arXiv:2304.05737v1 [math-ph] 12 Apr 2023

与经典李代数的 Weyl 群共轭类相关的多分量 KP 型层次及其约化

维克托·卡茨

马萨诸塞州剑桥市麻省理工学院数学系，美国马萨诸塞州 02139，电子邮箱：kac@math.mit.edu

约翰·范德勒尔

乌得勒支大学数学研究所，邮政信箱 80010，3508 TA 乌得勒支，荷兰，电子邮箱：J.W.vandeLeur@uu.nl

摘要

这篇综述性文章在很大程度上介绍了 XKP 型演化方程多分量层级理论，其中 X=A、B、C 或 D，AKP=KP，以及它们与 X 型经典李代数的魏尔群共轭类相关的约化。与通常一样，主要工具是多分量玻色子-费米子对应，由此得到相应的 τ 函数、波函数、缀饰算子和 Lax 算子。

目录

1 引言 **3**

2 李代数 **23**

2.1 经典李代数.23 2.2 环代数与仿射李代数.25 2.3 经典无限矩阵代数.26 2.4 作为经典无限矩阵李代数子代数的仿射李代数 27 2.5 作为经典无限矩阵李代数子代数的扭曲仿射李代数.28

3 经典无限矩阵李代数的表示 31

3.1 a_∞ 的旋量模.31 3.2 b_∞ 和 d_∞ 的旋量模.32 3.3 c_∞ 的魏尔模（参见 [8]）. 34 3.4 生成费米子场和玻色子场.35 3.5 F_x 和 x_∞ 的多分量实现.36 3.6 F_x 的顶点算子实现.40 3.6.1 a、b 和 d 型的玻色化.40 3.6.2 c 型的玻色化.41 3.7 F_x 的玻色子实现.47 3.7.1 F_x的玻色子实现：克利福德代数情形 . . . . . 47 3.7.2 F_c的玻色子实现：魏尔代数情形 49

4 KP 型层级体系 **51**

4.1 KP、BKP和DKP层级的费米子描述 . . . 51 4.2 CKP 层级的辛玻色子描述 . . . . . 53 4.3 多分量 KP 、 BKP 、 CKP 和 DKP 层级的玻色子描述 .53 4.4 KP、BKP、CKP和DKP层级的波函数、Sato-Wilson方程和Lax 方程.

5 经典李代数的魏尔群共轭类及$\hat{\mathfrak{g}}$和$\hat{\mathfrak{g}}^{(2)}$的生成场 **6 8**

5.1 魏尔群元素与 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的扭曲实现.68 5.2 gl_n .70 5.3 sp_{2n} .74 5.4 so_{2n} . 80 5.5 so_{2n+1} .88 5.6 魏尔群元素与 $\hat{\mathfrak{g}}^{(2)}$ 的扭曲实现 97

6 从魏尔群的共轭类到 $\mathfrak{g}$ 中幂零元的映射 **99**

6.1 基于第 5 节的构造.99 6.2 一个略有不同的映射.100

7与 x_∞ 和$\hat{\mathfrak{g}}$约化相关的 KP型层级 102

7.1 $g\hat{l}_n$ 和 λ-KdV 层次.102 7.2 $\hat{so}_{2n}$ 和（λ, μ）-约化 DKP 层级 ..... . 106 7.3 $\hat{so}_{2n+1}$ 和（λ, μ）-约化 DKP 层级..... ... . 109 7.4 $\hat{so}_{2n+1}$ 和（λ, μ）-约化 BKP 层级.... .... 116 7.5 $\hat{sp}_{2n}$ 和（λ, μ）-约化 CKP 层级.119

8 与 x_∞ 和 $\hat{\mathfrak{g}}^{(2)}$ 约化相关的 KP 型层级 121

$\hat{8}.1\ \ gl^{(2)}_{2m}$ 以及（λ,μ）-约化的 DKP 层级.1228.2 $\hat{gl}^{(2)}_{2m+1}$ 以及 $\hat{so}^{(2)}_{2n}$ 以及（λ,μ）-约化的 BKP 层级 123

1 引言

设 V 是 $\mathbb{C}$ 上带有对称（分别为斜对称）非退化双线性形式$(\cdot,\cdot)$ 的向量空间。回顾一下，Clifford（分别为 Weyl）代数 $C\ell(V)$（分别为 $W(V)$）是张量代数在 V 上由关系生成的双边理想的商代数

$$uv + vu = (u, v) \quad (\text{resp. } uv - vu = (u, v)), \quad u, v \in V.$$

本文的关键构造是作用于$F \otimes F$上的卡西米尔算子，其中 F是 $C\ell(V)$（分别为 $W(V)$）上的不可约模。为此，我们需要两组向量 $\{v_i^+\}_{i\in I}$ 和 $\{v_i^-\}_{i\in I}$，它们属于 V，由集合 $I \subset \mathbb{Q}$作为指标集，并在符号变换下不变，且满足以下性质:

$$\begin{aligned} &(i) \quad \{v_i^+\}_{i\in I} \cup \{v_i^-\}_{i\in I} \quad \text{span } V, \\ &(ii) \quad (v_i^+, v_j^-) = \delta_{i,-j}, \quad (v_i^\pm, v_i^\pm) = 0 \quad \text{if } i \neq 0, \quad v_0^+ = v_0^- := v_0. \end{aligned}$$

