $\chi_* \circ j_k\eta = j_k\xi$，我们有 $j_k\eta(0) = w$。□

推论 9.9 。令 $w \in S_k^{\mathrm{reg}}$。那么存在一个正则 k-喷射 $\eta\colon \Lambda_k \to S$ 使得 $\eta_{[k]}(0) = w$.

证明。由引理 9.6，存在 $w' \in J_k^{\mathrm{reg}}S$ 使得 $\varphi_k(w') = w$。由引理 9.8，存在一个正则 k-喷射 $\eta\colon \Lambda_k \to S$ 使得 $j_k\eta(0) = w'$。由引理 9.7，我们有 $\eta_{[k]}(0) = w$。推论的证明至此完成。另见 [12, 定理 6.8]。□

9.3. 关于正则喷射的一个引理。

引理 9.10. 设 S 是一个光滑簇。设 $Z \subset S$ 是一个闭子概形。那么存在一个正整数 k，具有如下性质：设 $\eta\colon \Lambda_k \to S$ 是一个正则 k-喷射，且一阶导数非零 $\eta'(0) = v \in T_{\eta(0)}S$，其中 $v \neq 0$。假设 η 经由 $Z \subset S$分解。那么存在一个不可约分支 $Z' \subset Z_{\mathrm{red}}$，使得 $[v] \in \mathcal{D}Z' \subset S_1$。

证明。我们可以假设 S 是仿射的。我们首先证明一个较弱的陈述 $[v] \in \mathcal{D}(Z_{\mathrm{red}})$。令$Z_{\mathrm{red}} \subset S$ 由 $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ 定义。我们考虑映射 $\Phi\colon S \to \mathbb{A}^l$，其由 $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ 定义。我们有 $\Phi^{-1}(0) = Z_{\mathrm{red}}$。存在 k 使得 $0_k = \text{谱}(\mathcal{O}_{0,\mathbb{A}^l}/\mathfrak{m}^k) \subset \mathbb{A}^l$ 满足 $Z \subset \Phi^*0_k$。注意，$\varphi_1, \ldots, \varphi_l, d\varphi_1, \ldots, d\varphi_l$ 定义了 $\mathcal{D}(Z_{\mathrm{red}}) \subset S_1$。令 $\eta\colon \Lambda_k \to S$为一个正则 k-喷流，其一阶导数非零 $\eta'(0) = v \in T_{\eta(0)}S$，其中 $v \neq 0$，使得 η 可分解 $Z \subset S$。为证明 $[v] \in \mathcal{D}(Z_{\mathrm{red}})$，我们反设 $[v] \notin \mathcal{D}(Z_{\mathrm{red}})$。那么 $\Phi \circ \eta\colon \Lambda_k \to \mathbb{A}^l$ 是

正则。由于 $\Phi\circ\eta$ 分解为 $0_k\subset\mathbb{A}^l$，我们有 $((\Phi\circ\eta)^*x_1)^k=0$，……，$((\Phi\circ\eta)^*x_l)^k=0$，其中 $(\Phi\circ\eta)^*x_1$，……，$(\Phi\circ\eta)^*x_l\in\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{k+1})$。由于 $\Phi\circ\eta$ 是正则的，我们可以取 $i=1$，……，l 使得 $(\Phi\circ\eta)^*x_i=a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+\cdots+a_k\varepsilon^k$，其中 $a_1\neq0$。于是 $((\Phi\circ\eta)^*x_i)^k=a_1^k\varepsilon^k\neq0$。这是矛盾。因此 $[v]\in\mathcal{D}(Z_{\mathrm{red}})$。

现在，令 $Z_1,\ldots,Z_l$ 为 S 的不可约闭子概形，使得 $\operatorname{supp}Z_1,\ldots,\operatorname{supp}Z_l$ 是 $\operatorname{supp}Z$ 和 $Z\subset Z_1+\cdots+Z_l$ 的不可约分支。令 $k_1,\ldots,k_l$ 为上一步为 $Z_1,\ldots,Z_l$ 得到的正整数。设 $k=k_1+\cdots+k_l$。令 $\eta\colon\Lambda\to S$ 为一个正则 k-jet，且一阶导数 $\eta'(0)=v\in T_{\eta(0)}S$ 非零，其中 $v\neq0$，并且 η 经由 $Z\subset S$ 分解，因此 $Z_1+\cdots+Z_l$。令 $\eta_i\colon\Lambda_{k_i}\to S$，其中 $\Lambda_{k_i}=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{k_i+1})$，由 η 诱导得到。于是存在 i 使得 η_i 经由 Z_i 分解。事实上，为了说明这一点，我们考虑闭子概形 $\eta^*Z_i\subset\Lambda_k$。我们可以将 η^*Z_i 的定义理写成 $(\varepsilon^{m_i})\subset\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{k+1})$。由 $Z\subset Z_1+\cdots+Z_l$，可得 $\eta^*Z_1+\cdots+\eta^*Z_l=\Lambda_k$。$\eta^*Z_1+\cdots+\eta^*Z_l$ 的定义理为 $(\varepsilon^{m_1+\cdots+m_l})\subset\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{k+1})$。因此 $m_1+\cdots+m_l\geq k+1$。我们可以取 i 使得 $m_i\geq k_i+1$。因此 $\eta_i\colon\Lambda_{k_i}\to S$ 经由 Z_i 分解。接着由上一步可得 $[v]\in\mathcal{D}((Z_i)_{\mathrm{red}})$。注意，$(Z_i)_{\mathrm{red}}$ 是 Z_{red} 的一个不可约分支。□

10. Sufficient condition for horizontal integrability

本截面的主要结果是引理10.1。该引理给出了使 $Z\subset S_{1,A/B}$ 水平可积的一个充分条件。该引理用于命题 11.3 的证明中。

令 $\overline{A}$ 为半阿贝尔簇 A 的等变紧化。令 S 为光滑簇。令 $X\subset\overline{A}\times S$ 为闭子概形。令 $\mathcal{X}\subset\overline{A}\times A\times S$ 为 X 在作用 $m\colon\overline{A}\times A\times S\to\overline{A}\times S$ 下的拉回，该作用由 $(x,a,s)\mapsto(x+a,s)$ 定义，使得 $\mathcal{X}_{(a,s)}=X_s-a$。假设 $X\subset\overline{A}\times S$ 是 B-不变的。那么由引理 A.19 可知，存在闭子概形$\mathcal{X}_B\subset\overline{A}\times(A/B)\times S$，使得 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{X}_B$ 在第二因子上的商 $\overline{A}\times A\times S\to\overline{A}\times(A/B)\times S$ 下的拉回。我们得到闭子概形 $\mathcal{P}_k\mathcal{X}_B\subset\overline{A}\times((A/B)\times S)_k$。由同构 (2.12)，我们有

$$S_{k,A/B}=\{0_{A/B}\}\times S_{k,A/B}\subset(A/B)\times S_{k,A/B}=((A/B)\times S)_k.$$

利用这个浸入 $S_{k,\,A/B}\subset((A/B)\times S)_k$，我们定义闭子概形 $X_{B,\,k}\subset\overline{A}\times S_{k,\,A/B}$如下：

$$X_{B,k}=(\mathcal{P}_k\mathcal{X}_B)|_{\overline{A}\times S_{k,A/B}}. \tag{10.1}$$

设 $p_{k,B}\colon\overline{A}\times S_{k,A/B}\to S_{k,A/B}$ 为第二投影。设 $p_{k,B}|_{X_{B,k}}\colon X_{B,k}\to S_{k,A/B}$ 为闭浸入 $X_{B,\,k}\hookrightarrow\overline{A}\times S_{k,A/B}$ 与 $p_{k,B}$ 的复合态射。给定 $y\in S_{k,A/B}$，我们将 $(X_{B,k})_y\subset\overline{A}$ 记为 $p_{k,B}|_{X_{B,k}}\colon X_{B,k}\to S_{k,A/B}$ 在 $y\in S_{k,B}$ 上的概形理论纤维。对于 $k\geq l$，我们有一个自然态射 $\mathcal{P}_k\mathcal{X}_B\to\mathcal{P}_l\mathcal{X}_B$。这给出了如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} X_{B,k} & \longrightarrow & X_{B,l} \\ {\scriptstyle p_{k,B}|_{X_{B,k}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{l,B}|_{X_{B,l}}} \\ S_{k,A/B} & \longrightarrow & S_{l,A/B} \end{array}$$

对于 $y\in S_{k,\,A/B}$，令 $y'\in S_{l,\,A/B}$ 为 y 在映射 $S_{k,\,A/B}\to S_{l,\,A/B}$ 下的像。于是，我们得到闭子概形 $\overline{A}$ 的映射 $(X_{B,\,k})_y\to(X_{B,\,l})_{y'}$。

令 $V\subset\overline{A}$ 是一个闭子概形。我们将 $\operatorname{Stab}(V)\subset A$ 定义为：$a\in\operatorname{Stab}(V)$ 当且仅当$a+V=V$作为 $\overline{A}$的闭子概形。令 $\operatorname{Stab}^0(V)$为包含 A的单位元的$\operatorname{Stab}(V)$ 的连通分支。则$\operatorname{Stab}^0(V)\subset A$ 是一个半阿贝尔子簇。

令 $k\geq2$。我们回顾 $S_k^{\mathrm{sing}}{}_{,A}\subset S_{k,A}$ 由（2.15）得到。设 $S_k^{\mathrm{reg}}{}_{,A}=S_{k,A}\backslash S_{k\,A}^{\mathrm{sing}}{}_{,}$。于是有 $(A\times S)_k^{\mathrm{reg}}=A\times S_{k\,A}^{\mathrm{reg}}{}_{,}$（参见（2.16））。本截面的目的是证明以下引理。

引理 10.1. 设 $\overline{A}$ 是 A的等变紧化，其中 $\overline{A}$ 是射影的。设$B\subsetneq A$ 是一个真半阿贝尔子簇。设 $Z\subset S_{1,\,A/B}$ 是一个不可约扎里斯基闭集。设 $X\subset\overline{A}\times S$ 是一个 B-不变闭子概形，使得 $Z\subset p_{1,\,B}(X_{B,\,1})$，其中

$p_{1,\ B}\colon \overline{A}\times S_{1,\ A/B}\to S_{1,\ A/B}$ 是第二投影。假设对每个整数 $k\geq 2$，都存在一个非空扎里斯基开子集 $O_k\subset Z$，使得对每个 $y\in O_k$，以下结论成立：

(1) $\mathrm{Stab}^0((X_B,\ 1)_y)=B$。(2) 自然映射 $(X_B,\ 1)_y\to X_{\tau(y)}$ 作为概形是一个同构，其中 $\tau\colon S_{1,\ A/B}\to S$ 是诱导映射。(3) 存在 $y_k\in S_k^{\mathrm{reg}}$，$_{A/B}$，使得 y_k 在 $S_{k,\ A/B}\to S_{1,\ A/B}$ 下的像为 y，且映射 $(X_B,\ _k)_{y_k}\to(X_B,\ 1)_y$ 作为概形是一个同构。

那么 $Z\subset S_{1,\ A/B}$ 是水平可积的。

根据定义 3.16，引理 10.1 的结论是存在一个浸入 $U\hookrightarrow(A/B)\times S$，具有以下性质：

- $q\colon U\to S$ 是 étale 的。
- $p'(PTU)\cap Z\subset Z$ 在 Z 中扎里斯基稠密，其中 $p'\colon(A/B)\times S_{1,\ A/B}\to S_{1,\ A/B}$ 是第二投影。

在证明引理 10.1 之前，我们先介绍一些代数几何引理。

引理 10.2. 设 Σ 和 S 是代数簇，且 $\dim\Sigma=\dim S$。设 $p\colon\Sigma\to S$ 是非分歧的。假设 S 光滑。那么 $p\colon\Sigma\to S$ 光滑，因此 ´ 是 étale 的。

证明. 令 $d=\dim\Sigma=\dim S$。我们先证明 Σ 光滑。我们有正合序列（参见 [18, II, 命题 8.11]）

$$p^*\Omega_S\to\Omega_\Sigma\to\Omega_{\Sigma/S}\to 0.$$

由于 $p\colon\Sigma\to S$ 是非分歧的，我们有 $\Omega_{\Sigma/S}=0$（参见 [31, 第 221] 页）。因此，态射 $p^*\Omega_S\to\Omega_\Sigma$ 是满射。由于 $p^*\Omega_S$ 是秩为 d 的局部自由层，对于所有 $x\in\Sigma$，都有 $\dim\Omega_\Sigma\otimes\mathbb{C}(x)\leq d$。对于一般的 $x\in\Sigma$，有 $\dim\Omega_\Sigma\otimes\mathbb{C}(x)=d$，因此由上半连续性可知，这对所有 $x\in\Sigma$ 都成立。由于 Σ 是既约的，这表明 Ω_Σ 是秩为 d 的局部自由层（参见 [18, II, 例 5.8]）。因此 Σ 光滑。

由于 $p^*\Omega_S\to\Omega_\Sigma$ 是满射，因此对所有 $x\in\Sigma$，诱导映射 $\Omega_S\otimes\mathbb{C}(p(x))\to\Omega_\Sigma\otimes\mathbb{C}(x)$ 都是满射。注意，$\Omega_S\otimes\mathbb{C}(p(x))\to\Omega_\Sigma\otimes\mathbb{C}(x)$ 是切空间上的诱导映射 $p_*\colon T_{\Sigma,x}\to T_{S,p(x)}$ 的对偶。因此，对所有 $x\in\Sigma$，$p_*\colon T_{\Sigma,x}\to T_{S,p(x)}$ 都是单射。由此，根据 $\dim\Sigma=\dim S$，我们得到，对所有 $x\in\Sigma$，$p_*\colon T_{\Sigma,x}\to T_{S,p(x)}$ 都是满射。根据 [18, III，命题 10.4]，$p\colon\Sigma\to S$ 是光滑的。另见 [31, 第 141] 页。□

接下来，我们应用前一个引理来证明以下引理。

引理 10.3. 设 S 和 W 为光滑代数簇。设 $p\colon W\to S$ 为光滑态射。设 $\Sigma_0\subset W$ 为不可约扎里斯基闭集，且 $x\in\Sigma_0$。假设 $p|_{\Sigma_0}\colon\Sigma_0\to S$ 在 $x\in\Sigma_0$ 处是非分歧的。那么存在 $\Sigma\subset W$，使得 $\Sigma_0\subset\Sigma$，且 $p|_\Sigma\colon\Sigma\to S$ 在 x 处是 ´étale。

证明。设 $h_1,\dots,h_k$ 是 x 附近的局部定义函数 $\Sigma_0\subset W$。令 $L=p^{-1}(p(x))$，并设 $s=$ 维数 L。由于 p 是光滑的，$L\subset W$ 是光滑子代数簇。由于 $p|_{\Sigma_0}$ 在 $x\in\Sigma_0$ 处是非分歧的，我们有

$$\{v\in T_xL;\ (dh_1|_{T_xL})(v)=\cdots=(dh_k|_{T_xL})(v)=0\}=\{0\}.$$

由于 T_xL 是一个 s 维向量空间，我们可以假设

$$\{v\in T_xL;\ (dh_1|_{T_xL})(v)=\cdots=(dh_s|_{T_xL})(v)=0\}=\{0\}.$$

取 $\Sigma\subset W$ 使得 Σ 在 x 附近由 $h_1=\cdots=h_s=0$ 定义。于是 $\dim\Sigma\geq\dim S$，并且 $p|_\Sigma\colon\Sigma\to S$ 在 x 处是非分歧的。因此 $\dim\Sigma=\dim S$。由于非分歧是一个开条件，存在一个非空扎里斯基开集 $\Sigma'\subset\Sigma$，使得 $x\in\Sigma'$ 且 $\Sigma'\to S$ 是非分歧的。由于 S 是光滑的，$\Sigma'\to S$ 是 ´étale 的（参见引理 10.2）。因此 $\Sigma\to S$ 在 x 处是 ´étale 的。由于 Σ_0 不可约，我们有 $\Sigma_0\subset\Sigma$。□

引理 10.4。设 M、 Σ 和 H 是代数簇。设 $c\colon M\times\Sigma\to H$ 是一个支配态射。设 $V\subset\Sigma$ 是一个闭子簇。假设存在一个非空扎里斯基开集 $W\subset M\times V$，使得限制 $c|_W\colon W\to c(M\times V)$ 是 ´étale 的。设 $a_0\in M$ 满足 $(\{a_0\}\times V)\cap W\neq\emptyset$。设 $F\subset M\times\Sigma$ 是 $\operatorname{supp}c^{-1}(c(\{a_0\}\times V))$ 的一个不可约分支，且满足 $\{a_0\}\times V\subset F$。则有以下结论：

(1)对于 $t\in V$，当 $(a_0,\ t)\in W$时，诱导映射 $F\to\Sigma$在 $(a_0,\ t)\in F$处是非分歧的。(2) 此外，假设限制 $c|_{M\times V}\colon\ M\times V\to H$ 是支配且一般有限的。那么 $F\to\Sigma$ 是支配且一般有限的。

证明。我们取 $t\in V$使得 $(a_0,t)\in W$。令 F_t为映射 $F\to\Sigma$ 在 $t\in V$上的概形理论纤维。则 $F_t=F\cap(M\times\{t\})$，其中交按概形理论意义取交。我们将证明 $\mathcal{O}_{F_t,(a_0,t)}=\mathbb{C}$。由于 $c|_W\colon W\to c(M\times V)$ 是 ´étale，概形理论交 $F\cap(M\times V)$ 在 $(a_0,t)\in W$ 的某个扎里斯基开邻域 $U\subset W$ 上与 $\{a_0\}\times V$ 重合。即 $F\cap U=\{a_0\}\times V$。因此

$$F_t\cap U=U\cap(\{a_0\}\times V)\cap(M\times\{t\})=\{(a_0,t)\},$$

其中 $\{(a_0,t)\}$ 是一个既约概形。因此 $F_t\cap U=$谱 $\mathbb{C}$。由于 $F_t\hookrightarrow M\times\Sigma$ 分解 $F_t\hookrightarrow M\times V\hookrightarrow M\times\Sigma$，我们有 $\mathcal{O}_{F_t,(a_0,t)}=\mathbb{C}$。因此 $F\to\Sigma$ 在 (a_0,t) 处是非分歧的。

接下来假设 $c|_{M\times V}\colon\ M\times V\to H$ 是支配且一般有限的。注意， $M\times\Sigma\to H$ 的纤维的所有不可约分支的维数都大于或等于 $\dim(M\times\Sigma)-\dim H$。因此我们有

$$\dim F\geq\dim(M\times\Sigma)-\dim H+\dim\overline{c(\{a_0\}\times V)}.$$

由于 $c|_{M\times V}\colon M\times V\to H$ 是支配且一般有限的，我们有 $\dim H=\dim(M\times V)$。根据 a_0 的选取，我们有 $\dim\ c(\{a_0\}\times V)\ =\dim V$。因此

$$\dim F\geq\dim(M\times\Sigma)-\dim(M\times V)+\dim V=\dim\Sigma.$$

因此 $\dim\ F\geq\dim\ \Sigma$。由于 $F\to\Sigma$在 $(a_0,t)\in F$处是非分歧的，其中 $(a_0,t)\in W$，映射$F\to\Sigma$ 是支配且一般有限的。□

引理 10.5. 设 M、 Σ 和 H 为代数簇。设 $c\colon M\times\Sigma\to H$ 为支配态射。假设对于一般的 $s\in\Sigma$，限制 $c|_{M\times\{s\}}\colon M\times\{s\}\to H$ 是准有限的。那么存在一个闭子簇 $V\subset\Sigma$，使得 $c|_{M\times V}\colon M\times V\to H$ 支配且一般有限。

证明。设 $d=\dim(M\times\Sigma)-\dim H$。令 $s\in\Sigma$和 $m\in M$满足以下条件：

- $c|_{M\times\{s\}}\colon\ M\times\{s\}\to H$ 是拟有限的。
- 设 $h=c((m,s))\in H$ 和 $c^{-1}(h)=X$。那么 X 的所有不可约分支的维数都等于 d (参见 [18, II，习题 3.22])。

令 $p\colon\ M\times\Sigma\to\Sigma$为第二投影。由（$m,\ s$）$\in X$，我们有 $s\in p$（X）。令p（X）$=Y$。那么 Y的所有不可约分支的维数都等于或小于 d。我们取一个余维数等于 d 的闭子簇 $V\subset\Sigma$，使得在 $s\in\Sigma$的某个扎里斯基开邻域 $U\subset\Sigma$上，$\{s\}=$支集（$V\cap Y$）。由 p^{-1}（s）$\cap X=c|^{-1}_{M\times\{s\}}$（$h$），集合 p^{-1}（s）$\cap X$是有限的。因此

$$c^{-1}(h)\cap(M\times V)\cap(M\times U)=p^{-1}(s)\cap X$$

由有限个点组成。我们注意到该集合非空，因为它包含点（$m,\ s$）。

现在我们考虑映射 $c|_{M\times V}\colon\ M\times V\to H$。于是（$c|_{M\times V}$）$^{-1}$（$h$）包含零维不可约分支。此外，$\dim$（$M\times V$）$=\dim H$。因此 $c|_{M\times V}\colon\ M\times V\to H$ 是支配且一般有限的。□

引理 10.1 的证明。证明分为几个步骤。在下面的论证中，我们固定一个射影嵌入 $\overline{A}\subset\mathbb{P}^N$。

步骤 1. 令 $Z_o=\tau(Z)\subset S$. 令 $X_{Z_o}\subset\overline{A}\times Z_o$为基变换。令 P为 $X_{Z_o}\to Z_o$的一般纤维的希尔伯特多项式。令 $Z_o^P\subset Z_o$ 为一个非空扎里斯基开集

使得 Z_o^P 中各点上的纤维的希尔伯特多项式均为 P。由于 Z_o^P 是整的，因此 $X_{Z_o^P} \to Z_o^P$ 是平坦的（参见 [18, III，定理 9.9]）。我们将 $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_l\}$ 记为 $\mathbb{P}^N \times S$ 上相干层 $\mathcal{O}_X$ 的平坦化分层。（关于此类分层的存在性，参见 [39, 定理 4.2.11]。）也就是说，每个 $\mathcal{S}_i$ 都是 S 的一个局部闭子概形，使得

- $S = \coprod \mathcal{S}_i$，并且

从概形 $T \to S$ 出发的映射 • T 可分解，当且仅当 $X_T \to T$ 是平坦的。我们可以选择 $S^P \in \{\mathcal{S}_i\}$，使得 $Z_o^P \subset S$ 分解为

$$Z_o^P \subset S^P.$$

那么 $S^P \subset S$ 是一个局部闭子概形。

存在一个非空扎里斯基开集 $S^o \subset S$，使得 $S^P \hookrightarrow S$ 分解为 $S^P \hookrightarrow S^o \subset S$，其中 $S^P \hookrightarrow S^o$ 是一个闭浸入。将 S 替换为 S^o 后，我们可以假设 $S^P \subset S$ 是一个闭子概形。在这一约化下，关系 $Z_o^P \subset S^P$ 蕴含 $Z_o \subset S^P$。因此$Z_o^P = Z_o$。

步骤 2。设 $\mathcal{X} \subset \overline{A} \times A \times S$ 是 X 在作用 $m\colon \overline{A} \times A \times S \to \overline{A} \times S$ 下的拉回，其中 $(x, a, s) \mapsto (x + a, s)$，从而

$$\mathcal{X}_{(a,s)} = X_s - a. \tag{10.2}$$

由于 X 是 B-不变的，$\mathcal{X}$ 在由 $(x, a, s) \mapsto (x, a + b, s)$ 对 $b \in B$ 定义的 B-作用 $\overline{A} \times A \times S \to \overline{A} \times A \times S$ 下是不变的。因此存在一个闭子概形 $\mathcal{X}_B \subset \overline{A} \times (A/B) \times S$，使得 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{X}_B$ 经第二因子上的商 $\overline{A} \times A \times S \to \overline{A} \times (A/B) \times S$ 的拉回（参见引理 A.19）。

设 $T \to (A/B) \times S$ 是从概形 T 出发的一个映射。设 $(\mathcal{X}_B)_T \to T$ 是 $\mathcal{X}_B \to (A/B) \times S$ 经此映射 $T \to (A/B) \times S$ 的拉回。设 $X_T \to T$ 是 $X \to S$ 经 $T \to (A/B) \times S$ 与第二投影 $(A/B) \times S \to S$ 的复合的拉回。

断言 1. $(\mathcal{X}_B)_T \to T$ 平坦当且仅当 $X_T \to T$ 平坦。

我们来证明这一点。令 $\mathcal{X}' \subset \overline{A} \times A \times S$ 为 $X \subset \overline{A} \times S$ 沿映射 $\overline{A} \times A \times S \to \overline{A} \times S$ 的拉回，该映射由 $(x, a, s) \mapsto (x, s)$ 定义。令 $\mathcal{X}'_B$ 为 X 沿映射 $\overline{A} \times (A/B) \times S \to \overline{A} \times S$ 的拉回，该映射由 $(x, a', s) \mapsto (x, s)$ 定义。于是，$\mathcal{X}'$ 是 $\mathcal{X}'_B$ 沿商 $\overline{A} \times A \times S \to \overline{A} \times (A/B) \times S$ 在第二因子上的拉回。注意，同构 $\kappa\colon \overline{A} \times A \times S \to \overline{A} \times A \times S$ 由 $(x, a, s) \mapsto (x + a, a, s)$ 定义，并在 $A \times S$ 上诱导出同构 $\kappa|_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$。

令 $T' \to A \times S$ 为 $T \to (A/B) \times S$ 沿商映射 $A \times S \to (A/B) \times S$ 的拉回。则诱导映射 $T' \to T$ 是忠实平坦的，因为 $A \times S \to (A/B) \times S$ 是忠实平坦的（参见注 A.1）。令 $\mathcal{X}_{T'} \to T'$ 为 $\mathcal{X} \to A \times S$ 沿映射 $T' \to A \times S$ 的拉回。于是我们有如下笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{T'} & \longrightarrow & (\mathcal{X}_B)_T \\ \downarrow & & \downarrow \\ T' & \longrightarrow & T \end{array}$$

因此

$$(\mathcal{X}_B)_T \to T \text{ is flat if and only if } \mathcal{X}_{T'} \to T' \text{ is flat.} \tag{10.3}$$

事实上，若 $\mathcal{X}_{T'} \to T'$ 是平坦的，则复合映射 $\mathcal{X}_{T'} \to T$ 是平坦的。注意到 $T' \to T$ 的忠实平坦性推出 $\mathcal{X}_{T'} \to (\mathcal{X}_B)_T$ 的忠实平坦性，因为忠实平坦性在纤维积下保持。因此，由 [17, 推论 14.12]，可得 $(\mathcal{X}_B)_T \to T$ 是平坦的。反过来，$(\mathcal{X}_B)_T \to T$ 的平坦性推出 $\mathcal{X}_{T'} \to T'$ 的平坦性，因为平坦性在纤维积下保持。由此得到 (10.3)。

同构 κ 诱导出一个同构 $\mathcal{X}_{T'} \to (\mathcal{X}')_{T'}$，其基为 T'。因此

$$\mathcal{X}_{T'} \to T' \text{ is flat if and only if } (\mathcal{X}')_{T'} \to T' \text{ is flat.}$$

出于与（10.3）相同的理由，我们注意到

$$(\mathcal{X}')_{T'} \to T' \text{ is flat if and only if } (\mathcal{X}'_B)_T \to T \text{ is flat.}$$

注意到 $(\mathcal{X}'_B)_T = X_T$。因此 $(\mathcal{X}_B)_T \to T$是平坦的，当且仅当 $X_T \to T$是平坦的。由此得证该断言。

现在，我们注意到$X_{S^P} \to S^P$是平坦的。因此，根据上述断言，$(\mathcal{X}_B)^{(A/B)\times S^P} \to (A/B)\times S^P$是平坦的。令 Hilb 为$\overline{A}$ 的闭子概形的希尔伯特概形，其希尔伯特多项式为 P（参见 [39, 定理 4.3.4]）。由 $(\mathcal{X}_B)^{(A/B)\times S^P} \to (A/B) \times S^P$，我们得到分类映射

$$c : (A/B) \times S^P \to \text{Hilb}.$$

步骤 3. 对每个 $(a, s) \in (A/B)\times S^P$，我们定义 $E_{(a,s)} = c^*(c(a, s))$，它是 c 在点 $c(a, s) \in$ Hilb 上的概形理论纤维。于是，$E_{(a,s)} \subset (A/B) \times S^P$是一个闭子概形。我们断言

$$E_{(a,s)} = a + E_{(0,s)}. \tag{10.4}$$

我们来证明这一点。对于 $t\colon T \to (A/B) \times S$，由平移可得 $t - a\colon T \to (A/B) \times S$。我们将 $(\mathcal{X}_B)_t \subset \overline{A} \times T$记作 $\mathcal{X}_B$ 在 $t\colon T \to (A/B) \times S$下的拉回。$(\mathcal{X}_B)_{t-a}$的情形类似。设 $a' \in A$ 是一个点，其在 $A \to A/B$ 下的像等于 a。于是注意到

$$(\mathcal{X}_B)_t = (\mathcal{X}_B)_{t-a} - a'. \tag{10.5}$$

为证明这一点，只需考虑 $t = \mathrm{id} : (A/B) \times S \to (A/B) \times S$ 的情形。令 $t'\colon A \times S \to A \times S$ 为恒等映射，$t' - a'\colon A \times S \to A \times S$ 为由 $(x, s) \mapsto (x - a', s)$ 定义的映射。于是

$$\mathcal{X}_{t'} = \mathcal{X}_{t'-a'} - a'.$$

注意，$\mathcal{X}_{t'}$（分别为 $\mathcal{X}_{t'-a'} - a'$）是 $(\mathcal{X}_B)_t$（分别为 $(\mathcal{X}_B)_{t-a} - a'$）在商 $\overline{A} \times A \times S \to \overline{A} \times (A/B) \times S$ 下关于第二因子的拉回。此外，诱导映射 $\mathcal{X}_{t'} \to (\mathcal{X}_B)_t$ 和 $\mathcal{X}_{t'-a'} - a' \to (\mathcal{X}_B)_{t-a} - a'$ 是范畴商（参见引理 A.19）。因此得到 (10.5)。

现在注意到 $t\colon T \to (A/B) \times S^P$可因子分解为 $E_{(a,s)}$ 当且仅当

$$(\mathcal{X}_B)_t = (\mathcal{X}_B)_{(a,s)} \times T$$

作为 $\overline{A} \times T$ 的闭子概形。注意到

$$(\mathcal{X}_B)_{(a,s)} \times T = \mathcal{X}_{(a',s)} \times T = (X_s - a') \times T = (X_s \times T) - a'.$$

因此 $t\colon T \to (A/B) \times S^P$可因子分解为 $E_{(a,s)}$ 当且仅当

$$(\mathcal{X}_B)_t = (X_s \times T) - a'$$

作为$\overline{A} \times T$ 的闭子概形。由此注意到 $t - a\colon T \to (A/B) \times S^P$可因子分解为 $E_{(0,s)}$ 当且仅当

$$(\mathcal{X}_B)_{t-a} = X_s \times T$$

作为 $\overline{A} \times T$ 的闭子概形。因此 (10.5) 得出，$t\colon T \to (A/B) \times S^P$可因子分解为 $E_{(a,s)}$ 当且仅当 $t - a\colon T \to (A/B) \times S$可因子分解为 $E_{(0,s)}$。因此 $E_{(a,s)} = a + E_{(0,s)}$。这就完成了 (10.4) 的证明。

步骤 4。对于每个 $[v] \in Z$，我们有 $\tau([v]) \in Z_o \subset S^P$。因此对于每个 $a \in A/B$，我们可以考虑 $E_{(a,\tau([v]))}$。我们证明如下：

断言2.对所有 $[v] \in (\cap_{k\geq 2} O_k) \subset Z$ 以及所有 $a \in A/B$，存在支集 $E_{(a,\tau([v]))}$ 的一个不可约分支 E，使得

$$(a, [v]) \in \mathcal{D}E \subset (A/B) \times S_{1,A/B} \tag{10.6}$$

在识别 $(A/B)\times S_{1,\ A/B} = ((A/B) \times S)_1$下。这里 $E \subset (A/B) \times S$ 是一个扎里斯基闭子集。

