arXiv:2304.05725v1 [math.FA] 12 Apr 2023

具有足够多 *-表示的拟 *-代数的拓扑方面

GIORGIA BELLOMONTE 和 CAMILLO TRAPANI

摘要。具有充分族 $\mathcal{M}$ 个不变正半双线性型的拟 *-代数带有若干与 $\mathcal{M}$ 相关的拓扑，使得每个 *-表示都是连续的。这促使我们定义局部凸拟 GA*-代数这一类，其主要特征在于：相对于族 $\mathcal{M}$，其有界元素族是一个稠密的 C*-代数。

1. 引言

局部凸拟 *-代数 $(\mathfrak{A}[\tau], \mathfrak{A}_0)$ 通常是在对具有分别连续（但不联合连续）乘法的局部凸 *-代数 $\mathfrak{A}_0[\tau]$ 进行$\widetilde{\ }$完备化 $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_0[\tau]$ 时产生的（事实上，理论早期阶段所研究的情形正是如此，涉及量子物理中的应用）。具体例子包括作用于拟希尔伯特空间中的算子族，或作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的公共定义域 $\mathcal{D}$ 上的某些无界算子族。关于该理论及其应用的综述，请参见 [6]。

对这一结构的研究以及在 [1, 4, 5,7, 9] 中所进行的分析表明，最正则的情形出现在所考察的局部凸拟 *-代数（$\mathfrak{A}[\tau], \mathfrak{A}_0$）具有一族足够丰富的 不变正半双线性形式 $\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 时，这些形式定义在 $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ 上（定义见下文）；它们使得我们能够进行类似于在 *-代数 $\mathfrak{A}_0$ 上由正线性泛函所定义的 GNS 构造。本文的基本出发点是考虑这样一个拟 *-代数（$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0$），我们可以直接利用半双线性形式集 $\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 引入局部凸拓扑。在最理想的情况下，我们期望它具有类似于 *-代数 $\mathfrak{B}_0$ 的性质，其拓扑可由 C*-半范数族定义：

$$p_M(x) = \sup_{\omega \in M; \omega(\mathsf{e})=1} \omega(x^*x)^{1/2}$$

其中 M 是 $\mathfrak{B}_0$ [10] 上一组适当的正线性泛函。

2020年数学主题分类。 主要分类号 46K05、46K10、47L60、47A07；次要分类号 08A55。关键词与短语。 不变正半双线性形式，*-表示，局部凸拟 *-代数。

因此，我们从纯代数框架出发，即（$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_0$）是一个拟 *-代数，并假设它具有足够丰富的 $\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$（具体来说，对于某个适当的子集 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$，对每个 $a \in \mathfrak{A}$，$a \neq 0$，都存在 $\varphi \in \mathcal{M}$，使得 $\varphi(a, a) > 0$）。以这一集合 $\mathcal{M}$ 为基础，我们着手在 $\mathfrak{A}$ 上构造局部凸拓扑，特别选取那些使每个（足够正则的）*-表示都连续的拓扑。这一分析引出了一个局部凸拟 *-代数（$\mathfrak{A}[\tau]$, $\mathfrak{A}_0$）类（称为局部凸拟 GA*-代数），其有界元素构成一个 C*-代数。本文安排如下：第2节概述拟 *-代数、其拓扑及其表示的一些预备概念。第3节介绍由一族 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 定义的序；当该族 $\mathcal{M}$ 足够丰富时，与之相关的楔形集便成为一个锥。第4节中，给定 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$，我们介绍两种有界元素的概念：相对于一族 $\mathcal{M}$ 有界的元素，以及与由 $\mathcal{M}$ 定义的序相关的元素。事实证明，这两种概念等价，而且每个 *-表示作用于有界元素时都会产生一个有界算子。第5节探讨由一族 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 生成的拓扑，第6节则介绍局部凸拟 GA*-代数并研究其若干性质。局部凸拟 GA*-代数的特征是，其拓扑等价于由某个 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 生成的拓扑，如第5节所述。

2. 基本定义与事实

我们先介绍一些预备知识；详情请参见 [6] 。

一个拟 *-代数 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$是由一个向量空间 $\mathfrak{A}$ 和一个 *-代数 $\mathfrak{A}_0$ 构成的一对，其中 $\mathfrak{A}_0$ 包含在 $\mathfrak{A}$ 中，作为其子空间，并且满足

(i) $\mathfrak{A}$ 带有一个对合 $a \mapsto a^*$，它扩张了 $\mathfrak{A}_0$上的对合；(ii) $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}_0$ 上的双模，且模乘法扩张了 $\mathfrak{A}_0$上的乘法。特别地，以下结合律成立：

$$(xa)y = x(ay); \quad a(xy) = (ax)y, \quad \forall\, a \in \mathfrak{A},\ x, y \in \mathfrak{A}_0;$$

(iii) $(ax)^* = x^* a^*$，对任意 $a \in \mathfrak{A}$ 和 $x \in \mathfrak{A}_0$均成立。

$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 的单位元 （如果存在）必定是唯一的元素 $\mathsf{e} \in \mathfrak{A}_0$，满足对所有 $a \in \mathfrak{A}$，$a\mathsf{e} = a = \mathsf{e}a$。

我们始终假设

$$ax = 0,\ \forall x \in \mathfrak{A}_0 \Rightarrow a = 0$$
$$ax = 0,\ \forall a \in \mathfrak{A} \Rightarrow x = 0.$$

如果 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 具有单位元 e，则这两个条件显然得到满足。

定义 2.1。 如果 $\mathfrak{A}$ 是一个具有拓扑 τ 的局部凸向量空间，并满足以下性质，则称拟 *-代数 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 为局部凸的。

(lc1) $x \mapsto x^*$，$x \in \mathfrak{A}_0$ 连续；(lc2) 对每个 $a \in \mathfrak{A}$，映射 $x \mapsto ax$ 和 $x \mapsto xa$，从 $\mathfrak{A}_0$ 到 $\mathfrak{A}$,$x \in \mathfrak{A}_0$，均连续；(lc3) $\overline{\mathfrak{A}_0}^{\tau} = \mathfrak{A}$；即，$\mathfrak{A}_0$ 在 $\mathfrak{A}[\tau]$ 中稠密。

特别是，如果 τ 是范数拓扑，其范数为 $\|\quad\quad\quad

强拓扑t_s 在 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})$ 上由半范数定义

$$p_\xi(X)=\|X\xi\|,\quad X\in\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H}),\,\xi\in\mathcal{D}.$$

该强*拓扑 t_{s^*} on $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})$ 通常由半范数定义

$$p^*_\xi(X)=\max\{\|X\xi\|,\|X^\dagger\xi\|\},\,\xi\in\mathcal{D}.$$

那么，$(\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})[\mathsf{t}_{s^*}],\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b)$ 是一个完备的局部凸拟 *-代数[6,第6节1]。

我们用 $t_\dagger$ 表示由半范数集合在 $\mathcal{D}$ 上定义的图拓扑

$$\xi\in\mathcal{D}\to\|X\xi\|;\ X\in\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H}).$$

$\mathcal{D}[t_\dagger]$ 的所有有界子集构成的族记作 $\mathfrak{B}$。

我们分别用 tt_u 、tt^u 和 tt^u_* 表示由以下半范数族定义的一致拓扑：

对于 tt_u： $p_{\mathcal{B}}(X)=\sup_{\xi,\ \eta\in\mathcal{B}}|\langle X\xi|\eta\rangle|,\quad \mathcal{B}\in\mathfrak{B}$;
对于 tt^u： $p^{\mathcal{B}}(X)=\sup_{\xi\in\mathcal{B}}\|X\xi\|,\quad \mathcal{B}\in\mathfrak{B}$; 对于 tt^u_*： $p^{\mathcal{B}}_*(X)=\max\{p^{\mathcal{B}}(X)\ p^{\mathcal{B}}(X^\dagger)\},\quad \mathcal{B}\in\mathfrak{B}$。

容易看出，$\mathsf{tt}_u\preceq\mathsf{tt}^u\preceq\mathsf{tt}^u_*$:

$$p_{\mathcal{B}}(X)\le\gamma_{\mathcal{B}}\,p^{\mathcal{B}}(X)\le\gamma_{\mathcal{B}}p^{\mathcal{B}}_*(X),\quad\forall X\in\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H});$$

此外，

$$p_{\mathcal{B}}(X^\dagger\square X)=p^{\mathcal{B}}(X)^2\ \text{whenever}\ X^\dagger\square X\ \text{is well–defined.}$$

如 [2, 命题 4.2。3] $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})[\mathsf{tt}^u_*]$ 所示是完备的。

定义 2.2。 设 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 是一个拟 *–代数， $\mathcal{D}_\pi$ 是某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\pi$中的稠密定义域。若线性映射 π 从 $\mathfrak{A}$ 映射到 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}_\pi,\mathcal{H}_\pi)$，则称其为 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 的 *–表示，如果满足以下性质：

(i) $\pi(a^*)=\pi(a)^\dagger$， $\forall\,a\in\mathfrak{A}$; (ii) 对于 $a\in\mathfrak{A}$ 和 $x\in\mathfrak{A}_0$， $\pi(a)\square\pi(x)$ 定义良好，且 $\pi(a)\square\pi(x)=\pi(ax)$。

若 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 有单位元 $\mathsf{e}\in\mathfrak{A}_0$，则我们假设对于 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 的每个 *-表示π，$\pi(\mathsf{e})=\mathbb{I}_{\mathcal{D}_\pi}$，即空间 $\mathcal{D}_\pi$ 上的恒等算子。