令 $\epsilon = 1$ （若 $0 \in I$），否则令其为 0（若 $\notin I$）。模 F 是不可约的 $C\ell(V)$-模（分别为 $W(V)$-模），称为自旋模（分别为 Weyl 模），它含有一个非零向量 $|0\rangle$（真空向量），使得

$$v_i^+|0\rangle = v_i^-|0\rangle = 0 \quad \text{if } i > 0, \quad v_0|0\rangle = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}|0\rangle. \tag{1.1}$$

由下式定义卡西米尔算子 S

$$S = \epsilon v_0 \otimes v_0 + \sum_{i\in I\setminus\{0\}} v_i^+ \otimes v_{-i}^-. \tag{1.2}$$

由 (1.1) 可得

$$S(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{\epsilon}{2}|0\rangle \otimes |0\rangle. \tag{1.3}$$

令 $\mathfrak{g}$ 为 $C\ell(V)$（分别为 $W(V)$）的李子代数，由形如 v^+v^-的元素张成，其中 $v^\pm \in V^\pm :=$ 张成$_{i\in I}\{v_i^\pm\}$。在 $C\ell(V)$ 的情形下，还有相应的群 G，它由形如 $1 + v^+v^-$的元素生成，其中 $v^\pm \in V^\pm$，且张成 $\{v^+, v^-\}$ 的空间是 V中的各向同性子空间（其逆为$1 - v^+v^-$）。容易验证，算子 S 在 $F \otimes F$ 上与 $\mathfrak{g}$ 通过对张量积的导子作用相交换，因此 S 与 G的对角作用相交换。由 (1.3) 可知，轨道$G \cdot |0\rangle$ 中的所有元素 τ 均满足方程

$$S(\tau \otimes \tau) = \frac{\epsilon}{2}\tau \otimes \tau. \tag{1.4}$$

方程（1.4）称为广义 *KP* 方程的费米子图景 .

容易证明（按照 [16], 定理 1.2 的思路），反过来，满足方程（1.4）的非零 $\tau \in F$位于轨道 $G \cdot |0\rangle$上。

上述设置中最重要的例子是克利福德代数 $C\ell_x$、$x = a$、 b或 d，以及魏尔代数；为保持统一，将其记作 $C\ell_c$，构造如下。我们将相应的 $C\ell_x$-模 F 记作 F_x。

$C\ell_a$. $I = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$; $\psi_i^+ := v_i^+$, $\psi_i^- := v_i^-$, $i \in I$, 构成 V的基；对称双线性形式为$(\psi_i^+, \psi_j^-)_a = \delta_{i,-j}$, $(\psi_i^\pm, \psi_j^\pm)_a = 0$；作用于真空向量上为 $\psi_i^\pm|0\rangle = 0$，其中 $i > 0$。生成级数

$$\psi^\pm(z) = \sum_{j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \psi_j^\pm z^{-j-\frac{1}{2}},$$

称为带电自由费米子。$C\ell_a$ 的关系变为

$$[\psi^+(z), \psi^-(w)]_+ = \delta(z-w), \quad [\psi^\pm(z), \psi^\pm(w)]_+ = 0,$$

其中，$\delta(z-w) = z^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{w}{z}\right)^n$ 是形式δ函数。该方程变为 (1.4)

$$\mathrm{Res}_{z=0}\psi^+(z)\tau \otimes \psi^-(z)\tau dz = 0, \quad \tau \in F_a. \tag{1.5}$$

它称为*KP*层级的费米子图景。

李代数 $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{g}$是矩阵的李代数 gl_∞ $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$，其元素属于 $\mathbb{C}$ 且只有有限个非零项，并通过以下同一对应

$$E_{ij} = \psi^+_{-i+\frac{1}{2}}\psi^-_{j-\frac{1}{2}}, \quad i,j \in \mathbb{Z}.$$

$C\ell_b$。 $I = \mathbb{Z}$, $\tilde{\phi}_i := v_i^+ = (-1)^i v_i^-$, $i \in I$构成 V的一组基，对称双线性形式$(\cdot,\cdot)_b$为$(\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_j)_b = (-1)^i\delta_{i,-j}$；当$i > 0$, $\tilde{\phi}_0|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle$时，其在真空向量上的作用为 $\tilde{\phi}_i|0\rangle = 0$。生成级数

$$\tilde{\phi}(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\phi}_j z^{-j}$$

称为扭曲中性自由费米子。$C\ell_b$ 的关系变为

$$[\tilde{\phi}(z), \tilde{\phi}(w)]_+ = z\delta(z+w). \tag{1.6}$$

方程 (1.4) 变为

$$\mathrm{Res}_{z=0}\tilde{\phi}(z)\tau \otimes \tilde{\phi}(-z)\tau\frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\tau\otimes\tau, \quad \tau \in F_b. \tag{1.7}$$

它在*BKP* 层级的费米子图景中称为。

李代数 $\mathfrak{g}$ 是 gl_∞ 的子代数，由相对于双线性形式 $(\cdot,\cdot)_b$ 斜自伴的矩阵组成，我们通过以下记号表示它：$so_{\infty,\ odd}$，其对应关系为

$$(-1)^j E_{-i,j} - (-1)^i E_{-j,i} = \tilde{\phi}_i\tilde{\phi}_j \quad \text{for } i > j.$$