我们证明这一点。记 $S' = (A/B) \times S$，则有 $(S')_k = (A/B)\times S_{k,\ A/B}$。对于每个 $k \geq 2$，根据假设 (2)、(3) 和推论 9.9，我们可以取一个正则的 k-jet $\eta\colon \Lambda_k \to S'$ with

$\eta'(0) = (0, v)$，使得 $(\mathcal{X}_B)_{(0,\tau([v]))} = (\mathcal{P}_k\mathcal{X}_B)_{\eta[k](0)}$，其中 $\Lambda_k =$ 谱 $\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{k+1})$。因此，由引理 9.1 可得

$$(\mathcal{X}_B)_\eta = (\mathcal{X}_B)_{(0,\tau([v]))} \times \Lambda_k. \tag{10.7}$$

因此，$(\mathcal{X}_B)_\eta \to \Lambda_k$ 是平坦的。令 $\eta_2\colon \Lambda_k \to S$ 为与 η 及第二投影 $(A/B) \times S \to S$的复合。由步骤 2 中的断言 1，$X_{\eta_2} \to \Lambda_k$ 是平坦的。由 $\eta_2(0) = \tau([v]) \in Z_o$，$\eta_2\colon \Lambda_k \to S$经由 S^P分解。因此，$\eta\colon \Lambda_k \to S'$经由 $(A/B) \times S^P$分解，故 $E_{(0,\tau([v]))}$（参见 (10.7)）。这对所有 k均成立。因此，由引理 9.10，我们有

$$(0, [v]) \in \mathcal{D}E'$$

对于支集 $\operatorname{supp} E_{(0,\tau([v]))}$的某个不可约分支 E'。由 (10.4)，我们有 $E_{(a,\tau([v]))} = a + E_{(0,\tau([v]))}$。因此，$E = a + E'$ 是 $\operatorname{supp}(E_{(a,\tau([v]))})$的一个不可约分支。由 $\mathcal{D}E = a + \mathcal{D}E'$，我们完成了该断言的证明。

S第 tep 5 步。我们将取一个闭子簇 $V \subset Z_o$，使得限制 n

$$c|_{(A/B)\times V} : (A/B) \times V \to \overline{c((A/B) \times Z_o)}$$

是支配且一般有限的。这里，$c((A/B) \times Z_o) \subset$ Hilb 是 Hilb 中的扎里斯基闭包。注意，集合 $\tau(O_2) \subset Z_o$ 稠密且可构造（参见 $[18, \text{II}, \text{例 } 3.19]$），因此包含一个非空扎里斯基开集。因此，对一般的 $t \in Z_o$，由假设 (1)、(2)，我们有 $\operatorname{Stab}^0(X_t) = B$。于是，限制 $c|_{(A/B)\times\{t\}}\colon (A/B) \times \{t\} \to$Hilb 是拟有限的。我们将引理 10.5 应用于 $(A/B) \times Z_o \to c((A/B) \times Z_o)$，从而得到我们的 $V \subset Z_o$。

令 $W \subset (A/B) \times V$ 为一个非空扎里斯基开子集，使得 $W \to c((A/B) \times Z_o)$ 是 ́etale 的。我们固定 $a_0 \in A/B$，使得

$$(\{a_0\} \times V) \cap W \neq \emptyset. \tag{10.8}$$

步骤 6。我们构造 $(A/B)\times S$ 的扎里斯基闭子集 F_o 和 Σ_0。（在构造出 $U \hookrightarrow (A/B)\times S$后，它们将分别是 $\overline{U} \cap p^{-1}(Z_o)$ 和 $\overline{U} \cap p^{-1}(\operatorname{supp} S^P)$ 的不可约分支，其中 $p : (A/B) \times S \to S$ 是第二投影。）我们考虑限制

$$c|_{(A/B)\times Z_o} : (A/B) \times Z_o \to \overline{c((A/B) \times Z_o)} \subset \text{Hilb}.$$

我们取扎里斯基闭集 $(c|_{(A/B)\times Z_o})^{-1}(c(\{a_0\} \times V))$ 的一个不可约分支 F_o，使得 $\overline{\{a_0\} \times V} \subset F_o$。这里，$c(\{a_0\} \times V) \subset$ Hilb 是 Hilb 中的扎里斯基闭包。我们有一个映射

$$p|_{F_o} : F_o \to Z_o$$

由闭浸入 $F_o \hookrightarrow (A/B) \times Z_o$ 与第二投影$p|_{(A/B)\times Z_o} : (A/B) \times Z_o \to Z_o$的复合得到。于是，根据引理 10.4 (2)，映射 $p|_{F_o}\colon F_o \to Z_o$ 是支配的且一般有限。

接下来我们构造 $\Sigma_0 \subset (A/B) \times S$，使得 $F_o \subset \Sigma_0$。令 F为 $F_o \times_{Z_o} Z$ 的一个不可约分支，使得自然映射 $F \to F_o$ 和 $p'|_F\colon F \to Z$ 是支配的，其中$p' : (A/B)\times S_{1,A/B} \to S_{1,A/B}$ 是第二投影。我们注意到 $F_o \times_{Z_o} Z$ 是 $(A/B) \times Z$的扎里斯基闭集。因此 $F \subset (A/B) \times Z$是一个扎里斯基闭子集。令 $\Theta \subset (A/B) \times S^P$为由 $\Theta = c^{-1}(c(\{a_0\} \times V))$ 定义的~~扎里斯基闭子~~集。那么 $\Theta \subset (A/B) \times S$ 是一个扎里斯基闭子集。令 $(a, [v]) \in \cap_{k\geq 2}(p'|_F)^{-1}(O_k) \subset F$。我们取 $\operatorname{supp} E_{(a,\tau([v]))}$的一个不可约分支 E，如步骤 4 的断言 2 所示。由 $(a, \tau([v])) \in F_o$，我们有 $c((a, \tau([v]))) \in c(\{a_0\} \times V)$。因此 $E \subset$ ~~Θ。所以存在~~ Θ 的一个不可约分支 Θ'，使得 $E \subset \Theta'$。那么$\Theta' \subset (A/B) \times S$ 是一个扎里斯基闭子集。由 (10.6)，我们有 $(a, [v]) \in \mathcal{D}\Theta'$。因此，记 $\Theta_1, \ldots, \Theta_l$为 Θ的所有不可约分支，我们有

$$\cap_k (p'|_F)^{-1}(O_k) \subset \mathcal{D}\Theta_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}\Theta_l.$$

由于 $\mathcal{D}\Theta_i \subset (A/B)\times S$是闭子概形，$F \cap \mathcal{D}\Theta_i$的支集是 F的扎里斯基闭子集。注意，对于每个 k，$(p'|_F)^{-1}(O_k) \subset F$ 是一个非空的扎里斯基开集。因此我们可以选取

Σ_0 来自 Θ_1，……，Θ_l，使得

$$F \subset \mathcal{D}\Sigma_0. \tag{10.9}$$

由于自然映射 $F \to F_o$ 是满射，我们有

$$F_o \subset \Sigma_0.$$

特别地，$\{a_0\} \times V \subset \Sigma_0$。因此，我们可以对 $(A/B) \times S^P \to \mathcal{C}((A/B) \times S^P)$ 应用引理 10.4（1），得到：$\overline{p|_{\Sigma_0}\colon \Sigma_0 \to S}$ 在一般的 $(a_0, t) \in \{a_0\} \times V$ 处是非分歧的，其中 $p : (A/B) \times S \to S$ 是第二投影。

步骤 7。现在我们应用引理 10.3，从 $\Sigma_0 \subset (A/B) \times S$ 中取出 $\Sigma \subset (A/B) \times S$，使得 $\Sigma_0 \subset \Sigma$，且 $\Sigma \to S$ 是一般有限的，并且 $\acute{}$ 在一般的 $(a_0, t) \in \{a_0\} \times V \subset \Sigma_0$ 处是 étale 的。我们取一个扎里斯基开集 $U \subset \Sigma$，使得 $q : U \to S$ 是 étale 的，其中 q 是 p 在 U 上的限制。我们可以取 U，使得 $(\{a_0\} \times V) \cap U \neq \emptyset$，因此 $F_o \cap U \neq \emptyset$。因此，$F_o \cap U \subset F_o$ 是扎里斯基稠密的。由 (10.9)，这表明 $F \cap PTU \subset F$ 是扎里斯基稠密的，其中 $PTU = (\mathcal{D}\Sigma)|_U$ 位于 $(A/B) \times S_{1,A/B}$ 中。因此，$p'(F \cap PTU) \subset Z$ 在 Z 中扎里斯基稠密。因此，$p'(PTU) \cap Z \subset Z$ 在 Z 中扎里斯基稠密。这表明浸入 $U \hookrightarrow (A/B) \times S$ 满足定义 3.16 的性质。因此，Z 是水平可积的。引理得证。□

11. Verification of the normality condition: Existence of horizontally integrable Z

本节旨在证明下述命题 11.3。为陈述该命题，我们引入若干术语。我们回顾定义 3.18 中的 $\Pi(\mathcal{F})$。

定义 11.1. 设 $X \subset A$ 为一个闭子簇。设 $\overline{A}$ 为一个等变紧化。设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ 为一个全纯映射的无限集。我们将 $\Lambda_{X,\ \overline{A}}(\mathcal{F})$ 定义为满足下列条件的所有半阿贝尔子簇 $B \subset A$ 的集合：

(1) $\mathcal{F} \to \mathrm{Sp}_B \overline{X}$，其中 $\overline{X} \subset \overline{A}$ 为该紧化，且 (2) $B \notin \Pi(\mathcal{F})$。

设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$ 为一个全纯映射的无限集。对于 $B \in \Pi(\mathcal{F})$，记商映射为 $\varpi_B : A \to A/B$，我们定义

$$\mathcal{F}_{A/B} = (\varpi_B \circ f)_{f \in \mathcal{F}}.$$

这是 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A/B)$ 中的一个无限指标族。因此，$\mathcal{F}_{A/B}$ 至多包含有限多个常值映射。我们从 $\mathcal{F}_{A/B}$ 中移除这些常值映射，得到 $\mathcal{F}_{A/B}$ 的一个无限子族 $\mathcal{F}'_{A/B}$。我们考虑关于 $\mathcal{F}$ 的以下假设。

假设 11.2. 对于每个 $B \in \Pi(\mathcal{F})$，$\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A/B)$ 中的无限指标族 $\mathcal{F}'_{A/B}$ 都满足假设 3.19。

正如我们稍后将看到的（参见引理 12.3），非恒定全纯映射的 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$ 中的每个无限子集 $\mathcal{F} \subset$ 都包含一个满足此假设的无限子集。设 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$ 中的无限集 $\mathcal{F} \subset$ 是一个满足假设 11.2 的全纯映射集。设 $B \in \Pi(\mathcal{F})$。那么，存在唯一的 $T_{k,\ A/B} \subset P_{k,\ A/B}$，如假设 3.19 中所述。我们定义 $Z_{k,\ A/B} \subset P_{k,\ A/B}$ 如下：

$$Z_{k,A/B} = \cup_{l \geq 0} \mathrm{Im}(T_{k+l,A/B} \hookrightarrow P_{k+l,A/B} \to P_{k,A/B}). \tag{11.1}$$

由引理 3.15 可得 $\mathcal{F}_{P_{k,\ A/B}} \Rightarrow Z_{k,\ A/B}$，其中我们令 $\mathcal{F}_{P_{k,\ A/B}} = (\mathcal{F}'_{A/B})_{P_{k,\ A/B}}$ (3.5))。 (cf.

命题 11.3. 设 $X \subset A$ 是一个闭子簇，$\overline{A}$ 是其光滑等变紧化，其中 $\overline{A}$ 是射影的。设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ 是满足假设 11.2 的全纯映射的一个无限集。假设 $\Lambda_{X,\ \overline{A}}(\mathcal{F}) = \emptyset$。那么存在一个半阿贝尔子簇 $B \subset A$，使得 $\mathrm{Sp}_B \overline{X} \neq \emptyset$ 具有以下性质：

(1) $B \in \Pi($(v2)。

(2) 存在 k 使得 $Z_{k+1,\ A/B} \subset P_{k+1,\ A/B}$ 是水平可积的，其中

$$Z_{k+1,A/B} = \cup_{l\geq 1}\mathrm{Im}(T_{k+l,A/B} \hookrightarrow P_{k+l,A/B} \to P_{k+1,A/B}).$$

(3) $\mathcal{F} \to \mathrm{Sp}_B\overline{X}$.

我们注意到，本命题中的假设 $\Lambda_{X,\overline{A}}(\mathcal{F}) = \emptyset$ 写作 $X \subsetneqq A$。事实上，如果$X = A$，那么我们有 $A \in \Lambda_{X,\overline{A}}(\mathcal{F})$，因此 $\Lambda_{X,\overline{A}}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$。

11.1. 辅助引理 1. 在本小节中，我们证明几个与以下定义相关的引理。

定义 11.4. 设 S 是一个代数簇，且 X 是 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形。设 $\psi\colon X \to S$ 是一个态射，且 $Z \subset S$ 是一个扎里斯基闭集。设 $\mathcal{U}$ 是所有满足 $Z \cap U \neq \emptyset$ 的扎里斯基开集 $U \subset S$ 的集合。对于 $U \in \mathcal{U}$，我们考虑 $\psi^{-1}(U) \subset X$ 的概形论闭包。我们令 $X[Z] = \cap_{U\in\mathcal{U}}\psi^{-1}(U)$，这是 X 的一个闭子概形。

注 11.5. 假设 Z 是不可约的。则存在 $U \in \mathcal{U}$ 使得 $X[Z] = \psi^{-1}(U)$。事实上，由于诺特性质，存在 $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$使得 $X[Z] = \psi^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \psi^{-1}(U_k)$。令 $U = U_1 \cap \cdots \cap U_k$。由于 Z是不可约的，我们有 $U \in \mathcal{U}$。于是有 $X[Z] \subset \psi^{-1}(U) \subset \psi^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \psi^{-1}(U_k)$。因此 $X[Z] = \psi^{-1}(U)$。

引理 11.6. 设 $X \to S$ 和 $\varphi : S \to T$ 为态射，其中 S 和 T 是簇， X是 $\mathbb{C}$上的有限型概形。设 $\psi\colon X \to T$ 为 $X \to S \to T$的复合态射。设 $V \subset S$和 $W \subset T$为不可约扎里斯基闭子集，使得 $W \subset \varphi(V)$。则 $X[V] \subset X[W]$。此外，假设存在一个扎里斯基开集 $U \subset T$ 使得 $U \cap W \neq \emptyset$ ，且$\psi^{-1}(U)$是整的。则 $X[V] = X[W]$。

证明。由 注 11.5，我们可以取一个扎里斯基开集 $U_1 \subset T$，使得 $U_1 \cap W \neq \emptyset$，并且

$$X[W] = \overline{\psi^{-1}(U_1)}. \tag{11.2}$$

我们有 $\varphi^{-1}(U_1) \cap V \neq \emptyset$。因此，根据 $X[V]$的定义，我们有

$$X[V] \subset \overline{\psi^{-1}(U_1)} = X[W].$$

现在我们进一步假设，对于某个扎里斯基开集 $U \subset T$，满足$U \cap W \neq \emptyset$， $\psi^{-1}(U)$ 是整的。我们取如上的 $U_1 \subset T$。不妨假设 $U_1 \subset U$。由 $\varphi^{-1}(U_1) \cap V \neq \emptyset$，我们可以取 $U_2 \subset \varphi^{-1}(U_1)$，使得 $p^{-1}(U_2) = X[V]$，其中 $p : X \to S$ （参见注 11.5）。由于 $\psi^{-1}(U_1)$ 是整的，包含映射 $p^{-1}(U_2) \subset \psi^{-1}(U_1)$ 概形稠密。因此$\psi^{-1}(U_1) \subset X[V]$。于是由（11.2），得到 $X[W] \subset X[V]$。引理的证明至此完成。□

引理11.7。设 T 为一个代数簇，并设 $W \subset T$ 为一个不可约扎里斯基闭子集。设$\psi : X \to T$和 $\psi' : X' \to T$是从 $\mathbb{C}$上的有限型概形出发的态射。设 $p\colon X \hookrightarrow X'$是在 T上的闭浸入。假设存在一个扎里斯基开集 $U \subset T$ 使得$U \cap W \neq \emptyset$，并且诱导映射 $\psi^{-1}(U) \to (\psi')^{-1}(U)$是同构的。则 $X[W] = X'[W]$。

证明。浸入 p 诱导出一个闭浸入 $X[W] \hookrightarrow X'[W]$。因此我们证明其逆命题。根据注 11.5，我们可以取一个扎里斯基开集 $U \subset T$，使得 $U \cap W \neq \emptyset$ 且$\psi^{-1}(U) = X[W]$。将 U 替换为一个更小的扎里斯基开集后，我们还可以假设诱导映射 $\psi^{-1}(U) \to (\psi')^{-1}(U)$ 是一个同构。因此，概形论闭包 $(\psi')^{-1}(U) \subset X'$分解为 $X[W]$，其中 $X[W]$是 X'的一个闭子概形，由 p定义为： $X \hookrightarrow X'$。这表明 $X'[W] \subset X[W]$。□

我们回顾定义 3.1。设 $\varphi\colon S \to T$ 是簇之间的态射。设 $V \subset S$ 和 $W \subset T$ 是不可约扎里斯基闭子集，满足 $W \subset \varphi(V)$。设 $\psi\colon T' \to T$ 是一个 W-容许修改，并令 $S' = (S \times_T T')[W']$，其中 $W' \subset T'$ 是极小变换。那么诱导映射 $S' \to S$ 是一个 V-容许修改。我们将 $V \subset S$ 的极小变换记为 $V' \subset S'$。在这种情况下，我们有以下引理。

引理 11.8. 设 $X \to S$ 和 $\varphi: S \to T$ 是态射，其中 S 和 T 是簇，且 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形。设 $V \subset S$ 和 $W \subset T$ 是不可约扎里斯基闭子集，使得 $W \subset \varphi(V)$。令 $T' \to T$为一个 W-容许修改，并设$S' = (S \times_T T')[W']$。那么 $(X \times_S S')[V'] \subset (X \times_T T')[W']$。此外，假设 X是整的。那么 $(X \times_S S')[V'] = (X \times_T T')[W']$。

证明。我们首先证明

$$(X \times_S S')[W'] = (X \times_T T')[W']. \tag{11.3}$$

通过闭浸入 $S' \hookrightarrow S \times_T T'$，我们得到一个闭浸入 $X \times_S S' \hookrightarrow X \times_T T'$。注意，以下是纤维积:

$$\begin{array}{ccccc} X \times_S S' & \longrightarrow & X \times_T T' & = & X \times_S (S \times_T T') \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ S' & \longrightarrow & S \times_T T' & & \end{array} \tag{11.4}$$

由注 11.5，我们可以取一个扎里斯基开集 $U_1 \subset T'$，使得 $U_1 \cap W' \neq \emptyset$，且一个扎里斯基开集 $S \times_T U_1 \subset S \times_T T'$ 在 $S' \subset S \times_T T'$ 中概形稠密。特别地，我们有一个开浸入

$$S \times_T U_1 \subset S'. \tag{11.5}$$

因此，映射 $S' \to S \times_T T'$在 T'上是同构。因此，闭浸入 $X \times_S S' \hookrightarrow X \times_T T'$ 在 $U_1 \subset T'$ 上是同构。因此，根据引理 11.7，我们得到 (11.3)。

令 $X' = X \times_S S'$。设 $\psi: X' \to T'$ 为自然映射。由于 (11.4) 是一个纤维积，开浸入 (11.5) 给出

$$\psi^{-1}(U_1) = X \times_T U_1. \tag{11.6}$$

现在设 $\varphi': S' \to T'$为诱导映射。我们有 $W' \subset \varphi'(V')$。应用引理 11.6，得到 $X'[V'] \subset X'[W']$。因此结合 (11.3)，我们得到

$$(X \times_S S')[V'] \subset (X \times_T T')[W'].$$

此外，我们假设 X是整的。取一个扎里斯基开集 $U_2 \subset T'$，使得 $T' \to T$在 U_2和 $U_2 \cap W' \neq \emptyset$上是同构。我们可以假设 $U_2 \subset U_1$。于是根据 (11.6)，我们可以将 $\psi^{-1}(U_2)$视为 X的一个扎里斯基开集。因此 $\psi^{-1}(U_2)$是整的。于是根据引理 11.6，我们得到 $X'[V'] = X'[W']$。因此根据 (11.3)，我们完成了引理的证明。□

引理 11.9. 设 $Z \subset S$ 是不可约扎里斯基闭集。设 $S' \to S$ 是 Z-容许修改，且设 $S'' \to S'$ 是 Z'- 容许修改，其中 $Z' \subset S'$ 是极小变换。设 $X \to S$ 是一个态射。则我们有

$$(X \times_S S'')[Z''] = ((X \times_S S')[Z'] \times_{S'} S'')[Z''],$$

其中 $Z'' \subset S''$ 是极小变换。

证明。闭浸入 $(X \times_S S')[Z'] \hookrightarrow X \times_S S'$ 诱导出一个闭浸入

$$((X \times_S S')[Z'] \times_{S'} S'')[Z''] \hookrightarrow (X \times_S S'')[Z''].$$

我们将证明这是一个同构。根据注11.5，我们可以取一个扎里斯基开集$U_1 \subset S'$，使得 $Z' \cap U_1 \neq \emptyset$ 并且

$$(X \times_S S')[Z'] = \overline{X \times_S U_1}.$$

我们用 $\varphi: S'' \to S'$ 表示自然映射。由注 11.5，我们可以取一个扎里斯基开集$U_2 \subset \varphi^{-1}(U_1)$，使得 $U_2 \cap Z'' \neq \emptyset$ 且

$$((X \times_S S')[Z'] \times_{S'} S'')[Z''] = \overline{(X \times_S S')[Z'] \times_{S'} U_2}.$$

因此，我们有

$$X \times_S U_2 = (X \times_S U_1) \times_{S'} U_2 \subset (X \times_S S')[Z'] \times_{S'} U_2 \subset ((X \times_S S')[Z'] \times_{S'} S'')[Z''].$$

那么根据 th 根据 $(X\times_S S'')[Z'']$ 的定义，我们有 $(X\times_S S'')[Z'']\subset\overline{X\times_S U_2}$。因此，我们得t

$$(X\times_S S'')[Z'']\subset((X\times_S S')[Z']\times_{S'} S'')[Z''].$$

这就完成了引理的证明。 □

在接下来的两个引理中，我们考虑一个闭子概形 $X\subset\mathbb{P}^N\times S$。

引理 11.10. 设 $S'\to S$ 是簇之间的一个 Z-容许修改，其中 $Z\subset S$ 是一个不可约扎里斯基闭集。设 $X\to S$ 是一个射影态射，且 $X|_Z\to Z$ 是平坦的，其中 $X|_Z=X\times_S Z$。设 $Z'\subset S'$ 是极小变换。令 $X'=(X\times_S S')[Z']$ 和 $X'|_{Z'}=X'\times_{S'} Z'$。那么 $X'|_{Z'}=X|_Z\times_Z Z'$。特别地， $X'|_{Z'}\to Z'$ 是平坦的。

证明。闭浸入 $X'\hookrightarrow X\times_S S'$ 诱导出一个闭浸入

$$X'|_{Z'}\hookrightarrow(X\times_S S')|_{Z'}. \tag{11.7}$$

根据注 11.5，我们可以取一个扎里斯基开集 $U\subset S'$，使得 $U\cap Z'\neq\emptyset$ 和 $\overline{X\times_S U}=X'$。特别地，我们有一个开浸入

$$(X\times_S S')|_{Z'\cap U}\subset X'|_{Z'}. \tag{11.8}$$

由于 $Z'\hookrightarrow S'\to S$ 个因子经由 $Z\hookrightarrow S$ 的复合态射，我们有

$$(X\times_S S')|_{Z'}=X|_Z\times_Z Z'. \tag{11.9}$$

特别地，态射 $(X\times_S S')|_{Z'}\to Z'$ 是平坦的。因此，根据引理 B.1，包含映射 $(X\times_S S')|_{Z'\cap U}\subset(X\times_S S')|_{Z'}$是概形论稠密的。因此，根据 (11.8)，我们得到 $(X\times_S S')|_{Z'}\subset X'|_{Z'}$。于是，根据 (11.7)，我们得到 $X'|_{Z'}=(X\times_S S')|_{Z'}$。根据 (11.9)，我们得到 $X'|_{Z'}=X|_Z\times_Z Z'$。□

引理 11.11。设 $X\subset\mathbb{P}^N\times S$ 是一个闭子概形，其中 S 是一个代数簇。设 $Z\subset S$ 是一个不可约扎里斯基闭集。那么存在一个 Z-容许修改 $S'\to S$，使得 $(X\times_S S')[Z']|_{Z'}\to Z'$ 是平坦的，其中 $Z'\subset S'$ 是极小变换，且 $(X\times_S S')[Z']|_{Z'}=(X\times_S S')[Z']\times_{S'} Z'$。

证明。应用引理 B.2，可得一个 Z-容许修改 $S'\to S$ 以及一个扎里斯基开集 $U\subset S'$，使得 $U\cap Z'\neq\emptyset$，且 $X'|_{Z'}\to Z'$ 是平坦的，其中 $X'\subset X\times_S S'$ 是 $X\times_S U$的概形论闭包。于是有 $(X\times_S S')[Z']\subset X'$。因此 $(X\times_S S')[Z'][Z']\subset X'[Z']$。将引理 11.9 应用于 $S''=S'$，可得 $(X\times_S S')[Z'][Z']=(X\times_S S')[Z']$。因此 $(X\times_S S')[Z']\subset X'[Z']$。另一方面，由于 $X'\subset X\times_S S'$，可得 $X'[Z']\subset(X\times_S S')[Z']$。于是 $X'[Z']=(X\times_S S')[Z']$。我们将引理 11.10 应用于 $X'\to S'$ 和 $\mathrm{id}_{S'}:\ S'\to S'$。结论为 $X'[Z']|_{Z'}=X'|_{Z'}$。因此 $(X\times_S S')[Z']|_{Z'}=X'|_{Z'}$。于是 $(X\times_S S')[Z']|_{Z'}\to Z'$ 是平坦的。□

11.2. 辅助引理 2。

引理 11.12. 设 $X\subset\overline{A}\times S$ 为闭子概形，其中 S 是整概形，且 $\overline{A}$ 是射影等变紧化。假设诱导映射 $X\to S$ 是满射。则存在一个非空扎里斯基开集 $U\subset S$ 和一个半阿贝尔子簇 $C\subset A$，使得对于所有 $y\in U$，$\mathrm{Stab}^0(X_y)=C$。

证明。由于 S 是整的，通过将 S 替换为其非空的扎里斯基开集，我们可以假设 $X\to S$ 是平坦的。对于每个 $B\subset A$，我们令 $V_B=\{y\in S;B\subset\mathrm{Stab}^0(X_y)\}$。那么 $V_B\subset S$ 是扎里斯基闭集。事实上，令 P 为 X_y 在某个（因而也是所有） $y\in S$下的希尔伯特多项式。令 $Y=\bigcap_{b\in B}(X+b)\subset X$，其中交集按概形理论取。于是 $y\in V_B$当且仅当 Y_y 的希尔伯特多项式等于 P。因此 V_B 是扎里斯基闭集（参见 [46,引理 3.1]）。

现在令 $\mathcal{X}\subset\overline{A}\times A\times S$ 为 X 在作用 $m:\ \overline{A}\times A\times S\to\overline{A}\times S$ 下的拉回，其中 $(x,a,s)\mapsto(x+a,s)$。那么 $\mathcal{X}\to A\times S$ 是平坦的。令 $c:\ A\times S\to\mathrm{Hilb}$ 为分类映射。令 $\varphi:\ A\times S\to\mathrm{Hilb}\times S$ 为满足 $\varphi(a,s)=(c(a,s)\ s)$ 的诱导映射。那么对每个$y\in S$，我们有 $\mathrm{supp}(\varphi^{-1}(\varphi(0,y)))\subset A\times\{y\}=A$。我们有

$$\mathrm{supp}(\varphi^{-1}(\varphi(0,y)))=\mathrm{Stab}(X_y).$$

对每个整数 $d \geq 0$，令 $E_d \subset S$ 为满足 $\dim_{(0,y)} \varphi^{-1}(\varphi(0,y)) \geq d$ 的 $y \in S$ 的集合。那么 $E_d \subset S$ 是扎里斯基闭集。我们取 d 使得 $E_d = S$ 且 $E_{d+1} \subsetneq S$。那么对每个 $y \in S - E_{d+1}$，我们有 $\dim \mathrm{Stab}^0(X_y) = d$。令 $B_1, B_2, \ldots$ 为 A 的 d 维半阿贝尔子簇的集合。那么 $S - E_{d+1} \subset \cup V_{B_i}$。因此存在 B_i 使得 $S = V_{B_i}$。对于 $y \in S - E_{d+1}$，我们有 $B_i \subset \mathrm{Stab}^0(X_y)$。因此 $\mathrm{Stab}^0(X_y) = B_i$。我们令 $C = B_i$ 和 $U = S - E_{d+1}$，以完成证明。□

在下面的引理中，我们回顾了定义 $X_{\{0\},k} \subset \overline{A} \times S_{k,A}$（见（10.1））。我们有同构 $(A \times S)_k \simeq A \times S_{k,A}$，如（2.12）所示。

引理 11.13. 设 $X \subset \overline{A} \times S$ 为一个闭子概形，其中 S 是一个光滑代数簇，且 $\overline{A}$ 是一个光滑等变紧化。设 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A \times S)$ 满足 $f(\mathbb{D}) \subset$ 支集 X，其中 f 是非恒定的。那么 $f_{[k]}(\mathbb{D}) \subset$ 支集 $X_{\{0\},k}$。

证明。我们定义 $g\colon \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to A \times A \times S$ 为

$$g(z,w) = (f_A(z), f_A(w) - f_A(z), f_S(w)).$$

令 $m\colon \overline{A} \times A \times S \to \overline{A} \times S$ 由 $(x,a,s) \mapsto (x+a,s)$ 定义。则 $m \circ g(z,w) = (f_A(w)\ f_S(w)) \in$ 支集 X。因此 $g(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \subset$ 支集 $\mathcal{X}$，其中 $\mathcal{X} \subset A \times A \times S$ 是通过 $m\colon \overline{A} \times A \times S \to \overline{A} \times S$ 对 $X \subset \overline{A} \times S$ 的拉回得到的闭子概形。对 w 取 k 阶导数，我们得到 $\partial_w^k g\colon \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to A \times (A \times S)_k$。

断言。$\partial_w^k g(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \subset$ 支集 $\mathcal{P}_k \mathcal{X}$。

证明。我们对 k 使用归纳法。$k = 0$ 的情形显然。因此，我们假设 k 的情形成立，并证明 $k+1$ 的情形。由 $\partial_w^k g\colon \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathcal{P}_k \mathcal{X} \subset A \times (A \times S)_k$，得 $\partial_w(\partial_w^k g)\colon \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathcal{D}\mathcal{P}_k \mathcal{X} \subset (A \times (A \times S)_k)_1$。由于 $\partial_w(\partial_w^k g)\colon \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to A \times (A \times S)_{k+1} \subset (A \times (A \times S)_k)_1$，我们得到

$$\partial_w(\partial_w^k g)(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \subset \mathcal{D}\mathcal{P}_k \mathcal{X} \cap (A \times (A \times S)_{k+1}) = \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{X}.$$

这就完成了归纳步骤。□

由 (2.14)，我们有 $\partial_w^k g = (f_A(z)\ f_A(w) - f_A(z)\ f_{S_{k,A}}(w)$。将其限制到对角线 $\mathbb{D} \subset \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ 上，得到

$$\partial_w^k g \circ \Delta(z) = (f_A(z), 0_A, f_{S_{k,A}}(z)) \in A \times (A \times S)_k|_{A \times \{0\} \times S_{k,A}}.$$

因此，根据 $X_{\{0\},k} = \mathcal{P}_k \mathcal{X} \cap (\overline{A} \times \{0\} \times S_{k,A})$，上述断言蕴含 $\partial_w^k g \circ \Delta(\mathbb{D}) \subset$ 支集 $X_{\{0\},k}$。现在在同构下

$$\psi_k : A \times (A \times S)_k|_{A \times \{0\} \times S_{k,A}} \to (A \times S)_k,$$