若 $\pi_o:=\pi\restriction\mathfrak{A}_0$ 是从 *-代数 $\mathfrak{A}_0$ 到 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}_\pi)$ 的 *-表示，我们称 π 是 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 的*qu*–表示 。

若对每个 $a\in\mathfrak{A}$， $\pi(a)$ 都是$\mathcal{D}_\pi$中的有界算子，则称 *-表示 π 为有界。

设 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 是一个拟 *–代数。我们用 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 表示 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$ 上所有满足以下条件的半双线性型的集合：

(i) φ 是正的，即 $\varphi(a,a) \geq 0, \quad \forall\, a \in \mathfrak{A}$;

(ii) $\varphi(ax,y) = \varphi(x,a^*y) \quad \forall\, a \in \mathfrak{A},\ x,y \in \mathfrak{A}_0$。

对于每个 $\varphi \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$，集合

$$N_\varphi := \{a \in \mathfrak{A} : \varphi(a,a) = 0\} = \{a \in \mathfrak{A} : \varphi(a,b) = 0,\ \forall\, b \in \mathfrak{A}\}.$$

是 $\mathfrak{A}$ 的子空间。

令 $\lambda_\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/N_\varphi$ 为通常的商映射，对每个 $a \in \mathfrak{A}$，令 $\lambda_\varphi(a)$为包含 a的 $\mathfrak{A}/N_\varphi$的相应陪集。于是可在 $\lambda_\varphi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}/N_\varphi$ 上定义内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$，其定义为

$$\langle\lambda_\varphi(a)|\lambda_\varphi(b)\rangle := \varphi(a,b), \quad \forall\, a,b \in \mathfrak{A}.$$

记 $\mathcal{H}_\varphi$ 为通过对预希尔伯特空间 $\lambda_\varphi(\mathfrak{A})$进行完备化而得到的希尔伯特空间。

定义 2.3. 我们用 $\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 表示满足 $\lambda_\varphi(\mathfrak{A}_0)$ 在 $\mathcal{H}_\varphi$ 中稠密的形式 $\varphi \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 的子集。$\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 中的元素也称为不变正半双线性型，或简称为*ips*-形式。

此外，如果 $(\mathfrak{A}[\tau],\mathfrak{A}_0)$ 是一个局部凸拟 *-代数，我们用$\mathcal{P}^\tau_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 表示 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 中联合 τ-连续的元素族 φ；也就是说，存在一个连续半范数 p_σ，使得

$$|\varphi(a,b)| \leq p_\sigma(a)p_\sigma(b), \quad \forall a,b \in \mathfrak{A}.$$

$\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 的半双线性型允许构造 GNS 表示[6]。事实上，

命题 2.4。 设$(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 是一个带单位元e 的准 *–代数，且 φ 是 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$上的半双线性形式。以下陈述等价:

(i) $\varphi \in \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$。(ii) 存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\varphi$、希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\varphi$ 的稠密定义域 $\mathcal{D}_\varphi$ 以及一个在 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}_\varphi,\mathcal{H}_\varphi)$中的闭循环 *–表示 π_φ，其循环向量为 ξ_φ （即 $\pi_\varphi(\mathfrak{A}_0)\xi_\varphi$ 在 $\mathcal{H}_\varphi$中稠密），使得

$$\varphi(a,b) = \langle\pi_\varphi(a)\xi_\varphi|\pi_\varphi(b)\xi_\varphi\rangle, \quad \forall\, a,b \in \mathfrak{A}.$$

备注2.5。 *-表示 π_φ 事实上是通过取由在 $\lambda_\varphi(\mathfrak{A}_0)$上定义的 *-表示 π°_φ 的闭包得到的

$$\pi^\circ_\varphi(a)\lambda_\varphi(x) = \lambda_\varphi(ax) \quad a \in \mathfrak{A}, x \in \mathfrak{A}_0.$$

如果 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$足够丰富（也就是说，对每个 $a \in \mathfrak{A}$，都存在 $\varphi \in \mathcal{M}$，使得 $\varphi(a,a) > 0$），那么我们就可以像 [6, 定义 3.1.30] 中那样引入一种部分乘法。

事实上，在这种情况下，如果存在 $c \in \mathfrak{A}$，使得.....，我们就称弱乘法 $a \diamond b$, $a, b \in \mathfrak{A}$ 是良定义的

$$\varphi(bx, a^* y) = \varphi(cx, y), \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{A}_0 \text{ and } \varphi \in \mathcal{M}. \tag{2.2}$$

在此情况下，我们令 $a \diamond b := c$。

根据这些定义，我们得出 ([3, 命题 4.4]) $\mathfrak{A}$ 相对于弱乘法 $\diamond$ 也是一个部分 *–代数。

注 2.6。 $c = a \diamond b$ 的唯一性由下面的命题 3.3 保证。显然，这个乘法取决于族 $\mathcal{M}$。

3. 形式族与序结构

正如在 [6], 中详尽讨论的那样，局部凸拟 *-代数中的有界元素这一概念，对于在该结构中开展谱分析至关重要。我们在此提出两种不同的方法，类似于 [3]中所发展的方法，但不作其中的连续性假设。

在继续之前，我们先引入下文所需的一些概念。特别地，类比于 [10],

定义 3.1. 子集 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 称为

平衡： 若 $\varphi \in \mathcal{M}$ 蕴含 $\varphi^x \in \mathcal{M}$，对每个 $x \in \mathfrak{A}_0$ 均成立，其中 $\varphi^x(a, b) := \varphi(ax, bx)$ 对所有 $a, b \in \mathfrak{A}$ 均成立。**充分的：** 若其为平衡的，且对每个 $a \in \mathfrak{A} \setminus \{0\}$，都存在 $\varphi \in \mathcal{M}$，使得 $\varphi(a, a) > 0$。

注 3.2. 若 $(\mathfrak{A}[\tau], \mathfrak{A}_0)$ 是一个局部凸拟 *-代数，则

(a) $\mathcal{P}^{\tau}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A}) \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$;
(b) $\mathcal{P}^{\tau}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 是平衡的。

下面的命题使我们能够以其他等价方式处理充分性这一概念。

命题 3.3。 设 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 是一个拟 *-代数， $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$的子集，且 $a \in \mathfrak{A}$。则以下条件等价:

i) $\varphi(ax, x) = 0$, 对所有 $\varphi \in \mathcal{M}$, $x \in \mathfrak{A}_0$ 均成立;
ii) $\varphi(ax, y) = 0$, 对所有 $\varphi \in \mathcal{M}$, $x, y \in \mathfrak{A}_0$ 均成立;
iii) $\varphi(ax, ax) = 0$, 对所有 $\varphi \in \mathcal{M}$, $x \in \mathfrak{A}_0$ 均成立。

如果 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 有单位元 e 且 $\mathcal{M}$ 平衡，那么前述陈述等价于

iv) $\varphi(a,\ a) = 0$, 对每个 $\varphi \in \mathcal{M}$。

对于局部凸拟 *-代数 $(\mathfrak{A}[\tau], \mathfrak{A}_0)$，正元素在 [7] 中被定义为闭包 $\mathfrak{A}^+ := \overline{\mathfrak{A}_0^+}^{\tau}$ 的成员，其中

$$\mathfrak{A}_0^+ := \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k^* x_k,\ x_k \in \mathfrak{A}_0,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

这里，正如我们所预期的，我们将从一个没有拓扑的拟 *-代数开始，并通过一族$\mathcal{M}$ 的、关于 $\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$的形式引入正元素的概念。

定义 3.4。设$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 是一个拟 *-代数。我们称 $\mathcal{M}$-正的元素 $a \in \mathfrak{A}$，使得

$$\varphi(ax, x) \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}, \forall x \in \mathfrak{A}_0.$$

我们设定了

$$\mathcal{K}_{\mathcal{M}} := \{a \in \mathfrak{A} :\ \varphi(ax, x) \geq 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{M}, \forall x \in \mathfrak{A}_0\}.$$

如果用 $\mathcal{M} = \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 表示，则相应的集合记作 $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$。

引理 3.5. 设$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 是一个具有充分的 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$的拟 *-代数。若 a 是 $\mathcal{M}$-正的，则 $a = a^*$。

证明。结论由命题 3.3 得出。 □

集合 $\mathcal{K}_{\mathcal{M}}$是一个 qm-容许锥，即对所有 a、$b \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$、$x \in \mathfrak{A}_0$ 和 $\lambda \geq 0$, 均有 $a+b \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$、$\lambda a \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$和$x^* a x \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$。此外，若 $\mathfrak{A}$ 有单位元 e，则 e $\in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$。

通常，可以在实 向量空间 $\mathfrak{A}_h = \{a \in \mathfrak{A}: a = a^*\}$ 上定义一个序:

$$a \leq_{\mathcal{M}} b \quad \Leftrightarrow \quad b - a \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}, \quad a, b \in \mathfrak{A}_h.$$

命题 3.6. 设$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 是一个带单位元e 的拟 *-代数，且 $\mathcal{M}$ 是$\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$的一个平衡子集。则以下各项等价:

i) $\mathcal{M}$ *is sufficient;*

ii) $\mathcal{K}_{\mathcal{M}} \cap (-\mathcal{K}_{\mathcal{M}}) = \{0\}$.