请注意，在本引言中，我们使用的克利福德代数 $C\ell_b$ 的基与其他章节略有不同。这意味着我们在 gl_∞ 中也有不同的嵌入。

$C\ell_d$。 $I = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$、 $\phi_i := v_i^+ = v_i^-$、 $i \in I$构成 V的一组基，对称双线性 r

形式为（ϕ_i、 ϕ_j）$_d = \delta_{i,\ -j}$、 i、 $j \in I$；当$i > 0$时，作用于真空向量上为 $\phi_i|0\rangle = 0$。生成级数

$$\phi(z) = \sum_{j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \phi_j z^{-j-\frac{1}{2}}$$

称为中性自由费米子。 $C\ell_d$ 的关系变为

$$[\phi(z), \phi(w)]_+ = \delta(z-w). \tag{1.8}$$

方程 (1.4) 变为

$$\mathrm{Res}_{z=0}\phi(z)\tau \otimes \phi(z)\tau dz = 0, \quad \tau \in F_d. \tag{1.9}$$

它被称为*DKP* 层级在费米子图景中。

李代数 $\mathfrak{g}$ 是 gl_∞的子代数，由关于双线性形式（$\cdot$, $\cdot$）$_d$斜自伴的矩阵组成，我们通过对应将其记为$so_{\infty,even}$，

$$E_{-i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - E_{-j+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} = \phi_i\phi_j \quad \text{for } i > j.$$

Cℓ_c. $I = \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, $b_i := v_i^+ = (-1)^{i+\frac{1}{2}}v_i^-$, $i \in I$，构成 V的一组基，反对称双线性形式为$(b_i, b_j)_c = (-1)^{i-\frac{1}{2}}\delta_{i,\ -j}$, $i, j \in I$；在真空向量上的作用为$b_i|0\rangle = 0$ 若 $i > 0$。生成级数

$$b(z) = \sum_{j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} b_j z^{-j-\frac{1}{2}} \tag{1.10}$$

称为中性自由辛玻色子。 $C\ell_c$ 的关系变为

$$[b(z), b(w)]_- = \delta(z+w). \tag{1.11}$$

方程 (1.4) 变为

$$\mathrm{Res}_{z=0}b(z)\tau \otimes b(-z)\tau dz = 0, \quad \tau \in F_c. \tag{1.12}$$

它被称为 *CKP* 层级，处于 费米子图景中。

李代数 $\mathfrak{g}$ 是 gl_∞ 的子代数，由关于双线性形式 $(\cdot,\cdot)_c$ 斜自伴的矩阵组成；通过同一对应，我们将其记为 sp_∞。

$$(-1)^{j+1}E_{-i,j+1} + (-1)^{i+1}E_{-j,1+i} = b_{i+\frac{1}{2}}b_{j+\frac{1}{2}} \quad \text{for } i \geq j.$$

注意，在这些情况下，李代数 $\mathfrak{g}$ 的Dynkin 图分别为 A_∞、 B_∞、 C_∞ 和 D_∞，因此我们使用下标 a、b、 c 和 d。回顾一下，方程 (1.4)描述了真空向量在群作用下的群轨道，该群对应于李代数 $\mathfrak{g}$，位于空间 F_x 中，其中 $x = a$、 b、 d。

生成级数$a(z)$和$b(z)$是量子场，因为将它们作用于 $v \in F_x$ 时，得到的是 $F_x((z))$中的一个元素。一种重要的

量子场 $\alpha(z)$ 和 $\beta(z)$ 的运算是它们的正规序乘积，定义如下：

$$:\alpha(z)\beta(z):=\alpha(z)_-\beta(z)\pm\beta(z)\alpha_+(z), \tag{1.13}$$

其中 $\alpha(z)=\alpha_-(z)+\alpha_+(z)$，$\alpha_+(z)|0\rangle\in F[[z]]$，$\alpha_-(z)|0\rangle\in z^{-1}F[[z^{-1}]]$，并且在 (1.13) 中，如果 $\alpha(z)$ 和 $\beta(z)$ 都是费米子，则取负号。

上述概述的简单形式通过使用玻色化应用于可积演化偏微分方程理论。例如，在 a、b、d、c 情形下，最简单的单分量玻色化分别是，

$$\begin{aligned}
\alpha_a(z)&=:\psi^+(z)\psi^-(z):,\\
\alpha_b(z)&=\frac{1}{2}:\tilde{\phi}(z)\tilde{\phi}(-z):,\\
\alpha_d(z)&=\frac{1}{2}:\phi(z)\phi(-z):,\\
\alpha_c(z)&=\frac{1}{2}:b(z)b(-z):.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

在所有情况下，玻色化都用弦理论中的顶点算子来表示。为了引入这些顶点算子，我们需要以下记号，该记号将在全文中使用：

$$z\cdot t=\sum_{j=1}^{\infty}z^jt_j,\quad z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_t=\sum_{j=1}^{\infty}z^{-j}\frac{1}{j}\frac{\partial}{\partial t_j}; \tag{1.15}$$

此外，$z\circ t$ 和 $z^{-1}\circ\tilde{\partial}_t$ 表示式 (1.15) 中的表达式，其中求和遍及正奇数。

在最简单的 $x=a$ 情形下，$\alpha_a(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_nz^{-n-1}$，其中

$$[\alpha_m,\alpha_n]=m\delta_{m,-n},\quad \alpha_j|0\rangle=0\quad\text{for } j\geq 0. \tag{1.16}$$