有 $\psi_k \circ \partial_w^k g \circ \Delta = f_{[k]}$。因此，有 $f_{[k]}(\mathbb{D}) \subset$ 支集 $X_{\{0\},k}$。□

引理11.14。设 $X \subset \overline{A}$ 为一个闭子簇，其中 $\overline{A}$ 是一个光滑的等变紧化。设 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A \cap X)$ 为非恒定全纯映射的一个无限集。设 $Z \subset P_{k,A}$ 为一个扎里斯基闭子集，使得 $\mathcal{F}_{P_k,A} \Rightarrow Z$。设 $P'_{k,A} \to P_{k,A}$ 为一个 Z-容许修改，并设 $Z' \subset P'_{k,A}$ 为极小变换。令 $X'_{\{0\},k} = (X_{\{0\},k} \times_{P_k,A} P'_{k,A})[Z']$。那么，对于所有 $f \in \mathcal{F}$（有限例外除外），我们有 $f'_{[k]}(\mathbb{D}) \subset X'_{\{0\},k}$，其中 $f'_{[k]}\colon \mathbb{D} \to A \times P'_{k,A}$ 是 $f_{[k]}\colon \mathbb{D} \to A \times P_{k,A}$ 的提升。

证明。由引理3.10，Z 是不可约的。由注 11.5，我们可以取一个扎里斯基开集 $U \subset P'_{k,A}$，使得 $U \cap Z' \neq \emptyset$ 和 $X'_k = \psi^{-1}(U)$，其中 $\psi\colon \overline{X_k \times_{P_k} P'_{k,A}} \to P'_{k,A}$ 是投影。我们还可以假设映射 $P'_{k,A} \to P_{k,A}$ 在 U 上是同构的。由引理 3.11，我们有 $\mathcal{F}_{P'_{k,A}} \Rightarrow Z'$。因此，对于所有带有有限例外的 $f \in \mathcal{F}$，我们有 $f_{P'_{k,A}}(\mathbb{D}) \cap U \neq \emptyset$。令 $\Omega^f = f_{P'_k}^{-1}{}_{,A}(U)$。于是，对于所有带有有限例外的 $f \in \mathcal{F}$，$\mathbb{D} - \Omega^f$ 是离散的，并且 $f_{P'_{k,A}}(\Omega^f) \subset U$。由引理 11.13，我们有 $f_{[k]}(\mathbb{D}) \subset X_{\{0\},k}$。这表明 $f'_{[k]}(\Omega^f) \subset \psi^{-1}(U)$，从而对于所有带有有限例外的 $f \in \mathcal{F}$，有 $f'_{[k]}(\mathbb{D}) \subset X'_{\{0\},k}$。□

11.3. Demailly喷射空间和商映射。我们回顾定义2.1。令 $B \subset A$ 为一个半阿贝尔子簇。对于每个 $k \geq 1$，商 $A \to A/B$ 规范地诱导出映射

$$\mu_k : P_{k,A} \backslash E_{k,A,A/B} \to P_{k,A/B} \tag{11.10}$$

归纳地如下。当 $k = 1$ 时，我们有 $P_{1,A} = P(\mathrm{Lie}(A))$，$E_{1,A,A/B} = P(\mathrm{Lie}(B))$ 和 $P_{1,A/B} = P(\mathrm{Lie}(A/B))$。映射 μ_1 由商映射 $\mathrm{Lie}(A) \to \mathrm{Lie}(A/B)$ 的射影化定义。假设我们有 μ_{k-1}。那么由 $(\mu_{k-1})_* : T(P_{k-1,A} \backslash E_{k-1,A,A/B}) \to TP_{k-1,A/B}$ 以及商映射 $\mathrm{Lie}(A) \to \mathrm{Lie}(A/B)$，我们得到

$$T(P_{k-1,A} \backslash E_{k-1,A,A/B}) \times \mathrm{Lie}(A) \to TP_{k-1,A/B} \times \mathrm{Lie}(A/B). \tag{11.11}$$

此映射的核包含于

$$T(P_{k-1,A} \backslash E_{k-1,A,A/B}) \times \mathrm{Lie}(B) \subset T(P_{k-1,A} \backslash E_{k-1,A,A/B}) \times \mathrm{Lie}(A).$$

令 $\tau : P_{k,\ A} \to P_{k-1,\ A}$ 为投影。则将 (11.11) 的射影化限制到 $P_{k,\ A}$ 上，得到映射

$$(P_{k,A} \backslash \tau^{-1}(E_{k-1,A,A/B})) \backslash E_{k,A,A/B} \to P_{k,A/B}.$$

因此根据引理 2.2，我们得到 $\mu_k : P_{k,A} \backslash E_{k,A,A/B} \to P_{k,A/B}$，这就是对于 k 的映射 (11.10)。

现在令 $f : \mathbb{D} \to A$ 为一个全纯映射。令 $f_{A/B} : \mathbb{D} \to A/B$ 为 f 与商映射 $A \to A/B$ 的复合。假设 $f_{A/B}$ 是非恒定的。那么我们得到 $f_{P_{k,A}} : \mathbb{D} \to P_{k,A}$ 以及 $(f_{A/B})_{P_{k,A/B}} : \mathbb{D} \to P_{k,A/B}$，其中 $f_{P_{k,A}}(\mathbb{D}) \not\subset E_{k,A,A/B}$。然后根据上述构造，我们有

$$(f_{A/B})_{P_{k,A/B}} = \mu_k \circ f_{P_{k,A}}.$$

引理 11.15. 设 $C \subset A$ 是一个半阿贝尔子簇，使得 $B \subset C \subset A$，则 $\mu_k^{-1}(E_{k,\ A/B,\ A/C}) \subset E_{k,\ A,\ A/C} \cap (P_{k,\ A} \backslash E_{k,\ A,\ A/B})$。

证明。令 $(x, [v]) \in P_{k,A} \backslash E_{k,A,A/C}$，其中 $x \in P_{k-1,A}$ 和 $v \in V_{k-1}^{\dagger} \backslash \{0\} \subset TP_{k-1,A} \times \mathrm{Lie}(A)$（参见 2.10））。则 $v \notin TP_{k-1,A} \times \mathrm{Lie}(C)$。于是 v 在映射 (11.11) 下的像不包含于 $TP_{k-1,A/B} \times \mathrm{Lie}(C/B)$ 中。因此 $\mu_k((x, [v])) \notin E_{k,A/B,A/C}$。这表明 $\mu_k^{-1}(E_{k,A/B,A/C}) \subset E_{k,A,A/C}$ 在 $P_{k,A} \backslash E_{k,A,A/B}$ 中。□

我们回顾 (11.1) 中的 $Z_{k,A/B} \subset P_{k,A/B}$。

引理 11.16. 设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$ 是满足假设 11.2 的全纯映射无限集。设 $B, C \in \Pi(\mathcal{F})$，使得 $B \subset C$。设 $P'_{k,A/B} \to P_{k,A/B}$ 是一个 $Z_{k,A/B}$-容许修改，使得有理映射 $P_{k,A/B} \dashrightarrow P_{k,A/C}$ 诱导一个态射 $\mu_k : P'_{k,A/B} \to P_{k,A/C}$。那么 $Z_{k,A/C} \subset \mu_k(Z'_{k,A/B})$，其中 $Z'_{k,A/B} \subset P'_{k,A/B}$ 是极小变换。

证明。我们取 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得 $T_{k+l,A/C} \to Z_{k,A/C}$ 和 $T_{k+l,A/B} \to Z_{k,A/B}$ 是满射。有理映射 $P_{k+l,A/B} \dashrightarrow P_{k+l,A/C}$ 在 $E_{k+l,A/B,A/C} \subset P_{k+l,A/B}$ 之外全纯。由 $C/B \in \Pi(\mathcal{F}_{A/B})$，我们有 $T_{k+l,A/B} \not\subset E_{k+l,A/B,A/C}$。因此存在一个 $T_{k+l,A/B}$-容许修改 $P'_{k+l,A/B} \to P_{k+l,A/B}$，使得有理映射 $P_{k+l,A/B} \dashrightarrow P_{k+l,A/C}$ 诱导一个正则映射

$$\mu_{k+l} : P'_{k+l,A/B} \to P_{k+l,A/C}.$$

由 $\mathcal{F}_{P_{k+l,\ A/B}} \Rightarrow T_{k+l,\ A/B}$，我们有 $\mathcal{F}_{P'_{k+l,\ A/B}} \Rightarrow T'_{k+l,\ A/B}$（参见引理 3.11）。因此由引理 3.15 可得

$$\mathcal{F}_{P_{k+l,A/C}} \Rightarrow \mu_{k+l}(T'_{k+l,A/B}).$$

根据引理 3.9，我们有 $T_{k+l,A/C} \subset \mu_{k+l}(T'_{k+l,A/B})$ 或 $\mu_{k+l}(T'_{k+l,A/B}) \subsetneq T_{k+l,A/C}$。为证明 $T_{k+l,A/C} \subset \mu_{k+l}(T'_{k+l,A/B})$，反设 $\mu_{k+l}(T'_{k+l,A/B}) \subsetneq T_{k+l,A/C}$。根据引理 3.10，$\mu_{k+l}(T'_{k+l,A/B})$ 是不可约的。因此，根据 $T_{k+l,A/C}$ 的定义，存在 $C'/C \in \Pi(\mathcal{F}_{A/C})$，使得 $\mu_{k+l}(T'_{k+l,A/B}) \subset E_{k+l,A/C,A/C'}$。于是 $T'_{k+l,A/B} \subset \mu_{k+l}^{-1}(E_{k+l,A/C,A/C'})$。由于 $T_{k+l,A/B}$ 是不可约的，这意味着 $T_{k+l,A/B} \subset E_{k+l,A/B,A/C'}$（参见引理 11.15）。根据 $C'/B \in \Pi(\mathcal{F}_{A/B})$，这与 $T_{k+l,A/B}$ 的定义矛盾。因此 $T_{k+l,A/C} \subset \mu_{k+l}(T'_{k+l,A/B})$。

现在，$Z_{k,A/C}\subset P_{k,A/C}$ 包含于 $T'_{k+l,A/B}\subset P'_{k+l,A/B}$ 在 $\mu_{k+l}:P'_{k+l,A/B}\to P_{k+l,A/C}$ 与 $P_{k+l,A/C}\to P_{k,A/C}$ 的复合下的像中。因此我们得到 $Z_{k,A/C}\subset\mu_k(Z'_{k,A/B})$。□

设 B 和 C 是 A 的半阿贝尔子簇，满足 $B\subset C$。设 $S\subset\overline{A}$ 是一个 C-不变的扎里斯基闭集。那么我们得到$S_{B,k}\subset\overline{A}\times P_{k,A/B}$ 和$S_{C,k}\subset\overline{A}\times P_{k,A/C}$。

引理 11.17. 设 $\varphi:\overline{A}\times(P_{k,A/B}\backslash E_{k,A/B,A/C})\to\overline{A}\times P_{k,A/C}$ 是由正则映射 $P_{k,A/B}\backslash E_{k,A/B,A/C}\to P_{k,A/C}$ 诱导的映射。则有

$$\varphi^*(S_{C,k})=S_{B,k}|_{P_{k,A/B}\backslash E_{k,A/B,A/C}}.$$

证明。令 $\mathcal{S}\subset\overline{A}\times A$ 为 m 的作用 $\overline{A}\times A\to\overline{A}$ 对 $S\subset\overline{A}$ 的拉回，使得 $\mathcal{S}_a=S-a$，其中$\mathcal{S}_a\subset\overline{A}$ 是 $\mathcal{S}\to A$ 在 $a\in A$ 上的纤维。令 $\mathcal{S}_B\subset\overline{A}\times(A/B)$定义为使得$\overline{A}\times A\to\overline{A}\times(A/B)$ 对 $\mathcal{S}_B$ 的拉回等于 $\mathcal{S}$。类似地定义 $\mathcal{S}_C\subset\overline{A}\times(A/C)$。那么 $\overline{A}\times(A/B)\to\overline{A}\times(A/C)$ 对 $\mathcal{S}_C$ 的拉回等于 $\mathcal{S}_B$。令 $\phi:\overline{A}\times((A/B)\times P_{k,A/B})\dashrightarrow\overline{A}\times((A/C)\times P_{k,A/C})$ 为诱导的有理映射，它在 $\overline{A}\times((A/B)\times(P_{k,A/B}\backslash E_{k,A/B,A/C}))$ 上是正则的。那么有

$$\phi^*(\mathcal{P}_k\mathcal{S}_C)=(\mathcal{P}_k\mathcal{S}_B)|_{(A/B)\times(P_{k,A/B}\backslash E_{k,A/B,A/C})}.$$

因此，由 (10.1) 可得 $\varphi^*(S_{C,k})=S_{B,k}|_{P_{k,A/B}\backslash E_{k,A/B,A/C}}$。□

11.4. 命题 11.3 的证明所需的主要引理。设 A 是一个半阿贝尔簇，$B\subset A$ 是一个半阿贝尔子簇。给定一个扎里斯基闭集 $V\subset\overline{A}$，定义 $Y=\mathrm{Sp}_BV$。则扎里斯基闭集 $Y\subset\overline{A}$ 是 B-不变的。因此得到闭子概形 $Y_{B,k}\subset\overline{A}\times P_{k,A/B}$。对每个 $y\in P_{k,A/B}$，$Y_{B,k}\to P_{k,A/B}$ 在 y 上的纤维记为 $(Y_{B,k})_y$，它是 $\overline{A}$ 的一个闭子概形。

设 $X\subset A$ 是一个闭子簇，$\overline{A}$ 是一个光滑等变紧化。令 $\overline{X}\subset\overline{A}$ 为扎里斯基闭包。本小节中，我们将 $\overline{X}_k=(\overline{X})_{\{0\},k}$ 简记为 Then$\overline{X}_k\subset\overline{A}\times P_{k,A}$。虽然这个 $\overline{X}_k$ 与第 2 节讨论的 $\overline{X}$ 的 Demailly 喷射空间并不相同，但不会造成混淆。

我们回顾 (11.1) 中的 $Z_{k,A/B}\subset P_{k,A/B}$。简记 $Z_k=Z_{k,A}\subset P_{k,A}$。

引理 11.18. 设 A 是一个非平凡半阿贝尔簇，$X\subset A$ 是一个闭子代数簇。设 $\overline{A}$ 是一个光滑等变紧化，且为射影的。设 $\mathcal{F}\subset\mathrm{Hol}(\mathbb{D},X)$ 是一个满足假设 11.2 的全纯映射无限集。假设 $\Lambda_{X,\overline{A}}(\mathcal{F})=\emptyset$。那么存在 $B\subset A$，使得 $\mathrm{Sp}_B\overline{X}\neq\emptyset$ 满足以下性质：

(1) $B\in\Pi(\mathcal{F})$，特别地，$B\subsetneq A$。(2) 对于充分大的 k，$Z_{k,A/B}\subset p_{k,B}(Y_{B,k})$，其中 $Y=\mathrm{Sp}_B\overline{X}$ 且 $p_{k,B}:\overline{A}\times P_{k,A/B}\to P_{k,A/B}$ 是第二投影。(3) 对于一般的 $y\in Z_{k,A/B}$ 以及充分大的 k，$\mathrm{Stab}^0((Y_{B,k})_y)=B$。^ (4) 对于充分大的 $k\geq 0$，存在一个 Z_k-容许修改 $P_{k,A}\to P_{k,A}$，带有一个正则映射 $\sigma:P_{k,A}\to P_{k,A/B}$ 以及一个扎里斯基闭集 $V_k\subset P_{k,A}$，使得：^^^ (a) $Z_{k,A/B}\subset\sigma(V_k)$ 和 $V_k\subset Z_k$，其中 $Z_k\subset P_{k,A}$ 是极小变换。^^^^^^ (b) 置 $X_k=(\overline{X}_k\times_{P_{k,A}}P_{k,A})[Z_k]\subset\overline{A}\times P_{k,A}$。则 $X_k|_{\hat{Z}_k}\to Z_k$ 是平坦的。(c) 设 $P'_{k,A/B}\to P_{k,A/B}$ 是一个 $Z_{k,A/B}$-容许修改，其极小变换为 $Z'_{k,A/B}\subset P'_{k,A/B}$；设 $P'_{k,A}=(P_{k,A}\times_{P_{k,A/B}}P'_{k,A/B})[Z'_{k,A/B}]$ 且 $V'_k=(V_k\times_{P_{k,A/B}}P'_{k,A/B})[Z'_{k,A/B}]\subset P'_{k,A}$。则 $\mathcal{F}^{\wedge P'_{k,A}}\to V'_k$。^^^ (d) $\mathrm{supp}\,X_k|_{V_k}\subset\overline{A}\times P_{k,A}$ 在映射 $\overline{A}\times P_{k,A}\to\overline{A}\times P_{k,A/B}$ 下的像包含于 $\mathrm{supp}Y_{B,k}\subset\overline{A}\times P_{k,A/B}$ 中。(5) 如果 k 充分大，则对于一般的 $y\in Z_{k,A/B}$，自然映射 $(Y_{B,k})_y\to(Y_{B,k-1})_{y_0}$ 是同构，其中 $y_0\in P_{k-1,A/B}$ 是 y 在映射 $P_{k,A/B}\to P_{k-1,A/B}$下的像。

在该引理的证明中，我们使用以下记号：设 $V \subset \overline{A} \times S$ 为一个扎里斯基闭集。设 $B \subset A$ 为一个半阿贝尔簇。记

$$\mathrm{Sp}_B V = \bigcap_{b \in B} (V + b) \subset V.$$

那么 $\mathrm{Sp}_B V \subset \overline{A} \times S$ 是一个扎里斯基闭子集。

引理 11.18 的证明。令 $\mathcal{B}$ 为所有满足以下三个性质：(1)、(4) 和 $\mathrm{Sp}_B \overline{X} \neq \emptyset$ 的半阿贝尔子簇 $B \subset A$ 的集合。为证明 $\mathcal{B}$ 非空，我们将证明 $\{0\} \in \mathcal{B}$。注意到 $\{0\} \in \Pi(\mathcal{F})$。事实上，由 $\mathrm{Sp}_{\{0\}} \overline{X} = \overline{X}$，可得 $\mathcal{F} \to \mathrm{Sp}_{\{0\}} \overline{X}$。因此，如果 $\{0\} \notin \Pi(\mathcal{F})$，那么 $\{0\} \in \Lambda_{X,\ \overline{A}}(\mathcal{F})$。这与 $\Lambda_{X,\ \overline{A}}(\mathcal{F}) = \emptyset$ 矛盾。因此 $\{0\} \in \Pi(\mathcal{F})$。为证明 $\{0\}$ 满足 (4)，我们取一个 Z_k-容许修改 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\sigma : P_{k,\ A} \to P_{k,\ A}$，使得 $X_k|_{\hat{Z}_k} \to Z_k$ 平坦，其中 X_k 和 Z_k 的定义与引理陈述中的定义相同。由引理 11.11 可知，这样的修改存在。令 $V_k = Z_k$。于是 (4) 得证。因此 $\{0\} \in \mathcal{B}$。特别地，$\mathcal{B}$ 非空。

我们指出，如果 $B \in \mathcal{B}$，那么对于满足(4)的充分大的 k，(2)得到满足。事实上，$\hat{}\hat{}$根据$\mathcal{F}_{P_k,\ A} \Rightarrow Z_k$，我们可以应用引理11.14得到 $Z_k \subset p_k(X_k)$，其中我们仍记 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 诱导映射 $p_k : \overline{A} \times P_{k,A} \to P_{k,A_0}$。因此由 $V_k \subset Z_k$ (参见(4a))，我们有 $V_k = p_k(X_k|_{V_k})$。由(4d)，我们有 $\sigma(V_k) \subset p_{k,B}(Y_{B,k})$，其中$p_{k,B}$:$\overline{A} \times P_{k,A/B} \to P_{k,A/B}$是第二投影。由$Z_{k,\ A/B} \subset \sigma(V_k)$(参见(4a))，我们得到$Z_{k,A/B} \subset p_{k,B}(Y_{B,k})$。因此，对于 $B \in \mathcal{B}$，(2)成立。

断言 1. 如果 $B \in \mathcal{B}$，则断言 (5) 成立。

证明。由于$Z_{k,A/B}$是整的，一般平坦性表明，存在一个非空扎里斯基开集$U_k \subset Z_{k,A/B}$，使得 $Y_{B,k}|_{Z_{k,A/B}} \to Z_{k,A/B}$ 在 U_k上平坦。我们可以假设 U_k 在$Z_{k,A/B} \to Z_{k-1,A/B}$ 下的像包含于 U_{k-1}中。对于每个 k，注意到纤维$(Y_{B,k})_y$ 的希尔伯特多项式对于 $y \in U_k$都相同。我们将此多项式记作H_k。对于 $y \in U_k$，我们有$(Y_{B,k})_y \subset (Y_{B,k-1})_{y_0} \subset \overline{A}$，其中$y_0 \in P_{k-1,A/B}$ 是 y 在映射$P_{k,A/B} \to P_{k-1,A/B}$下的像。因此 $H_k \leq H_{k-1}$。于是得到 $H_k \geq H_{k+1} \geq H_{k+2} \geq \cdots$。由[46, 引理 8.2]，，存在 k_0使得 $H_{k_0} = H_{k_0+1} = \cdots$。因此，若 $k \geq k_0 + 1$，则有$(Y_{B,k})_y = (Y_{B,k-1})_{y_0}$。证明完毕。□

下面我们将证明，$\mathcal{B}$ 中的极大元满足 (3)。取 $B \in \mathcal{B}$。考虑 $Y_{B,\ k}|_{Z_{k,\ A/B}} \to Z_{k,\ A/B}$。于是根据性质 (2)，该映射是满射。对于一般的 $y \in Z_{k,\ A/B}$，置$C_k = \mathrm{Stab}^0(Y_{B,\ k})_y \subset A$（参见引理 11.12）。注意到 $(Y_{B,\ k})_y \subset \overline{A}$ 是B-不变的。因此

$$B \subset C_k.$$

根据上面的断言 1，存在 C，使得对于所有充分大的 k，都有 $C_k = C$.

我们将证明 $C \in \mathcal{B}$。根据构造，有 $\mathrm{Sp}_C Y \neq \emptyset$。因此由 $\mathrm{Sp}_C Y \subset \mathrm{Sp}_C \overline{X}$，可得 $\mathrm{Sp}_C \overline{X} \neq \emptyset$。根据 $B \in \mathcal{B}$，我们可以取 $\hat{}P_{k,\ A} \to P_{k,\ A}$, σ : $\hat{}P_{k,\ A} \to P_{k,\ A/B}$ 以及 $V_k \subset \hat{}P_{k,\ A}$，它们在 (4) 中有所描述。在此以及下文中，我们假设 k 足够大，从而满足关于 B 的 (4)。利用引理 11.11，我们取一个 $Z_{k,\ A/B}$-容许修改 $P'_{k,\ A/B} \to P_{k,\ A/B}$，使得

- $V'_k|_{Z'_{k,A/B}} \to Z'_{k,A/B}$ 是平坦的，其中 $Z'_{k,A/B} \subset P'_{k,A/B}$ 是极小变换，而 $V'_k \subset \hat{}P'_{k,A}$ 由 $V'_k = (V_k \times_{P_{k,A/B}} P'_{k,A/B})[Z'_{k,A/B}]$ 定义，如(4c)的表述所示。

$$\begin{array}{ccc} \hat{P}'_{k,A} & \xrightarrow{\sigma'} & P'_{k,A/B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{P}_{k,A} & \xrightarrow[\sigma]{} & P_{k,A/B} \end{array}$$

$\hat{}\hat{}\hat{}$ 注意，根据 $\{0\} \in \Pi(\mathcal{F})$，引理 11.16 得出 $Z_{k,A/B} \subset \sigma(Z_k)$。因此，$P'_{k,A} \to P_{k,A}\hat{}\hat{}\hat{}$ 是一个 Z_k-容许修改。因此，我们可以定义极小变换 $Z'_k \subset P'_{k,A_0}$。令

$\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}X'_k = (X_k \times_{\hat{}P_{k,A}} P'_{k,A})[Z'_k] \subset \overline{A} \times P'_{k,A}$. 我们设

$$W_k = \operatorname{supp} V'_k|_{Z'_{k,A/B}} \subset \hat{P}'_{k,A}.$$

我们断言

$\hat{}\hat{}\hat{}$ 断言 2. 在映射 $\overline{A} \times P'_{k,A} \to \overline{A} \times P_{k,A/B}$ 下，$\operatorname{supp} X'_k|_{W_k} \subset \overline{A} \times P'_{k,A}$ 的像包含于 $\mathrm{Sp}_{C_k}(\operatorname{supp} Y_{B,k})$。

证明。根据 C_k 的定义，存在一个稠密扎里斯基开集$U \subset Z_{k,A/B}$，使得 $\operatorname{supp} Y_{B,k}|_U \subset \mathrm{Sp}_{C_k}(\operatorname{supp} Y_{B,k})$。缩小 U 后，我们可以假设$U \subset Z'_{k,A/B}$。由于 $\hat{}\hat{}V'_k|_{Z'_{k,A/B}} \to Z'_{k,A/B}$ 是平坦的，引理 B.1 推得 $W_k|_U \subset W_k$ 是稠密的。由于 $X_k|_{\hat{Z}_k} \to Z_k$ 是 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 平坦的，引理 11.10 推得 $X'_k|_{\hat{Z}'_k} \to Z'_k$ 是平坦的。根据 $W_k \subset V'_k \subset Z'_k$，可得 $X'_k|_{W_k} \to W_k\hat{}\hat{}$ 是平坦的。因此，引理 B.1 推得 $\operatorname{supp} X'_k|_{(W_k|_U)} \subset \operatorname{supp} X'_k|_{W_k}$ 是稠密的。

$\hat{}\hat{}$ 由 (4d) 可知，$X'_k|_{(W_k|_U)}$ 在 $\overline{A} \times P'_{k,A} \to \overline{A} \times P_{k,A/B}$ 下的支集之像包含于 $\hat{}Y_{B,k}|_U$ 的支集，因此 Sp_{C_k}($Y_{B,k}$ 的支集)。由此，$X'_k|_{W_k}$ 的支集之像包含于 Sp_{C_k}($Y_{B,k}$ 的支集)。□

断言 3. 设 $P''_{k,A/B} \to P'_{k,A/B}$ 是一个 $Z'_{k,A/B}$-容许修改。设 $Z''_{k,A/B} \subset P''_{k,A/B}$ 为极小变换。令 $\hat{}P''_{k,A} = (\hat{}P'_{k,A} \times_{P'_{k,A/B}} P''_{k,A/B})[Z''_{k,A/B}]$ 且 $W_k^+ = (W_k \times_{P'_{k,A/B}} P''_{k,A/B})[Z''_{k,A/B}] \subset \hat{}P''_{k,A}$。则 $\mathcal{F}_{\hat{}P''_{k,A}} \to W_k^+$。

$$\begin{array}{ccc} \hat{P}''_{k,A} & \xrightarrow{\sigma''} & P''_{k,A/B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{P}'_{k,A} & \xrightarrow{\sigma'} & P'_{k,A/B} \end{array}$$

$\hat{}$ 证明。令 $V''_k = (V'_k \times_{P'_{k,\ A/B}} P''_{k,\ A/B})[Z''_{k,A/B}] \subset P''_{k,\ A}$。由于 $V'_k|_{Z'_{k,\ A/B}} \to Z'_{k,\ A/B}$ 是平坦的，引理 11.10 得出 $V''_k|_{Z''_{k,\ A/B}} = V'_k|_{Z'_{k,\ A/B}} \times_{Z'_{k,\ A/B}} Z''_{k,\ A/B}$。同样地，将引理 11.10 应用于 $V'_k|_{Z'_{k,\ A/B}} \to P'_{k,\ A/B}$，我们有

$$((V'_k|_{Z'_{k,A/B}}) \times_{P'_{k,A/B}} P''_{k,A/B})[Z''_{k,A/B}] = V'_k|_{Z'_{k,A/B}} \times_{Z'_{k,A/B}} Z''_{k,A/B}.$$

注意，$W_k^+ =$支集$(((V'_k|_{Z'_{k,A/B}}) \times_{P'_{k,A/B}} P''_{k,A/B})[Z''_{k,A/B}])$。因此我们得到

$$\operatorname{supp} V''_k|_{Z''_{k,A/B}} = W_k^+.$$

$\hat{}\hat{}$ 现在根据引理 11.9，我们有 $V''_k = (V_k \times_{P_{k,A/B}} P''_{k,A/B})[Z''_{k,A/B}]$ 以及 $P''_{k,A} = (P_{k,A} \times_{P_{k,A/B}} P''_{k,\ A/B})[Z''_{k,A/B}]$。因此根据 (4c)，我们有 $\mathcal{F}_{\hat{}P''_{k,A}} \to V''_k$。根据假设 11.2，我们有 $\mathcal{F}_{P''_{k,A/B}} \to Z''_{k,A/B}$。于是根据引理 3.5 和引理 3.8，我们得到 $\mathcal{F}_{\hat{}P''_{k,A}} \to W_k^+$。这就完成了该断言的证明。□

我们将证明 $C \in \mathcal{B}$。我们先证明 $C \in \Pi(\mathcal{F})$。由引理 11.9，得 $\hat{}\hat{}\hat{}X'_k = (\overline{X}_k \times_{P_{k,\ A}} P'_{k,\ A})[Z'_k]$。因此，由引理 11.14，得

$$f_{[k]}(\mathbb{D}) \subset \hat{X}'_k \tag{11.12}$$

对所有 $f \in \mathcal{F}$，除有限例外外均成立。我们有 $\mathcal{F}_{\hat{}P'_{k,\ A}} \to W_k$。因此，由引理 3.8，$\{f_{[k]}\}_{f\in\mathcal{F}} \to \hat{}X'_k|_{W_k}$。由上面的断言 2，得 $\mathcal{F} \to \mathrm{Sp}_{C_k} Y$，因此 $\mathcal{F} \to \mathrm{Sp}_{C_k} \overline{X}$。因此，由 $\Lambda_{X,\ \overline{A}}(\mathcal{F}) = \emptyset$，可得 $C_k \in \Pi(\mathcal{F})$。于是 $C \in \Pi(\mathcal{F})$。特别地，得 $C \neq A$。

由 $C \in \Pi(\mathcal{F})$，$T_{k,\ A/B}$ 的定义可得 $T_{k,\ A/B} \not\subset E_{k,\ A/B,\ A/C}$。因此

$$Z_{k,A/B} \not\subset E_{k,A/B,A/C}. \tag{11.13}$$

注意到有理映射 $P_{k,\ A/B} \dashrightarrow P_{k,\ A/C}$ 在 $E_{k,\ A/B,\ A/C}$之外是正则的。因此，对于 $Z_{k,\ A/B}$-可容许映射 $P'_{k,\ A/B} \to P_{k,\ A/B}$，我们还可以假设

- μ： $P'_{k,\ A/B} \to P_{k,\ A/C}$ 存在。

我们得到如下结果：

$$\begin{array}{ccccc} \hat{P}'_{k,A} & \xrightarrow{\sigma'} & P'_{k,A/B} & \xrightarrow{\mu} & P_{k,A/C} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \hat{P}_{k,A} & \xrightarrow[\sigma]{} & P_{k,A/B} & & \end{array}$$

由引理 11.16，我们有

$$Z_{k,A/C} \subset \mu(Z'_{k,A/B}). \tag{11.14}$$

^^ 现在我们将证明 τ: $P'_{k,\ A} \to P_{k,\ A/C}$和 $W_k \subset P'_{k,\ A}$满足条件 (4)。由 ^^^ 引理 11.9，我们有 $X'_k = (X_k \times_{P_{k,\ A}} P'_{k,\ A})[Z'_k]$。注意到，由 ^^$\sigma'(W_k) = Z'_{k,\ A/B}$ 可推出 $Z_{k,\ A/C} \subset \tau(W_k)$（参见 (11.14)）。此外，由 $V_k \subset Z_k$，我们有 $W_k \subset V'_k \subset Z'_k$。这些证明了 (4a)。^^^^ 由于 $X_k|_{Z_k} \to Z_k$是平坦的，引理 11.10 表明 $X'_k|_{\hat{Z}'_k} \to Z'_k$是平坦的。这证明了 (4b)。