证明。 *i)* $\Rightarrow$ *ii)* 设 $a \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}} \cap (-\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$。则对于每个 $\varphi \in \mathcal{M}$以及每个 $x \in \mathfrak{A}_0$, $\varphi(ax, x) = 0$; 因此，根据命题 3.3，并由 $\mathcal{M}$ 的充分性，我们得到 $a = 0$。

ii) $\Rightarrow$ *i)* 反设存在 $a \in \mathfrak{A}$, $a \neq 0$，使得对每个 $\varphi \in \mathcal{M}$都有$\varphi(a, a) = 0$。再由命题 3.3可知，对每个 $x \in \mathfrak{A}_0$ 及每个 $\varphi \in \mathcal{M}$，都有 $\varphi(ax, x) = 0$；这意味着$a \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}} \cap (-\mathcal{K}_{\mathcal{M}}) = \{0\}$，矛盾。 □

4. 有界和序有界元素

定义 4.1。 设 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 是一个具有 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 足够多的 *-表示的拟 *-代数。若存在 $\gamma_a = \gamma_a,\ \mathcal{M} > 0$ ，使得

$$|\varphi(ax, y)| \leq \gamma_a \varphi(x, x)^{1/2} \varphi(y, y)^{1/2}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{M};\ \forall x, y \in \mathfrak{A}_0.$$

若 a 是 $\mathcal{M}$-有界的，则记

$$\|a\|_{\mathfrak{b}}^{\mathcal{M}} = \inf\{\gamma_a > 0 : |\varphi(ax, y)| \leq \gamma_a \varphi(x, x)^{1/2} \varphi(y, y)^{1/2}, \\ \varphi \in \mathcal{M},\ x, y \in \mathfrak{A}_0\}.$$

注4.2。为了今后使用，我们注意到，一般而言，无论 $a \in \mathfrak{A}$ 是否具有 $\mathcal{M}$-有界性，以下等式均成立：

$$\begin{aligned} \Lambda_a &:= \inf\{\gamma_a > 0 : |\varphi(ax, y)| \leq \gamma_a \varphi(x, x)^{1/2} \varphi(y, y)^{1/2},\ \varphi \in \mathcal{M},\ x, y \in \mathfrak{A}_0\} \\ &= \sup\{|\varphi(ax, y)|; \varphi \in \mathcal{M}, x, y \in \mathfrak{A}_0, \varphi(x, x) = \varphi(y, y) = 1\} \\ &= \sup\{\|\pi_\varphi(a)\|;\ \varphi \in \mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

此外，如果 $a = a^*$,

$$\Lambda_a = \sup\{|\varphi(az, z)|; \varphi \in \mathcal{M}, z \in \mathfrak{A}_0, \varphi(z, z) = 1\}.$$

当且仅当 a 是 $\mathcal{M}$-有界时， Λ_a 的值才是有限的；根据定义本身，$\|a\|^{\mathcal{M}}{}_{\text{有界}} = \Lambda_a$。

引理 4.3。 设 $a, b \in \mathfrak{A}$ 有 $\mathcal{M}$-有界。则

(i) a^* 也是 $\mathcal{M}$-有界的，且 $\|a^*\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}} = \|a\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$；***(ii)*** $a + b$ 是 $\mathcal{M}$-有界的，且 $\|a + b\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}} \leq \|a\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}} + \|b\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$；***(iii)*** αa 是 $\mathcal{M}$-有界的，$\forall \alpha \in \mathbb{C}$；***(iv)*** 若 $a \diamond b$ 定义良好，则乘积 $a \diamond b$ 是 $\mathcal{M}$-有界的，且 $\|a \diamond b\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}} \trianglelefteq \|a\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}\ \|b\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$.

如 [3, 命题 4.18] 中一样，可以证明

命题 4.4. 设 a, b 是 $\mathfrak{A}$ 中的 $\mathcal{M}$-有界元素，且令 $\varphi \in \mathcal{M}$。那么，若 $a \diamond b$ 有定义，则 $\pi_\varphi(a) \square \pi_\varphi(b)$ 也有定义，并且 $\pi_\varphi(a \diamond b) = \pi_\varphi(a) \square \pi_\varphi(b)$.

注4.5。 注4.2和命题4.4表明，如果 a是 $\mathcal{M}$-有界的且$a^* \diamond a$ 是定义良好的，那么$\|a^* \diamond a\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}} = (\|a\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}})^2$。

$\mathcal{M}$-正元素的概念可用于给出有界元素的一个形式上不同的定义。设 $a \in \mathfrak{A}$，令 $\Re(a) = \frac{1}{2}(a + a^*)$， $\Im(a) = \frac{1}{2i}(a - a^*)$。则 $\Re(a)\ \Im(a) \in \mathfrak{A}_h$ 和 $a = \Re(a) + i\Im(a)$。

定义 4.6。设$(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 是一个拟 *-代数。元素 $a\in\mathfrak{A}$ 被称为 $\mathcal{K}_{\mathcal{M}}$-有界，如果存在 $\gamma\geq 0$，使得

$$\left\{\begin{array}{l}\pm\varphi(\Re(a)x,x)\leq\gamma\varphi(x,x)\\ \pm\varphi(\Im(a)x,x)\leq\gamma\varphi(x,x)\end{array}\right.,\ \forall\varphi\in\mathcal{M},x\in\mathfrak{A}_0. \tag{4.1}$$

若 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 是含单位元的，则可将 (4.1) 更简洁地改写为

$$\pm\Re(a)\leq_{\mathcal{M}}\gamma\mathsf{e},\qquad \pm\Im(a)\leq_{\mathcal{M}}\gamma\mathsf{e}.$$

我们用 $\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$ 表示 $\mathfrak{A}$ 中所有 $\mathcal{K}_{\mathcal{M}}$-有界元素的集合。

如 [7] 中所示，以下结果成立：

命题 4.7. 二元组 $(\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})\ \mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})\bigcap\mathfrak{A}_0)$ 是一个拟 *-代数，因此特别有

(1) 对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ 和 $a,b\in\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$，$\alpha a+\beta b\in\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$；
(2) $a\in\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})\Leftrightarrow a^*\in\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$；*(3)* $a\in\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$，$x\in\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})\bigcap\mathfrak{A}_0\Rightarrow xa\in\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$；*(4)* $x\in\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})\bigcap\mathfrak{A}_0\Leftrightarrow xx^*\in\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})\bigcap\mathfrak{A}_0$。

特别地，如果 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 具有一个单位元，那么 $(\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})\ \mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})\bigcap\mathfrak{A}_0)$ 也具有一个单位元。

定理 4.8. 设$(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 是一个具有充分多 $\mathcal{M}\subset\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$的拟 *-代数。则以下各项等价：

i) $a\in\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$;*ii)* a 是 $\mathcal{M}$-有界的；即，(定义 4.1) 存在 $\gamma_a>0$ 使得

$$|\varphi(ax,y)|\leq\gamma_a\varphi(x,x)^{1/2}\varphi(y,y)^{1/2},\ \forall x,y\in\mathfrak{A}_0,$$

对每个 $\varphi\in\mathcal{M}$;

iii) 存在 $\gamma'_a>0$ 使得

$$\varphi(ax,ax)\leq\gamma'_a\varphi(x,x),\ \forall x\in\mathfrak{A}_0,$$

对于每个 $\varphi\in\mathcal{M}$.

iv) 存在 $\gamma''_a>0$ 使得

$$|\varphi(ax,x)|\leq\gamma''_a\varphi(x,x),\ \forall x\in\mathfrak{A}_0,$$

对于每个 $\varphi\in\mathcal{M}$。

证明。 我们对对称元素证明这一点。
i) $\Rightarrow$ *ii)* 显然，如果 $a=a^*\in\mathfrak{A}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$，那么存在 $\gamma>0$ 使得

$$|\varphi(ax,x)|\leq\gamma\varphi(x,x),\ \forall\varphi\in\mathcal{M},\forall x\in\mathfrak{A}_0$$

因此

$$\sup\{|\varphi(ax,x)|;\ \varphi\in\mathcal{M},x\in\mathfrak{A}_0,\varphi(x,x)=1\}<\infty.$$

由注4.2可知，$\|a\|^{\mathcal{M}}{}_{\flat} < \infty$ 即 a 是 $\mathcal{M}$-有界的。

ii) $\Rightarrow$ *iii*) 假设 $a \in \mathfrak{A}$ 是 $\mathcal{M}$-有界的。若 $\varphi \in \mathcal{M}$，记相应的 GNS表示为 π_φ。于是，

$$\begin{aligned}|\langle \pi_\varphi(a)\lambda_\varphi(x)|\lambda_\varphi(y)\rangle| &= |\varphi(ax,y)| \le \|a\|_{\mathrm{b}}^{\mathcal{M}}\varphi(x,x)^{1/2}\varphi(y,y)^{1/2} \\ &= \|a\|_{\mathrm{b}}^{\mathcal{M}}\,\|\lambda_\varphi(x)\|\,\|\lambda_\varphi(y)\|, \quad \forall x,y \in \mathfrak{A}_0.\end{aligned}$$