因此，我们得到一个海森堡李代数，关于该李代数，F_a 分解为特征子空间的直和 $F_a=\oplus_{m\in\mathbb{Z}}F_{(m)}$，这些特征子空间属于李代数 g α_0；每个 $F^{(m)}$ 都是一个不可约海森堡李代数模，并含有一个非零向量 $|m\rangle$，使得$\alpha_j|m\rangle=\delta_{j,0}m|m\rangle$ 对 $j\geq 0$成立。由此可以构造一个同构

$$\sigma_1:F_a\xrightarrow{\sim}B_1=\mathbb{C}[q,q^{-1},t_1,t_2,\ldots], \tag{1.17}$$

称为 a型玻色化，它由以下性质唯一确定：

$$\sigma_1(|m\rangle)=q^m,\ \sigma_1\alpha_0\sigma_1^{-1}=q\frac{\partial}{\partial q},\ \sigma_1\alpha_n\sigma_1^{-1}=\frac{\partial}{\partial t_n}\text{ and }\sigma_1\alpha_{-n}\sigma_1^{-1}=nt_n,\ \text{for } n>0. \tag{1.18}$$

此外，由于 $[\alpha_k,\psi^{\pm}(z)]=\pm z^k\psi^{\pm}(z)$，我们可以通过同构 σ_1 将带电自由费米子识别为顶点算子：

$$\sigma_1\psi^{\pm}(z)\sigma_1^{-1}=q^{\pm 1}z^{\pm q\frac{\partial}{\partial q}}e^{\pm z\cdot t}e^{\mp z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_t}. \tag{1.19}$$

回顾一下，同构 (1.17) 等价于雅可比三重积恒等式。事实上，定义能量 $|0\rangle$=0 和能量 $\psi_j^{\pm} = -j$，则

$$F_a = \bigoplus_{i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}} F_i, \text{ where } F_i = \{w \in F | \operatorname{energy}(w) = i\}.$$

Let

$$F_i^{(m)} := F_i \cap F^{(m)} \text{ and } \dim_{q,t} F_a := \sum_{i,m} \dim(F_i^{(m)}) q^i t^m.$$

然后，考察旋量模 F_a，我们得到

$$\dim_{q,t} F_a = \prod_{j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}} (1 + tq^j)(1 + t^{-1}q^j). \tag{1.20}$$

观察 B_1可知

$$\dim_{q,t} F_a = \sum_{m \in \mathbb{Z}} t^m q^{\frac{m^2}{2}} \prod_{j \in \mathbb{Z}_{>0}} \frac{1}{1 - q^j}. \tag{1.21}$$

因此，(1.20) 与 (1.21) 之间的等式就是著名的雅可比三重积恒等式。

将 σ_1 应用于费米子图景中的 KP层级 (1.5)，得到关于 τ 函数 [6]的著名 KP 双线性方程层级：

$$\operatorname{Res}_{z=0} e^{z\cdot(t-\bar{t})} e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{\bar{t}}-\tilde{\partial}_t)} \tau(t)\tau(\bar{t}) dz = 0, \quad \tau(t) \in B_1. \tag{1.22}$$

在下文中，$\bar{t}$ 表示 $t = (t_1, t_2, \ldots)$的另一个副本。

τ 函数上的 KP层级方程，如(1.22)，可以按照 [27] 以及许多其他论文中的方法，改写为Hirota 双线性方程。然而，由Sato 在 [27], 中引入的最重要方法，是通过波函数和缀饰算子来处理 Lax 型方程。为描述这一点，考虑伪微分算子 $\mathbb{C}[[t_1, t_2, \ldots]][[\partial^{-1}]]$的代数，其中 $\partial = \frac{\partial}{\partial t_1}$。回忆一下，对于 KP层级，τ 函数 $\tau(t)$ 的 伴随算子 $P(t, \partial)$ 是首一伪微分算子，其符号为

$$P(t, z) = \frac{e^{-z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_t}\tau(t)}{\tau(t)}. \tag{1.23}$$

相关的*Lax* 算子 $L(\partial) = L(t, \partial)$ 被定义为由 $P(t, \partial)$ 算子 ∂ “缀饰”的：

$$L(\partial) = P(\partial)\partial P(\partial)^{-1}. \tag{1.24}$$

该等式 τ 函数上的方程 (1.22) 等价于佐藤-威尔逊方程 s

$$L(\partial)P(\partial) = P(\partial)\partial, \quad \frac{\partial P(\partial)}{\partial t_k} = -(L(\partial)^k)_- P(\partial), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.25}$$

其中，下标 $_-$ 通常表示 $L(\partial)^k$ 的积分部分。这等价于关于 $L(\partial)$ 的以下 ***Lax-Sato*** 方程：

$$\frac{\partial L(\partial)}{\partial t_k} = [(L(\partial)^k)_+, L(\partial)], \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.26}$$

其中，下标 $_+$通常表示 $L(\partial)^k$ 的微分部分，而这些与(1.22)等价。

事实证明， $x = a$ 情形中的玻色化 (1.17)-(1.19) 可以推广为 s分量玻色化 σ_s ，其中 s 为任意正整数（见[15]）。为此，将场 $\psi^{\pm}(z) = \sum_{k\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \psi_k^{\pm} z^{-k-\frac{1}{2}}$分解为 s 个场$\psi^{\pm a}(z) = \sum_{k\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \psi_k^{\pm a} z^{-k-\frac{1}{2}}$之和，其中 $a = 1, \dots, s$，令

$$\psi_j^{\pm a} = \psi^{\pm}_{sj\pm\frac{1}{2}(s-2a+1)}, \quad j \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}, \tag{1.27}$$