接下来证明 (4c)。设 $P'_{k,\ A/C} \to P_{k,\ A/C}$ 是一个 $Z_{k,\ A/C}$-容许修改。我们考虑以下

$$\begin{array}{ccccc} \hat{P}''_{k,A} & \xrightarrow{\sigma''} & P''_{k,A/B} & \longrightarrow & P'_{k,A/C} \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{P}'_{k,A} & \xrightarrow{\sigma'} & P'_{k,A/B} & \xrightarrow{\mu} & P_{k,A/C} \end{array}$$

这里 $P''_{k,A/B} = (P'_{k,A/B} \times_{P_{k,A/C}} P'_{k,A/C})[Z'_{k,A/C}]$。于是 $P''_{k,A/B} \to P'_{k,A/B}$ 是一个 $Z'_{k,A/B}$-容许^^ 修改（参见 (11.14)）。由于 $P'_{k,A}$ 是整的，我们可以应用引理 11.8 得到 $P''_{k,A} = \hat{}(P'_{k,A} \times_{P_{k,A/C}} P'_{k,A/C})[Z'_{k,A/C}]$（参见 (11.14)）。令 $W'_k = (W_k \times_{P_{k,A/C}} P'_{k,A/C})[Z'_{k,A/C}]$。于是由引理 11.8，得到 $W^+_k \subset W'_k$（参见 (11.14)）。因此由断言 3，得到 $\mathcal{F}\hat{}_{P''_{k,A}} \to W'_k$。这就证明了 (4c)。

^^ 最后，为了验证 (4d)，我们证明像 $X'_k|_{W_k} \subset \overline{A} \times P'_{k,A} \to \overline{A} \times P_{k,A/C}$ 包含于 $S_{C,k} \subset \overline{A} \times P_{k,\ A/C}$ 中，其中 $S = \mathrm{Sp}_C \overline{X}$。我们有 $\mathrm{Sp}_C Y = S$。因此得到 $\mathrm{Sp}_C(Y_{B,k}) = S_{B,k}$。因此引理 11.17 得出

$$\mathrm{Sp}_C(Y_{B,k})|_{(P_{k,A/B} \setminus E_{k,A/B,A/C})} \subset \varphi^{-1}(S_{C,k}), \tag{11.15}$$

其中 $\varphi: \overline{A} \times (P_{k,A/B} \setminus E_{A/B,A/C,k}) \to \overline{A} \times P_{k,A/C}$。我们取 $U \subset P_{k,A/B}$使得 $U \cap Z_{k,A/B} \neq \emptyset$且 $P'_{k,\ A/B} \to P_{k,A/B}$是 U上的同构。我们将 $U \subset P'_{k,A/B}$视为。根据 (11.13)，不妨设

$$U \subset P_{k,A/B} - E_{k,A/B,A/C}.$$

由于 $V'_k|_{Z'_{k,\ A/B}} \to Z'_{k,A/B}$ 是平坦的，引理 B.1 得出 $W_k|_{(Z'_{k,A/B} \cap U)} \subset W_k$ 是稠密的。由断言 ^^ 2 和 (11.15)，$X'_k|_{W_k|_{(Z'_{k,A/B} \cap U)}}$ 在 $\overline{A} \times P'_{k,A} \to \overline{A} \times P_{k,A/C}$ 下的像包含于 $S_{C,k}$，^前提是 k 足够大，使得 $C_k = C$。由于 $X'_k|_{W_k} \to W_k$ 是平坦的，引理 B.1 得出 ^^^^ 包含映射 $X'_k|_{W_k|_{(Z'_{k,A/B} \cap U)}} \subset X'_k|_{W_k}$是稠密的。因此，像 supp $X'_k|_{W_k} \subset \overline{A} \times P'_{k,A} \to \overline{A} \times P_{k,A/C}$ 包含于 $S_{C,\ k} \subset \overline{A} \times P_{k,A/C}$。由此我们证明了 $C \in \mathcal{B}$。

现在我们完成引理的证明。取满足 $B \in \mathcal{B}$的极大 $B \subset A$。令$C = \mathrm{Stab}^0(Y_{B,\ k})_y \subset A$，其中一般的$y \in Z_{k,\ A/B}$ 且 k充分大。于是 $B \subset C$。由 $C \in \mathcal{B}$以及 $B \in \mathcal{B}$的极大性可得 $C = B$。这就完成了引理 11.18 的证明。□

11.5. 命题 11.3 的证明。由于 $\mathcal{F}$ 满足假设 11.2，且$\Lambda_{X,\ \mathfrak{A}}(\mathcal{F}) = \emptyset$，我们可以取引理 11.18 中的 B。于是 $B \in \Pi(\mathcal{F})$。特别地，$B \neq A$。

接下来我们证明命题 11.3 的性质(2)。我们取充分大的 k_0，使得引理11.18 的(2)、(3)、(4) 和 (5) 对于 $k \geq k_0$ 成立。对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{k \geq 1}$,

令 $Z_{k,A/B} \subset P_{k,A/B}$ 由 (11.1) 定义。则 $Z_{k,A/B}$ 是一个不可约扎里斯基闭集，使得 $T_{k,A/B} \subset Z_{k,A/B}$。设 $Y = \mathrm{Sp}_B \overline{X}$。若 $k \geq k_0$，则对于一般的 $y \in Z_{k,A/B}$，自然映射 $(Y_{B,k})_y \to (Y_{B,k-1})_{y_0}$ 是一个同构，其中 $y_0 \in P_{k-1,A/B}$ 是 y 在映射 $P_{k,A/B} \to P_{k-1,A/B}$ 下的像（参见引理 11.18 (5)）。我们设 $S = P_{k_0,A/B}$。则 $P_{k_0+l,A/B} \subset S_{l,A/B}$（参见注记 2.3）。我们将其视为 $Z_{k_0+l,A/B} \subset S_{l,A/B}$。我们设 $Z = Z_{k_0+1,A/B} \subset S_{1,A/B}$。由引理 10.1，$Z$ 是水平可积的。事实上，引理 10.1 的假设 (1) 由引理 11.18 (3) 得出。引理 10.1 的假设 (2) 直接由引理 11.18 (5) 得出。由 $B \in \Pi(\mathcal{F})$，$T_{k_0+l,A/B}$ 的定义表明 $T_{k_0+l,A/B} \not\subset E_{k_0+l,A/B,A/B}$ 是 $P_{k_0+l,A/B}$的子集。由 $P^{\mathrm{sing}}_{k_0+l,A/B} = E_{k_0+l,A/B,A/B}$（参见 (2.17)），我们得到 $T_{k_0+l,A/B} \not\subset P^{\mathrm{sing}}_{k_0+l,A/B}$，因此 $Z_{k_0+l,A/B} \not\subset P^{\mathrm{sing}}_{k_0+l,A/B}$。注意 $P_{k_0+l,A/B} \subset S_{l,A/B} \subset P$（$TS_{l-1,A/B} \times \mathrm{Lie}(A/B)$）。于是我们有

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{sing}}_{l,A/B} \cap P_{k_0+l,A/B} &= P(T_{S_{l-1,A/B}/S} \times \{0\}) \cap P_{k_0+l,A/B} \\ &\subset P(TS_{l-1,A/B} \times \{0\}) \cap P_{k_0+l,A/B} = P^{\mathrm{sing}}_{k_0+l,A/B}. \end{aligned}$$

因此 $Z_{k_0+l,\ A/B} \not\subset S^{\mathrm{sing}}_{l,\ A/B}$。因此，对于一般的 $y \in Z$，存在 $y_l \in Z_{k_0+l,\ A/B} - S^{\mathrm{sing}}_{l,\ A/B}$，使得 $(Y_{B,\ k_0+1})_y = (Y_{B,\ k_0+l})_{y_l}$。注意到

$$Y_{B,k_0+l} = (Y_{B,k_0})_{B,l} \cap (\overline{A} \times P_{k_0+l,A/B})$$

对于 $l \geq 1$，这由定义 (9.3) 和 (10.1) 得出。因此，引理 10.1 的假设 (3) 得到满足。于是 Z 是水平可积的。

^^^ 现在我们证明 $\mathcal{F} \to \mathrm{Sp}_B \overline{X}$。我们取引理 11.18 (4) 中的 $P_{k,\ A} \to P_{k,\ A}$ 和 $X_k \subset \overline{A} \times P_{k,\ A}$，其中固定 $k \geq k_0$。由引理 11.14，对除有限例外外的所有 $f \in \mathcal{F}$，我们有 $f_{[k]}(\mathbb{D}) \subset X_k$。^ 因此，由 $\mathcal{F}_{\hat{P}_{k,\ A}} \to V_k$（参见引理 11.18 (4c)），我们有 $\{f_{[k]}\}_{f \in \mathcal{F}} \to X_k|_{V_k}$（参见引理 3.8）。因此，由引理 11.18 (4d)，我们有 $\mathcal{F} \to \mathrm{Sp}_B \overline{X}$。□

12. Proof of Theorem 1.2

本截面的目的是证明定理 1.2。

引理 12.1. 设 $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ 是 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, A)$ 中的全纯映射无限指标族。那么，用其无限子族替换 $\mathcal{F}$ 后，对于 $\mathcal{F}$ 的所有无限子族 $\mathcal{G}$，我们有 $\Pi(\mathcal{G}) = \Pi(\mathcal{F})$。

证明。半阿贝尔子簇仅有可数多个 $B \subset A$（参见 [35, 推论 5.1.9]）。因此，我们将它们枚举为 $B_1, B_2, \ldots$。注意，这个枚举可能是有限的。如果 I 包含一个无限子集 $I' \subset I$，使得 $(|(\varpi_{B_1} \circ f_i)'|_{\omega_{A/B_1}})_{i \in I'}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 0，那么我们令 $I_1 = I'$。如果不存在这样的 I'，那么我们令 $I_1 = I$。如果 I_1 包含一个无限子集 $I' \subset I_1$，使得 $\{|(\varpi_{B_2} \circ f_i)'|_{\omega_{A/B_2}}\}_{i \in I'}$ 在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致收敛到 0，那么我们令 $I_2 = I'$。如果不存在这样的 I'，那么我们令 $I_2 = I_1$。继续这一过程，得到递减的（可能有限的）无限集序列 $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$。如果该序列是有限的 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_L$，那么我们令 $I_L = I_{L+1} = I_{L+2} = \cdots$，以无限延续该序列。我们定义 I 中的一个由互不相同的元素组成的无限序列 $i_1, i_2, i_3, \ldots$，使得对每个 $l \geq 1$，都有

$$i_k \in I_l \tag{12.1}$$

对所有 $k \geq l$ 均成立。该序列按如下方式归纳地构造。取 $i_1 \in I_1$。假设已选取互不相同的元素 $i_1, i_2, \ldots, i_n$，使得对所有满足 $1 \leq l \leq k \leq n$ 的 $k, l \in \mathbb{N}$，(12.1) 均成立。接着取 $i_{n+1} \in I_{n+1} - \{i_1, \ldots, i_n\}$。这样便构造出了具有所需性质 (12.1) 的序列 $i_1, i_2, \ldots$。

现在令 $J = \{i_1, i_2, i_3, \ldots\}$。那么对任意半阿贝尔子簇 B，以下两种情况必有其一：

- $(|(\varpi_B \circ f_i)'|_{\omega_{A/B}})_{i \in J}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 0，或者
- $(|(\varpi_B \circ f_i)'|_{\omega_{A/B}})_{i \in J}$ 的任意无限子族都不在$\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 0。

因此，将 $\mathcal{F}$替换为 $(f_j)_{j \in J}$，我们得到：对于 $\mathcal{F}$的任意无限子族 $\mathcal{G}$，$\Pi(\mathcal{G}) = \Pi(\mathcal{F})$。□

引理 12.2. 设 $\mathcal{F}=(f_i)_{i\in I}$ 是 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D},A)$中的一个非恒定全纯映射的无限指标族。则存在 $\mathcal{F}$ 的一个无限子族 $\mathcal{G}$，使得 $\mathcal{G}$ 的所有无限子族都满足假设 3.19。

证明。将 $\mathcal{F}$ 替换为其无限子族后，我们有

$$\Pi(\mathcal{F}')=\Pi(\mathcal{F}) \tag{12.2}$$

对于 $\mathcal{F}$ 的所有无限子族 $\mathcal{F}'$（参见引理 12.1）。设 $k\geq 1$ 和 $B\in\Pi(\mathcal{F})$。满足 $(f_i)_{P_{k,\,A}}(\mathbb{D})\subset E_{k,\,A,\,A/B}$ 的 $i\in I$ 只有有限多个；因为若 $(f_i)_{P_{k,\,A}}(\mathbb{D})\subset E_{k,\,A,\,A/B}$，则 $(\varpi_B\circ f_i)'=0$。因此，给定 $\mathcal{F}$ 的无限子族 $\mathcal{F}'$，我们可以应用引理 3.14，得到 $\mathcal{F}'$ 的一个无限子族$\mathcal{H}$，使得 $\mathrm{LIM}(\mathcal{H}_{P_{k,\,A}},\{E_{k,A,A/B}\}_{B\in\Pi(\mathcal{F})})$ 存在。

对 $k=1$ 应用上述论证，得到一个无限子族 $\mathcal{F}_1=(f_i)_{i\in I_1}$，其中 $I_1\subset I$，使得 $\mathrm{LIM}((\mathcal{F}_1)_{P_1,A},\{E_{1,A,A/B}\}_{B\in\Pi(\mathcal{F})})$ 存在。再对 $k=2$ 应用上述论证，得到一个无限子族 $\mathcal{F}_2=(f_i)_{i\in I_2}$，其中 $I_2\subset I_1$，使得 $\mathrm{LIM}((\mathcal{F}_2)_{P_2,A},\{E_{2,A,A/B}\}_{B\in\Pi(\mathcal{F})})$ 存在。继续此过程，得到一个递减的无限集序列 $I\supset I_1\supset I_2\supset\dots$。我们定义 I 的一个可数无限子集 $J=\{i_1,i_2,i_3,\dots\}$，使得对所有 $l\geq 1$ 和 $k\geq l$，（12.1）成立（参见引理 12.1 的证明）。设 $\mathcal{G}=(f_i)_{i\in J}$。那么，对所有 $k\geq 1$，$\mathrm{LIM}(\mathcal{G}_{P_k,A},\{E_{k,A,A/B}\}_{B\in\Pi(\mathcal{F})})$ 存在（参见注记 3.13（3））。设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{G}$的一个无限子族。那么，对所有 $k\geq 1$，$\mathrm{LIM}(\mathcal{H}_{P_k,A},\{E_{k,A,A/B}\}_{B\in\Pi(\mathcal{F})})$ 存在（参见注记 3.13（3））。因此，由（12.2），对所有 $k\geq 1$，$\mathrm{LIM}(\mathcal{H}_{P_k,A},\{E_{k,A,A/B}\}_{B\in\Pi(\mathcal{H})})$ 存在。于是 $\mathcal{H}$ 满足假设 3.19。证明完毕。□

引理 12.3. 设 $\mathcal{F}\subset\mathrm{Hol}(\mathbb{D},A)$ 是一个由非恒定全纯映射组成的无限集。将 $\mathcal{F}$ 替换为其一个无限子集后，我们可以假设假设 11.2 成立。

证明. 将 $\mathcal{F}$ 替换为其一个无限子集后，我们可以假设 (12.2) 对所有无限子集 $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$ 都成立（参见引理 12.1）。我们将 $\Pi(\mathcal{F})$ 的元素依次记为 $B_1,B_2,\dots$. 注意，这个序列可能是有限的。应用引理 12.2，可得到一个无限子集 $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}$，使得 $(\mathcal{F}_1)_{A/B_1}$ 的所有无限子族都满足假设 3.19。再次应用引理 12.2，可得到一个无限子集 $\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}_1$，使得 $(\mathcal{F}_2)_{A/B_2}$ 的所有无限子族都满足假设 3.19。继续这一过程，可得到一个（可能有限的）无限集递降序列 $\mathcal{F}\supset\mathcal{F}_1\supset\mathcal{F}_2\supset\dots$。如果这个序列是有限的 $\mathcal{F}_1\supset\mathcal{F}_2\supset\cdots\supset\mathcal{F}_L$，那么我们令 $\mathcal{F}_L=\mathcal{F}_{L+1}=\mathcal{F}_{L+2}=\cdots$，并继续无限进行。我们定义一个可数无限子集 $\mathcal{G}=\{f_1,f_2,f_3,\dots\}$，使得对于所有 $l\geq 1$ 和 $k\geq l$，都有 $f_k\in\mathcal{F}_l$（参见引理 12.1 的证明）。于是，对于所有 $B\in\Pi(\mathcal{F})$，$\mathcal{G}_{A/B}$ 满足假设 3.19。由 (12.2)，我们有 $\Pi(\mathcal{G})=\Pi(\mathcal{F})$。因此，对于所有 $B\in\Pi(\mathcal{G})$，$\mathcal{G}_{A/B}$ 满足假设 3.19。故 $\mathcal{G}$ 满足假设 11.2。□

引理 12.4. 设 $X\subsetneq A$。设 $\overline{A}$ 为光滑等变紧化，并设 $\overline{X}\subset\overline{A}$ 为紧化。设 $\mathcal{F}\subset\mathrm{Hol}(\mathbb{D},X)$ 是一个全纯映射的无限集。那么存在一个半阿贝尔子簇 $B\subset A$ 和一个无限子集 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$，满足以下两个性质：

(1) 设 $\overline{A/B}$ 为光滑等变紧化。那么存在一个无限子集$\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$，使得 $\{\varpi\circ f\}_{f\in\mathcal{H}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g\colon\mathbb{D}\to\overline{A/B}$，其中 $\varpi\colon A\to A/B$ 是商映射。(2) $\mathcal{G}\to\mathrm{Sp}_B\overline{X}$。

证明。我们可以假设 $\mathcal{F}$ 只包含有限多个常值映射；否则，令 $B=\{0\}$，并令 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$中的常值映射集合，即可直接得到本引理。我们从 $\mathcal{F}$ 中去除这些常值映射，并假设 $\mathcal{F}$ 的所有元素都是非恒定的。

我们首先将问题归约到 $\overline{A}$ 为射影的情形。当这一条件不满足时，我们可以取一个等变修改 $A\to\overline{A}$，使得 A 光滑且射影（参见引理 A.8）。令 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}X\subset A$ 为紧化。则 $\mathrm{Sp}_BX\subset X$ 在自然映射 $X\to\overline{X\hat{}}$ 下的像包含于 $\mathrm{Sp}_B\overline{X}$ 中。因此，$\mathcal{G}\to\mathrm{Sp}_BX$ 蕴含 $\mathcal{G}\to\mathrm{Sp}_B\overline{X}$。于是我们已将问题归约到 $\overline{A}$ 为射影的情形。

由引理 12.3，我们可以取一个无限子集 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{G}$ 满足假设 11.2。我们分两种情况证明该引理。

若 $\Lambda_{X,\ \overline{A}}(\mathcal{G})\neq\emptyset$，则取 $B\in\Lambda_{X,\ \overline{A}}(\mathcal{G})$。于是 $\mathcal{G}\to\mathrm{Sp}_B\overline{X}$，并且存在一个无限子集 $\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$，使得 $\{|(\varpi\circ f)'|_{\omega_{A/B}}\}_{f\in\mathcal{H}}$在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致收敛到 0。因此我们得出结论：$\{\varpi\circ f\}_{f\in\mathcal{H}}$收敛到某个常值映射。故本情形下引理成立。

若 $\Lambda_{X,\ \overline{A}}(\mathcal{G})=\emptyset$，则取命题 11.3 中的 B。我们有 $\mathcal{G}\to\mathrm{Sp}_B\overline{X}$。由命题 11.3 (1)，有 $B\in\Pi(\mathcal{G})$。因此，$\mathrm{Hol}(\mathbb{D},A/B)$ 中的无限指标族 $\mathcal{G}_{A/B}$ 仅含有限个常值映射，并满足假设 3.19。由命题 11.3 (2)，可得 k，使得 $Z_{k+1,\ A/B}\subset P_{k+1,\ A/B}$ 水平可积，其中 $Z_{k+1,\ A/B}$ 由 (11.1) 定义。令 $\overline{A/B}$ 为一个光滑等变紧化。由推论 8.4，可取一个无限子集 $\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$，使得 $\{\varpi\circ f\}_{f\in\mathcal{H}}$ 在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致收敛到 $g:\mathbb{D}\to\overline{A/B}$。证明完成。□

ˆ设 $B\subset A$ 为一个半阿贝尔子簇。设 A 和 $\overline{A/B}$ 为等变紧化，且存在一个等变映射 $p:A\to\overline{A/B}$。我们考虑以下假设：

ˆ假设 12.5。对于每个 $x\in A$，如果半阿贝尔子簇 $C\subset A$ 满足 $C\cdot p(x)=\hat{}p(x)$，那么 $C\cdot x\subset B\cdot x$ 是 A 的子集。

ˆ通过选取一个等变爆破 $\varphi:A\to A$ 和一个特定的等变紧化 $\overline{A/B}$，我们可以假设该假设成立。我们可以假设 $\overline{A/B}$ 是光滑的。这是引理 A.15 的推论。

引理 12.6。设 $X\subsetneq A$ 为一个真闭子簇。设 $B\subset A$ 为一个半阿贝尔子簇。设 $\overline{A/B}$ 为一个光滑等变紧化，A 为一个等变紧化，并且存在满足假设 12.5 的等变映射 $p:A\to\overline{A/B}$。设 ˆˆˆ$\mathcal{F}\subset\mathrm{Hol}(\mathbb{D},X)$ 是一族无限的全纯映射，且 $\mathcal{F}\to\mathrm{Sp}_BX$，其中 $X\subset A$ 是 $X\subset A$ 的扎里斯基闭包。假设 $(p\circ f)_{f\in\mathcal{F}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g:\mathbb{D}\to\overline{A/B}$，且 $g(\mathbb{D})\subset\partial(A/B)$。那么存在一个半阿贝尔子簇 $B'\subset A$，使得 $B\subset B'$，并满足以下两个性质：

(1) $(p'\circ f)_{f\in\mathcal{F}}$ 在 $\mathbb{D}$ 上紧子集一致收敛到 $h:\mathbb{D}\to A/B'$，其中$p':A\to A/B'$ 是商映射。ˆ (2) $\mathcal{F}\to\mathrm{Sp}_{B'}X$。

ˆ证明。令 $Y\subset X$ 为满足 $\mathcal{F}\to Y$ 的最小扎里斯基闭集（参见引理 3.6）。我们有

$$Y\subset\mathrm{Sp}_B(\hat{X}). \tag{12.3}$$

注意，$p(Y)$是满足$(p\circ f)_{f\in\mathcal{F}}\to p(Y)$的最小扎里斯基闭集。因此，$p(Y)$是 $g(\mathbb{D})$的扎里斯基闭包（参见注记 3.7）。由 $g(\mathbb{D})\subset\partial(A/B)$，我们有 $p(Y)\subset\partial(A/B)$。令 $V\subset\overline{A/B}$为 $p(Y)+(A/B)\subset\overline{A/B}$ 的扎里斯基闭包。由于 $p(Y)$ 不可约，V 也不可约。注意，V 是 A/B- 不变的。因此由引理 A.11，存在一个 A/B-不变的扎里斯基开集$W\subset\overline{A/B}$，使得 $V\subset W$，且存在一个等变态射$\tau:W\to V$。令 $I\subset A/B$ 为 V的各向同性群。令 $O\subset V$为唯一的稠密A/B-轨道。则 O 同构于$(A/B)/I$，且 $O\cap p(Y)\neq\emptyset$。因此

$$g(\mathbb{D})\not\subset V\backslash O. \tag{12.4}$$

由于 $(p\circ f)_{f\in\mathcal{F}}$在 $\mathbb{D}$上在紧子集上一致收敛到 g，指标族 $(\tau\circ p\circ f)_{f\in\mathcal{F}}$在 $\mathbb{D}$上在紧子集上一致收敛到 $\tau\circ g=g$。对于所有 $f\in\mathcal{F}$，我们有 $\tau\circ p\circ f(\mathbb{D})\subset O$。因此由 (12.4)，我们有 $g(\mathbb{D})\subset O$。令 B' 为满足 $B'/B=I$的 $B\subset B'\subset A$。那么在同构 $O\simeq A/B'$下，我们有 $p'\circ f=\tau\circ p\circ f$。因此我们证明了 (1)。

ˆ接下来，我们将证明 $\mathcal{F}\to\mathrm{Sp}_{B'}(X)$。注意，$B'$ 在 $p(Y)$ 上的作用是平凡的。ˆ因此，根据假设 12.5，我们有 $B'+Y\subset B+Y$。由于 $\mathrm{Sp}_B(X)$ 是 B-不变的，我们有

$B+Y\subset \mathrm{Sp}_B X$ （参见 (12.3)）。因此我们得到

$$B'+Y\subset \mathrm{Sp}_B\hat{X}\subset \hat{X}.$$

因此 $Y\subset \mathrm{Sp}_{B'}X$，所以 $\mathcal{F}\to \mathrm{Sp}_{B'}X$。 □

引理 12.7。设 $X\subsetneq A$ 是一个真闭子簇。则存在一个光滑等变紧化 $\overline{A}$，使得 $\mathrm{Sp}_A(\overline{X})=\emptyset$。

证明。设 A为一个等变紧化，令 $X\subset A$ 为闭包。将 $Z=\bigcap_{a\in A}(a+X)$ 视为概形。由 $X\neq A$，我们有支集 $Z\subset \partial A$。设 $m\colon A\times A\to A$ 为等变紧化 A上的A-作用。我们首先证明

$$m^*Z=A\times Z \tag{12.5}$$

事实上，对于所有 $a\in A$，我们都有 $a+Z=Z$。因此，根据引理 A.17，我们有 $A\times Z\subset m^*Z$。为了证明逆命题 $m^*Z\subset A\times Z$，我们考虑同构 $\mu\colon A\times A\to A\times A$，其定义为 $(a,x)\mapsto(a,m(-a,x))$。根据引理 A.17，我们还有 $A\times Z\subset \mu^*(A\times Z)$。注意，$m\circ\mu\colon A\times A\to A$ 是第二投影。因此 $\mu^*m^*Z=A\times Z$。于是 $\mu^*m^*Z\subset\mu^*(A\times Z)$，从而 $m^*Z\subset A\times Z$。因此我们得到 (12.5)。

我们断言，爆破 $\tilde{A}=\mathrm{Bl}_Z A$ 等变紧化。事实上，映射 $m\colon A\times A\to A$ 诱导出 $m'\colon A\times \mathrm{Bl}_Z A\to A$。注意，$A\times \mathrm{Bl}_Z A=\mathrm{Bl}_{A\times Z}(A\times A)$。因此，由 (12.5)，$(m')^*Z$ 是一个卡蒂埃除子。因此，m' 可分解为 $A\times \mathrm{Bl}_Z A\to \mathrm{Bl}_Z A$。于是我们已证明 $\mathrm{Bl}_Z A$ 是一个等变紧化。

现在我们可以取有限个点 $a_1,\dots,a_l\in A$，使得 $Z=\bigcap_{i=1}^{l}(a_i+\tilde{X})$作为概形成立。于是我们有

$$\bigcap_{i=1}^{l}(a_i+\hat{X})=\emptyset, \tag{12.6}$$

其中 $X\subset A$ 是 X的扎里斯基闭包。我们来证明这一点。令 $\varphi\colon A\to A$ 为该态射。由于 $\varphi^*Z\subset A$ 是一个卡蒂埃除子，$\mathcal{I}_{\varphi^*Z}\subset\mathcal{O}_{\hat{A}}$ 是一个可逆层。由$\mathcal{I}_{\varphi^*(a_i+\tilde{X})}\subset\mathcal{I}_{\varphi^*Z}\subset\mathcal{O}_A$，我们取 $Y_i\subset A$，使得$\mathcal{I}_{Y_i}=\mathcal{I}_{\varphi^*(a_i+\tilde{X})}\otimes(\mathcal{I}_{\varphi^*Z})^{-1}\subset\mathcal{O}_A$。于是由$\mathcal{I}_{\varphi^*(a_1+\tilde{X})}+\cdots+\mathcal{I}_{\varphi^*(a_l+\tilde{X})}=\mathcal{I}_{\varphi^*Z}$，我们有 $\mathcal{I}_{\varphi^*Z}\cdot(\mathcal{I}_{Y_1}+\cdots+\mathcal{I}_{Y_l})=\mathcal{I}_{\varphi^*Z}$，从而$\mathcal{I}_{Y_1}+\cdots+\mathcal{I}_{Y_l}=\mathcal{O}_A$。因此 $Y_1\cap\cdots\cap Y_l=\emptyset$。注意，$a_i+X\subset Y_i$。于是得到 (12.6)。由 $\mathrm{Sp}_A(X)\subset\bigcap_{i=1}^{l}(a_i+X)$，我们有 $\mathrm{Sp}_A(X)=\emptyset$。由引理 A.7，我们可以取一个光滑等变修改$\overline{A}\to A$。于是 $\overline{A}$ 满足我们的断言。（另见 [35, 命题 5.6。7]。）□

设 $X\subset A$ 为闭子簇，且 $\mathcal{F}\subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D},X)$ 为无限集。给定一个等变的紧化 A，我们令

$$Q(\bar{A},\mathcal{F})=\{B\subset A\ ;\ \mathcal{F}\to \mathrm{Sp}_B\bar{X}\},$$

其中 $X\subset A$ 是扎里斯基闭包。如果 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$是一个无限子集，那么我们有 $Q(A,\mathcal{F})\subset Q(A,\mathcal{G})$。事实上，如果 $B\in Q(A,\mathcal{F})$，那么 $\mathcal{F}\to\mathrm{Sp}_B X$。因此 $\mathcal{G}\to\mathrm{Sp}_B X$，这表明 $B\in Q(A,\mathcal{G})$。

引理 12.8. 将 $\mathcal{F}$ 替换为其无限子集后，对于所有无限子集 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 以及所有光滑等变紧化 A，我们有 $Q(A,\mathcal{F})=Q(A,\mathcal{G})$。

证明。光滑等变紧化 A 和半阿贝尔子簇 $B\subset A$ 的对(A,B)是可数的（参见引理A.10和 [35, 推论5.1。9]）。因此我们将它们枚举为(A_1,B_1)、(A_2,B_2) .....在下文中，我们构造一个无限子集的递降序列 $\mathcal{F}\supset\mathcal{F}_1\supset\mathcal{F}_2\supset\cdots$，使得对于所有 $k\geq 1$，以下情况之一发生：

(1) $\mathcal{F}_k\to\mathrm{Sp}_{B_k}X_k$，其中 $X_k\subset A_k$ 是 A_k 中 X 的扎里斯基闭包，或 (2) 对所有无限子集 $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}_k$，$\mathcal{F}'\not\to\mathrm{Sp}_{B_k}X_k$。

构造如下。若存在一个无限子集 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$，使得 $\mathcal{F}' \to \mathrm{Sp}_{B_1} X_1$，则令 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}'$；否则令 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$。若存在 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}_1$，使得 $\mathcal{F}' \to \mathrm{Sp}_{B_2} X_2$，则令 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}'$；否则令 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$。如此一来，我们得到 $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \cdots$。

我们定义 $\mathcal{F}$ 中的一个无限序列 $f_1, f_2, f_3, \ldots$，其元素互不相同，使得对每个 $l \geq 1$，都有

$$f_k \in \mathcal{F}_l \tag{12.7}$$

对所有 $k \geq l$均成立。该序列按如下方式归纳构造。取 $f_1 \in \mathcal{F}_1$。假设已选取互不相同的元素 $f_1, f_2, \ldots, f_n$，使得对于满足 $1 \leq l \leq k \leq n$的所有 $k, l \in \mathbb{N}$，(12.7) 均成立。然后选取 $f_{n+1} \in \mathcal{F}_{n+1} - \{f_1, \ldots, f_n\}$。这样，我们就构造出了具有所需性质 (12.7) 的序列 $f_1, f_2, \ldots$。