这意味着，对每个 $\varphi \in \mathcal{M}$，算子 $\pi_\varphi(a)$ 都是有界的，且$\|\pi_\varphi(a)\| \le \|a\|^{\mathcal{M}}{}_{\flat}$。因此，

$$\begin{aligned}\varphi(ax,ax)^{1/2} &= \|\pi_\varphi(a)\lambda_\varphi(x)\| \\ &\le \|a\|_{\mathrm{b}}^{\mathcal{M}}\|\lambda_\varphi(x)\| = \|a\|_{\mathrm{b}}^{\mathcal{M}}\varphi(x,x)^{1/2}, \quad \forall x,y \in \mathfrak{A}_0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

iii) $\Rightarrow$ *iv*) 假设 a 满足 *iii*)。令 $\varphi \in \mathcal{M}$ 和 $x \in \mathfrak{A}_0$。则

$$|\varphi(ax,x)| \le \varphi(ax,ax)^{1/2}\varphi(x,x)^{1/2} \le {\gamma'_a}^{1/2}\varphi(x,x).$$

iv) $\Rightarrow$ *i*) 这是显而易见的。 □

注4.9。 由前一定理，我们还可推出 $\mathcal{M}$-有界元素 a 的范数满足以下等式（另见注4.2）：

$$\begin{aligned}\|a\|_{\mathrm{b}}^{\mathcal{M}} &= \inf\{\gamma > 0 : \varphi(ax,ax) \le \gamma^2\varphi(x,x),\, \varphi \in \mathcal{M},\, x \in \mathfrak{A}_0\} \\ &= \sup\{\varphi(ax,ax)^{1/2} : \varphi \in \mathcal{M},\, x \in \mathfrak{A}_0,\, \varphi(x,x) = 1\}.\end{aligned}$$

鉴于定理 4.8，我们采用记号 $\mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\flat}$ 来表示$\mathcal{M}$-有界或 $\mathcal{K}_{\mathcal{M}}$-有界元素的集合；即，令 $\mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\flat} = \mathfrak{A}_{\flat}(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$。

定义4.10。 设 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$是一个拟*-代数，并且令 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$。如果一个 *-表示 π of $\mathfrak{A}$ 是 $\mathcal{M}$-正则的，那么对于每个 $\xi \in \mathcal{D}_\pi$，由 φ_ξ 定义的向量形式

$$\varphi_\xi(a,b) := \langle \pi(a)\xi|\pi(b)\xi\rangle, \quad a,b \in \mathfrak{A} \tag{4.3}$$

是 $\mathcal{M}$中的一种形式。

特别地，如果 $\mathcal{M} = \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$，$\pi$ 被称为正则 [6]。我们用 $\mathrm{Rep}^{r,\mathcal{M}}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 表示 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 的 $\mathcal{M}$-正则 *-表示的集合。如果 $\mathcal{M} = \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$，我们就简单地将其记为 $\mathrm{Rep}^{r}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$。

注4.11。如果 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$是平衡的，那么对于每个 $\varphi \in \mathcal{M}$ ，*-表示 π_φ° 是 $\mathcal{M}$-正则的，参见 [6, 命题 2.4。16]。

命题4.12。 设$(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 是一个具有单位元e 的拟 *-代数，并设$a \in \mathfrak{A}$。

若对于$(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$的每个 *-表示 π，都有 $\pi(a) \geq 0$，则 $a \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}}$。反之，若 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 且 $a \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$，则对于$(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$的每个 $\mathcal{M}$-正则 *-表示 π，都有 $\pi(a) \geq 0$。

证明。如果对于 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 的每个 *-表示 π，都有 $\pi(a) \geq 0$，那么对于每个$\varphi \in \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$以及每个 $x \in \mathfrak{A}_0$,

$$\varphi(ax,x) = \langle \pi_\varphi(a)\lambda_\varphi(x)|\lambda_\varphi(x)\rangle \geq 0.$$

因此，$a \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}}$。
反过来，设 π 是一个 $\mathcal{M}$-正则 *-表示。那么，对于每个 $\xi \in \mathcal{D}_\pi$，向量形式 $\varphi_\xi(a,b) = \langle \pi(a)\xi|\pi(b)\xi\rangle$，其中 $a,b \in \mathfrak{A}$，属于 $\mathcal{M}$。因此，由 $a \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$可得，对于每个 $\xi \in \mathcal{D}_\pi$，$\varphi_\xi(a,\mathsf{e}) = \langle \pi(a)\xi|\xi\rangle \geq 0$。所以 $\pi(a) \geq 0$。□

注 4.13。如果只考虑由形式 $\varphi \in \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$构造的 GNS 表示，则第一个蕴含也成立；如果 $\varphi \in \mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$，且每个 $\pi_\varphi(a) \geq 0$，那么 $a \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$。

命题 4.14。设 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 是一个带单位元 e 且具有充分的 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$的拟 *-代数。那么，

(i) 若 $a \in \mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$，则对于每个 $\pi \in \mathit{Rep}^{r,\mathcal{M}}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$，$\pi(a)$ 都是有界算子，且 $\|\pi(a)\| \leq \|a\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$；*(ii)* 若对于每个 $\pi \in \mathit{Rep}^{r,\mathcal{M}}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$，$\pi(a)$都是有界算子，并且 $\sup\{\|\pi(a)\|; \pi \in \mathit{Rep}^{r,\mathcal{M}}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)\} < \infty$，则 $a \in \mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$。

证明。*(i)* 由定理4.8, $a \in \mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$蕴含 $\varphi(ax,ax)^{1/2} \leq \|a\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}\ \varphi(x,x)^{1/2}$ $\forall \varphi \in \mathcal{M}; x \in \mathfrak{A}_0$。若 π 是 $\mathcal{M}$-正则的，对于每个 $\xi \in \mathcal{D}_\pi$, $\varphi_\xi \in \mathcal{M}$ 其中$\varphi_\xi(a,b) = \langle \pi(a)\xi|\pi(b)\xi\rangle$。然后，

$$\|\pi(ax)\xi\| = \varphi_\xi(ax,ax)^{1/2} \leq \|a\|^{\mathcal{M}}_{\mathfrak{b}}\varphi_\xi(x,x)^{1/2} = \|a\|^{\mathcal{M}}_{\mathfrak{b}}\|\pi(x)\xi\|.$$

拟 *-代数假定是含单位元的，并且 $\pi(\mathsf{e}) = I_{\mathcal{D}_\pi}$。然后

$$\|\pi(a)\xi\| \leq \|a\|^{\mathcal{M}}_{\mathfrak{b}}\|\xi\|, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}_\pi.$$

因此，$\|\pi(a)\| \leq \|a\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$。
*(ii)*令 $\gamma := \sup\{\|\pi(a)\|; \pi \in \mathrm{Rep}^{r,\mathcal{M}}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)\}$. 根据假设

$$\|\pi^\circ_\varphi(a)\lambda_\varphi(x)\| \leq \gamma\|\lambda_\varphi(x)\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}, x \in \mathfrak{A}_0$$

i.e.

$$\varphi(ax,ax) \leq \gamma^2\varphi(x,x), \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}, x \in \mathfrak{A}_0$$

根据定理 4.8，这等价于说 $a \in \mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\text{有界}}$。□

注4.15. 令 $\varphi \in \mathcal{M}$ 并像之前一样记 π_φ 为相应的 GNS表示。如果 $a \in \mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\text{有界}}$，那么 $\pi_\varphi(a)$ 是一个有界算子。事实上，对于每个 $x \in \mathfrak{A}_0$,

$$\|\pi_\varphi(a)\lambda_\varphi(x)\|^2 = \varphi(ax, ax) \leq (\|a\|_{\mathfrak{b}}^{\mathcal{M}})^2\varphi(x, x) = (\|a\|_{\mathfrak{b}}^{\mathcal{M}})^2\|\lambda_\varphi(x)\|^2,$$

无论 π_φ 是否为 $\mathcal{M}$-正则。

下面将使用以下附加条件：

(C) 若 $a, b \in \mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$，则存在唯一的 $c \in \mathfrak{A}$，使得对于每个 $\varphi \in \mathcal{M}$，都有 $\pi_\varphi(a)\square\pi_\varphi(b) = \pi_\varphi(c)$。

定理 4.16. 设 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 是一个拟 *-代数。设 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 是充分的，并假设条件*(C)*成立。那么，$\mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$ 是一个赋范*-代数，其弱乘法为 $\diamond$，范数为 $\|\cdot\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$。

证明。正如我们目前所见，$\mathfrak{A}^{\mathcal{M}}\ \mathfrak{b}$ 是一个赋范空间；若 $a \in \mathfrak{A}^{\mathcal{M}}\ \mathfrak{b}$，则 a^* 是 $\mathcal{M}$-有界的，且 $\|a^*\|^{\mathcal{M}}\ \mathfrak{b} = \|a\|^{\mathcal{M}}\ \mathfrak{b}$；并且，只要 $a\diamond b$ 有定义，乘积 $a\diamond b$ 就是 $\mathcal{M}$-有界的，且 $\|a\diamond b\|^{\mathcal{M}}\ \mathfrak{b} \leq \|a\|^{\mathcal{M}}\ \mathfrak{b}\ \ \|b\|^{\mathcal{M}}\ \mathfrak{b}$。现在，若 $\varphi \in \mathcal{M}$ 且 $a, b \in \mathfrak{A}^{\mathcal{M}}\ \mathfrak{b}$，则算子 $\pi_\varphi(a)\square\pi_\varphi(b)$ 有定义，因为根据注4.15，$\pi_\varphi(a)$ 和 $\pi_\varphi(b)$ 是有界算子；显然，$\pi_\varphi(a)\square\pi_\varphi(b)$ 也是有界的。因此，根据 (C)，存在唯一的 $c \in \mathfrak{A}^{\mathcal{M}}\ \mathfrak{b}$，使得对于每个 $\varphi \in \mathcal{M}$，都有 $\pi_\varphi(a)\square\pi_\varphi(b) = \pi_\varphi(c)$。于是，对所有 $\varphi \in \mathcal{M}$ 和 $x, y \in \mathfrak{A}_0$，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(bx, a^*y) &= \langle\pi_\varphi(b)\lambda_\varphi(x)|\pi_\varphi(a^*)\lambda_\varphi(y)\rangle = \langle\pi_\varphi(a)\square\pi_\varphi(b)\lambda_\varphi(x)|\lambda_\varphi(y)\rangle \\ &= \langle\pi_\varphi(c)\lambda_\varphi(x)|\lambda_\varphi(y)\rangle = \varphi(cx, y).\end{aligned}$$