即，模 $\psi_j^{\pm a}$的指标为 $\equiv \pm\frac{1}{2}(1-2a)$ 模 s。接着构造 s个玻色子场 $\alpha^a(z) =: \psi^{+a}(z)\psi^{-a}(z) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j^a z^{-j-1}$, $a = 1, \dots, s$，其模构成一个“秩”为 s的海森堡李代数:

$$[\alpha_j^a, \alpha_k^b] = j\delta_{ab}\delta_{j,-k}, \quad \alpha_j^a|0\rangle = 0 \quad \text{for } j \geq 0. \tag{1.28}$$

与单分量情形一样，这个海森堡李代数在$F = F_a$上的作用不是不可约的，因此，为了得到不可约性，需要在 F上引入额外的算子Q_a, $a = 1, \dots s$，它们类似于乘以 q的算子。这些算子由以下性质唯一确定:

$$Q_a|0\rangle = \psi^{+a}_{-\frac{1}{2}}|0\rangle, \quad Q_a\psi_k^{\pm b} = (-1)^{1-\delta_{ab}}\psi_{k\mp\delta_{ab}}^{\pm b} Q_a. \tag{1.29}$$

于是， s-分量玻色化是一个向量空间同构

$$\sigma_s : F \xrightarrow{\sim} B_s = \mathbb{C}[q_a, q_a^{-1}, t_1^{(a)}, t_2^{(a)}, \dots \,|\, 1 \leq a \leq s], \tag{1.30}$$

由 $\sigma_s(|0\rangle) = 1$ 唯一确定，并满足以下性质（$a = 1, \dots, s$）：

$$\begin{aligned} &\sigma_s Q_a \sigma_s^{-1} = (-1)^{\sum_{j=1}^{a-1} q_j \frac{\partial}{\partial q_j}} q_a, \ \sigma_s \alpha_0^a \sigma_s^{-1} = q_a \frac{\partial}{\partial q_a}, \\ &\sigma_s \alpha_j^a \sigma_s^{-1} = \frac{\partial}{\partial t_j^{(a)}} \text{ and } \sigma_s \alpha_{-j}^a \sigma_s^{-1} = j t_j^{(a)}, \text{ for } j > 0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

与单分量情形一样，在同构 σ_s下，有如下对应关系

$$\sigma_s \psi^{\pm a}(z) \sigma_s^{-1} = (-1)^{\sum_{j=1}^{a-1} q_j \frac{\partial}{\partial q_j}} q_a^{\pm 1} z^{\pm q_a \frac{\partial}{\partial q_a}} e^{\pm z\cdot t^{(a)}} e^{\mp z^{-1}\cdot \tilde{\partial}_{t^{(a)}}} \tag{1.32}$$

同构 (1.30) 等价于 s 个 (1.20) 的乘积；根据雅可比三重积恒等式，该乘积等于 s 个 (1.21) 的乘积。

注意，费米子图景中的 KP 层级 (1.5) 变为

$$\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{a=1}^{s}\psi^{+a}(z)\tau\otimes\psi^{-a}(z)\tau dz=0. \tag{1.33}$$

此外，在同构 σ_s 下，我们有

$$\sigma_s: F^{(0)}\xrightarrow{\sim} B_s^{(0)}=\mathbb{C}[q^{\underline{k}},t_1^{(a)},t_2^{(a)},\dots\,|\,1\le a\le s,\ |\underline{k}|=0],$$

其中，$\underline{k}=(k_1,\dots,k_s)\in\mathbb{Z}^s$, $q^{\underline{k}}=q_1^{k_1}q_2^{k_2}\cdots q_s^{k_s}$和 $|\underline{k}|_j$ 表示 $\sum_{i=1}^{j}k_i$，而$|\underline{k}|=|\underline{k}|_s$，因此对于 $\tau\in F_{(0)}$，我们可以写成 $\sigma_s(\tau)=\sum_{|\underline{k}|=0}\tau_{\underline{k}}(t)q^{\underline{k}}\in B^{(0)}$，其中$t=(t_1^{(a)},t_2^{(a)},\dots\,|\,1\le a\le s)$。将同一对应 $\sigma_s\otimes\sigma_s$：$F^{(0)}\otimes F^{(0)}\xrightarrow{\sim}B_s^{(0)}\otimes B_s^{(0)}$ 应用于 (1.33)，并利用 (1.32)，我们得到 τ 函数 $\tau_{\underline{k}}(t)\in B_s^{(0)}$ 上的 s 分量*KP*层级 的玻色子图景：

$$\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{|\underline{k}+\underline{\ell}|_{j-1}}z^{k_j-\ell_j-2+2\delta_{js}}e^{z\cdot(t^{(j)}-\bar{t}^{(j)})}e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{\bar{t}^{(j)}}-\tilde{\partial}_{t^{(j)}})}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s-\underline{e}_j}(t)\tau_{\underline{\ell}+\underline{e}_j-\underline{e}_s}(\bar{t})=0, \tag{1.34}$$