现在令 $\mathcal{F}_o = \{f_1, f_2, \ldots\}$。那么 $\mathcal{F}_o \subset \mathcal{F}$是一个无限子集。设 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_o$为一个无限子集，$A$为一个光滑等变紧化。我们断言 $Q(A, \mathcal{F}_o) = Q(A, \mathcal{G})$。为证明这一点，只需证明 $Q(A, \mathcal{G}) \subset Q(A, \mathcal{F}_o)$。设 $B \in Q(A, \mathcal{G})$。我们可以取 k，使得满足 $(A, B) = (A_k, B_k)$。由于 $\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_k$是无限的，$\mathcal{G} \to \mathrm{Sp}_{B_k} X_k$推出 $\mathcal{F}_k \to \mathrm{Sp}_{B_k} X_k$。因此$\mathcal{F}_o \to \mathrm{Sp}_{B_k} X_k$，从而 $B \in Q(A, \mathcal{F}_o)$。于是 $Q(A, \mathcal{G}) \subset Q(A, \mathcal{F}_o)$。我们用 $\mathcal{F}_o$替换 $\mathcal{F}$，以完成证明。□

下文中，若不会引起混淆，我们记 $Q(A) = Q(A, \mathcal{F})$。

引理 12.9。$Q(A)$包含有限个极大元，即存在 $B_1, \ldots, B_l \in Q(A)$，使得对于所有 $B \in Q(A)$，存在 B_i 使得 $B \subset B_i$。

证明。由引理 3.6，存在一个扎里斯基闭集 $Y \subset X$，使得对于扎里斯基闭子集 $V \subset X$，有 $\mathcal{F} \to V$ 当且仅当 $Y \subset V$。若 $B \in Q(A)$，则 $Y \subset \mathrm{Sp}_B X$。由于$\mathrm{Sp}_B X$ 是 B-不变的，因此有 $B + Y \subset \mathrm{Sp}_B X$，故 $B + Y \subset X$。反之，若 $B \subset A$ 是一个半阿贝尔子簇，使得 $B + Y \subset X$，则有 $Y \subset \mathrm{Sp}_B X$。因此有$\mathcal{F} \to \mathrm{Sp}_B X$，所以 $B \in Q(A)$。故 $B \in Q(A)$ 当且仅当 $B + Y \subset X$。

令 $\varphi\colon A \times Y \to \bar{A}$ 为 A-作用 $A \times \bar{A} \to \bar{A}$的限制。则 $\varphi^{-1}(\bar{X}) \subset A \times Y$是扎里斯基闭的。我们定义 $Z \subset A$ 为满足 $\{a\} \times Y \subset \varphi^{-1}(\bar{X})$ 的 $a \in A$ 的集合。则 $Z \subset A$ 是扎里斯基闭的。我们有

$$B \in Q(\bar{A}) \iff B \subset Z. \tag{12.8}$$

我们令 $\mathcal{U} = \mathrm{Lie}(A) - \{0\}$。令 $\phi\colon \mathbb{C} \times \mathcal{U} \to A$ 为由 $\phi(z, u) = \exp(zu)$ 定义的解析映射。对于 $t \in \mathbb{C}$，我们定义 $\iota_t\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C} \times \mathcal{U}$，使得 $\iota_t(u) = (t, u)$。我们令

$$\mathcal{Z} = \bigcap_{t \in \mathbb{C}} (\phi \circ \iota_t)^{-1}(Z).$$

则 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U}$ 是一个解析子集，满足

$$u \in \mathcal{Z} \iff \phi_u(\mathbb{C}) \subset Z, \tag{12.9}$$

其中 $\phi_u\colon \mathbb{C} \to A$ 是由 $\phi_u(z) = \exp(zu)$ 定义的单参数群。对于每个 $b \in \mathbb{C}^*$，我们有 $\phi_{bu}(z) = \phi_u(bz)$。因此，$\mathcal{Z} \subset \mathcal{U}$ 在 $\mathcal{U}$上的自然 $\mathbb{C}^*$-作用下是不变的。于是，$\mathcal{Z}/\mathbb{C}^*$是 $\mathcal{U}/\mathbb{C}^* = \mathbb{P}(\mathrm{Lie}(A))$ 的解析子集。事实上，令 $\Omega \subset \mathbb{P}(\mathrm{Lie}(A))$ 为一个开集，并设自然投影 $\mathcal{U} \to \mathbb{P}(\mathrm{Lie}(A))$ 存在一个局部解析截面 $\sigma\colon \Omega \to \mathcal{U}$。于是我们有$\sigma^{-1}(\mathcal{Z}) = (\mathcal{Z}/\mathbb{C}^*) \cap \Omega$。由于 $\sigma^{-1}(\mathcal{Z}) \subset \Omega$ 是一个解析子集，$\mathcal{Z}/\mathbb{C}^*$ 是$\mathbb{P}(\mathrm{Lie}(A))$的解析子集。因此根据周氏引理，$\mathcal{Z}/\mathbb{C}^*$ 是 $\mathbb{P}(\mathrm{Lie}(A))$的代数子集。

对于 $[u] \in \mathbb{P}(\mathrm{Lie}(A))$，其中 $u \in \mathrm{Lie}(A) - \{0\}$，令 $B_{[u]}$ 为 $\phi_u(\mathbb{C}) \subset A$的扎里斯基闭包。于是 $B_{[u]} \subset A$ 是一个半阿贝尔子簇。根据（12.9），我们有

$$[u] \in \mathcal{Z}/\mathbb{C}^* \iff B_{[u]} \subset Z. \tag{12.10}$$

因此，当且仅当 $[u] \in \mathcal{Z}/\mathbb{C}^*$ $\mathbb{P}(\mathrm{Lie}(B_{[u]})) \subset \mathcal{Z}/\mathbb{C}^*$。因此 $\mathcal{Z}/\mathbb{C}^* = \cup_{[u] \in \mathcal{Z}/\mathbb{C}^*} \mathbb{P}(\mathrm{Lie}(B_{[u]}))$。注意，$A$ 的半阿贝尔子簇只有可数多个（参见 [35, 推论 5.1.9]）。因此存在 $[u_1]$, ..., $[u_l] \in \mathcal{Z}/\mathbb{C}^*$，使得 $\mathcal{Z}/\mathbb{C}^* = \mathbb{P}(\mathrm{Lie}(B_{[u_1]})) \cup \cdots \cup \mathbb{P}(\mathrm{Lie}(B_{[u_l]}))$。

现在，如果 $B \in Q(A)$，那么 $B \subset Z$（参见(12.8)）。因此我们有 $\mathbb{P}(\mathrm{Lie}(B)) \subset \mathcal{Z}/\mathbb{C}^*$（参见 (12.10)）。因此存在 $B_{[u_i]}$ 使得 $B \subset B_{[u_i]}$。这就完成了证明。□

令 Σ 为 A 的所有半阿贝尔子簇的集合。令 $\mathcal{Q}$ 为所有满足条件的子集 $Q \subset \Sigma$ 的集合。

(1) Q 包含有限个极大元，且(2) 如果 B、$B' \in \Sigma$ 使得

$B \in Q$ 和 $B' \subset B$，那么 $B' \in Q$。

那么，$\mathcal{Q}$ 满足以下条件。

引理12.10。设 $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots$ 为 $\mathcal{Q}$中的一个递降序列。则存在$k \geq 1$ 使得 $Q_k = Q_{k+1} = Q_{k+2} = \cdots$。

证明。对于每个 $Q \in \mathcal{Q}$，我们用 $Q_{\max} \subset Q$ 表示 Q 中极大元的集合。则$Q_{\max} \subset Q$ 是一个有限子集。我们令

$$P_Q = \bigcup_{B \in Q_{\max}} B.$$

于是，$P_Q \subset A$ 是一个扎里斯基闭集。我们断言，$Q \subset Q'$ 当且仅当 $P_Q \subset P_{Q'}$。事实上，假设 $Q \subset Q'$。那么对于 $B \in Q_{\max}$，我们有 $B \in Q'$，因此存在 $B' \in Q'_{\max}$ 使得$B \subset B'$。这说明 $B \subset P_{Q'}$，从而 $P_Q \subset P_{Q'}$。反过来，假设 $P_Q \subset P_{Q'}$。令 $B \in Q$。那么 $B \subset P_Q \subset P_{Q'}$。因此存在 $B' \in Q'_{\max}$ 使得 $B \subset B'$。于是根据 $\mathcal{Q}$的性质（2），我们有 $B \in Q'$。因此 $Q \subset Q'$。这样我们就证明了，$Q \subset Q'$ 当且仅当$P_Q \subset P_{Q'}$。

现在设 $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots$ 是 $\mathcal{Q}$ 中的一个递降序列。于是有 $P_{Q_1} \supset P_{Q_2} \supset P_{Q_3} \supset \cdots$。因此根据诺特性质，存在 k 使得 $P_{Q_k} = P_{Q_{k+1}} = P_{Q_{k+2}} = \cdots$。于是有 $Q_k = Q_{k+1} = Q_{k+2} = \cdots$。证明完成。□

对于每个等变紧化 A，我们有 $Q(A) \in \mathcal{Q}$。事实上，根据引理 12.9，$Q(A)$ 包含有限个极大元。若 $B \in Q(A)$ 且 $B' \subset B$，则根据 $\mathrm{Sp}_B X \subset \mathrm{Sp}_{B'} X$，我们有 $\mathcal{F} \to \mathrm{Sp}_{B'} X$，从而 $B' \in Q(A)$。因此 $Q(A) \in \mathcal{Q}$。对于一个等变紧化 $\hat{} \quad \hat{} \quad \hat{} \hat{} \hat{} A \to A$，我们有 $Q(A) \subset Q(A)$。事实上，$\mathrm{Sp}_B(X) \subset A$ 在映射 $A \to A$ 下的像为 $\hat{}$，包含于 $\mathrm{Sp}_B(X) \subset A$ 中，这意味着若 $B \in Q(A)$，则 $B \in Q(A)$。

引理 12.11. 存在一个等变紧化 A，使得对于每个等变$\hat{}$紧化 $A \to A$，都有 $Q(A) = Q(A)$。此外，我们可以取 A 为光滑的。

证明. 反设成立，则可得到一个序列 $\bar{A}_1 \leftarrow \bar{A}_2 \leftarrow \cdots$，使得 $Q(\bar{A}_1) \supsetneq Q(\bar{A}_2) \supsetneq \cdots$。但由引理 12.10，这种情况不会发生。因此，存在具有所需性质的 A。如果我们的A不光滑，则可用其光滑等变爆破替换 A。由引理 A.7，这样的爆破存在。□

我们将定理 1.2 化约为以下等价命题。

定理 12.12. 设 A 为一个半阿贝尔簇。设 $X \subsetneq A$ 为一个闭子簇。设$\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ 为全纯映射的一个无限集。则存在一个真半阿贝尔子簇 $B \subsetneq A$ 以及一个无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，满足以下两个性质：

(1) $(\varpi \circ f)_{f \in \mathcal{G}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g: \mathbb{D} \to A/B$，其中 $\varpi : A \to A/B$ 是商映射。

(2) 令$\overline{A}$ 为等变紧化，并令 $\overline{X} \subset \overline{A}$ 为紧化。则$\mathcal{G} \to \mathrm{Sp}_B \overline{X}$。

证明。由引理 12.8，将 $\mathcal{F}$ 替换为其无限子集后，我们可以假设

$$Q(\tilde{A}, \mathcal{F}) = Q(\tilde{A}, \mathcal{G}) \tag{12.11}$$

对于每个光滑等变紧化 $A \subset A$ 和每个无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$。根据引理 12.11，我们可以取一个光滑等变紧化 A，使得

$$Q(\bar{A}, \mathcal{F}) = Q(\hat{A}, \mathcal{F}) \tag{12.12}$$

对于所有 $A \to A$。

我们断言，对于任意等变紧化 A 和无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，都有

$$Q(\bar{A}, \mathcal{G}) \subset Q(\tilde{A}, \mathcal{G}). \tag{12.13}$$

为证明这一点，我们应用引理 A.7 和 A.9，得到一个光滑等变爆破 $A \to A$，使得 $\tilde{}$ 存在。然后由 (12.11) 和 (12.12)，可得

$$Q(\bar{A}, \mathcal{G}) = Q(\bar{A}, \mathcal{F}) = Q(\hat{A}, \mathcal{F}) = Q(\hat{A}, \mathcal{G}).$$

另一方面，映射 $A \to A$ 的存在给出 $Q(A, \mathcal{G}) \subset Q(A, \mathcal{G})$。因此得到 (12.13)。

现在我们对 $\mathcal{F}$ 和 A 应用引理 12.4，得到 $B_0 \subset A$ 和 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$。于是有 $\mathcal{G} \to \mathrm{Sp}_{B_0} X$，，因此 $B_0 \in Q(A, \mathcal{G})$。我们选取一个等变爆破 $\varphi : A \to A$ 和一个等变紧化 $\overline{A/B_0}$，使得 $p : A \to \overline{A/B_0}$ 存在且满足假设 12.5（参见引理 A.15）。我们可以假设 $\overline{A/B_0}$ 是光滑的。由 (12.13)，有 $B_0 \in Q(A, \mathcal{G})$。因此 $\mathcal{G} \to \mathrm{Sp}_{B_0}(X)$。由引理 12.4，可得一个无限子集 $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$，其极限为 $g : \mathbb{D} \to \overline{A/B_0}$，且来自 $(p \circ f)_{f \in \mathcal{H}}$。

我们首先考虑 $g(\mathbb{D}) \subset A/B_0$ 的情形。任取 $B_0 \in Q(A, \mathcal{G})$。因此 $\mathcal{H} \to \mathrm{Sp}_{B_0} X$。注意，$B_0$ 满足 $\mathrm{Sp}_{B_0}(X) \neq \emptyset$，对所有 A 均成立。因此由引理 12.7，得到 $B_0 \subsetneq A$。我们用 $\mathcal{H}$ 替换 $\mathcal{G}$，并令 $B = B_0$，从而完成 $g(\mathbb{D}) \subset A/B_0$ 情形的证明。

接下来假设 $g(\mathbb{D}) \not\subset A/B_0$。于是有 $g(\mathbb{D}) \subset \partial(A/B_0)$。由引理 12.6，我们得到 B，其中 $B_0 \subset B \subset A$ 满足：$\{\varpi \circ f\}_{f \in \mathcal{H}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g : \mathbb{D} \to A/B$，且 $\mathcal{H} \to \mathrm{Sp}_B(X)$。因此，$A \to A$ 的存在表明 $\mathcal{H} \to \mathrm{Sp}_B X$。
任取 A。由 (12.13)，我们有 $B \in Q(A, \mathcal{H})$。因此 $\mathcal{H} \to \mathrm{Sp}_B X$。我们的 B 满足 $\mathrm{Sp}_B(X) \neq \emptyset$，对所有 A 均成立。因此由引理 12.7，得到 $B \subsetneq A$。我们用 $\mathcal{H}$ 替换 $\mathcal{G}$，从而完成证明。□

定理 1.2 的证明。设 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ 中的一个序列。我们可以假设集合 $\mathcal{F} = \{f_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ 是无限的，否则，我们可以取一个由相同映射组成的子列，因此该定理对 $B = \{0\}$ 显然成立。然后我们应用定理 12.12 得到 B 和 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$。为完成证明，我们取 $\mathcal{G}$ 中由不同元素组成的一个子列 $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$。□

13. Proof of Theorem 1.3

在本节中，我们证明定理 1.3。我们回顾定理 1.3 陈述中的扎里斯基闭子集 $S \subset \overline{X}$。

引理 13.1. 设 $X \subsetneq A$ 为一个闭代数子簇。设 $\overline{A}$ 为一个光滑等变紧化，且 $X \subset \overline{A}$ 为该紧化。设 $(f_i)_{i \in I}$ 为 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ 中的一个无限全纯映射指标族，使得 $(f_i)_{i \in I} \not\to S$。那么存在一个无限子集 $J \subset I$，使得 $(f_i)_{i \in J}$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛于某个 $h : \mathbb{D} \to \overline{X}$。

在以下证明中，我们回顾 (8.1) 中的 C^1_H。

证明。令 $\mathcal{F} = \{f_i;\ \ i \in I\} \subset$ 是全纯映射空间 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$。于是我们可以假设由 $i \mapsto f_i$ 定义的映射 $I \to \mathcal{F}$ 是有限对一映射；否则，我们可以选取一个无限指标子族，其中的元素在 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ 中均相同。特别地，$\mathcal{F}$ 是无限的。由 $(f_i)_{i \in I} \not\to S$，可得 $\mathcal{F} \not\to S$。我们将证明存在一个无限子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，它在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到某个 $h : \mathbb{D} \to \overline{X}$。

通过将 $\mathcal{F}$ 替换为其无限子集，我们可以假设 $\mathcal{F}' \not\to S$ 对所有无限子集 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ 均成立（参见引理 4.8）。我们取定理 12.12 中的 $B \subset A$ 和 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$。如果 $B = \{0\}$，那么我们的引理成立。因此我们假设 $\dim B \geq 1$。令 $Z \subset \partial X$ 为 B 平凡作用的轨迹。则 $\mathrm{Sp}_B \overline{X} \subset S \cup Z$，从而 $\mathcal{G} \to S \cup Z$。令 $\mathcal{Z}$ 为所有满足 $\mathcal{G} \to S \cup Z'$ 的扎里斯基闭集 $Z' \subset Z$ 的集合。根据 $\mathcal{G} \to S \cup Z$，我们有 $Z \in \mathcal{Z}$，从而 $\mathcal{Z} \neq \emptyset$。根据诺特

性质，我们可以取一个极小元 $Z' \in \mathcal{Z}$。根据 $\mathcal{G} \not\to S$，有 $Z' \neq \emptyset$。令 T 为 Z' 的一个不可约分支。置$S_T = S \cup (Z' \backslash T)$。由 $(Z' \backslash T) \subsetneqq Z'$，我们有 $(Z' \backslash T) \notin \mathcal{Z}$。因此

$$\mathcal{G} \not\to S_T. \tag{13.1}$$

令 $C \subset A$ 为 T 的一般点的各向同性群。则 $B \subset C$。令 $V \subset \partial A$ 为 $A + T \subset \partial A$ 的扎里斯基闭包。则 C 是 V 的各向同性群。由于 T 不可约，V 不可约。令

$$p : W \to V$$

为引理 A.11 中描述的向量丛，使得 $V = \overline{A/C}$，其中 $V \subset W$ 被视为零截面。注意

$$S \cup Z' \subset S_T \cup T \subset S_T \cup V.$$

根据 $\mathcal{G} \to S \cup Z'$，我们有

$$\mathcal{G} \to S_T \cup V. \tag{13.2}$$

由极限映射 $g_0 \colon \mathbb{D} \to A/B$，我们得到 $g \colon \mathbb{D} \to A/C \subset V$，它是 $(p \circ f)_{f \in \mathcal{G}}$ 的极限。

我们将证明 $\mathcal{G} \to V$。首先证明 $g(\mathbb{D}) \not\subset S_T \cap V$。为此，我们反设，即 $g(\mathbb{D}) \subset S_T \cap V$。令 $W \subset \overline{W}$ 为一个紧化，使得 $\varphi \colon \overline{W} \to A$ 和 $\bar{p} \colon \overline{W} \to V$ 存在。由 (13.2)，我们有 $\mathcal{G} \to \varphi^{-1}(S_T) \cup V$。由于我们假设 $g(\mathbb{D}) \subset S_T \cap V$，因此有 $(p \circ f)_{f \in \mathcal{G}} \to S_T \cap V$（参见注记 3.7）。于是由引理 3.8，我们有 $\mathcal{G} \to \bar{p}^{-1}(S_T \cap V)$。因此 $\mathcal{G} \to (\varphi^{-1}(S_T) \cup V) \cap \bar{p}^{-1}(S_T \cap V)$（参见引理 3.5）。由

$$V \cap \bar{p}^{-1}(S_T \cap V) = S_T \cap V,$$

我们有

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1}(S_T) \cup V) \cap \bar{p}^{-1}(S_T \cap V) &= (\varphi^{-1}(S_T) \cap \bar{p}^{-1}(S_T \cap V)) \cup (V \cap \bar{p}^{-1}(S_T \cap V)) \\ &\subset \varphi^{-1}(S_T).\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{G} \to \varphi^{-1}(S_T)$，所以 $\mathcal{G} \to S_T$。这与 (13.1) 矛盾。因此 $g(\mathbb{D}) \not\subset S_T \cap V$。

现在，我们用 $\mathcal{G}$ 的一个无限子集替换它，使得对于所有无限子集 $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$，$\mathcal{G}' \not\to S_T$ 都成立（参见引理 4.8）。我们取一个开邻域 $S_T \subset U_0$ 以及正常数 $s_0 \in$ （0,1）和 $\gamma_0 > 0$，使得对于所有 $f \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{E}_1$，其中 $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{G}$ 是一个有限子集，我们有

$$C_H^1(\mathbb{D}(s_0) \backslash f^{-1}(U_0)) \geq \gamma_0. \tag{13.3}$$

为证明 $\mathcal{G} \to V$，我们任取一个开邻域 $V \subset U_1$ 和正常数 $s \in$ （s_0, 1）以及 $\gamma \in$ （0, γ_0）。我们用 $K \subset \mathbb{D}$ 表示以有限集 g^{-1}（$S_T \cap V$）$\cap \mathbb{D}$（$\frac{s+1}{2}$）中的点为中心的小开圆盘的有限并，使得 g^{-1}（$S_T \cap V$） $\subset K$ 并且

$$C_H^1(K) < \gamma/4. \tag{13.4}$$

我们取 $S_T \cap V$ 的一个开邻域 $U_3 \subset W$，使得 $U_3 \subset p^{-1}(U_3 \cap V)$ 且 $g(\mathbb{D}(\frac{s+1}{2}) \backslash K) \subset V \backslash \overline{U_3 \cap V}$。由于 $(p \circ f)_{f \in \mathcal{G}}$ 在 $\mathbb{D}(\frac{s+1}{2})$ 上一致收敛于 g，因此对所有 $f \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{E}_2$，都有 $p \circ f(\mathbb{D}(\frac{s+1}{2}) \backslash K) \subset V \backslash \overline{U_3 \cap V}$，其中 $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{G}$ 是一个有限子集。因此，由 $U_3 \subset p^{-1}(U_3 \cap V)$ 可得，对所有 $f \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{E}_2$，都有 $f(\mathbb{D}(\frac{s+1}{2}) \backslash K) \subset \overline{A} \backslash \overline{U_3}$。分别用 S_T 和 V 的更小开邻域替换 U_0 和 U_1 后，我们不妨设 $U_0 \cap U_1 \subset U_3$。因此，我们有 $f(\mathbb{D}((s+1)/2) \backslash K) \subset \overline{A} \backslash (\overline{U_0 \cap U_1})$，所以 $\mathbb{D}((s+1)/2) \cap f^{-1}(\overline{U_0 \cap U_1}) \subset K$。因此，由 (13.4) 可得

$$C_H^1(\mathbb{D}((s+1)/2) \cap f^{-1}(\overline{U_0 \cap U_1})) < \gamma/4$$

对所有 $f \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{E}_2$ 均成立。由 (13.2) 可知，对所有 $f \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{E}_3$，其中 $\mathcal{E}_3 \subset \mathcal{G}$ 是一个有限子集，均有

$$C_H^1(\mathbb{D}((s+1)/2) \backslash f^{-1}(U_0 \cup U_1)) < \gamma/4.$$

那么对于所有的 $f \in \mathcal{G} \backslash (\mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3)$，我们有

$$C_H^1(\mathbb{D}((s+1)/2) \backslash f^{-1}(U_0' \cup U_1')) < \gamma/2,$$

其中 $U_0' = U_0 \backslash \overline{U_0 \cap U_1}$ 且 $U_1' = U_1 \backslash \overline{U_0 \cap U_1}$。根据引理 5.6，存在一个开集 $\Omega_f \subset \mathbb{D}(s) \cap f^{-1}(U_0' \cup U_1')$，使得 Ω_f 是连通的，并且

$$C_H^1(\mathbb{D}(s) \backslash \Omega_f) < \gamma.$$

注意到 $U_0' \cap U_1' = \emptyset$。由于 $f(\Omega_f)$ 是连通的，因此要么 $f(\Omega_f) \subset U_0'$，要么 $f(\Omega_f) \subset U_1'$。由 $\gamma_0 > \gamma$ 和 (13.3)，对于所有 $f \in \mathcal{G} \backslash (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3)$，都有 $f(\Omega_f) \not\subset U_0$。因此 $f(\Omega_f) \subset U_1' \subset U_1$。故 $\mathcal{G} \to V$。

现在由引理 8.2，在 $\mathbb{D}$ 的一个无限子集的紧子集上使得对所有 $i \in \mathbb{D}$，都有 $f_i \in \mathcal{G}$。于是 $(f_i)_{i \in J}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 g。这就完成了该引理的证明。□

定理 1.3 的证明。如果 $X = A$，那么 $S = A$。因此，我们的定理显然成立。以下假设 $X \subsetneq A$。

设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ 中的一个全纯映射序列。我们假设不满足“模……自守嵌入”的定义中的条件 (2)。那么存在紧集 $K \subset \mathbb{D}$ 和 $L \subset \overline{X} - S$，使得将 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 替换为其子列后，有 $f_n(K) \cap L \neq \emptyset$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

我们将证明 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \not\to S$。为证明这一点，我们反设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to S$。我们取开邻域 $U \subset X$，关于 S，使得 $U \cap L = \emptyset$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $a_n \in K$ 使得 $f_n(a_n) \in L$，这由 $f_n(K) \cap L \neq \emptyset$ 推出。我们选择一个自同构 $\varphi_n : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，使得 $\varphi_n(0) = a_n$。于是 $f_n \circ \varphi_n(0) \in L$。特别地，$f_n \circ \varphi_n(0) \notin U$。我们定义 $\delta_n > 0$ 为

$$\delta_n = \sup\{t \in (0,1);\ f_n \circ \varphi_n(\overline{\mathbb{D}(t)}) \subset \bar{X} - \bar{U}\}.$$

于是我们有

$$f_n \circ \varphi_n(\mathbb{D}(\delta_n)) \cap U = \emptyset \tag{13.5}$$

and

$$f_n \circ \varphi_n(\partial\mathbb{D}(\delta_n)) \cap \bar{U} \neq \emptyset. \tag{13.6}$$

由于我们假设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to S$，因此有

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0. \tag{13.7}$$

令 $r_n = \frac{1}{2\delta_n}$。我们定义 $g_n : \mathbb{D}(r_n) \to X$ 定义为 $g_n(z) = f_n \circ \varphi_n(2\delta_n z)$。这里我们继续将 $\mathbb{D}(r) = \{z \in \mathbb{C} \text{记作} |z| < r\}$，对于 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，不假设 $r < 1$。

我们归纳地定义无限子集 $\mathbb{N} \supset I_2 \supset I_2 \supset \cdots$ 的一个递降序列如下。令 $I_0 = \mathbb{N}$。假设 I_{l-1} 已定义。由 (13.7)，我们可以取一个无限子集 $I_l' \subset I_{l-1}$，使得对所有 $i \in I_l'$ 都有 $\delta_i < \frac{1}{2^l}$。因此，对所有 $i \in I_l'$ 都有 $r_i > l$。于是对每个 $i \in I_l'$，我们有一个限制 $g_i|_{\mathbb{D}(l)} : \mathbb{D}(l) \to X$。我们得到 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}(l), X)$ 中的一个无限指标族 $(g_i|_{\mathbb{D}(l)})_{i\in I_l'}$。由 (13.5)，对所有 $i \in I_l'$ 都有 $g_i(\mathbb{D}(1/2)) \cap U = \emptyset$。因此有 $(g_i|_{\mathbb{D}(l)})_{i\in I_l'} \not\to S$，其中我们将 $\mathbb{D}(l)$ 视为“$\mathbb{D}$”。我们应用引理 13.1。于是得到一个无限子集 $I_l \subset I_l'$，使得 $(g_i|_{\mathbb{D}(l)})_{i\in I_l}$ 在 $\mathbb{D}(l)$ 的紧子集上一致收敛到 $h_l : \mathbb{D}(l) \to X$。由于 h_{l-1} 是 $(g_i|_{\mathbb{D}(l-1)})_{i\in I_l}$ 的极限，而 $(g_i|_{\mathbb{D}(l-1)})_{i\in I_l}$ 是 $(g_i|_{\mathbb{D}(l-1)})_{i\in I_{l-1}}$ 的子族，因此我们有 $h_l|_{\mathbb{D}(l-1)} = h_{l-1}$。

现在我们得到一个全纯映射 $h : \mathbb{C} \to X$ 使得 $h|_{\mathbb{D}(l)} = h_l$ 对所有 $l \in \mathbb{N}$ 成立。我们将证明 h 是非恒定的。注意到 $h_1 : \mathbb{D} \to X$ 是 $(g_i|_{\mathbb{D}})_{i\in I_1}$ 的极限。根据 (13.6)，我们有 $g_i(\partial\mathbb{D}(1/2)) \cap \bar{U} \neq \emptyset$ 对所有 $i \in I_1$ 成立。因此 $h_1(\partial\mathbb{D}(1/2)) \cap \overline{U} \neq \emptyset$。另一方面，根据 $g_i(0) \in L$ 对所有 $i \in I_1$ 成立，我们有 $h_1(0) \in L$。由 $L \cap U = \emptyset$ 可知，h_1 是非恒定的。因此 h 是非恒定的。

对于每个不可约分支 $D \subset \partial A$，要么 $h(\mathbb{C}) \subset D$，要么 $h(\mathbb{C}) \cap D = \emptyset$。因此存在一个 A-轨道 $O \subset A$，使得 $h(\mathbb{C}) \subset O$。注意，O 同构于一个半阿贝尔簇。因此，$h(\mathbb{C})$ 的扎里斯基闭包是 O 的一个半阿贝尔子簇的平移（参见定理 1.1，或 [28, 定理 3.9.19]）。因此 $h(\mathbb{C}) \subset S$。这与 $h(0) = h_1(0) \in L$ 矛盾。因此 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \not\to S$。

现在根据引理 13.1，存在一个子列 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，它在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $f:\mathbb{D}\to\overline{X}$。由此我们证明了 X 在$_S$ 模.....拟正规嵌入于 X。□

14. Proof of Theorem 1.5

当 A 是紧的时，我们可以从定理 1.2 的陈述 (2) 中删去“γ-几乎”，得到如下推论。

推论 14.1. 设 A 是一个阿贝尔簇。设 $X\subsetneq A$ 是一个真闭代数子簇。设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Hol$(\mathbb{D},X)$ 中全纯映射构成的序列。那么存在一个真阿贝尔子簇 $B\subsetneq A$ 和一个子列 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，满足以下两个性质：

(1) $(\varpi\circ f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到一个全纯映射 $g:\mathbb{D}\to A/B$，其中 $\varpi:A\to A/B$ 是商映射。(2) 对每个 $0<s<1$ 以及 $\mathrm{Sp}_B X$ 的开邻域 $U\subset A$，都存在 $k_0\in\mathbb{N}$，使得对所有 $k\geq k_0$，对于所有 $z\in\mathbb{D}(s)$，都有 $f_{n_k}(z)\in U$。

证明。应用定理 1.2，得到 $B\subsetneq A$ 和 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$。断言 (1) 由定理 1.2 的结论推出。为证明断言 (2)，令 $Z=\varpi(\mathrm{Sp}_B X)$。由于 ϖ 的每个纤维：$A\to A/B$ 都由一个 B-轨道构成，因此我们有

$$\varpi^{-1}(Z)=\mathrm{Sp}_B X.$$

令 $U\subset A$ 为 $\mathrm{Sp}_B X$的一个开邻域。由于 $A\backslash U$ 是紧的，$\varpi(A\backslash U)\subset A/B$是闭集。我们有 $Z\cap\varpi(A\backslash U)=\emptyset$。注意，$Z\subset A/B$ 是一个扎里斯基闭集。因此存在 Z 的一个开邻域 $W\subset A/B$，使得 $W\cap\varpi(A\backslash U)=\emptyset$。于是$\varpi^{-1}(W)\subset U$。