因此，根据引理 4.3，$c = a\diamond b$ 是定义良好的，且是 $\mathcal{M}$-有界的。这就完成了证明。□

命题4.17。 设$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 是带单位元e的拟 *-代数。设 $\mathcal{M} \subset\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 是平衡的，并用 $R^{\mathcal{M}}(\mathfrak{A})$ 表示 $\mathfrak{A}$ 在某个希尔伯特空间上的所有 $\mathcal{M}$-正则 *-表示的核的交集。那么

$$R^{\mathcal{M}}(\mathfrak{A}) = \{a \in \mathfrak{A} |\, \varphi(a, a) = 0, \forall\varphi \in \mathcal{M}\}.$$

证明。对于每个 $\varphi \in \mathcal{M}$，GNS表示 π_φ° 是 $\mathcal{M}$-正则的，那么，若$a \in R^{\mathcal{M}}($ $\mathfrak{A})$，它是 $\pi_\varphi^\circ(a) = 0$，因此 $\varphi(a, a) = \|\pi_\varphi^\circ(a)\xi_\varphi\| = 0$。
反之，如果 $a \in \mathfrak{A}$ 使得 $\varphi(a, a) = 0, \forall\varphi \in \mathcal{M}$，由于 $\mathcal{M}$ 是平衡的，对于所有 $x \in \mathfrak{A}_0$ 以及所有 $\varphi \in \mathcal{M}$，它是 $\varphi^x(a, a) = 0$，因此

$$\varphi^x(a, a) = \varphi(ax, ax) = \|\pi_\varphi^\circ(a)\lambda_\varphi(x)\|^2 = 0$$

并且由于 $\lambda_\varphi(\mathfrak{A}_0)$ 在 $\mathcal{H}_\varphi$ 中稠密，这意味着 $\pi_\varphi^\circ(a) = 0$。现在，设 π 是 $\mathfrak{A}$ 的一个 $\mathcal{M}$-正则 *-表示，那么对于每个 $\xi \in \mathcal{D}_\pi$，形式

$\varphi_\xi \in \mathcal{M}$，根据我们之前的结论，有 $\pi^\circ_{\varphi_\xi}(a) = 0$。对于每个 $\xi \in \mathcal{D}_\pi$，都存在一个循环向量 η，对应于 GNS表示 $\pi^\circ_{\varphi_\xi}$，使得 $\pi^\circ_{\varphi_\xi}$

$$\|\pi(a)\xi\|^2 = \|\pi^\circ_{\varphi_\xi}(a)\eta\|^2 = 0$$

这意味着 $\pi(a) = 0$。根据 $\mathcal{M}$-正则 *-表示π 的 $\mathfrak{A}$的任意性，可得 $a \in R^{\mathcal{M}}(\mathfrak{A})$。证明完毕。 □

注4.18。集合 $R^{\mathcal{M}}(\mathfrak{A})$ 显然是某种 *-根；然而在此其性质纯粹是代数的。

5. 由半双线性型族定义的拓扑

我们在上一节讨论的性质全都具有纯代数性质；但可以利用 $\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 的半双线性型族，以相当自然的方式在 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 上定义拓扑。事实上，我们接下来的目标是在 $\mathfrak{A}$ 中定义一些拓扑，使其仿照算子族的一致拓扑。

在本节中，我们始终假设$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 是一个带单位元 e的拟*-代数，并且 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$是一个充分的形式集。于是， $\mathcal{M}$定义了拓扑 $\tau_w^{\mathcal{M}}$、$\tau_s^{\mathcal{M}}$、$\tau_{s^*}^{\mathcal{M}}$，它们分别由以下半范数族生成：

$\tau_w^{\mathcal{M}}$: $a \mapsto |\varphi(ax, y)|$, $a \in \mathfrak{A}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, $x, y \in \mathfrak{A}_0$;
$\tau_s^{\mathcal{M}}$: $a \mapsto \varphi(a, a)^{1/2}$, $a \in \mathfrak{A}$, $\varphi \in \mathcal{M}$; $\tau_{s^*}^{\mathcal{M}}$: $a \mapsto$最大值 $\{\varphi(a, a)^{1/2}, \varphi(a^*, a^*)^{1/2}\}$, $a \in \mathfrak{A}$, $\varphi \in \mathcal{M}$。

定义 5.1。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{M}$的一个子集。我们称 $\mathcal{F}$ 是有界的，当且仅当

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(a, a) < \infty, \quad \forall a \in \mathfrak{A}.$$

$\mathcal{M}$ 中形式的有界子集族 $\mathfrak{F}$具有以下性质：

(a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{F}_n \in \mathfrak{F}$;
(b) $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}$。

若 $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$，则定义

$$p^{\mathcal{F}}(a) := \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(a, a)^{1/2}, \quad a \in \mathfrak{A}.$$

引理 5.2。设 $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$。那么，

(a) $p^{\mathcal{F}}$ 是 $\mathfrak{A}$上的半范数；*(b)* 集合 $\mathcal{F}^x = \{\varphi^x, \varphi \in \mathcal{F}\}$, $x \in \mathfrak{A}_0$是有界的；*(c)* 对于每个 $x \in \mathfrak{A}_0$,

$$p^{\mathcal{F}}(ax) = p^{\mathcal{F}^x}(a), \quad \forall a \in \mathfrak{A}.$$

证明。对于 (c)，我们有

$$p^{\mathcal{F}}(ax) = \sup_{\varphi\in\mathcal{F}} \varphi(ax, ax)^{1/2} = \sup_{\varphi\in\mathcal{F}} \varphi^x(a, a)^{1/2} = \sup_{\psi\in\mathcal{F}^x} \psi(a, a)^{1/2} = p^{\mathcal{F}^x}(a).$$

□

由于 $\mathcal{M}$ 是充分的，因此 $\{p^{\mathcal{F}};\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}\}$ 是一个半范数分离族；因此，它在 $\mathfrak{A}$ 上定义了一个豪斯多夫局部凸拓扑，我们记作 $\tau^{\mathfrak{F}}$。

假设 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 有一个单位元 e。若 $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$，我们定义

$$p_{\mathcal{F}}(a) := \sup_{\varphi\in\mathcal{F}} |\varphi(a, \mathsf{e})|, \quad a \in \mathfrak{A}.$$

Then

$$p_{\mathcal{F}}(a) \le \gamma_{\mathcal{F}} p^{\mathcal{F}}(a), \quad \forall a \in \mathfrak{A},$$

其中 $\gamma_{\mathcal{F}} = \sup_{\varphi\in\mathcal{F}} \varphi(\mathsf{e}, \mathsf{e})^{1/2}$，并且满足以下条件：

$$p_{\mathcal{F}}(a^*) = p_{\mathcal{F}}(a), \quad \forall a \in \mathfrak{A};$$
$$p_{\mathcal{F}}(ax) \le p^{\mathcal{F}}(x) p^{\mathcal{F}}(a^*), \quad \forall a \in \mathfrak{A}, x \in \mathfrak{A}_0;$$
$$p_{\mathcal{F}}(a^* \diamond a) = p^{\mathcal{F}}(a)^2, \ \forall a \in \mathfrak{A} \text{ such that } a^* \diamond a \text{ is well–defined.}$$

我们用 $\tau_{\mathfrak{F}}$ 表示由半范数族 $\{p_{\mathcal{F}}$ 在 $\mathfrak{A}$ 上生成的局部凸拓扑；$\mathcal{F} \in \mathfrak{F}\}$（为简化记法，我们不显式提及其对 $\mathcal{M}$ 的依赖）。请注意，一般而言，$\tau_{\mathfrak{F}}$ 不一定是豪斯多夫的。

注记 5.3。我们注意到，若 $a^* \diamond a$ 有定义且 $a^* \diamond a = 0$，则对于每个有界集 $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$，$p^{\mathcal{F}}(a) = 0$，因此 $a = 0$。

命题5.4。设 $\mathcal{M}$ 是充分的，并设 $\tau_{\mathfrak{F}} = \tau^{\mathfrak{F}}$。那么 $\mathfrak{A}[\tau^{\mathfrak{F}}]$ 是一个局部凸空间，具有以下性质：

(i) 对合 $a \mapsto a^*$ 是连续的；*(ii)* 对于每个有界集 $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$，存在一个有界集 $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}$，

$$p_{\mathcal{F}}(ax) \le p^{\mathcal{G}}(a) p^{\mathcal{G}}(x), \quad \forall a \in \mathfrak{A}, x \in \mathfrak{A}_0;$$

这意味着左乘法和右乘法是联合连续的。

特别地，如果 $\mathfrak{A}_0$ 在 $\mathfrak{A}$ 中是 $\tau^{\mathfrak{F}}$-稠密的，那么 $(\mathfrak{A}[\tau^{\mathfrak{F}}], \mathfrak{A}_0)$ 是一个局部凸拟 *- 代数。