对于每一对 $\underline{k}$、$\underline{\ell}\in\mathbb{Z}^s$，满足 $|\underline{k}|=|\underline{\ell}|=0$。这里，$\underline{e}_j\in\mathbb{Z}^s$ 是 $\mathbb{Z}^s$的标准基向量。$s=1$ 的一个特殊情形是 τ 函数 $\tau(t)\in\mathbb{C}[t_1,t_2,\dots]$上的经典 KP 层级 (1.22)。

对于 s分量 KP 层级，关联到 τ 函数 $\{\tau_{\underline{k}}\,|\,|\underline{k}|=0\}$的伴随算子 $P(\underline{k};t,\partial)$ 的定义方式类似，只是 $\partial=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial}{\partial t_1^{(j)}}$，其符号现在是一个 $s\times s$ 矩阵 $P(\underline{k};t,z)$，其元素为

$$P_{ij}(\underline{k};t,z)=\frac{(-1)^{\eta_{ij}}z^{\delta_{ij}-1}e^{-z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{t^{(j)}}}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_i-\underline{e}_j}(t)}{\tau_{\underline{k}}(t)},\quad i,j=1,\dots,s, \tag{1.35}$$

其中

$$\eta_{ij}=0\ \text{ if } i\ge j\ \text{ and }\ =1\ \text{otherwise.} \tag{1.36}$$

这是一个首一的 $s\times s$ 矩阵伪微分算子。由伴随算子 $P(\underline{k};t,\partial)$ 对易变换得到的 Lax 算子为 $I\partial$和 E_{jj}, $j=1,\dots,s$:

$$L(\underline{k};t,\partial)=P(\underline{k};t,\partial)\partial P(\underline{k};t,\partial)^{-1},\quad C^{(j)}(\underline{k};t,\partial)=P(\underline{k};t,\partial)E_{jj}P(\underline{k};t,\partial)^{-1}.$$

关于 τ 函数的方程 (1.34) 推出如下 $s\times s$矩阵 Lax-Sato 方程，分别作用于每个 $\underline{k}$ 上的 $L=L(\underline{k},:t,\partial)$ 和 $C^{(j)}=C^{(j)}(\underline{k},:t,\partial)$:

$$\frac{\partial L}{\partial t_i^{(j)}}=[(L^iC^{(j)})_+,L],\quad \frac{\partial C^{(k)}}{\partial t_i^{(j)}}=[(L^iC^{(j)})_+,C^{(k)}],\quad j,k=1,\dots,s,\quad i=1,2,\dots. \tag{1.37}$$

更多详情请参见第 7.1 小节。注意，对于 $s>1$，需要辅助算子 $C^{(j)}$ 才能得到 Lax 方程 (1.37)，这些方程等价于 (1.34)，参见 [15]。注意，Lax 算子 L （分别是辅助算子 $C^{(k)}$）是任意的 $s\times s$ 矩阵伪微分算子，其形式为 $I_s\partial+\sum_{i\ge1}A_i(t)\partial^{-i}$

（分别为 $E_{kk}+\sum_{i\geq 1} C_i^{(k)}(t)\partial^{-i}$），其中 $A_i(t)$ 和 $C_i^{(k)}(t)$ 是 $s\times s$矩阵，其元素属于 $\mathbb{C}[[t_i^{(a)}|a=1,\dots,s,\ i=1,2,\dots]]$.

对于 1 分量的 $x=b$ 情形，$\alpha_b(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_{odd}}\alpha_n z^{-n-1}$，其中

$$[\alpha_m,\alpha_n]=\frac{m}{2}\delta_{m,-n},\quad \alpha_j|0\rangle=0\quad \text{for } j>0. \tag{1.38}$$

因此，我们得到一个海森堡李代数，相对于该代数，F_b 是不可约的。这使得我们能够构造一个同构

$$\sigma_1 : F_b \xrightarrow{\sim} B_1=\mathbb{C}[t_1,t_3,\dots], \tag{1.39}$$

称为 b 型玻色化，它由以下性质唯一确定：

$$\sigma_1(|0\rangle)=1,\ \sigma_1\alpha_n\sigma_1^{-1}=\frac{\partial}{\partial t_n}\text{ and }\sigma_1\alpha_{-n}\sigma_1^{-1}=\frac{n}{2}t_n,\ \text{for } n>0. \tag{1.40}$$

这个同构等价于以下简单恒等式：

$$\dim_q(F_b):=\sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq}0}\dim(F_j)q^j=\prod_{j\in\mathbb{Z}_{>0}}(1+q^j)=\prod_{j\in\mathbb{Z}_{>0,odd}}\frac{1}{1-q^j}, \tag{1.41}$$

˜其中，能量分解 $F=\oplus_j F_j$ $|0\rangle=0$ $\phi_j=$由能量、能量定义。此外，$^{-j}$ $[\alpha_k,\tilde{\phi}\ z\ ]=\pm z^k\tilde{\phi}\ z$ 由于 ( ) ( )，我们可以在同构 σ_1 下将中性扭曲自由费米子识别为顶点算子：

$$\sigma_1\tilde{\phi}(z)\sigma_1^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{z\circ t}e^{-2(z^{-1}\circ\tilde{\partial}_t)}. \tag{1.42}$$

应用 σ_1 将方程 (1.7) 转化为（小）BKP 层级 [7], [16]（此外还存在所谓的大 BKP 层级，该层级在 [16] 的引言中介绍）：

$$\mathrm{Res}_{z=0}e^{z\circ(t-\bar{t})}e^{2(z^{-1}\circ(\tilde{\partial}_{\bar{t}}-(\tilde{\partial}_t))}\tau(t)\tau(\bar{t})dz=\tau(t)\tau(\bar{t}). \tag{1.43}$$