现在令 $s\in(0,1)$。由 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\to\mathrm{Sp}_B X$，我们有 $(\varpi\circ f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\to Z$。因此 $g(\mathbb{D})\subset Z$(参见注记 3.7)。于是存在 $k_0\in\mathbb{N}$，使得对所有 $k\geq k_0$，$\varpi\circ f_{n_k}(\mathbb{D}(s))\subset W$。因此对所有 $k\geq k_0$，我们有 $f_{n_k}(\mathbb{D}(s))\subset U$。□

注记14.2。当 A 为紧集时，定理1.3 可由推论 14.1 如下容易导出。设$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Hol$(\mathbb{D},X)$ 中的全纯映射序列。我们假设“模.....自守嵌入”定义的条件 (2) 不满足。于是存在紧集 $K\subset\mathbb{D}$ 和 $L\subset X-S$，使得将 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 替换为其子列后，有 $f_n(K)\cap L\neq\emptyset$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立。我们应用推论 14.1 得到 $B\subset A$ 和 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$。为证明$\dim B=0$，反设$\dim B>0$。则 $\mathrm{Sp}_B X\subset S$。因此，推论 14.1 的断言(2) 与条件 $f_n(K)\cap L\neq\emptyset$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$成立相矛盾。因此 $\dim B=0$。于是根据推论 14.1 的断言(1)，序列 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛。这样就重新证明了紧情形下的定理 1.3。

我们证明定理 1.5。$X=A$ 的情形显然，因此我们假设 $X\subsetneq A$。令 $v\in\check{T}_x X$ 满足 $F_X(v)=0$，其中 $x\in X$。我们通过自然包含 $\check{T}X\subset TA$ 考虑 $v\in TA$。存在一个序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，属于 Hol$(\mathbb{D},X)$，使得 $f_n'(0)=nv$。于是 $f_n(0)=x$。应用推论 14.1，得到 $B\subsetneq A$ 和 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$。我们先证明 $\varpi_*(v)=0$，其中 $\varpi:A\to A/B$ 是商映射。注意到 $\varpi\circ f_{n_k}:\mathbb{D}\to A/B$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g:\mathbb{D}\to A/B$。因此，$(\varpi\circ f_{n_k})'(0)=n_k\varpi_*(v)$ 收敛到 $g'(0)$。于是我们有 $\varpi_*(v)=0$。

现在由推论 14.1 的断言 (2)，我们有

$$x\in\mathrm{Sp}_B X$$

（这要归功于推论 14.1 中没有“γ-几乎”这一项）。因此 $x+B\subset X$。由于$\varpi_*(v)=0$，我们有 $v\in T(x+B)$。因此存在 $f:\mathbb{C}\to(x+B)\subset X$，使得 $f'(0)=v$。证明完成。□

下面的示例表明，条件 $F_X(v)=0$ 并不一定意味着 f 的存在：$\mathbb{C}\to X$ 满足 $f'(0)=v$。

˜示例 14.3. 设 X 是一条 Kobayashi 双曲光滑曲面。设 $X \to X$ 是沿一点 $p \in X$ 作的爆破。设 $E \subset X$ 为例外除子。设 a_1、a_2、$a_3 \in E$ 是三个互不相同的点。那么 $X - Z$ 是 Brody 双曲的，其中 $Z = \{a_1, a_2, a_3\}$。也就是说，不存在非恒定全纯映射 f: $\mathbb{C} \to X - Z$。另一方面，对于 $q \in E - Z \subset X - Z$ 和 $v \in T_q E$，有 $F_{\tilde{X}-Z}(v) = 0$。为证明这一点，我们取 E 的一个开邻域 W，它与.....双全纯等价

$$\{(x, y, [s, t]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1;\ |x| < 1, |y| < 1, xt = ys\}.$$

我们可以假设 $q \in E$ 对应于 $(0, 0, [0, 1])$。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们定义 $f_n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, W)$ 为 $f_n(z) = (z^3, \frac{1}{n}z^2, [nz, 1])$。令 $v = f_1'(0)$。于是 $v \in T_q E$ 且 $v \neq 0$。我们有 $f_n'(0) = nv$。我们˜有 $f_n(\mathbb{D} - \{0\}) \subset W - E$ 且 $f_n(0) = q \in X - Z$。因此 $f_n(\mathbb{D}) \subset X - Z$。故 $F_{\tilde{X}-Z}(v) = 0$。

注 14.4. 我们不知道定理 1.5 的类似结论对非紧半阿贝尔簇是否成立。

15. Proof of Theorem 1.7

我们有一个等变紧化 $(\mathbb{G}_m)^{p-1} \subset \mathbb{P}^{p-1}$，使得包含映射由 $(g_1, \ldots, g_{p-1}) \mapsto [g_1 : \ldots : g_{p-1} : 1]$ 定义。作用 $(\mathbb{G}_m)^{p-1} \times \mathbb{P}^{p-1} \to \mathbb{P}^{p-1}$ 定义为

$$(g_1, \ldots, g_{p-1}) \cdot [x_1 : \ldots : x_{p-1} : x_p] = [g_1 x_1 : \ldots : g_{p-1} x_{p-1} : x_p]. \tag{15.1}$$

其中 x_1、.....、x_p 是 $\mathbb{P}^{p-1}$ 的齐次坐标。设 $V \subset (\mathbb{G}_m)^{p-1}$ 是一个闭子簇，使得 $\overline{V} \subset \mathbb{P}^{p-1}$ 由 $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = 0$ 定义。

设 $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_l\}$ 是 $I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_l = \{1, \ldots, p\}$ 的不交划分。我们如下定义子环面 $G_{\mathcal{I}} \subset (\mathbb{G}_m)^{p-1}$。对于 $i \in \{1, \ldots, p\}$，我们通过 $i \in I_{\tau(i)}$ 定义 $\tau(i) \in \{1, \ldots, l\}$。我们通过方程 $x_i = x_j$ 定义线性子空间 $L(\mathcal{I}) \subset \mathbb{C}^p$，其中对所有满足 $\tau(i) = \tau(j)$ 的 i、$j \in \{1, \ldots, p\}$ 均成立。我们考虑浸入 $(\mathbb{G}_m)^{p-1} \subset \mathbb{C}^p$，其由 $(g_1$、.....、$g_{p-1}) \mapsto (g_1$、.....、g_{p-1}、$1)$ 给出。令

$$G_{\mathcal{I}} = (\mathbb{G}_m)^{p-1} \cap L(\mathcal{I}).$$

那么 $G_{\mathcal{I}} \subset (\mathbb{G}_m)^{p-1}$ 是一个子环面。

引理 15.1. 我们有

$$\mathrm{Sp}_{G_{\mathcal{I}}} \overline{V} = \left\{ [x_1 : \ldots : x_p] \in \mathbb{P}^{p-1};\ \sum_{i \in I_k} x_i = 0 \text{ for all } 1 \leq k \leq l \right\}.$$

证明。注意，$\mathrm{Sp}_{G_{\mathcal{I}}} \overline{V}$ 由以下联立方程定义

$$g_1 x_1 + \cdots + g_{p-1} x_{p-1} + x_p = 0, \quad \text{for all } (g_1, \ldots, g_{p-1}) \in G_{\mathcal{I}}. \tag{15.2}$$

通过改变 $I_1, \ldots, I_l$ 的指标，我们可以假设 $p \in I_l$。我们有一个同构 $(\mathbb{G}_m)^{l-1} \to G_{\mathcal{I}}$，其对应关系为 $(a_1, \ldots, a_{l-1}) \mapsto (a_{\tau(1)}, \ldots, a_{\tau(p-1)})$，其中令 $a_l = 1$。对于每个 $k \in \{1, \ldots, l\}$，我们选取 $\iota(k) \in \{1, \ldots, p\}$，使得 $\iota(k) \in I_k$。那么 ι 是 τ: $\{1, 2, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, l\}$ 的一个截面。对于 $(g_1, \ldots, g_{p-1}) \in G_{\mathcal{I}}$，我们有

$$g_1 x_1 + \cdots + g_{p-1} x_{p-1} + x_p = \sum_{k=1}^{l-1} \left(g_{\iota(k)} \sum_{i \in I_k} x_i \right) + \sum_{i \in I_l} x_i.$$

因此（15.2）i s 等价于 $\sum_{i \in I_k} x_i = 0$ 对所有 $k \in \{1, \ldots, l\}$。证明完成。 □

引理 15.2. 设 $G \subset (\mathbb{G}_m)^{p-1}$ 是一个子环面。那么存在 $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_l\}$ 的不交划分，使得 $\{1, 2, \ldots, p\}$

(1) $G \subset G_{\mathcal{I}}$，以及

(2) $\mathrm{Sp}_{G_{\mathcal{I}}} \overline{V} = \mathrm{Sp}_G \overline{V}$。

证明。由包含映射 $(\mathbb{G}_m)^{p-1}\subset\mathbb{C}^p$，可得 $G\subset\mathbb{C}^p$。令 $\chi_1,\ldots,\chi_p\in\mathrm{Hom}(G,\mathbb{G}_m)$ 为 $G\subset\mathbb{C}^p$ 与第 i 个投影 $\mathbb{C}^p\to\mathbb{C}$ 的复合态射，其中 $\chi_p\equiv 1$。于是 $\chi_1,\ldots\chi_p$ 是群同态。我们在 $\{1,\ldots,p\}$ 上定义等价关系 $\sim$，使得 $i\sim j$ 当且仅当 $\chi_i=\chi_j$。因此，我们得到 $\{1,\ldots,p\}$ 的一个不交划分 $\mathcal{I}=\{I_1,\ldots,I_l\}$，其中每个 I_k 都是该等价关系的等价类。

令 $L\subset\mathbb{C}^p$ 为由 $G\subset\mathbb{C}^p$张成的线性子空间。我们断言

$$L=L(\mathcal{I}). \tag{15.3}$$

我们来证明这一点。根据 $\mathcal{I}$的定义，有 $\chi_i=\chi_j$ 当且仅当 $\tau(i)=\tau(j)$。因此有 $G\subset L(\mathcal{I})$。于是 $L\subset L(\mathcal{I})$。令 $\iota\colon\{1,\ldots,l\}\to\{1,\ldots,p\}$ 为 $\tau\colon\{1,\ldots,p\}\to\{1,\ldots,l\}$的一个截面。注意，$x_{\iota(1)}|_{L(\mathcal{I})},\ldots,x_{\iota(l)}|_{L(\mathcal{I})}$ 构成 $L(\mathcal{I})$对偶空间的一组基，其中$x_1,\ldots,x_p$ 是 $\mathbb{C}^p$的坐标函数。另一方面，$\{\chi_{\iota(k)}\}_{k\in\{1,\ldots,l\}}\subset\mathrm{Hom}(G,\mathbb{G}_m)$线性无关（参见 [6, 引理 8.1]）。因此，$x_{\iota(1)}|_L,\ldots,x_{\iota(l)}|_L$ 在 L的对偶空间上线性无关。因此 $\dim L\geq l=\dim L(\mathcal{I}_G)$。于是 $L=L(\mathcal{I})$。由此得到 (15.3)。

现在我们有 $G\subset G_{\mathcal{I}}$，它由 $G\subset L(\mathcal{I})$ 得出。因此我们有 $\mathrm{Sp}_{G_{\mathcal{I}}}\overline{V}\subset\mathrm{Sp}_G\overline{V}$。还需证明 $\mathrm{Sp}_G\overline{V}\subset\mathrm{Sp}_{G_{\mathcal{I}}}\overline{V}$。注意，$\mathrm{Sp}_G\overline{V}$由以下联立方程定义

$$b_1x_1+\cdots+b_{p-1}x_{p-1}+x_p=0,\quad\text{for all }(b_1,\ldots,b_{p-1})\in G\subset(\mathbb{G}_m)^{p-1}. \tag{15.4}$$

对于 $g=(g_1,\ldots,g_{p-1},1)\in G_{\mathcal{I}}\subset\mathbb{C}^p$，我们有 $g\in L(\mathcal{I})$。因此，由 (15.3) 可得 $g\in L$。于是存在 $(b_{1,\ 1},\ldots,b_{1,\ p-1},1)\ \cdots$、$(b_{s,\ 1},\ldots,b_{s,\ p-1},1)\in G\subset\mathbb{C}^p$ 以及 α_1、…、$\alpha_s\in\mathbb{C}$，使得

$$(g_1,\ldots,g_{p-1},1)=\alpha_1(b_{1,1},\ldots,b_{1,p-1},1)+\cdots+\alpha_s(b_{s,1},\ldots,b_{s,p-1},1).$$

因此，联立方程 (15.4) 的解满足方程

$$g_1x_1+\cdots+g_{p-1}x_{p-1}+x_p=0.$$

因此 $\mathrm{Sp}_G\overline{V}\subset\mathrm{Sp}_{G_{\mathcal{I}}}\overline{V}$。 □

引理 15.3. 假设 $G=(\mathbb{G}_m)^{p-1}$。那么我们有 $\mathrm{Sp}_G\overline{V}=\emptyset$。

证明。注意，Sp_GV 由联立方程定义

$$g_1x_1+\cdots+g_{p-1}x_{p-1}+x_p=0,\quad\text{for all }(g_1,\ldots,g_{p-1})\in(\mathbb{G}_m)^{p-1},$$

该方程组只有平凡解。因此 $\mathrm{Sp}_G\overline{V}=\emptyset$。 □

定理 1.7 的证明。我们将 $\mathbb{P}^{p-1}$ 视为 $(\mathbb{G}_m)^{p-1}$的等变紧化，其中作用由 (15.1) 定义。令闭子簇 $V\subset(\mathbb{G}_m)^{p-1}$ 由下式定义，使得 $\overline{V}\subset\mathbb{P}^{p-1}$ 变为

$$x_1+x_2+\cdots+x_p=0,$$

其中 x_1、……、x_p是 $\mathbb{P}^{p-1}$的齐次坐标。对于每个 $f=(f_1,\ldots,f_p)\in\mathcal{F}$，我们考虑一个全纯映射 $\hat{}\,f\colon\mathbb{D}\to\mathbb{P}^{p-1}$，定义为 $\hat{}\,f(z)=[f_1(z):\ldots:f_p(z)]$。于是我们有 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,f(\mathbb{D})\subset V$，因此 $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D},V)$。所以 $(f)_{f\in\mathcal{F}}$ 是 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D},V)$ 中的一个无限指标族。$\hat{}$ 我们用其可数无限子集替换 $\mathcal{F}$。于是可以将 $(f)_{f\in\mathcal{F}}$ 视为 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D},V)$中的一个序列。我们仍将该序列记作 $\mathcal{F}$。

我们应用定理 1.2 得到 $B\subset(\mathbb{G}_m)^{p-1}$以及一个无限子集 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$。然后根据 $(\hat{}\,f)_{f\in\mathcal{G}}\to\overline{\mathrm{Sp}}_BV$，我们有 $\mathrm{Sp}_BV\neq\emptyset$。我们应用引理 15.2 得到 $\mathcal{I}=\{I_1,\ldots,I_l\}$的一个不交划分，使得 $B\subset G_{\mathcal{I}}$且 $\mathrm{Sp}_{G_{\mathcal{I}}}\overline{V}=\mathrm{Sp}_B\overline{V}$。于是我们有 $\mathrm{Sp}_{G_{\mathcal{I}}}\overline{V}\neq\emptyset$。因此，根据引理 15.3，我们有 $G_{\mathcal{I}}\neq(\mathbb{G}_m)^{p-1}$。由于极限函数满足 $\mathbb{D}\to(\mathbb{G}_m)^{p-1}/B$，序列 $(\hat{}\,f)_{f\in\mathcal{G}}$在商 $(\mathbb{G}_m)^{p-1}/G_{\mathcal{I}}$下收敛。因此，用 $G_{\mathcal{I}}$ 替换 B后，我们可以假设 $B=G_{\mathcal{I}}$。

设 $I_k,1\leq k\leq l$。由引理 15.1 可知，$\mathrm{Sp}_B\overline{V}\subset\{\sum_{j\in I_k}x_j=0\}$ 是 $\mathbb{P}^{p-1}$的扎里斯基闭子集。因此我们有

$$(\hat{f})_{f\in\mathcal{G}}\to\left\{\sum_{j\in I_k}x_j=0\right\}. \tag{15.5}$$

令 $\psi_k\colon \mathbb{P}^{p-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{|I_k|-1}$ 由 $[x_1\colon\ldots\colon x_p]\mapsto[x_j]_{j\in I_k}$ 定义。这里注意，当 $|I_k|=1$ 时，$\mathbb{P}^0=\mathrm{pt}$。于是，ψ_k 在 $(\mathbb{G}_m)^{p-1}\subset\mathbb{P}^{p-1}$ 上正则。我们有 $(\mathbb{G}_m)^{|I_k|-1}\subset\mathbb{P}^{|I_k|-1}$。注意，$\psi_k$ 诱导出一个群同态

$$\psi_k|_{(\mathbb{G}_m)^{p-1}}:(\mathbb{G}_m)^{p-1}\to(\mathbb{G}_m)^{|I_k|-1}.$$

这个 $\psi_k|_{(\mathbb{G}_m)^{p-1}}$ 在 B 对 $(\mathbb{G}_m)^{p-1}$ 的作用下保持不变，因此经由商映射 $(\mathbb{G}_m)^{p-1}\to(\mathbb{G}_m)^{p-1}/B$ 分解。因此，序列 $(\psi_k\circ\hat{}f)_{f\in\mathcal{G}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $g_k\colon\mathbb{D}\to(\mathbb{G}_m)^{|I_k|-1}$。令 $H_k=\{\sum_{j\in I_k}x_j=0\}\subset\mathbb{P}^{|I_k|-1}$。注意，若 $|I_k|=1$，则 $H_k=\emptyset$。

断言。假设 $g_k(\mathbb{D})\not\subset H_k$。令 $\varepsilon\in(0,1)$、$s\in(0,1)$ 且 $\gamma>0$。则存在一个有限子集 $\mathcal{E}\subset\mathcal{G}$，使得对所有 $f\in\mathcal{G}\backslash\mathcal{E}$，我们都有

$$\frac{\sqrt{\sum_{j\in I_k}|f_j(z)|^2}}{\sqrt{\sum_{1\le i\le p}|f_i(z)|^2}}<\frac{\varepsilon}{2p} \tag{15.6}$$

对几乎所有 $z\in\mathbb{D}(s)$，都有 $\frac{\gamma}{2p}$。

我们证明这一点。我们定义 $E_k\subset\mathbb{P}^{p-1}$ 为 $E_k=\cap_{i\in I_k}\{x_i=0\}$。于是，$\psi_k$ 诱导出一个正则映射 $\varphi_k\colon\mathrm{Bl}_{E_k}\mathbb{P}^{p-1}\to\mathbb{P}^{|I_k|-1}$。令 $E'_k\subset\mathrm{Bl}_{E_k}\mathbb{P}^{p-1}$ 为例外除子。定义 $\mu\colon\mathbb{P}^{p-1}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ 如下：

$$\mu([x_1:\ldots:x_p])=\frac{\sqrt{\sum_{j\in I_k}|x_j|^2}}{\sqrt{\sum_{1\le i\le p}|x_i|^2}}.$$

设 $U=\{\mu<\varepsilon/2p\}\subset\mathbb{P}^{p-1}$。于是，$U$ 是 E_k 的一个开邻域。令 $U'\subset\mathrm{Bl}_{E_k}\mathbb{P}^{p-1}$ 为 U 在 $\mathrm{Bl}_{E_k}\mathbb{P}^{p-1}\to\mathbb{P}^{p-1}$ 下的逆像。于是，U' 是 E'_k 的一个开邻域。由 $g_k(\mathbb{D})\not\subset H_k$，我们可以取 $W_0\subset\mathbb{P}^{|I_k|-1}$ 的一个开邻域，使得

$$C^1_H(\mathbb{D}(s)\cap g_k^{-1}(W_0))<\gamma/4p.$$

$\hat{}$ 我们取 H_k 的一个开邻域 $W\Subset W_0$。于是，由于 $(\varphi_k\circ f)_{f\in\mathcal{G}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 g_k，我们有

$$\mathbb{D}(s)\cap\hat{f}^{-1}(\varphi_k^{-1}(W))\subset\mathbb{D}(s)\cap g_k^{-1}(W_0)$$

除有限多个 $f\in\mathcal{G}$ 外均成立。因此我们有

$$C^1_H(\mathbb{D}(s)\cap\hat{f}^{-1}(\varphi_k^{-1}(W)))<\gamma/4p$$

$\hat{}$ 除有限多个 $f\in\mathcal{G}$ 外均成立。由 (15.5)，我们有 $(f)_{f\in\mathcal{G}}\to E'_k\cup\varphi_k^*H_k$。因此，我们有

$$C^1_H(\mathbb{D}(s)\backslash\hat{f}^{-1}(U'\cup\varphi_k^{-1}(W)))<\gamma/4p$$

除有限多个 $f\in\mathcal{G}$ 外。因此我们有

$$C^1_H(\mathbb{D}(s)\backslash\hat{f}^{-1}(U))<\gamma/2p$$

对除有限多个 $f\in\mathcal{G}$ 之外的所有 $f\in\mathcal{G}$。这就证明了我们的断言。

我们将 $\Lambda\subset\{1,\ldots,l\}$ 定义为满足 $g_k(\mathbb{D})\not\subset H_k$ 的 $k\in\{1,\ldots,l\}$ 集合。若 $|I_k|=1$，则 $k\in\Lambda$。注意，(15.6) 表明 $\Lambda\neq\{1,\ldots,l\}$。通过更改索引，我们可以假设 $\{1,\ldots,n\}=\{1,\ldots,l\}\backslash\Lambda$。于是有 $n\ge1$。

我们证明 I_1、……、I_n 满足定理1.7 的断言(2)和(3)。取 $k\in\{1,\ldots,n\}$。于是 $|I_k|\ge2$。对于 i、$j\in I_k$，我们定义 $\tau_{ij}\colon(\mathbb{G}_m)^{p-1}\to\mathbb{G}_m$ 通过 $(b_1,\ldots\ldots,b_{p-1})\mapsto b_i/b_j$，其中令 $b_p=1$。于是 τ_{ij} 分解为 $\psi_k|_{(\mathbb{G}_m)^{p-1}}\colon(\mathbb{G}_m)^{p-1}\to(\mathbb{G}_m)^{|I_k|-1}$。因此，$(\tau_{ij}\circ\hat{}f)_{f\in\mathcal{G}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于由 $g_k\colon\mathbb{D}\to(\mathbb{G}_m)^{|I_k|-1}$ 给出的复合态射，而

κ_{ij} : $(\mathbb{G}_m)^{|I_k|-1} \to \mathbb{G}_m$。注意， $\tau_{ij} \circ \hat{f} = f_i/f_j$。因此，$(f_i/f_j)_{f\in\mathcal{G}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $\kappa_{ij} \circ g_k$： $\mathbb{D} \to \mathbb{G}_m$。由 $g_k(\mathbb{D}) \subset H_k$，我们有

$$\sum_{i\in I_k} \kappa_{ij} \circ g_k = 0.$$

因此，$(\sum_{i\in I_k} f_i/f_j)_{f\in\mathcal{G}}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 0。因此，定理 1.7 的断言 (2) 成立。

我们证明定理 1.7 (3)。令 $I = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n$。我们有

$$\frac{\sqrt{\sum_{i\in I} |f_i|^2}}{\sqrt{\sum_{1\le i\le p} |f_i|^2}} \ge \frac{\sqrt{\sum_{1\le i\le p} |f_i|^2} - \sum_{j\notin I} |f_j|}{\sqrt{\sum_{1\le i\le p} |f_i|^2}} = 1 - \sum_{j\notin I} \frac{|f_j|}{\sqrt{\sum_{1\le i\le p} |f_i|^2}}.$$

因此由 (15.6)，我们有

$$\frac{\sqrt{\sum_{1\le i\le p} |f_i(z)|^2}}{\sqrt{\sum_{i\in I} |f_i(z)|^2}} < 1 + \varepsilon < 2$$

对于 $\frac{\gamma}{2}$-几乎所有的 $z \in \mathbb{D}(s)$。结合(15.6)，我们得到定理 1.7 的断言 (3)。定理 1.7 的证明已完备。□

Appendix A. Semi-abelian varieties

在本附录中，我们介绍半阿贝尔簇。我们只讨论本文所需的定义和性质。关于半阿贝尔簇，有几篇不错的参考文献，包括 [8, 第 5 节4], [21], [35, 第 5], [40, 第 VI 章]。所有代数群均定义在 $\mathbb{C}$上。

半阿贝尔簇 A 是一种代数群，具有一个（唯一的）表达式

$$0 \to T \to A \to A_0 \to 0,$$

其中 A_0 是一个阿贝尔簇， $T \simeq \mathbb{G}_m^l$ 是一个代数环面。于是 A 是光滑、连通且交换的（参见 [8, 注5.4.2 (ii)]）。根据 [8, 定理2.7, 2], 映射 $A \to A_0$ 是一个 T-挠子，即有如下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\varphi} & T \times A \\ \downarrow & & \downarrow p \\ A_0 & \longleftarrow & A \end{array}$$

这里 $\varphi(a,t) = a + t$ 和 p 是第二投影。

注 A.1. 设 A 是一个半阿贝尔簇， $B \subset A$ 是一个连通代数子群。根据 [8, Cor 5.4.6], B 是一个半阿贝尔簇。我们有一个商 q： $A \to A/B$，它是一个 B-挠子（参见 [8, Thm 2.7.2]）。特别地， q 是忠实平坦且准紧的。根据 [8,Cor 5.4.6], A/B 是一个半阿贝尔簇。

所谓 A 的等变紧化 $\overline{A}$ ，是指：(1) $\overline{A}$ 是紧的；(2) 存在一个开浸入 $A \subset \overline{A}$ ；以及 (3) 群态射 $A \times A \to A$ 延拓为 $A \times \overline{A} \to \overline{A}$。

A.1. 等变紧化的构造。本小节的主要目的是介绍由 T 的等变紧化 $\overline{T}$ 构造的 A 的等变紧化 $\overline{A}$ 。该紧化在 [29, 第 1414], [42, 页引理 2.2] 中进行了描述。

设 V 是一个允许 T 作用的代数簇。那么，在 $V \times A$ 上有一个由 $(x,a) \mapsto (x - t, a + t)$ 定义的 T 作用，其中 $t \in T$。

引理 A.2. 范畴商 $V \times A \to (V \times A)/T$ 存在。也就是说，每个 T-不变态射 $V \times A \to W$ 都唯一地通过 $V \times A \to (V \times A)/T$ 分解。

证明. 设 $\{U_i\}$ 是 A_0 的扎里斯基开覆盖，且带有 T-等变平凡化 $\phi_i\colon A|_{U_i}\to T\times U_i$（参见 [40, 第 169], [41, 页，引理 2.2], [33, ，命题 16.55]）。那么对每个 i,j，我们得到一个同构

$$\phi_j\circ\phi_i^{-1}|_{T\times(U_i\cap U_j)}: T\times(U_i\cap U_j)\to T\times(U_i\cap U_j).$$

令 $s_{ij}\colon U_i\cap U_j\to T$ 由 $\phi_j\circ\phi_i^{-1}|_{T\times(U_i\cap U_j)}(0_T,u)=(s_{ij}(u),u)$ 定义。注意，A 是通过 ˇCech 余循环 $\{s_{ij}\}\in\check{\mathrm{H}}(\{U_i\},T)$ 将平凡的 T-丛 $T\times U_i$ 粘合而重构得到的。现在，我们用相同的 ˇCech 余循环 $\{s_{ij}\}$ 将 $V\times U_i$ 粘合起来，得到 $(V\times A)/T$。T-不变态射 $V\times A\to(V\times A)/T$ 描述如下。对于每个 i，我们定义一个映射

$$\mu_i: V\times T\times U_i\to V\times U_i$$

由 $\mu_i(x,t,u)=(x+t,u)$ 定义。则在 $V\times T\times U_i$ 上的 T-作用下，μ_i 是 T-不变的，该作用定义为 $(x,t,u)\mapsto(x-\tau,t+\tau,u)$，其中 $\tau\in T$。注意，相对于此T-作用，μ_i 是一个 T-丛。空间 $V\times A$ 可描述为将空间 $V\times T\times U_i$ 通过同构$V\times T\times(U_i\cap U_j)\to V\times T\times(U_i\cap U_j)$粘合而成，这些同构由 $(x,t,u)\mapsto(x,t+s_{ij}(u),u)$ 定义。然后，我们可以将 μ_i 粘合起来，得到一个 T-丛

$$\mu: V\times A\to(V\times A)/T.$$

特别地，μ 是一个范畴商（参见 [8, 命题 2.6.4]）。我们指出，空间 $(V\times A)/T$ 不依赖于 $\{U_i\}$ 和 ϕ_i 的选择。□

注A.3.假设存在 T-等变映射 $f\colon V'\to V$。则通过上述构造，f诱导出 f':$(V'\times A)/T\to(V\times A)/T$。若 f 是开（分别为闭）浸入，则 f' 是开（分别为闭）浸入。若 V是光滑的，则 $(V\times A)/T$ 是光滑的。事实上，$(V\times A)/T$ 是通过粘合光滑空间 $V\times U_i$ 构造的。

引理 A.4. 设 $\overline{T}$ 是 T 的等变紧化。那么 $(\overline{T}\times A)/T$ 是 A 的等变紧化。

证明。我们有 $A=(T\times A)/T$。因此，开浸入 $T\subset\overline{T}$诱导出一个开浸入$A\subset(\overline{T}\times A)/T$。$(\overline{T}\times A)/T$上的 A-作用描述如下。令

$$h: A\times(\overline{T}\times A)\to A\times((\overline{T}\times A)/T)$$

由 $h(a,t,a')=(a,\mu(t,a'))$ 定义，其中 $\mu\colon\overline{T}\times A\to(\overline{T}\times A)/T$是商映射。于是$h$ 是一个 T-主齐性空间，因此是 $A\times(\overline{T}\times A)$ 上由 T作用所定义的范畴商，作用定义如下

$$(a,t,a')\mapsto(a,t-\tau,a'+\tau), \tag{A.1}$$

其中 $\tau\in T$。令

$$\varphi: A\times(\overline{T}\times A)\to(\overline{T}\times A)/T \tag{A.2}$$

由 $\varphi(a,t,a')=\mu(t,a+a')$ 定义。于是 φ 在 T作用 (A.1) 下是不变的。因此，φ是 h 与一个唯一映射的复合

$$\psi: A\times((\overline{T}\times A)/T)\to(\overline{T}\times A)/T. \tag{A.3}$$

这就是我们的 A作用。注意，映射 $A\to A_0$ 可延拓为 $(\overline{T}\times A)/T\to A_0$，而后者是真映射。因此 $(\overline{T}\times A)/T$ 是紧的。□

引理 A.5. 设 $\overline{T}$是 T的一个等变紧化。设 $Z\subset\overline{T}$是一个 T-不变的不可约局部闭集。则 $(Z\times A)/T\subset(\overline{T}\times A)/T$是一个 A-不变的不可约局部闭集。此外，每个 A-不变的不可约局部闭集 $V\subset(\overline{T}\times A)/T$都可由此方式得到。

证明。根据构造，$(Z\times A)/T\subset(\overline{T}\times A)/T$是一个局部闭集（参见注 A.3）。我们有 $\varphi(A\times Z\times A)=(Z\times A)/T$，其中 φ与 (A.2) 相同。因此 $\psi(A\times((Z\times A)/T))=(Z\times A)/T$，其中 ψ与 (A.3) 相同。因此 $(Z\times A)/T\subset(\overline{T}\times A)/T$是 A-不变的。

设 $V\subset(\overline{T}\times A)/T$ 是一个 A-不变的不可约局部闭集。令 $Z=V\cap\overline{T}$，其中$\overline{T}$ 与 $(\overline{T}\times A)/T\to A_0$ 的纤维相对应。则有 $V=(Z\times A)/T$。□

引理 A.6. 设 $\overline{A}$ 是 A 的光滑等变紧化。那么存在一个光滑等变紧化 $T \subset \overline{T}$，使得 $\overline{A} = (\overline{T} \times A)/T$。