一般来说，对合 $a \mapsto a^*$ 对 $\tau^{\mathfrak{F}}$ 不连续。为绕过这个问题，我们定义由半范数族生成的拓扑 $\tau_*^{\mathfrak{F}}$。

$$p_*^{\mathcal{F}}(a) = \max\left\{p^{\mathcal{F}}(a), p^{\mathcal{F}}(a^*)\right\}, \quad a \in \mathfrak{A}, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}.$$

显然 $\tau_{\mathfrak{F}} \preceq \tau^{\mathfrak{F}} \preceq \tau_*^{\mathfrak{F}}$，并且如果 $\tau_{\mathfrak{F}} = \tau^{\mathfrak{F}}$，那么 $\tau_{\mathfrak{F}} = \tau^{\mathfrak{F}} = \tau_*^{\mathfrak{F}}$。

令$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 为一个拟 *-代数，并假设集合 $\mathcal{M}$ 是充分的。显然，每个 $\varphi \in \mathcal{M}$ 对于 $\tau_s^{\mathcal{M}}$ 以及任何更细的拓扑（如 $\tau_{s^*}^{\mathcal{M}}$、 $\tau_*^{\mathfrak{F}}$ 或 $\tau^{\mathfrak{F}}$）都是自动连续的。

我们的下一个目标是研究当 $\mathfrak{A}$ 赋予上述由族 $\mathcal{M}$ 定义的拓扑之一时 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 的性质。

我们可能会想知道 $(\mathfrak{A}[\tau_*^{\mathfrak{F}}], \mathfrak{A}_0)$ 是否是一个局部凸拟 *-代数。如果再加上一个假设，元素 $x \in \mathfrak{A}_0$ 的左乘法和右乘法就是连续的：假设对于每个 $x \in \mathfrak{A}_0$，都存在 $\gamma_x > 0$，使得

$$\varphi(xa, xa) \leq \gamma_x \varphi(a, a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathfrak{A}. \tag{5.1}$$

由（5.1）可知，每个 $x \in \mathfrak{A}_0$ 都是 $\mathcal{M}$-有界的，并且对每个有界子集 $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$,

$$p^{\mathcal{F}}(xa) \leq \gamma_x p^{\mathcal{F}}(a), \quad \forall a \in \mathfrak{A}.$$

这个不等式，结合引理 5.2 的 (c) 和对合的连续性，可以推出对于每个 $x \in \mathfrak{A}_0$，映射 $a \mapsto ax$, $a \mapsto xa$ 都是$\tau_*^{\mathfrak{F}}$-连续的。一般而言，*-代数 $\mathfrak{A}_0$ 在 $\mathfrak{A}$中并不 $\tau_*^{\mathfrak{F}}$-稠密，因此，为了得到拓扑为 $\tau_*^{\mathfrak{F}}$的局部凸拟 *-代数，我们可以将 $\widetilde{\mathfrak{A}_0}^{\tau_*^{\mathfrak{F}}}$的完备化取作 $\mathfrak{A}$。现在我们证明如下命题。

引理 5.5。 设$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 为一个拟 *-代数。假设 $\mathcal{M}$ 是充分的，并且关于序向上有向

$$\varphi \leq \psi \;\Leftrightarrow\; \varphi(a, a) \leq \psi(a, a), \quad \forall a \in \mathfrak{A}.$$

则 $\mathfrak{A}_0$ 在 $\mathfrak{A}[\tau_s^{\mathcal{M}}]$中稠密。

证明。我们先证明，给定 $a \in \mathfrak{A}$，我们可以找到一个网 $\{x_\alpha\} \subset \mathfrak{A}_0$，使得 $\varphi(x_\alpha - a, x_\alpha - a) \to 0$ 对每个 $\varphi \in \mathcal{M}$都成立。再次令$\varphi[a] := \varphi(a, a)$, $\varphi \in \mathcal{M}$, $a \in \mathfrak{A}$。

由于 $\varphi \in \mathcal{M}$, $\lambda_\varphi(\mathfrak{A}_0)$ 在 $\mathcal{H}_\varphi$ 中是稠密的（其中 $\mathcal{H}_\varphi$ 的定义如命题2.4所述）。这意味着，对于每个 $a \in \mathfrak{A}$，存在一个序列 $\{x_n^\varphi\}$，使得 $\lambda_\varphi(x_n^\varphi - a) \to 0$，或者等价地 $\varphi[x_n^\varphi - a] \to 0$。然后

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists n_\varphi \in \mathbb{N} : \; \varphi[x_{n_\varphi}^\varphi - a] < \frac{1}{n}.$$

如果 $\varphi,\psi\in\mathcal{M}$，我们定义当 $\varphi\le\psi$ 且 $n_\varphi\le n_\psi$ 时，$(\varphi,n_\varphi)\le(\psi,n_\psi)$。由于 $\mathcal{M}$是有向的，$\{(\varphi,n_\varphi)\}$ 是有向的，并且 $\{x_{(\varphi,n_\varphi)}\}$ 是一个网，其中 $x_{(\varphi,n_\varphi)}:=x^\varphi_{n_\varphi}$。我们证明，对于每个 $\psi\in\mathcal{M}$ $\psi[x^\varphi_{n_\varphi}-a]\to 0$，命题成立。事实上，设 $\epsilon>0$ 且$n\in\mathbb{N}$，使得 $\frac{1}{n}<\epsilon$。那么如果 $(\varphi,n_\varphi)\ge(\psi,n_\psi)$

$$\psi[x^\varphi_{n_\varphi}-a]\le\varphi[x^\varphi_{n_\varphi}-a]<\frac{1}{n}<\epsilon.$$

这证明 $\mathfrak{A}_0$ 在 $\mathfrak{A}[\tau_s^{\mathcal{M}}]$ 中稠密。 □

表示 π°_φ 是 $\tau^{\mathfrak{s}}$-连续的。事实上，若 $\mathcal{F}$ 是包含 φ 的 $\mathcal{M}$ 的任意有界子集，

$$\|\pi^\circ_\varphi(a)\lambda_\varphi(x)\|=\varphi(ax,ax)^{1/2}\le p^{\mathcal{F}}(ax)\le p^{\mathcal{F}^x}(a),\quad\forall a\in\mathfrak{A};\,x\in\mathfrak{A}_0$$

如引理 5.2 中所述。

命题 5.6. 设 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 是一个具有充分多 $\mathcal{M}\subset\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 的拟 *-代数。若 $\mathfrak{A}$ 是 $\tau^{\mathcal{M}}_{s^*}$-完备的，则 $\mathfrak{A}$ 也为 $\tau^{\mathfrak{s}}_*$-完备。

证明。设 $\{a_\alpha\}$ 是一个 $\tau^{\mathfrak{s}}_*$-柯西网。由于 $\tau^{\mathcal{M}}_{s^*}\preceq\tau^{\mathfrak{s}}$，存在 $a\in\mathfrak{A}$ 使得 $a=\tau^{\mathcal{M}}_{s^*}-\lim_\alpha a_\alpha$。根据柯西条件，对每个 $\epsilon>0$ 以及每个有界集 $\mathcal{F}$，都存在$\overline{\alpha}$ 使得

$$\max\{\varphi(a_\alpha-a_{\alpha'},a_\alpha-a_{\alpha'}),\varphi(a^*_\alpha-a^*_{\alpha'},a^*_\alpha-a^*_{\alpha'})\}<\epsilon,\ \forall\varphi\in\mathcal{F},\alpha,\alpha'>\overline{\alpha}.$$

然后对 α' 取极限，

$$\max\{\varphi(a_\alpha-a,a_\alpha-a),\varphi(a^*_\alpha-a^*,a^*_\alpha-a^*)\}\le\epsilon,\ \forall\varphi\in\mathcal{F},\alpha>\overline{\alpha}.$$

因此，$\mathfrak{A}$ 是 $\tau^{\mathfrak{s}}_*$-完备的。 □

定理 5.7。令 $\mathcal{M}$ 充分的，并且性质 (C) 也成立。如果 $\mathfrak{A}$ 是$\tau^{\mathcal{M}}_{s^*}$-完备的，那么 $\mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$ 是一个带有弱乘法 $\diamond$ 和范数$\|\cdot\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$ 的 C*-代数。

证明。由定理4.16和注4.5可知，我们只需证明 $\mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$ 的完备性。设 $\{a_n\}\subset\mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$ 是关于范数$\|\cdot\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$的柯西序列。那么，$\{a_n^*\}$ 也是$\|\cdot\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$-柯西序列。由(4.2),

$$\varphi((a_n-a_m)x,(a_n-a_m)x)\le(\|a_n-a_m\|^{\mathcal{M}}_{\mathfrak{b}})^2\varphi(x,x),\ \forall\varphi\in\mathcal{M},\forall x\in\mathfrak{A}_0$$

and

$$\varphi((a_n^*-a_m^*)x,(a_n^*-a_m^*)x)\le(\|a_n^*-a_m^*\|^{\mathcal{M}}_{\mathfrak{b}})^2\varphi(x,x),\ \forall\varphi\in\mathcal{M},\forall x\in\mathfrak{A}_0.$$

因此，$\varphi((a_n-a_m)x,(a_n-a_m)x)\to 0$ 和 $\varphi((a_n^*-a_m^*)x,(a_n^*-a_m^*)x)\to 0$ 也成立，其中 $n,m\to\infty$.