在 $x=b$ 的情形下，伴随算子为，参见 [7] 或 [28],

$$P(t,z)=\frac{e^{-2(z^{-1}\circ\tilde{\partial}_t)}\tau(t)}{\tau(t)}.$$

那么，由 (1.24) 再次定义的 Lax 算子 L 满足相同的 Lax–Sato 方程 (1.26)，但仅当 k 为奇数时才成立。在这种情况下，L 是形如 $L=\partial+\sum_{j>0}u_j(t)\partial^{-j}$ 的伪微分算子，其中 $u_j(t)\in\mathbb{C}[[t_1,t_3,\dots]]$，并满足额外条件 [28]:

$$L(\partial)^*=-\partial^{-1}L(\partial)\partial. \tag{1.44}$$

对于单分量 $x=c$ 情形，$\alpha_c(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_{odd}}\alpha_n z^{-n-1}$，其中

$$[\alpha_m,\alpha_n]=-\frac{m}{2}\delta_{m,-n},\quad \alpha_j|0\rangle=0\quad \text{for } j>0. \tag{1.45}$$

由于 F_c 不可约，因此限制到这个海森堡李代数时，我们需要构造更多算子。由于 $[\alpha_k,b(z)]=-z^k b(z)$，可得

$$b(z)=V_-(z)^{-1}\Theta(z)V_+(z), \tag{1.46}$$

其中（详情参见 [26] 或本文第 3.6.2 小节）

$$V_-(z)=\exp\left(-2\sum_{k<0,\,\text{odd}}\frac{\alpha_k}{k}z^{-k}\right),\qquad V_+(z)=\exp\left(-2\sum_{k>0,\,\text{odd}}\frac{\alpha_k}{k}z^{-k}\right), \tag{1.47}$$

and

$$\Theta(z)=\sum_{k\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\theta_k z^{-k-\frac{1}{2}}:=V_-(z)^{-1}b(z)V_+(z)^{-1}.$$

有

$$\theta(z)|0\rangle=V_-(z)^{-1}\sum_{i>0}b_{-i}z^{i-\frac{1}{2}}|0\rangle\in F_c[[z]],$$

and

$$\Theta(y)\Theta(-z)+\Theta(-z)\Theta(y)=2z^{\frac{1}{2}}\partial_z(z^{\frac{1}{2}}\delta(y-z)).$$

我们构造一个同构

$$\sigma_1:F_c\xrightarrow{\sim}B_1=\mathbb{C}[t_1,t_3,\ldots,\xi_{\frac{1}{2}},\xi_{\frac{3}{2}},\ldots], \tag{1.48}$$

其中 ξ_j 是反交换变量，称为 c 型玻色化，它由以下性质唯一确定：

$$\begin{aligned}\sigma_1(|0\rangle)=1,\ \sigma_1\alpha_{-j}\sigma_1^{-1}=\frac{1}{2}jt_j,\ \sigma_1\alpha_j\sigma_1^{-1}=-\frac{\partial}{\partial t_j},\\ \sigma_1\theta_{-i}\sigma_1^{-1}=(-1)^{i+\frac{1}{2}}2i\xi_i,\ \sigma_1\theta_i\sigma_1^{-1}=\frac{\partial}{\partial\xi_i},\end{aligned} \tag{1.49}$$

并且我们得到

$$\sigma_1 b(z)\sigma_1^{-1}=e^{z\circ t}\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_i}z^{-i-\frac{1}{2}}-2i\xi_i(-z)^{i-\frac{1}{2}}\right)e^{2(z^{-1}\circ\tilde{\partial}_t)}. \tag{1.50}$$

同构 (1.48) 等价于魏尔模 F_c 满足的以下显然恒等式；这是通过比较代数 $C\ell_c$ 的生成元与顶点算子 (1.50) 中出现的算子得出的：

$$\dim_q F_c=\prod_{j\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}}\frac{1}{1-q^j}=\prod_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 1,odd}}\frac{1}{1-q^j}\prod_{j\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}}(1+q^j), \tag{1.51}$$

其中能量分解定义为 energy $|0\rangle = 0$、energy $b_j = -j$，因此 energy $\alpha_k = -k$，且 energy $\theta_j = -j$。

方程（1.12）在 σ_1 下变为 [26]:

$$\mathrm{Res}_{z=0} \sum_{i,j\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}} e^{z\circ(t-\bar{t})} e^{2(z^{-1}\circ(\tilde{\partial}_t-\tilde{\partial}_{\bar{t}})} \left(\frac{\partial}{\partial\xi_i} z^{-i-\frac{1}{2}} - 2i\xi_i(-z)^{i-\frac{1}{2}}\right) \times \left(\frac{\partial}{\partial\overline{\xi}_j}(-z)^{-j-\frac{1}{2}} - 2j\overline{\xi}_j(z)^{j-\frac{1}{2}}\right) \tau(t,\xi)\tau(\overline{t},\overline{\xi})dz = 0.$$

为构造 1-分量 P 情形下的伴随算子，我们写出，见 [26],

$$\tau(t,\xi) = \tau_0(t) + \sum_{m\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{>0}} \tau_m(t)\xi_{\frac{1}{2}}\xi_m + \text{terms of degree} > 2 \text{ in the } \xi_j\text{'s},$$