证明。存在一个有理映射 $\overline{A} \dashrightarrow A_0$，但从光滑簇到阿贝尔簇的每个有理映射都是正则的。因此我们有一个正则映射 $p\colon \overline{A} \to A_0$。注意到这个映射是$A$-等变的。事实上，记 $m\colon A \times \overline{A} \to \overline{A}$和 $m'\colon A \times A_0 \to A_0$为这两个作用，我们有两个映射 $p \circ m\colon A \times \overline{A} \to A_0$和 $m' \circ (\mathrm{id}_A, p)\colon A \times \overline{A} \to A_0$。它们在 $A \times A \subset A \times \overline{A}$ 上一致。因此 $p \circ m = m' \circ (\mathrm{id}_A, p)$，这表明 $p\colon \overline{A} \to A_0$是 A-等变的。由于 $\overline{A}$是光滑的，存在一个非空的扎里斯基开集 $U \subset A_0$，使得 $p^{-1}(U) \to U$ 是光滑的（[18, III，推论 10.7]）。通过平移，$p\colon \overline{A} \to A_0$ 是光滑的。

现在令 $\overline{T} = p^{-1}(0_{A_0})$。那么，$\overline{T}$是 T的光滑等变紧化。将$m\colon A \times \overline{A} \to \overline{A}$限制到 $A \times \overline{T} \subset A \times \overline{A}$，得到 $A \times \overline{T} \to \overline{A}$。此映射是 T-不变的。因此得到$\psi\colon (\overline{T} \times A)/T \to \overline{A}$。注意，限制 $\psi|_A\colon A \to \overline{A}$ 是开浸入。因此，ψ是 A_0上的映射。注意，ψ 在纤维$\overline{T} \subset (\overline{T} \times A)/T$ 上方的 $0_{A_0} \in A_0$处是单射的。因此，ψ 是单射的。由于$\overline{A}$ 是光滑的，扎里斯基主定理表明 ψ 是开浸入。由于$(\overline{T} \times A)/T$是完备的，$\psi$ 是同构。因此，$\overline{A}$ 由$(\overline{T} \times A)/T$得到。□

A.2. 扇与环面嵌入。我们介绍与扇相关的环面嵌入。我们基本沿用 [37]中所述的记号。另见 [11], [16], [24]。

令 $N = \mathbb{Z}^r$。设 $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$，$M =$同态$(N, \mathbb{Z})$ 且 $M_{\mathbb{R}} = M \otimes \mathbb{R}$。若存在 $n_1, \ldots, n_s \in N$ 使得 $C = \mathbb{R}_{\geq 0} n_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} n_s$，则称子集 $C \subset N_{\mathbb{R}}$ 是一个凸有理多面体锥。我们记

$$C^\vee = \{u \in M_{\mathbb{R}}; u(x) \geq 0 \text{ for all } x \in C\}.$$

则 $C^\vee \subset M_{\mathbb{R}}$ 是一个凸有理多面锥（参见 [37, 第 2]页）。若存在 $u \in C^\vee$ 使得 $F = C \cap \{u = 0\}$，则称子集 $F \subset C$ 为一个面，并记作 $F \prec C$。则 F 是一个凸有理多面锥（参见 [37, 第 2]页）。如果 $C \cap (-C) = \{0\}$，则称 C 为强凸。在复平面 N 中的一个扇是由 Δ 组成的非空集合，其中的元素是 $N_{\mathbb{R}}$中的强凸有理多面锥，并满足以下条件：

(1) 任意 $\sigma \in \Delta$ 的每个面都包含于 Δ中。(2) 对任意 σ、$\sigma' \in \Delta$，交集 $\sigma \cap \sigma'$ 是 σ 和 σ'的一个面。

如果 Δ 是有限的且 $\cup_{\sigma \in \Delta} \sigma = N_{\mathbb{R}}$成立，我们就称 Δ 为完备的。如果对于所有 $\sigma \in \Delta$，都存在一个 $\mathbb{Z}$-基 n_1，……，n_r，使得 $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} n_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} n_s$，其中 $s \leq r$，我们就称 Δ 为非奇异的。

设 $N' = \mathbb{Z}^{r'}$，并设 Δ'是 $N'_{\mathbb{R}}$中的一个扇。扇映射 $\varphi\colon (N', \Delta') \to (N, \Delta)$是一个 $\mathbb{Z}$-线性映射 $\varphi\colon N' \to N$，满足对于每个 $\sigma' \in \Delta'$，都存在 $\sigma \in \Delta$ 使得 $\varphi(\sigma') \subset \sigma$。这里我们继续用 φ 表示标量扩张：$N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$。

设 T是一个代数环面。设 $M = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$，且 $N = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$。根据定义（参见[37, Thm 1.4]），环面嵌入 $T \subset T\mathrm{emb}(\Delta)$由一个扇（$N, \Delta$）如下定义。对每个 $\sigma \in \Delta$，我们构造仿射概形 $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[M \cap \sigma^\vee])$。于是，对于满足 $\sigma' \prec \sigma$的 $\sigma' \in \Delta$，可得到开浸入 $U_{\sigma'} \subset U_\sigma$。据此，我们可以将 $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Delta}$ 粘合起来，得到 $T\mathrm{emb}(\Delta)$。然后$T\mathrm{emb}(\Delta)$是正规概形，并且包含 $T = U_{\{0\}}$ 作为稠密扎里斯基开集。此外，T 作用在$T\mathrm{emb}(\Delta)$上。环面嵌入 $T\mathrm{emb}(\Delta)$是完备的，当且仅当 Δ是完备的；它是光滑的，当且仅当 Δ 是非奇异的。反过来，根据 Sumihiro 定理，每个 T 的正规等变紧化$\overline{T}$ 都是与某个完备扇相关联的环面嵌入（参见[37, Thm 1.5]）。设 $\psi\colon T' \to T$是代数环面同态。那么我们有 $\psi_*\colon N' \to N$，其中$N' =$Hom$(\mathbb{G}_m, T')$。设 Δ'是 N'中的一个扇。假设 $\psi_*\colon (N', \Delta') \to (N, \Delta)$是一个扇映射。那么 ψ可延拓为等变映射 $T'\mathrm{emb}(\Delta') \to T\mathrm{emb}(\Delta)$（参见 [37, Thm 1.13]）。

令 $T \subset N$ 为嵌入 N 中的一个完备扇。设 $\sigma \in \Delta$，则对于每个 σ，都存在唯一的 T-轨道 $\mathrm{orb}(\sigma) \subset U_\sigma$，它在 U_σ 中是扎里斯基闭的。因此，由 [37, 命题 1.6 (iv)], 可得

$$\coprod_{\tau \prec \sigma} \mathrm{orb}(\tau) = U_\sigma. \tag{A.4}$$

对所有 $x \in \sigma\}$，令 $\sigma^\perp = \{u \in M_{\mathbb{R}}; u(x) = 0$。那么 $\mathrm{orb}(\sigma)$ 可识别为谱$\mathbb{C}[M \cap \sigma^\perp]$，其中闭浸入 $\mathrm{orb}(\sigma) \subset U_\sigma$ 由满射 $\mathbb{C}[M \cap \sigma^\vee] \to \mathbb{C}[M \cap \sigma^\perp]$ 描述。

由 $\chi^m \mapsto 0$ 定义，对所有 $m \in (M \cap \sigma^\vee)\backslash(M \cap \sigma^\perp)$（参见 [37, 命题 1.6(iv)]）。这里关于记号 χ^m，请读者参阅 [16, 第 15]页。我们注意到，谱$\mathbb{C}[M \cap \sigma^\perp]$ 是由包含映射 $\mathbb{C}[M \cap \sigma^\perp] \subset \mathbb{C}[M]$定义的商环面。包含映射 $\mathbb{C}[M \cap \sigma^\perp] \subset \mathbb{C}[M \cap \sigma^\vee]$ 给出了映射

$$U_\sigma \to \mathrm{orb}(\sigma) \tag{A.5}$$

其在 $T \subset U_\sigma$ 上的限制是商映射 $T \to \mathrm{orb}(\sigma)$。闭浸入 $\mathrm{orb}(\sigma) \hookrightarrow U_\sigma$ 是映射 (A.5) 的一个截面。

设 $I_\sigma \subset T$ 为商映射 $T \to \mathrm{orb}(\sigma)$ 的核。那么 I_σ 是 $\mathrm{orb}(\sigma) \subset U_\sigma$中各点的各向同性群。令 $M_\sigma = M/(M \cap \sigma^\perp)$。我们断言 $I_\sigma \subset T$ 是一个子环面，并且

$$\mathrm{Hom}(I_\sigma, \mathbb{G}_m) = M_\sigma. \tag{A.6}$$

事实上，由于 $M \cap \sigma^\perp \subset M$ 是饱和的， M_σ 是一个自由的 $\mathbb{Z}$-模。因此我们得到一个自由 $\mathbb{Z}$-模的正合序列：

$$0 \to M \cap \sigma^\perp \to M \to M_\sigma \to 0.$$

由此得到环面的正合序列（参见 [33, 定理 12.9]）

$$1 \to \mathrm{Spec}\mathbb{C}[M_\sigma] \to \mathrm{Spec}\mathbb{C}[M] \to \mathrm{Spec}\mathbb{C}[M \cap \sigma^\perp] \to 1.$$

因此我们有 I_σ =谱$\mathbb{C}[M_\sigma]$。这表明 I_σ 是一个满足 (A.6) 的环面。

A.3. 光滑修改。

引理 A.7. 给定一个等变紧化 $\overline{A}$，我们可以取一个光滑的等变紧化 A 和一个等变态射 $A \to \overline{A}$。

证明。令 $\overline{T}$ 为 $T \cdot 0_A \subset A$ 在 $\overline{A}$中的扎里斯基闭包。则 $T \subset \overline{T}$ 是一个等变紧化。我们有一个典范映射 $\psi : (\overline{T} \times A)/T \to \overline{A}$。我们有一个映射 $T \times \overline{T} \to \overline{T}$，它延拓了群态射 $T \times T \to T$。令 $T \to \overline{T}$ 为正规化。这是 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ 在 T上的同构。因此 $T \subset \tilde{T}$。由于 $T \times T$是正规的，复合态射 $T \times T \to T \times \overline{T} \to \overline{T}$ $\overline{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$经由 $T \to \tilde{T}$分解。因此我们得到 $T \times T \to \tilde{T}$，它延拓了群态射 $T \times T \to \tilde{T}$。 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 因此 $\tilde{T}$是 T的一个等变紧化。由 Sumihiro定理， $\tilde{T} \subset \tilde{T}$ 是一个环面ˆ嵌入。因此由 [37, 第 23], 页，存在一个光滑等变紧化 $\tilde{T}$ 和一个ˆ˜ ˆˆ 等变态射 $\tilde{T} \to T$。令 $A = (\tilde{T} \times A)/T$。于是我们有 A-等变态射 ˆˆ$A \to (\overline{T} \times A)/T \to \overline{A}$。注意， A 是一个光滑等变紧化。与 [26, 定理 1.1] 比较。□

引理 A.8. 给定一个光滑等变紧化 $\overline{A}$，我们可以取一个光滑射影等变紧化 A 以及一个等变态射 $A \to \overline{A}$。

证明. 根据引理 A.6，我们有 $\overline{A} = (\overline{T} \times A)/T$。由 [37, 命题 2.17], 可知，存在一个等变修改 $T \to \overline{T}$，使得 T 是射影的。根据 [37, 第 23], 页，我们可以假设 ˆ ˆ ˆT是光滑的。于是 $A = (A \times T)/T$是光滑的。我们断言它也是射影的。事实上，令 $D = \sum_j n_j D_j$为 T上的一个 T-不变非常丰沛除子。设 $E = \sum_j n_j (D_j \times A)/T$。于是 E 是 A上的一个除子。令 $p : A \to A_0$ 为典范投影。取 A_0的一个扎里斯基开覆盖 $\{U_i\}$，使得 $p^{-1}(U_i) = \hat{T} \times U_i$。那么 $p^{-1}(U_i) \cap E = D \times U_i$，这表明$\mathcal{O}_A(E)$是相对于 A_0 的 p-非常丰沛（参见 [17, 定义 13.52]）。由于 A_0 是射影的，存在 A_0 上的一个丰沛线丛 L，使得 $p^*L(E)$在 A 上是丰沛的（参见 [17, 命题 13.65]）。因此 ˆA是射影的。□

$\bar{}$ $\tilde{}$引理 A.9. 设 A 和 A 为等变紧化。则存在一个光滑等变紧化 A，使得存在等变态射 $A \to A$ 和 $A \to A$。

$\bar{}$ $\tilde{}$ $\bar{}$ $\tilde{}$证明。令 $A \subset A \times A$ 为对角线，其诱导出 $A \subset A \times A$。令 $V \subset A \times A$ 为它的扎里斯基闭包。则 V 是一个 A等变紧化，带有等变映射 $\bar{}$ $\tilde{}$ ˆ$V \to A$和 $V \to A$。根据引理 A.7，存在一个光滑等变紧化 A

ˆ - ˜及其等变态射 $A \to V$。它与 $V \to A$ 和 $V \to A$ 的复合态射分别得到 ˆ - ˆ˜$A \to A$ 和 $A \to A$。□

引理 A.10. 每个半阿贝尔簇至多有可数个光滑等变紧化。

证明。光滑等变紧化 $\overline{A}$ 可写为 $(\overline{T} \times A)/T$，其中 $\overline{T}$ 是一个光滑等变紧化（参见引理 A.6）。根据 Sumihiro 定理，每个光滑、等变紧化 $\overline{T}$ 关于 T 都是与某个完备扇相关联的环面嵌入（[37,定理 1.5]）。完备扇只有可数多个。因此，T的光滑等变紧化只有可数多个，因而 A的也只有可数多个。□

A.4. 轨道闭包与各向同性群。令 $\overline{A} = (\overline{T} \times A)/T$，其中 $\overline{T} = T\text{emb}\Delta$。对于每个 $\sigma \in \Delta$，我们设 $O_\sigma = (\text{轨道}(\sigma) \times A)/T$。于是 $O_\sigma \subset \overline{A}$ 是一个 A-轨道。由 (A.4)，我们有$\overline{A} = \coprod_{\sigma\in\Delta} O_\sigma$。令 $I \subset A$ 为 O_σ中各点的各向同性群。由于 I 在阿贝尔簇 A_0上平凡作用，我们得到 $I \subset T$。于是 I是轨道$(\sigma) \subset \overline{T}$中各点的各向同性群。因此 $I \subset T$ 是一个子环面，并且 (A.6) 得出

$$\text{Hom}(I, \mathbb{G}_m) = M/(M \cap \sigma^\perp). \tag{A.7}$$

设 $V \subset \overline{A}$ 是一个 A-不变的不可约扎里斯基闭集。则存在唯一的 A-轨道 $O_\sigma \subset \overline{A}$，使得 V 是 O_σ 的扎里斯基闭包。假设 $\overline{A}$ 光滑。则由 [37,推论 1，orb$(\sigma) \subset \overline{T}$ 的闭包是光滑的。因此 V 是光滑的。

引理 A.11.设 $\overline{A}$ 为光滑等变紧化。设 $V \subset \overline{A}$ 为一个 A-不变的不可约扎里斯基闭集。则存在一个 A-不变的扎里斯基开集 $W \subset \overline{A}$，其中 $V \subset W$，以及一个等变态射 $p\colon W \to V$，使得 $p : W \to V$ 是一个在 V 上的向量丛的全空间，其零截面为包含映射 $V \hookrightarrow W$。此外，V 可由扎里斯基开子集 V_0 覆盖，使得以下性质成立：

(1) $p\colon W \to V$是 V_0上的平凡向量丛 $\mathbb{C}^l \times V_0 \to V_0$。(2) 设 $O \subset \overline{A}$ 是 A-轨道，且 V 是 O 的闭包。设 I 是$O \subset \overline{A}$中各点的各向同性群。则存在一个分解 $I = \mathbb{G}_m^l$，使得$(t_1, \ldots, t_l) \in \mathbb{G}_m^l$作用于$(z_1, \ldots, z_l, y) \in \mathbb{C}^l \times V_0$，其作用方式为$(z_1, \ldots, z_l, y) \mapsto (t_1 z_1, \ldots, t_l z_l, y)$。

证明。我们首先考虑 $A = T$的情形。令 $M =$同态$(T, \mathbb{G}_m)$和 $N =$同态$(\mathbb{G}_m, T)$。令Δ为定义 $\overline{T}$ 的扇，即 $\overline{T} = T\text{emb}(\Delta)$。根据 [37, 命题 1.6],，我们可以取 $\tau \in \Delta$，使得V 是 orb(τ) 的闭包。我们可以取 v_1、 、 . .. 、 $v_l \in N$，使得 $\tau = \mathbb{R}_{\geq 0} v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} v_l$和$\tau \cap N = \mathbb{Z}_{\geq 0} v_1 + \cdots + \mathbb{Z}_{\geq 0} v_l$。令 $\overline{N} = N/N_\tau$，其中 $N_\tau = \mathbb{Z}(\tau \cap N)$。于是 N是$M \cap \tau^\perp$的对偶。我们有

$$\text{orb}(\tau) = \text{Spec}\mathbb{C}[M \cap \tau^\perp].$$

对于每个 $\sigma \in \Delta$满足 $\tau \prec \sigma$的情形，我们令 $\bar{\sigma} = (\sigma + \mathbb{R}\tau)/\mathbb{R}\tau \subset \overline{N}_\mathbb{R}$。于是 $\bar{\sigma} \subset \overline{N}_\mathbb{R}$是一个强凸有理多面锥（参见 [37, 命题 A.8]）。令 $\bar{U}_{\bar{\sigma}} =$ 谱$\mathbb{C}[(M \cap \tau^\perp) \cap \bar{\sigma}^\vee]$。包含映射 $\mathbb{C}[(M \cap \tau^\perp) \cap \bar{\sigma}^\vee] \subset \mathbb{C}[M \cap \sigma^\vee]$给出 $U_\sigma \to \bar{U}_{\bar{\sigma}}$。我们有一个闭浸入 $\bar{U}_{\bar{\sigma}} \hookrightarrow U_\sigma$，它由满射 $\mathbb{C}[M \cap \sigma^\vee] \to \mathbb{C}[(M \cap \tau^\perp) \cap \bar{\sigma}^\vee]$ 定义，其中对所有$m \in (M \cap \sigma^\vee) \backslash (M \cap \tau^\perp \cap \bar{\sigma}^\vee)$，均由 $\chi^m \mapsto 0$ 给出。这个包含映射 $\bar{U}_{\bar{\sigma}} \hookrightarrow U_\sigma$ 是映射 $U_\sigma \to \bar{U}_{\bar{\sigma}}$的截面。

我们指出，$\bar{U}_{\bar{\sigma}}$是向量丛，其零截面是包含映射¯映射 $U_{\bar{\sigma}} \hookrightarrow U_\sigma$。事实上，该序列

$$0 \to N_\tau \to N \to \overline{N} \to 0$$

存在一个（非典范的）分裂 $N = N_\tau \oplus \overline{N}$使得 $\sigma = \tau \oplus \bar{\sigma}$，其中我们将 $\tau \subset N_\mathbb{R}$ 视为$\tau \subset (N_\tau)_\mathbb{R}$。考虑对偶

$$0 \to M \cap \tau^\perp \to M \to M_\tau \to 0,$$

我们得到相应的分裂 $M = M_\tau \oplus (M \cap \tau^\perp)$。因此我们得到

$$\mathbb{C}[M \cap \sigma^\vee] = \mathbb{C}[M_\tau \cap \tau^\vee] \otimes_\mathbb{C} \mathbb{C}[(M \cap \tau^\perp) \cap \bar{\sigma}^\vee].$$

我们有谱$\mathbb{C}[M_\tau \cap \tau^\vee] = \mathbb{C}^l$，因此 $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^l \times \bar{U}_{\bar{\sigma}}$。包含映射 $\bar{U}_{\bar{\sigma}} \subset U_\sigma$ 与$\{0\} \times \bar{U}_{\bar{\sigma}} \subset \mathbb{C}^l \times \bar{U}_{\bar{\sigma}}$重合。因此，映射 $U_\sigma \to \bar{U}_{\bar{\sigma}}$ 是一个平凡向量丛，其零截面是包含映射 $\bar{U}_{\bar{\sigma}} \hookrightarrow U_\sigma$。此外，orb($\tau$)的稳定子 I 可识别为$(\mathbb{G}_m)^l \subset \mathbb{C}^l$。注意，分裂 $N = N_\tau \oplus \overline{N}$的不确定性给出了同构 $\mathbb{C}^l \times \bar{U}_{\bar{\sigma}} \simeq \mathbb{C}^l \times \bar{U}_{\bar{\sigma}}$，该同构由 $U_{\bar{\sigma}} \to I$所定义的乘法给出。

现在是$N_{\mathbb{R}}$中的$\{\bar{\sigma}$个扇，$\in \bar{\Delta}$且$V \supset \bar{\sigma} \}$。那么，由 [37, 假设 1.7] orb($\bar{\Delta}$)。因此 $V = \cup_{\bar{\sigma} \in \bar{\Delta}} U_{\bar{\sigma}}$。令

$$W = \bigcup_{\sigma \in \Delta, \tau \prec \sigma} U_\sigma$$

于是，映射 $U_\sigma \to U_{\bar{\sigma}}$ 粘合在一起，得到一个向量丛 $W \to V$。事实上，该向量丛的坐标变换由乘以 I给出。由于 U_σ 是T-不变的， W是 T-不变的。当 $A = T$时，证明完成。

接下来考虑一般情形。我们将其写为 $V = (V' \times A)/T$，其中 $V' \subset \overline{T}$是一个 T-不变的扎里斯基闭集。于是可以取一个扎里斯基开集$W' \subset \overline{T}$和 p：根据前面的讨论， $W' \to V'$。令 $W = (W' \times A)/T$，其中 W'是 T-不变的。于是 $W \subset \overline{A}$是一个 A-不变的扎里斯基开集，并且 $V \subset W$。由此得到所需的 $W \to V$。□

注 A.12. 设 $\overline{A}$ 是一个光滑等变紧化。那么边界 ∂A 是一个简单正规交叉除子。事实上，对于每个 $x \in \partial A$，我们取唯一的 A-轨道 $O \subset \overline{A}$，使得 $x \in O$，并令$V = \overline{O}$。那么 V 是光滑的。我们取引理 A.11 中的 $W \subset \overline{A}$。令 $V_0 \subset V$ 如引理 A.11 所述，使得 $x \in V_0$。不妨设 $V_0 \subset O$。那么 $(\partial A) \cap (\mathbb{C}^l \times V_0) = \cup_{i=1}^l H_i \times V_0$，其中 $H_i \subset \mathbb{C}^l$由 $H_i = \{z_i = 0\}$定义。因此，$(\partial A) \cap (\mathbb{C}^l \times V_0)$是 $\mathbb{C}^l \times V_0$上的一个简单正规交叉除子。由于 $x \in \partial A$ 是任意的， ∂A 是简单正规交叉的。

A.5. 等变映射的修改。本小节旨在证明引理 A.15。

引理 A.13. 设 $\psi\colon N \to N'$ 是满射。设 Δ 是 N 中的扇，且 Δ' 是 N' 中的扇。令 $\Delta'' = \{\sigma \cap \psi^{-1}(\sigma');\ \sigma \in \Delta, \sigma' \in \Delta'\}$，其中我们继续记 $\psi\colon N_{\mathbb{R}} \to N'_{\mathbb{R}}$。则 Δ'' 是 N 中的扇。

在证明这个引理之前，我们先作如下说明。给定一个凸有理多面体锥 $C \subset N_{\mathbb{R}}$，有$(C^\vee)^\vee = C$ （参见 [37, 定理A.1]）。对于另一个凸有理多面体锥 $C' \subset N_{\mathbb{R}}$，有$(C \cap C')^\vee = C^\vee + (C')^\vee$ （参见 [37, 定理 A.1]）。特别地，$C \cap C'$ 是一个凸有理多面体锥。此外，如果 C 是强凸的，那么 $C \cap C'$ 也是强凸的。根据 [37, 命题 A.9]，以下两个陈述是等价的：

(1) 子集 $C \cap C' \subset C$ 是 C 的面

。(2) 对每个 x、$x' \in C$，若 $x + x' \in C \cap C'$，则 $x \in C \cap C'$ 和 $x' \in C \cap C'$ 都成立。

关键在于蕴含关系 (2)$\Longrightarrow$(1)。反向显然成立。事实上，假设 $C \cap C'$ 是 C 的面。那么存在 $u \in C^\vee$ 使得 $C \cap C' = C \cap \{u = 0\}$。若 x、$x' \in C$ 满足 $x + x' \in C \cap C'$，则 $u(x) \geq 0$，$u(x') \geq 0$，且 $u(x + x') = 0$。因此 $u(x) = u(x') = 0$，故 x、$x' \in C \cap C'$。

引理 A.13 的证明。（参见 [2, 引理 3.2]。）注意， $\psi^{-1}(\sigma')$ 是一个凸有理多面锥。由于 σ 是强凸的， $\sigma \cap \psi^{-1}(\sigma')$ 是一个强凸有理多面锥。因此， Δ'' 是 $N_{\mathbb{R}}$ 中由强凸有理多面锥构成的非空集合。

我们首先证明， $\sigma \cap \psi^{-1}(\sigma')$的一个面包含于 Δ''中。我们断言

$$(\sigma \cap \psi^{-1}(\sigma'))^\vee = \sigma^\vee + \psi^*((\sigma')^\vee), \tag{A.8}$$

其中 ψ^*： $M'_{\mathbb{R}} \to M_{\mathbb{R}}$ 是对偶映射。事实上，根据$(\sigma \cap \psi^{-1}(\sigma'))^\vee = \sigma^\vee + (\psi^{-1}(\sigma'))^\vee$，只需证明

$$(\psi^{-1}(\sigma'))^\vee = \psi^*((\sigma')^\vee).$$

注意，$(\psi^{-1}(\sigma'))^\vee \supset \psi^*((\sigma')^\vee)$ 是平凡的。为证明反向结论，设 $u \in (\psi^{-1}(\sigma'))^\vee$。令$K \subset N_{\mathbb{R}}$ 为 ψ 的核。于是 $K \subset \psi^{-1}(\sigma')$。因此 $K \subset \{u \geq 0\}$。由 $-K = K$，可得

$K \subset \{u = 0\}$。因此存在 $v \in M'_{\mathbb{R}}$ 使得 $u = v \circ \psi$。由 $u \in (\psi^{-1}(\sigma'))^\vee$，我们有$\sigma' \subset \{v \geq 0\}$。因此 $v \in (\sigma')^\vee$。这表明 $u \in \psi^*((\sigma')^\vee)$，故 $(\psi^{-1}(\sigma'))^\vee \subset \psi^*((\sigma')^\vee)$。于是得到 (A.8)。

现在，$\sigma \cap \psi^{-1}(\sigma')$的一个面由 $\sigma \cap \psi^{-1}(\sigma') \cap \{u = 0\}$ 对某个 $u \in (\sigma \cap \psi^{-1}(\sigma'))^\vee$ 定义。由 (A.8)，我们有 $u = v + v' \circ \psi$ 对某个 $v \in \sigma^\vee$ 以及 $v' \in (\sigma')^\vee$。我们断言

$$\sigma \cap \psi^{-1}(\sigma') \cap \{u = 0\} = (\sigma \cap \{v = 0\}) \cap \psi^{-1}(\sigma' \cap \{v' = 0\}). \tag{A.9}$$

事实上，关系“$\supset$”是平凡的。为证明逆命题，设 $x \in \sigma \cap \psi^{-1}(\sigma') \cap \{u = 0\}$。于是有 $v(x) \geq 0$ 和 $v' \circ \psi(x) \geq 0$。由 $u(x) = 0$，可得 $v(x) = 0$ 和 $v' \circ \psi(x) = 0$。因此 $x \in (\sigma \cap \{v = 0\}) \cap \psi^{-1}(\sigma' \cap \{v' = 0\})$。这就证明了 (A.9)。令 $\tau = \sigma \cap \{v = 0\}$ 和$\tau' = \sigma' \cap \{v' = 0\}$。那么 τ和 τ' 分别是 σ和 σ'的面。因此 $\tau \in \Delta$和 $\tau' \in \Delta'$。由 (A.9)，我们有

$$\sigma \cap \psi^{-1}(\sigma') \cap \{u = 0\} = \tau \cap \psi^{-1}(\tau') \in \Delta''.$$

接下来证明 $(\sigma_1 \cap \psi^{-1}(\sigma'_1)) \cap (\sigma_2 \cap \psi^{-1}(\sigma'_2))$ 是 $\sigma_1 \cap \psi^{-1}(\sigma'_1)$ 的一个面。取$x, y \in \sigma_1 \cap \psi^{-1}(\sigma'_1)$，使得 $x + y \in (\sigma_1 \cap \psi^{-1}(\sigma'_1)) \cap (\sigma_2 \cap \psi^{-1}(\sigma'_2))$。于是有 $x + y \in\sigma_1 \cap \sigma_2$。由于 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ 是 σ_1 的一个面，且 $x, y \in \sigma_1$，我们得到 $x, y \in \sigma_1 \cap \sigma_2$。此外，我们有$\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y) \in \sigma'_1 \cap \sigma'_2$。由于 $\sigma'_1 \cap \sigma'_2$ 是 σ'_1 的一个面，且 $\psi(x)\ \psi(y) \in \sigma'_1$，我们得到$\psi(x)\ \psi(y) \in \sigma'_1 \cap \sigma'_2$。因此 $x, y \in (\sigma_1 \cap \psi^{-1}(\sigma'_1)) \cap(\sigma_2 \cap \psi^{-1}(\sigma'_2))$。根据 [37, 命题 A.9], ，我们有

$$(\sigma_1 \cap \psi^{-1}(\sigma'_1)) \cap (\sigma_2 \cap \psi^{-1}(\sigma'_2)) \prec (\sigma_1 \cap \psi^{-1}(\sigma'_1)).$$

因此，Δ'' 是一个扇。 □

引理 A.14. 设 $\psi\colon N \to N'$。设 Δ是 N中的一个完备扇。那么存在一个非-奇异的完备扇 $\tilde{\Delta}'$，它位于 N' 中；并且存在 Δ 的一个有限细分 $\tilde{\Delta}$，使得对所有 $\sigma \in \Delta$，都存在 $\sigma' \in \Delta'$，满足 $\psi(\sigma) = \sigma'$。

这包含在 [1, 命题 4.4]的证明中。为求完整起见，我们给出证明。在证明这个引理之前，先说明以下几点。若 Δ_1、.....、Δ_l是 N中的完备扇，则 $\Delta = \{\sigma_1 \cap \cdots \cap \sigma_l;\ \ \sigma_1 \in \Delta_1$、.....、$\sigma_l \in \Delta_l\}$是 N中的一个完备扇。事实上，在 $l = 2$的情形下，将引理 A.13 应用于恒等映射 $N \to N$，可得 Δ 是一个扇。由归纳法可知，对所有 l，结论同样成立。完备性显然。每个 $\sigma_1 \in \Delta_1$ 都是Δ中的若干锥的并。事实上，我们有

$$\sigma_1 = \bigcup_{\sigma_2 \in \Delta_2, \ldots, \sigma_l \in \Delta_2} \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \cdots \cap \sigma_l,$$

对于 $\Delta_2, \ldots, \Delta_l$，它们是完备的。

引理 A.14 的证明。对于每个 $\sigma \in \Delta$，我们可以取一个完备扇 Δ'_σ in N'，使得$\psi(\sigma)$ 是 Δ'_σ 中若干锥的并。事实上，根据 [37, 定理 A.3], ，存在强凸有理多面锥 $\tau_1, \ldots, \tau_l$，使得 $\psi(\sigma) = \tau_1 \cup \cdots \cup \tau_l$。根据 [37, 命题 1.12], ，存在完备扇 $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_l$，使得 $\tau_i \in \Delta'_i$。我们令 $\Delta'_\sigma = \{\sigma'_1 \cap \cdots \cap \sigma'_l;\ \ \sigma'_i \in \Delta'_i\}$。于是根据引理 A.13，$\Delta'_\sigma$ 是一个完备扇。每个 $\tau_i \in \Delta'_i$ 都是 Δ'_σ 中若干锥的并。因此，$\psi(\sigma)$ 是 Δ'_σ 中若干锥的并，如所求。

令 $\Delta' = \{\cap_{\sigma \in \Delta} \kappa_\sigma;\ \ \kappa_\sigma \in \Delta'_\sigma\}$。于是由引理 A.13，$\Delta'$ 是 N'中的完备扇。对所有 $\sigma \in \Delta$，$\psi(\sigma)$都是 Δ'中锥的并。将 Δ' 替换为其有限细分后，我们可以假设 Δ' 是非奇异的。