特别地，当 $x = \mathsf{e}$ 时，这一结论成立，因此 $\{a_n\}$ 关于 $\tau_{s^*}^{\mathcal{M}}$也是柯西的；又由于 $\mathfrak{A}$是 $\tau_{s^*}^{\mathcal{M}}$-完备的，存在 $a \in \mathfrak{A}$使得$a_n \xrightarrow{\tau_{s^*}^{\mathcal{M}}} a$。极限 $a \in \mathfrak{A}^{\mathcal{M}_{\mathfrak{b}}}$；事实上，对每个 $\varphi \in \mathcal{M}$:

$$|\varphi(ax,x)|^2 \le \varphi(ax,ax)\varphi(x,x) = \varphi(x,x)\limsup_{n\to\infty}\varphi(a_nx,a_nx)$$
$$\le \sup_{n\in\mathbb{N}}\|a_n\|_{\mathfrak{b}}^{\mathcal{M}}\varphi(x,x)^2$$

由于 $\{a_n\}$ 关于范数$\|\cdot\|^{\mathcal{M}_{\mathfrak{b}}}$是柯西的，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在$n_\epsilon \in \mathbb{N}$, 使得$\|a_n - a_m\|^{\mathcal{M}_{\mathfrak{b}}} < \epsilon^{1/2}$，对所有 $n, m > n_\epsilon$均成立。这意味着$\varphi((a_n - a_m)x,$ $(a_n - a_m)x) < \epsilon\varphi(x,x)$, $\forall\varphi \in \mathcal{M}, \forall x \in \mathfrak{A}_0$，对所有 $n, m > n_\epsilon$均成立。然后，若固定 $n > n_\epsilon$ 并令 $m \to \infty$，则得到 $\varphi((a_n - a)x, (a_n - a)x) \le \epsilon\varphi(x,x)$ $\forall\varphi \in \mathcal{M}, \forall x \in \mathfrak{A}_0$. 这意味着 $\mathfrak{A}^{\mathcal{M}_{\mathfrak{b}}}$关于范数$\|\cdot\|^{\mathcal{M}_{\mathfrak{b}}}$是完备的。□

总之，假设 $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 是平衡的。我们提出如下问题：在什么条件下， $\mathcal{M}$ 也是充分的？考虑一个局部凸拟 *-代数 $(\mathfrak{A}[\tau], \mathfrak{A}_0)$，并选取 $\mathcal{M} = \mathcal{P}_{\mathfrak{A}_0}^{\tau}(\mathfrak{A})$。这个集合显然是平衡的，但不一定是充分的。这一性质可以通过以下命题（取其否定）来刻画

命题 5.8. 设 $(\mathfrak{A}[\tau], \mathfrak{A}_0)$ 是带单位元 e的局部凸拟 *–代数。对于元素 $a \in \mathfrak{A}$，以下陈述等价:

(i) 对于每个强连续（即 t_s-连续）的拟 *–表示 π，均有 $a \in \operatorname{Ker}\pi$，其中 π 是 $(\mathfrak{A}[\tau], \mathfrak{A}_0)$的表示; (ii) 对于每个 $\varphi \in \mathcal{P}_{\mathfrak{A}_0}^{\tau}(\mathfrak{A})$，均有 $\varphi(a,a) = 0$; (iii) 对于 $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}_0}^{\tau}(\mathfrak{A})$的每个有界子集 $\mathcal{F}$，均有 $p^{\mathcal{F}}(a) = 0$。

6. 局部凸拟 GA*-代数

前几节的讨论引出了如下定义（它强化了部分 *-代数的一个类似定义 [3, 定义 4.26]）。

定义 6.1。设（$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_0$）是一个拟 *-代数。设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}$（$\mathfrak{A}$）的一族形式。我们称 $\mathcal{M}$ 是性质良好的，当且仅当

（wb_1） $\mathcal{M}$ 是充分的；（wb_2）
每个 $x \in \mathfrak{A}_0$ 都是 $\mathcal{M}$-有界的；
（wb_3）条件(C)成立；（wb_4）
$\mathfrak{A}$ 是 $\tau_*^{\mathfrak{F}}$-完备的。

定义 6.2. 设 $(\mathfrak{A}[\tau], \mathfrak{A}_0)$ 是一个局部凸拟 *-代数。若存在

$\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$，其强良性，且 τ 与 $\tau_*^{\mathfrak{F}}$ 等价（记作 $\tau \approx \tau_*^{\mathfrak{F}}$）。

例 6.3. 考虑第 2 节中的拟 *-代数 $(\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})$ $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b)$。假设 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})$ 赋有拓扑 tt_*^u，并记 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})_u$ 为 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b$ 在 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})$ 中的 tt_*^u-闭包，则

$(\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})_u[\mathrm{tt}_*^u], \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b)$ 是一个局部凸拟 *-代数。令 $\mathcal{M}$ 为由 $(\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})$ $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b)$ 上 tt_*^u-连续 ips-形式在 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})_u$ 上的限制所构成的空间。我们将看到，$\mathcal{M}$ 性质良好且强，$\mathrm{tt}_*^u \approx \tau_*^{\mathfrak{F}}$：这使得 $(\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})_u[\mathrm{tt}_*^u], \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b)$ 成为一个局部凸拟 GA*-代数。由于 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b$ 在 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})$ 中关于 tt_*^u 稠密，我们可以将 $\mathcal{M}$ 认作 $(\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})_u, \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b)$ 上所有 tt_*^u-连续 ips-形式组成的空间。这意味着 [3, 定理 3.10]，每个 $\psi \in \mathcal{M}$ 都可以写成如下形式$\psi(A,B)$ $= \sum_{i=1}^n \langle A\xi_i | B\xi_i\rangle$ $A, B \in \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})_u$，其中向量为 ξ_1、...、$\xi_n \in \mathcal{D}$。因此，$\mathcal{M}$-有界元素的集合与集合 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})_b$ 相同，后者由 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})$ 中所有有界算子构成，可视为 $\mathcal{H}$ 上所有有界算子组成的 C*-代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$。

这些事实使我们很容易得出结论：$\mathcal{M}$ 具有良好的强性质。特别地，我们注意到 (wb_3) 成立，因为若 $A, B \in \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})_b$，则乘法 $\diamond$（见 (2.2)）定义良好，并且与算子的弱乘法 $\square$（见 (2.1)）一致：$A \diamond B = A \square B$ 当然定义良好；进而，若 $\varphi \in \mathcal{M}$，则根据 *-表示的定义，我们有 $\pi_\varphi(A) \square \pi_\varphi(B) = \pi_\varphi(A \square B) = \pi_\varphi(A \diamond B)$。

例 6.4. 设 K 是实数轴上的一个紧子集，且 $m(K) > 0$，其中 m 表示勒贝格测度。那么，数对 $(L^p(K,m)$ $C(K))$ 是一个巴拿赫拟 *-代数，其中 $C(K)$ 表示 K 上连续函数构成的 C*-代数。设 $\mathcal{M}$ 是 $(L^p(K,m)$ $C(K))$ 上所有联合连续 ips-形式构成的空间。那么，如 [6, 例 3.1.44], 所示，若 $p \geq 2$,$\mathcal{M}$，则可以用 $L^s(K,m)$ 的函数完全描述，且 $s = \frac{p}{p-2}(\frac{1}{0} = \infty)$，具体如下：

$$\varphi \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists w \in L^s(K,\ m)\quad w \geq 0 :\quad \varphi(f,\ g) = \int_K f\overline{g} w dm、\ \forall f、\ g \in L^p(K,\ m)。$$

因此，我们将 $\mathcal{M}$ 与 $L^s(K,m)$等同。考虑到这一点，

(a) 子集 $\mathcal{F}$ of $\mathcal{M}$ 有界，当且仅当它包含在 $L^s(K,m)$ 中以 0 为中心的一个球内；(b) 拓扑 $\tau^{\mathfrak{F}}$（在此情形下等于 $\tau_*^{\mathfrak{F}}$）是赋范的，且范数与 $\|\cdot\|_p$ 一致，因为

$$\sup_{\|w\|_s=1} \int_K |f|^2 w dm = \||f|^2\|_{p/2} = \|f\|_p^2.$$

(c) 拓扑 $\tau_{\mathfrak{F}}$ 也是范数拓扑，且范数与 $\|\cdot\|_{p/2}$ 一致；(d) $\mathcal{M}$-有界元素的集合是 C*-代数 $L^\infty(K,m)$。

总之，$(L^p(K,m)\ L^\infty(K,m))$ 是一个巴拿赫拟 GA*-代数。

例 6.5。 由 $\mathbb{R}$ 上所有满足以下条件的可测函数（类）构成的空间 $L^p{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},m)$：对于每个紧子集 $K\subset\mathbb{R}$，f 在 K 上的限制 $f_{\restriction K}$ 属于 $L^p(K,m)$。它的性质与例 6.4 中讨论的情形类似。当然，主要区别在于我们不再讨论范数拓扑。更确切地说，考虑这一对 $(L^p{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},m)\ C_b(\mathbb{R}))$（其中 $C_b(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的连续有界函数），不难验证它是一个拟 *-代数。于是，$L^p{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},m)$ 的自然拓扑 τ_p 定义为各空间 $L^p(K)$ 的范数拓扑的归纳极限，其中 K 遍历 $\mathbb{R}$ 的紧子集族。

令 $\mathcal{M}$ 表示 $(L^p{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},m)\ C_b(\mathbb{R}))$ 上所有 ips-形式组成的空间，这些形式在每个紧子集 $K\subset\mathbb{R}$ 上限制到 $L^p(K,m)$ 时均连续。那么，若 $p\geq 2$，容易证明 $\mathcal{M}$ 可由 $L^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},m)$ 的函数描述，其中，与前面一样，$s=\frac{p}{p-2}$（同样，$\frac{1}{0}=\infty$）。容易看出，$\mathcal{M}$ 具有良好的强性质。在这种情况下，$\mathcal{M}$-有界元素的集合是 C*-代数 $L^\infty(\mathbb{R},m)$。数对 $(L^p{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},m)\ L^\infty(\mathbb{R},m))$ 是一个局部凸拟 GA*-代数。

在我们看来，下面的定理说明了为何值得关注局部凸拟 GA*-代数。

定理 6.6. 设 $(\mathfrak{A}[\tau],\mathfrak{A}_0)$ 是一个带单位元且具有良好性质的局部凸拟 *GA*-代数* $\mathcal{M}\subset\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$。那么：

(a) 每个 $\varphi\in\mathcal{M}$ 都是联合 τ-连续的；*(b)* 每个 $\mathcal{M}$-正则 *-表示 $(\mathfrak{A}[\tau],\mathfrak{A}_0)$ 都是 (τ,t_{s^*})-连续的；*(c)* 有界元素集合 $\mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{b}}$ 关于范数 $\|\cdot\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathrm{b}}$ 构成一个 *C*-代数*。

证明。(a)：根据 $\tau^{\mathfrak{F}}_*$ 本身的构造，每个 φ 都是 $\tau^{\mathfrak{F}}_*$-连续的；于是由假设 $\tau\approx\tau^{\mathfrak{F}}_*$ 可得该结论。

(b)：由 (a) 即可得出。事实上，若 π 是 $\mathcal{M}$-正则的，则对每个 $\xi\in\mathcal{D}_\pi$，半双线性形式 φ_ξ（见 (4.3)）属于 $\mathcal{M}$；因此它是 $\tau^{\mathfrak{F}}_*$-连续的。于是，存在 $\mathcal{F}\in\mathfrak{F}$ 使得

$$|\langle\pi(a)\xi|\pi(b)\xi\rangle|\leq p^{\mathcal{F}}_*(a)p^{\mathcal{F}}_*(b)$$

因此

$$\|\pi(a)\xi\|\leq p^{\mathcal{F}}_*(a),\quad\text{and}\quad\|\pi(a^*)\xi\|\leq p^{\mathcal{F}}_*(a^*)=p^{\mathcal{F}}_*(a),\quad\forall a\in\mathfrak{A}$$

那么，对于每个 $\xi \in \mathcal{D}_\pi$，都存在 $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ 使得

$$p_\xi^*(\pi(a)) = \max\{\|\pi(a)\xi\|, \|\pi(a)^\dagger \xi\|\} \leq p_*^{\mathcal{F}}(a).$$

(c)：我们只需证明集合 $\mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$ 关于范数$\|\cdot\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$的完备性。设 $\{a_n\} \subset \mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$ 是一个$\|\cdot\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$-柯西序列，则对每个$\epsilon > 0$，存在 $n_\epsilon \in \mathbb{N}$，使得对任意 n、$m \geq n_\epsilon$，它既是$\|a_n - a_m\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}} < \epsilon$，又是$\|a_n^* - a_m^*\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}} < \epsilon$。

由于$\{a_n\} \subset \mathfrak{A}^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$，对于每个 $\varphi \in \mathcal{M}$ 以及每个 $x_0 \in \mathfrak{A}_0$，它是

$$\varphi((a_n - a_m)x, (a_n - a_m)x) \leq (\|a_n - a_m\|_{\mathfrak{b}}^{\mathcal{M}})^2 \varphi(x,x),\ \forall n, m \in \mathbb{N}$$

and

$$\varphi((a_n^* - a_m^*)x, (a_n^* - a_m^*)x) \leq (\|a_n^* - a_m^*\|_{\mathfrak{b}}^{\mathcal{M}})^2 \varphi(x,x),\ \forall n, m \in \mathbb{N}$$

因此，若 $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$:

上确界 $\varphi((a_n - a_m)x, (a_n - a_m)x)^{1/2} \leq \|a_n - a_m\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}}$上确界 $\varphi(x,x)^{1/2}$，
$\forall n, m \in \mathbb{N}_{\varphi \in \mathcal{F}}$ $_{\varphi \in \mathcal{F}}$和

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi((a_n^* - a_m^*)x, (a_n^* - a_m^*)x)^{1/2} \leq \|a_n^* - a_m^*\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}} \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(x,x)^{1/2},\ \forall n, m \in \mathbb{N}$$

由前面的不等式，对于每个 $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$，我们得到

$$p_*^{\mathcal{F}}(a_n - a_m) = \max\left\{p^{\mathcal{F}}(a_n - a_m)\ p^{\mathcal{F}}((a_n - a_m)^*)\right\} < \epsilon p^{\mathcal{F}}(e)\ \ \forall n, m \geq n_\epsilon$$

然后，$\{a_n\}$是一个 $\tau_*^{\mathfrak{F}}$-柯西序列。由于 $\mathfrak{A}$ 是 $\tau_*^{\mathfrak{F}}$-完备的，存在 $a \in \mathfrak{A}$ 使得 $a_n \xrightarrow{\tau_*^{\mathfrak{F}}} a$。

极限 a 是 $\mathcal{M}$-有界的；事实上，如果 $\varphi \in \mathcal{M}$ 和 $x \in \mathfrak{A}_0$，我们有

$$\varphi(ax, ax) = \lim_{n\to\infty} \varphi(a_n x, a_n x) \leq \limsup_{n\to\infty} (\|a_n\|_{\mathfrak{b}}^{\mathcal{M}})^2 \varphi(x,x).$$

序列 $\{\|a_n\|\}$也是柯西序列且有界；因此 a 是 $\mathcal{M}$-有界的。

剩下要证明的是，当 $n \to \infty$时，$\|a_n - a\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}} \to 0$。对每个 $\epsilon > 0$，令$n, m > n_\epsilon$，则$\|a_n - a_m\|^{\mathcal{M}}{}_{\mathfrak{b}} < \epsilon$。现在令 $m \to \infty$，则

$$\|a_n - a\|_{\mathfrak{b}}^{\mathcal{M}} = \lim_{m\to\infty} \|a_n - a_m\|_{\mathfrak{b}}^{\mathcal{M}} \leq \epsilon.$$

□

结论

本文从一族足够丰富且行为正则的半双线性型出发，在拟 *-代数 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 上构造了一些拓扑。这项研究促使我们引入一类新的局部凸拟 *-代数，并将其命名为 GA*，因为它们的定义与 A*-代数的定义十分相似。不过，仍有一些问题尚未解决。我们列举其中几个。

(a) 何时局部凸拟 *-代数 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 存在一族充分的 $\mathcal{M}$，使其为 $\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ 的半双线性型?

（b）局部凸拟 *-代数（$\mathfrak{A}[\tau]$, $\mathfrak{A}_0$）在什么条件下是局部凸拟 GA*-代数? 我们已经知道，存在一些巴拿赫拟 *-代数（$\mathfrak{A}[\|\cdot\|]$, $\mathfrak{A}_0$），其连续元素集合$\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}$（$\mathfrak{A}$）退化为 $\{0\}$ [6, 例 3.1。29] 而在局部凸拟 GA*-代数中，良态族 $\mathcal{M}$ 的 ips-形式的半双线性形式自动是连续的。因此，一般而言，这两个概念并不一致。

（c）在什么条件下，可以通过删除（wb_3）和/或（wb_4）来简化良态ips-形式族的定义（定义 6.1）？我们希望在未来的论文中讨论这些问题。

致谢： 本工作是在 Gruppo UMI Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni 以及 INdAM 的 GNAMPA 的活动框架内完成的。

参考文献

[1] J.-P. Antoine、G. Bellomonte、C. Trapani，完全可表示且 *-半单的拓扑偏 *-代数。《数学研究》，208（2012年），167–194。[2] J.-P. Antoine、A. Inoue、C. Trapani，偏 *-代数及其算子实现。《数学应用》，553，克吕维尔学术出版社，荷兰多德雷赫特，2003年。[3] J.-P. Antoine、C. Trapani、F. Tschinke，某些拓扑偏 *-代数中的有界元素。《数学研究》，203（2011年），223–251。[4] G. Bellomonte、S. Di Bella、C. Trapani，*C**-归纳局部凸空间的有界元素。《纯粹与应用数学年刊》，195（2016年），343–356。[5] G. Bellomonte、C. Trapani，拟 *-代数与 *C**-代数的广义归纳极限。《数学研究》，202（2011年），165–190。本文勘误／补遗："拟 *-代数与 C*-代数的广义归纳极限"（《数学研究》202（2011年），165–190），同刊，217（1）（2013年），95–96。[6]M. Fragoulopoulou、C. Trapani，局部凸拟 *-代数及其表示。《数学讲义》2257，施普林格，2020年。

[7] M. Fragoulopoulou、C. Trapani、S. Triolo，具有充分多 *-表示的局部凸拟 *-代数。《数学分析与应用杂志》，388（2012年），1180–1193。[8]K. Schmüdgen，无界算子代数与表示理论。Birkhäuser-Verlag，巴塞尔，1990年。[9] C. Trapani，*Banach* *-代数中的有界元素与谱。《数学研究》，172（2006年），249–273。[10] B. Yood，C^*-半范数。《数学研究》，118（1996年），19–26。电子邮箱：giorgia.bellomonte@unipa.it电子邮箱：camillo.trapani@unipa.it 巴勒莫大学数学与信息学系，Via Archirafi n. 34，I-90123 巴勒莫，意大利