令 $\tilde{\Delta} = \{\psi^{-1}(\tau) \cap \sigma;\ \ \tau \in \Delta',\ \ \sigma \in \Delta\}$。于是由引理 A.13，$\tilde{\Delta}$是 N中的完备扇。我们将证明这些 $\tilde{\Delta}$和 Δ'满足我们的要求。我们有 $\psi(\psi^{-1}(\tau) \cap \sigma) = \tau \cap \psi(\sigma)$。因此，只需证明

$$\tau \cap \psi(\sigma) \in \Delta'.$$

我们可以取 τ_1，.....，$\tau_k \in \Delta'$，使得 $\psi(\sigma) = \tau_1 \cup \cdots \cup \tau_k$。因此我们有

$$\tau \cap \psi(\sigma) = (\tau \cap \tau_1) \cup \cdots \cup (\tau \cap \tau_k).$$

每个 $\tau \cap \tau_i$ 都是 τ的面。我们取 $x, y \in \tau$使得 $x + y \in \tau \cap \psi(\sigma)$。于是，对于某个 τ_i，有 $x + y \in \tau \cap \tau_i$。由于 $\tau \cap \tau_i$是 τ的面，我们有 $x, y \in \tau \cap \tau_i$。因此，$x, y \in \tau \cap \psi(\sigma)$。根据 [37,

命题 A.9], $\tau \cap \psi(\sigma)$ 是 τ的面。因此 $\tau \cap \psi(\sigma) \in \Delta'$。这就完成了引理的证明。□

引理 A.15. 设 $\overline{A}$ 是一个光滑等变紧化， $B \subset A$ 是一个半阿贝尔子簇。那么存在一个等变紧化 $A = (T \times A)/T$，并有一个等变态射 $A \to \overline{A}$，使其满足以下性质：

(1) 存在一个光滑等变紧化 A/B，使得存在一个等变态射 $\widehat{\ }: p \to A \to A/B$。 (2) 对于每个 $x \in A$，若半阿贝尔子簇 $C \subset A$ 满足 $C \cdot p(x) = p(x)$，则 $\widehat{C} \cdot x \subset B \cdot x$ 是 A 的子集。

证明. 我们有典范表达式 $0 \to T_A \to A \to A_0 \to 0$ 和 $0 \to T_B \to B \to B_0 \to 0$。于是得到典范表达式

$$0 \to T_A/T_B \to A/B \to A_0/B_0 \to 0.$$

令 $N = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T_A)$。设 Δ 为 N 中满足 $\overline{T}_A = T_A \mathrm{emb}(\Delta)$ 的扇，其中 $\overline{A} = (\overline{T}_A \times A)/T_A$。令 $N' = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T_A/T_B)$。于是有 $\psi: N \to N'$。根据引理 A.14，我们可以在 N' 中找到一个非奇异完备扇 Δ'，以及 Δ 的一个有限细分 Δ，使得对于所有 $\sigma \in \Delta$，都存在 $\sigma' \in \Delta'$，满足 $\psi(\sigma) = \sigma'$。令 $A = (T_A \times A)/T_A$，并令 $\widehat{A/B} = (T_A/T_B \times A/B)/(T_A/T_B)$，其中 $T_A = T_A \mathrm{emb}(\Delta)$ 且 $T_A/T_B = T_A/T_B \mathrm{emb}(\Delta')$。那么 T_A/T_B 是光滑的。因此 A/B 是光滑的。由 [37, p. 19], ，我们得到等变态射 $\widehat{p}: A \to A/B$ 和 $A \to \overline{A}$。

$\widehat{\ }$ 我们将证明 $p: A \to A/B$ 满足断言 (2)。令 $x \in A$。设 $I_x = \{a \in A; a \cdot x = x\}$。取 $\sigma \in \widehat{\Delta}$，使得 $x \in (\text{轨道}(\sigma) \times A)/T \subset \widehat{A}$。设 $M_\sigma = M \cap \sigma^\perp$，其中$M = \text{同态}(T_A, \mathbb{G}_m)$。由 (A.7)，我们有

$$\mathrm{Hom}(I_x, \mathbb{G}_m) = M/M_\sigma,$$

其中 $I_x \subset T_A$是一个子环面。类似地，设 $J_{p(x)} = \{a \in A/B;\ a \cdot p(x) = p(x)\}$。取 $\sigma' \in \Delta'$，使得

$$\psi(\sigma) = \sigma'. \tag{A.10}$$

令轨道$(\sigma') \subset T_A/T_B$ 为相应的轨道。记 $q: T_A \to T_A/T_B$ 为典范映射，我们有 $q(\text{轨道}(\sigma)) = \text{轨道}(\sigma')$（参见 [16, 第 56], [11, 页，引理 3.3. 21]）。特别地，我们有$\widehat{p}(x) \in (\text{轨道}(\sigma') \times (A/B))/(T_A/T_B) \subset A/B$。因此由 (A.7)，我们有

$$\mathrm{Hom}(J_{p(x)}, \mathbb{G}_m) = M'/M'_{\sigma'},$$

其中 $M' = \mathrm{Hom}(T_A/T_B, \mathbb{G}_m)$ 且 $M'_{\sigma'} = M' \cap (\sigma')^\perp$。商映射 $T_A \to T_A/T_B$诱导出环面之间的态射 $I_x \to J_{p(x)}$。这又诱导出 $\mathrm{Hom}(J_{p(x)}, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Hom}(I_x, \mathbb{G}_m)$，即 $M'/M'_{\sigma'} \to M/M_\sigma$。这符合以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_{\sigma'} & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M'/M'_{\sigma'} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_\sigma & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/M_\sigma & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

我们断言映射 $I_x \to J_{p(x)}$ 是满射。事实上，由 (A.10) 可得 $M'_{\sigma'} = M' \cap M_\sigma$。因此映射 $M'/M'_{\sigma'} \to M/M_\sigma$是单射。于是得到单射 $\mathrm{Hom}(J_{p(x)}, \mathbb{G}_m) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(I_x, \mathbb{G}_m)$。由于映射 $I_x \to J_{p(x)}$ 的像是 $J_{p(x)}$ 的一个子环面（参见 [20, 命题 B，第 54] 页），这个像应当与 $J_{p(x)}$重合。因此映射 $I_x \to J_{p(x)}$ 是满射。

现在令 $C \subset A$ 满足 $C \cdot p(x)$。于是 $(C + B)/B \subset J_{p(x)}$。因此 $(C + B)/B \subset (I_x + B)/B$，故 $C \subset I_x + B$。于是 $C \cdot x \subset (I_x + B) \cdot x = B \cdot x$。证明至此完成。□

A.6. 对数切空间。我们回顾 (2.6) 中的同构 $A \times \mathrm{Lie}A \simeq TA$。设 $\overline{A}$ 是 A的光滑等变紧化。则 ∂A 是 $\overline{A}$上的简单正规交叉除子（参见注 A.12）。

引理 A.16。同构 (2.6) 可延拓为一个同构

$$\bar{\psi} : \overline{A} \times \mathrm{Lie}A \to T\overline{A}(-\log(\partial A)).$$

证明。（参见 [35,命题 5.4.3]）记

$$\bar{m} : \overline{A} \times A \to \overline{A}$$

为由 $(x, a) \mapsto x + a$ 定义的自然作用。由 $\bar{m}^*(\partial A) = (\partial A) \times A$，我们有

$$T(\overline{A} \times A)(-\log((\partial A) \times A)) \to T\overline{A}(-\log(\partial A)).$$

我们有子丛

$$\overline{A} \times TA \subset T(\overline{A} \times A)(-\log((\partial A) \times A)).$$

因此得到

$$\overline{A} \times TA \to T\overline{A}(-\log(\partial A)). \tag{A.11}$$

将其限制到 $\overline{A} \times \{0_A\} \subset \overline{A} \times A$，得到

$$\bar{\psi} : \overline{A} \times \mathrm{Lie}A \to T\overline{A}(-\log(\partial A)),$$

¯其推广了 (2.6)。我们将证明 ψ 是一个同构。

设$x \in \overline{A}$ 为任意一点。只需证明诱导映射

$$\bar{\psi}_x : \mathrm{Lie}A \to T_x\overline{A}(-\log(\partial A))$$

是单射的。令 $O \subset \overline{A}$ 为一个唯一的 A-轨道，使得 $x \in O$。令 $I \subset A$ 为 $x \in \overline{A}$的各向同性群。则有同构 $O \simeq A/I$。设 $V = \overline{O}$。由引理 A.11，存在一个 A-不变的扎里斯基开集 $W \subset \overline{A}$，满足 $V \subset W$，以及一个 A-等变态射 $p\colon W \to V$。我们取 $V_0 \subset V$的一个扎里斯基开邻域 x，使得 $V_0 \subset O$ 且 $p^{-1}(V_0) = \mathbb{A}^l \times V_0$。设 $W_0 = p^{-1}(V_0)$。则 W_0是 I-不变的，并且 $(t_1, \dots, t_l) \in I$ 以 $(y_1, \dots, y_l, v) \in \mathbb{A}^l \times V_0$作用为 $(t_1y_1, \dots, t_ly_l, v)$。我们将此作用记为

$$\mu : W_0 \times I \to W_0.$$

注意，μ 是 $\bar{m}$的限制。(A.11)在 $W_0 \times TI \subset A \times TA$ 上的限制诱导出

$$W_0 \times TI \to TW_0(-\log(\partial A)).$$

由对偶可得,

$$\mu^*\Omega^1_{W_0}(\log(\partial A)) \to \Omega^1_{(W_0 \times I)/W_0}. \tag{A.12}$$

在映射（A.12）下，W_0上的截面 $dy_1/y_1, \dots, dy_l/y_l \in \Omega^1_{W_0}(\log(\partial A))$的像为$dt_1/t_1, \dots, dt_l/t_l$。这表明映射（A.12）在 $W_0 \times I$ 上是满射。考虑（x, e_I）$\in W_0 \times I$上的对偶，我们注意到限制

$$\bar{\psi}_x|_{\mathrm{Lie}I} : \mathrm{Lie}I \to T_x\overline{A}(-\log(\partial A))$$

是单射的。

接下来得到如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} W \times A & \xrightarrow{\bar{m}} & W \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ V \times (A/I) & \xrightarrow[\bar{m}_V]{} & V \end{array}$$

由此得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lie}A & \xrightarrow{\bar{m}_*} & T_xW \\ {\scriptstyle q_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ \mathrm{Lie}(A/I) & \xrightarrow[(\bar{m}_V)_*]{} & T_xV \end{array}$$

由 $x \in A/I$，我们注意到 $(\bar{m}_V)_*$ 是一个同构。因此 $\ker\ \bar{m}_* \subset \mathrm{Lie}I$。由于 $\bar{m}_*$ 可分解为

$$\mathrm{Lie}A \xrightarrow{\bar{\psi}_x} T_x\overline{A}(-\log(\partial A)) \longrightarrow T_xW,$$

我们得到 $\ker \psi_x \subset \mathrm{Lie}I$。这表明 ψ_x 是单射的。 □

A.7. 忠实平坦下降的一个应用。

引理 A.17. 设 V 和 Σ 为簇。设 $Z \subset V$ 为闭子概形。设 $Y \subset V \times \Sigma$ 为闭子概形，使得对于所有 $s \in \Sigma$，都有 $Y_s = Z$。那么 $Z \times \Sigma \subset Y$ 是 $V \times \Sigma$ 的闭子概形。

证明。只需证明 V 和 Σ 为仿射的情形。因此我们假设 $V = \mathrm{谱}\ R$ 和 $\Sigma = \mathrm{谱}\ S$。令 $I_Z \subset R$ 和 $I_Y \subset R \otimes_{\mathbb{C}} S$ 分别为与 $Z \subset V$ 和 $Y \subset V \times \Sigma$ 相关联的理想。为证明 $I_Y \subset I_Z \otimes_{\mathbb{C}} S$，取 $\varphi \in I_Y$。于是我们可以写成

$$\varphi = f_1 \otimes g_1 + \cdots + f_l \otimes g_l,$$

其中 $f_1, \ldots, f_l \in R$ 和 $g_1, \ldots, g_l \in S$。我们取此表达式，使得 l 最小。我们定义一个子集 $L \subset \mathbb{C}^l$，使得 $(a_1, \ldots, a_l) \in L$ 当且仅当 $a_1 f_1 + \cdots + a_l f_l \in I_Z$。那么 $L \subset \mathbb{C}^l$ 是一个线性子空间。为证明 $L = \mathbb{C}^l$，我们反设 $L \subsetneq \mathbb{C}^l$。于是可以取一个非零的 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{C}^l$，使得对所有 $(a_1, \ldots, a_l) \in L$，都有 $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_l a_l = 0$。不失一般性，可设 $\lambda_1 = 1$。现在对所有 $s \in \Sigma$，都有 $Y_s = Z$。因此 $g_1(s) f_1 + \cdots + g_l(s) f_l \in I_Z$。于是 $(g_1(s) \ldots, g_l(s)) \in L$，所以对所有 $s \in \Sigma$，都有 $\lambda_1 g_1(s) + \cdots + \lambda_l g_l(s) = 0$。由于 S 是一个整环，我们有 $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_l g_l = 0$ 属于 S。根据 $\lambda_1 = 1$，有 $g_1 = -(\lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_l g_l)$。因此 $\varphi = (f_2 - \lambda_2 f_1) \otimes g_2 + \cdots + (f_l - \lambda_l f_1) \otimes g_l$。这与 l 的最小性矛盾。因此 $L = \mathbb{C}^l$。现在我们有 $(1, 0, \ldots, 0) \in L$，故 $f_1 \in I_Z$。类似地，对所有 i，都有 $f_i \in I_Z$。因此 $\varphi \in I_Z \otimes_{\mathbb{C}} S$。由此可知 $I_Y \subset I_Z \otimes_{\mathbb{C}} S$。这表明 $Z \times \Sigma \subset Y$。□

设 A 为一个半阿贝尔簇，设 $B \subset A$ 为一个半阿贝尔子簇。设 Σ 为一个代数簇。于是我们得到一个投影 $p\colon\ A \times \Sigma \to (A/B) \times \Sigma$，从而得到如下纤维积：

$$\begin{array}{ccc} B \times A \times \Sigma & \xrightarrow{q_2} & A \times \Sigma \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A \times \Sigma & \xrightarrow[p]{} & (A/B) \times \Sigma \end{array} \tag{A.13}$$

这里，对于 $(b, a, s) \in B \times A \times \Sigma$，我们有 $q_1(b, a, s) = (a, s)$，以及 $q_2(b, a, s) = (b + a, s)$。

引理 A.18。设 $Z \subset A \times \Sigma$ 为一个闭子概形，并且按照如下意义是 B-不变的：对所有 $b \in B$，$b + Z = Z$。那么，作为 $B \times A \times \Sigma$ 的闭子概形，有 $q_1^*(Z) = q_2^*(Z)$。

证明。注意到 $q_1^*(Z) = B \times Z$。令 $\pi\colon B \times A \times \Sigma \to B$ 为第一投影。则对于 $b \in B$，我们有 $q_2^*(Z) \cap \pi^{-1}(b) = (-b) + Z = Z$。因此根据引理 A.17，我们有 $q_1^*(Z) \subset q_2^*(Z)$。我们有一个同构 τ：$B \times A \times \Sigma \to B \times A \times \Sigma$，其定义为 $\tau(b, a, s) = (b, a - b, s)$。根据 $q_1 = q_2 \circ \tau$，我们有 $\tau^* q_2^*(Z) = B \times Z$。我们有 $q_1 \circ \tau(b, a, s) = (a - b, s)$。因此对于 $b \in B$，我们有 $\tau^* q_1^*(Z) \cap \pi^{-1}(b) = b + Z = Z$。因此根据引理 A.17，我们有 $\tau^* q_2^*(Z) \subset \tau^* q_1^*(Z)$。于是 $q_2^*(Z) \subset q_1^*(Z)$。从而得到 $q_1^*(Z) = q_2^*(Z)$。□

引理 A.19。设 A 为一个半阿贝尔簇，设 $B \subset A$ 为一个半阿贝尔子簇。设 Σ 为一个代数簇，并设 $Z \subset A \times \Sigma$ 为一个闭子概形，该闭子概形满足 B-不变性，即对于所有 $b \in B$都有 $b + Z = Z$。则存在一个闭子概形 $Z_0 \subset (A/B) \times \Sigma$，使得 $Z = p^*(Z_0)$，其中 p：$A \times \Sigma \to (A/B) \times \Sigma$ 为投影。此外，自然映射 $Z \to Z_0$ 是一个范畴商，即所有 B-不变态射 $Z \to Y$ 都唯一地通过 $Z \to Z_0$进行分解。

证明。为证明 Z_0 的存在性，我们应用忠实平坦下降理论。根据引理 A.18，我们有 $q_1^*(Z) = q_2^*(Z)$ 作为 $B \times A \times \Sigma$ 的闭子概形。关于$B\times B\times A\times\Sigma$的余循环条件（参见 [17,(14.21.1)]）归结为显然的恒等式 $\mathrm{id}_{B\times B\times Z} \circ \mathrm{id}_{B\times B\times Z} = \mathrm{id}_{B\times B\times Z}$。由于闭浸入 $Z \hookrightarrow A \times \Sigma$ 是仿射的，该下降数据给出一个闭子概形 $Z_0 \subset (A/B) \times \Sigma$，使得 $Z = p^*(Z_0)$（参见 [17, 推论 14.86]）。另见 [8, 备注 2.6.2。(iv)]。限制 $p|_Z : Z \to Z_0$ 是 p 的基变换，因此是一个 B-挠子。因此，$Z \to Z_0$ 是一个范畴商（参见 [8,命题 2.6.4]）。□

Appendix B. Flattening via blowing-ups

引理 B.1. 设 S 是 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形。设 $X \subset \mathbb{P}^N \times S$ 是闭子概形，且 $X \to S$ 平坦。假设 S 既约。设 $U \subset S$ 是稠密扎里斯基开集。那么 $X|_U$ 的概形论闭包是 X。特别地，$\operatorname{supp} X|_U \subset \operatorname{supp} X$ 是稠密的。

证明。令 $Y \subset \mathbb{P}^N \times S$为 $X|_U$的概形论闭包。则 $Y \subset X$且 $Y|_U = X|_U$。令 P为每个 X_s 的希尔伯特多项式，其中 $s \in S$。取 $s \in S - U$。令 P'为 Y_s的希尔伯特多项式。于是由 $Y_s \subset X_s$，我们有 $P' \leq P$。另一方面，由希尔伯特多项式的上半连续性，我们有$P \leq P'$。因此 $P' = P$。由于 S是既约的，我们注意到 $Y \to S$ 是平坦的。此外，对所有 $s \in S$，我们有 $Y_s = X_s$。因此 $Y = X$。参见[17,命题 14.26]。□

引理 B.2. 设 $X \subset \mathbb{P}^N \times S$ 是一个闭子概形，其中 S 是一个代数簇。设 $Z \subset S$ 是一个不可约扎里斯基闭集。那么存在一个射影双有理修改 $\varphi : S' \to S$ 以及一个非空扎里斯基开集 $U \subset S$，满足以下性质。

(1) $U \cap Z \neq \emptyset$。(2) $\varphi^{-1}(U) \to U$ 是一个同构。(3) 设 $p : X \to S$ 是投影，并设 $X' \subset \mathbb{P}^N \times S'$ 是 $p^{-1}(U) \subset X \times_S S'$ 的概形论闭包。那么 $X'|_{Z'} \to Z'$ 是平坦的，其中 $Z' \subset S'$ 是 $\varphi^{-1}(Z \cap U) \subset S'$ 和 $X'|_{Z'} = X' \times_{S'} Z'$ 的扎里斯基闭包。

证明。由 [46, 引理 3.1] 可得如下结论。对于每个 $s \in S$，令 P_{X_s} 为 $X_s \subset \mathbb{P}^N$的希尔伯特多项式。令 $\mathcal{P}$ 为 $\mathbb{P}^N$的所有闭子概形的希尔伯特多项式所组成的集合。那么 $\mathcal{P}$ 按照 $P_1 \leq P_2$ 是全序集，当且仅当对于所有充分大的 m，$P_1(m) \leq P_2(m)$。此外，$\mathcal{P}$ 是良序的（参见 [46, 引理8.2]）。注意，$\{P_{X_s}\}_{s\in S}$ 是一个有限集（参见 [39, 第201 页，步骤2]）。令 $P_{\max}$ 为 $\{P_{X_s}\}_{s\in S}$中的极大元。我们设

$$T = \begin{cases} \{s \in S;\ P_{X_s} = P_{\max}\} & \text{if } X \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{if } X = \emptyset. \end{cases}$$

那么 $T \subset S$ 是一个扎里斯基闭子集（参见 [46, 引理 3.1]）。

我们的引理的证明通过对 $P_{\max} \in \mathcal{P}$ 作超限归纳进行。因此，我们假设当 $P_{\max} < P$ 时我们的引理成立，并考虑 $P_{\max} = P$ 的情形。如果 $X = \emptyset$，则我们的引理显然成立。因此，以下我们假设 $X \neq \emptyset$。设 $Z \subset T$。那么对于所有 $s \in Z$，我们有 $P_{X_s} = P$。由于 Z 是整的，$X|_Z \to Z$ 是平坦的（参见 [18, III，定理 9.9]）。因此，我们的引理对 $S' = S$ 和 $U = S$ 成立。所以我们考虑 $Z \not\subset T$ 的情形。于是 $T \neq S$。根据 [46, 引理 ˆ 3.1],，存在一个闭子概形 $\mathcal{T}$，其支集为 $\mathcal{T} = T$，使得如果 $P = \max\{P_{\hat{}X_s}\}_{s\in \hat{}S}$，则 $\hat{}P < P$，其中 $\hat{}S =$爆破$_{\mathcal{T}}S$，且 $\hat{}X \subset \mathbb{P}^N \times \hat{}S$ 是严格变换。这个严格变换是在同构 $\mathbb{P}^N \times \hat{}S =$爆破$_{\mathbb{P}^N\times\mathcal{T}}(\mathbb{P}^N \times S)$ 下定义的。令 $\hat{}\ Z \subset \hat{}S$ 为严格变换。

现在，根据归纳假设，存在一个射影双有理修改 $\psi : S' \to S$ˆ 和一个非空扎里斯基开集 $U_0 \subset S$，满足以下性质。

- $U_0 \cap$ ˆ$Z \neq \emptyset$。
- $\psi^{-1}(U_0) \to U_0$ 是一个同构。
- 令 ˆ$p :$ ˆ$X \to$ ˆS 为投影，并令 $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^N \times S'$ 为 ˆ$p^{-1}(U_0) \subset$ ˆ$X \times_S S'$ 的概形论闭包。则 $\tilde{X}|_{Z'} \to Z'$ 是平坦的，其中 $Z' \subset S'$ 是$\psi^{-1}($ ˆ$Z \cap U_0) \subset S'$ 的扎里斯基闭包。

ˆ ˆ 我们用 φ: $S' \to S$ 表示 $S' \to S \to S$ 的复合态射。注意，$S \to S$ 在 $S - T$ 上是一个同构。因此，我们可以将 $S - T \subset S$ 视为 S 的开子集。令 $U = (S - T) \cap U_0$。那么我们可以将 U 视为 S 的开子集。于是有 $U \cap Z \neq \emptyset$，且 $\varphi^{-1}(U) \to U$ 是一个同构。由于 Z 不可约，$\varphi^{-1}($ $U \cap Z)$ 在 S' 中的扎里斯基闭包等于Z'。令 $X' \subset \mathbb{P}^N \times S'$ 为 $p^{-1}(U) \subset X \times_S S'$ 的概形论闭包。于是有~ ~ ~$X' \subset X$，因此 $X'|_{Z'} \subset X|_{Z'}$。另一方面，有 $X'|_{\varphi^{-1}(U)} = X|_{\varphi^{-1}(U)}$。因此，根据~ ~ ~引理 B.1，$X'|_{\varphi^{-1}(U)\cap Z'} \subset X|_{Z'}$ 的概形论闭包为 $X|_{Z'}$。因此 $X|_{Z'} \subset X'|_{Z'}$,~，进而 $X|_{Z'} = X'|_{Z'}$。因此 $X'|_{Z'} \to Z'$ 是平坦的。由超限归纳法，证明完成。□

引理 B.3. 在引理 B.2 中，如果 S 是光滑的，则取 S' 为光滑的。

证明。我们应用引理 B.2 得到 S' 和 U。假设 S' 不光滑。于是我们取一个光滑修改 $S'' \to S'$。由于 S 光滑，我们可以假设 $S'' \to S'$ 在 $\varphi^{-1}(U)$ 上是同构。令 $\psi : S'' \to S$ 为诱导映射。则 $\psi : S'' \to S$ 和 $U \subset S$满足引理 B.2陈述中的性质 (1)和 (2)。我们证明 (3)。我们考虑 $U \subset S''$。令 $X'' \subset \mathbb{P}^N \times S''$ 为 $p^{-1}(U) \subset X \times_S S''$的概形论闭包。于是有 $X'' \subset X' \times_{S'} S'' \subset X \times_S S''$。这推出闭浸入 $X''|_{Z''} \subset (X' \times_{S'} S'')|_{Z''}$，其中 $Z'' \subset S''$ 是 $\psi^{-1}($ $Z \cap U) \subset S''$的扎里斯基闭包。由于 $Z'' \to S'$ 经由 $Z' \to S'$分解，我们有 $(X' \times_{S'} S'')|_{Z''} = ($ $X'|_{Z'}) \times Z''$。因此得到 $X''|_{Z''} \subset (X'|_{Z'}) \times Z''$。注意，$X''|_{Z''\cap U} = (X'|_{Z'}) \times (Z'' \cap U) = p^{-1}(U)$ $|_{Z''\cap U}$。由于 $(X'|_{Z'}) \times Z'' \to Z''$是平坦的，引理 B.1推出 $X''|_{Z''} = (X'|_{Z'}) \times Z''$。因此 $X''|_{Z''} \to Z''$ 是平坦的。我们用 S'' 替换 S'，从而完成证明。□

References

[1] D. Abramovich 和 K. Karu，特征 0 下的弱半稳定约化，《数学发明》139 (2000年)，第 2 期，241–273.[2] K. Ascher 和 S. Molcho，对数稳定环面簇及其模空间，《代数几何》3 (2016年)，第 3 期，296–319.[3] W. Bergweiler，布洛赫原理，《函数理论计算方法》6 (2006年)，77–108.[4] A. Bloch，关于具有稀疏线性簇的全纯函数系，Ann. ´Ecole Nor- male，43 (1926年) 309–362.[5] A. Bloch，关于满足代数簇方程且不规则度大于维数的单值函数系，《纯粹与应用数学杂志》5 (1926年) 19–66.[6] A. Borel，线性代数群。第 2 版，《数学研究生教材》126，施普林格出版社，1991.[7] E. Borel，关于整函数的零点，Acta Math. 20 (1897)，第 1 期，357–396.[8] M. Brion，代数群的一些结构定理，《代数群：结构与作用》，《纯粹数学专题讨论会论文集》94，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017，53–126.[9] M. Brunella，复代数曲面中的整曲线，Ast´erisque. 282，(2002年) 39-61.[10] H. Cartan，关于具有稀疏线性簇的全纯函数系及其应用，Ann. ´Ecole Normale，45 (1928年) 255–346.[11] D. Cox、J. Little 和 H. Schenck，环面簇，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011.[12] J. P. Demailly，关于小林双曲射影簇和射流微分的代数判据，《纯粹数学专题讨论会论文集》62，美国数学学会，1997，285–360.[13] D. Drasin，正规族与 Nevanlinna 理论，Acta Math. 122 (1969)，231–263.[14] A. Eremenko，关于遗漏超平面的全纯曲线的 Cartan 猜想的一个反例，《美国数学学会会刊》124 (1996)，3097–3100.

[15] A. Eremenko，射影空间中遗漏五个平面的全纯曲线，《美国数学杂志》118 (1996)，1141–1151.
[16] W. Fulton，《环面簇导论》，《数学年刊研究》131 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993.[17] U. G¨ortz 和 T. Wedhorn，《代数几何 I：带示例和习题的概形》，《高级讲义数学》，Vieweg ＋ Teubner，威斯巴登，2010年.[18] R. Hartshorne，《代数几何》，《数学研究生教材》156，施普林格出版社，柏林，1977年.[19] W. K. Hayman，《次调和函数》第 2 卷，《伦敦数学会专著》20。Academic Press, Inc.，伦敦，1989年.[20] J. Humphreys，《线性代数群》，《数学研究生教材》21，施普林格出版社，纽约-海德堡，1975年.[21] S. Iitaka，论代数簇的对数柯达伊拉维数，《复分析与代数几何》，175–189。岩波书店，东京，1977年.[22] Y. Kawamata，论布洛赫猜想，《数学发明》57 (1980年)，97-100.[23] Y. Kawamata，阿贝尔簇的刻画，《组合数学》43 (1981年)，第 2 期，253–276.[24] G. Kempf、F. Knudsen、D. Mumford、B. Saint-Donat，《环面嵌入 I》，《数学讲义》第 339 卷，施普林格出版社，1973年.[25] P. Kiernan 和 S. Kobayashi，映入具有稀疏超平面的射影空间的全纯映射，《名古屋数学杂志》50 (1973年) 199–216.[26] F. Knop 和 H. Lange，关于交换代数群紧化的一些注记，《赫尔维蒂数学评论》60 (1985)，第 4 期，497–507.[27] R. Kobayashi，Nevanlinna 理论与数论（日语），S¯ugaku 48 (1996)，第 2 期，113–127.[28] S. Kobayashi，《双曲复空间》，施普林格，1998.[29] L. K¨uhne，半阿贝尔簇的有界高度猜想，《组合数学》156 (2020年)，第 7 期，1405–1456.[30] S. Lang，《复双曲空间导论》，施普林格出版社，纽约-柏林-海德堡，1987年.[31] Q. Liu，《代数几何与算术曲线》，牛津大学出版社，牛津，2002.[32] M. McQuillan，丢番图逼近与叶状结构，《高等科学研究所数学出版物》87 (1998) 121-174.[33] J. S. Milne，《代数群：域上有限型群概形理论》，《剑桥高等数学研究》170。剑桥大学出版社，剑桥，2017.[34] J. Noguchi，对数导数引理与代数簇中的全纯曲线，《名古屋数学杂志》83 (1981)，213-233.[35] J. Noguchi 和 J. Winkelmann，《多复变数奈望林纳理论与丢番图逼近》，施普林格，2013.[36] T. Ochiai，论具有丰不规则性的代数簇中的全纯曲线，《数学发明》43 (1977)，83-96.[37] T. Oda，《凸体与代数几何》，施普林格，1988.[38] Joel L. Schiff，《正规族》，施普林格，纽约、柏林、海德堡，1993.[39] E. Sernesi，《代数概形的变形》，《数学科学基础》334。施普林格出版社，柏林，2006.[40] J.-P. Serre，《代数群与类域》，《数学研究生教材》117，施普林格出版社，1988.[41] P. Vojta，半阿贝尔簇子簇上的整点 I，《数学发明》126 (1996)，第 1 期，133–181.[42] P. Vojta，半阿贝尔簇子簇上的整点 II，《美国数学杂志》121 (1999)，第 2 期，283–313.[43] P. Vojta，论 ABC 猜想与有理点的丢番图逼近，《美国数学杂志》122 第 4 期 (2000) 843-872.[44] K. Yamanoi，对数导数的奈望林纳引理的代数几何版本及其应用，《名古屋数学杂志》173 (2004)，23–63.[45] K. Yamanoi，小林双曲性与高维奈望林纳理论，载于：《流形上的几何与分析》，《数学进展》第 308 卷。Birkh¨auser/施普林格，尚 (2015年)，第 209-273 页.[46] K. Yamanoi，阿贝尔簇上一般型子簇的伪小林双曲性，《日本数学会杂志》71 第 1 期 (2019年) 259-298.[47] L. Zalcman，《三个定理的故事》，《美国数学月刊》123 (2016年)，第 7 期，643–656。

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka,Osaka 560-0043, Japan电子邮件地址：yamanoi@math.sci.大阪-u.ac.jp