并令

$$P(t,z) = \frac{1}{\tau_0(t)} e^{2(z^{-1}\circ\tilde{\partial}_t)} \left(\tau_0(t) - \sum_{m\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{>0}} \tau_m(t) z^{-m-\frac{1}{2}}\right).$$

然后，由（1.24）定义的 L 满足 Lax-Sato 方程（1.26），但与$x = b$ 情形一样，仅当 k 为奇数时成立。此外， L 满足额外条件（见 [8] 或[26]） $L^* = -L$。

对于 1-分量 $x = d$ 情形， $\alpha_d(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{even}} \alpha_n z^{-n-1}$，其中

$$[\alpha_m, \alpha_n] = \frac{m}{2}\delta_{m,-n}, \quad \alpha_j|0\rangle = 0 \quad \text{for } j \geq 0. \tag{1.52}$$

因此我们得到一个海森堡李代数，关于该代数， F_d 分解为直和 $F_d = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} F^{(i)}$，其中 $\alpha_0 f = if$当 $f \in F_{(i)}$。海森堡李代数模 $F_{(i)}$是不可约的，并具有最高权向量

$$|i\rangle = \begin{cases} \phi_{2i+\frac{3}{2}}\phi_{2i-\frac{1}{2}}\cdots\phi_{-\frac{5}{2}}\phi_{-\frac{1}{2}}|0\rangle & i < 0, \\ \phi_{-2i+\frac{1}{2}}\phi_{-2i+\frac{5}{2}}\cdots\phi_{-\frac{7}{2}}\phi_{-\frac{3}{2}}|0\rangle & i \geq 0, \end{cases}$$

和 $\alpha_0|i\rangle = i|i\rangle$。这使得我们能够构造一个同构

$$\sigma_1 : F_d \xrightarrow{\sim} B_1 = \mathbb{C}[q, q^{-1}, t_1, t_2, \ldots], \tag{1.53}$$

称为 d型的玻色化，它由以下性质唯一确定:

$$\sigma_1(|i\rangle) = q^i, \ \sigma_1\alpha_0\sigma_1^{-1} = q\frac{\partial}{\partial q}, \ \sigma_1\alpha_{2n}\sigma_1^{-1} = \frac{\partial}{\partial t_n} \text{ and } \sigma_1\alpha_{-2n}\sigma_1^{-1} = nt_n, \text{ for } n \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{1.54}$$

由于 $[\alpha_{2k}, \phi(z)] = -z^{2k}\phi(-z)$，我们无法找到场 $\phi(z)$ 的顶点算子表述。因此，我们定义海森堡本征函数。

$$\phi^{\pm}(z) := \frac{\phi(z) \mp \phi(-z)}{2}, \quad \text{so that } [\alpha_{2k}, \phi^{\pm}(z)] = \pm z^{2k}\phi^{\pm}(z). \tag{1.55}$$

这些费米子场可以识别为以下顶点算子。

$$\sigma_1 \phi^{\pm}(z)\sigma_1^{-1} = q^{\pm 1} z^{-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\pm 2q\frac{\partial}{\partial q}} e^{\pm z^2\cdot t} e^{\mp z^{-2}\cdot\tilde{\partial}_t} \tag{1.56}$$

With respect to $so_{\infty,even}$ 该模 F 分解为两个不可约模，分别是namely

$$F_d = F^{\overline{0}} \oplus F^{\overline{1}} = \bigoplus_{i\in 2\mathbb{Z}} F^{(i)} \oplus \bigoplus_{i\in 1+2\mathbb{Z}} F^{(i)},$$

with a 最高权向量 $|\overline{0}\rangle = |0\rangle$，分别为 $|\overline{1}\rangle = \phi_{-\frac{1}{2}}|0\rangle = |-1\rangle$，使得$\alpha_j|\overline{\epsilon}\rangle = -\epsilon\delta_{j,0}|\overline{\epsilon}\rangle$ 对于 $j \geq 0$，其中 $\epsilon = 0$ 或 1。

因此，DKP 层级 (1.9) 转化为

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(\phi^+(z)\tau \otimes \phi^-(z)\tau + \phi^-(z)\tau \otimes \phi^+(z)\tau\right) dz = 0, \tag{1.57}$$

其中$\tau \in F^{\overline{0}}$（对于 $\tau \in F^{\overline{1}}$，同样的方程也成立）。将 σ_1应用于此方程，得到带电版本的 DKP 层级 [12], [16]:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0}\Big(& z^{n-m-2} e^{z\cdot(t-\overline{t})} e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{\overline{t}}-\tilde{\partial}_t)} \tau_{n-1}(t)\tau_{m+1}(\overline{t}) + \\ &+ z^{m-n-2} e^{-z\cdot(t-\overline{t})} e^{-z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{\overline{t}}-\tilde{\partial}_t)} \tau_{n+1}(t)\tau_{m-1}(\overline{t})\Big) dz = 0,\end{aligned} \tag{1.58}$$

其中 n和 m为奇数，且 $\tau(t) = \sum_{k\in 2\mathbb{Z}} \tau_k(t) q^k$。注意，这对 $F^{\overline{0}}$成立。在 $F^{\overline{1}}$的情况下， n和 m为偶数，且 $\tau(t) = \sum_{k\in 1+2\mathbb{Z}} \tau_k(t) q^k$。

同构 (1.53) 等价于以下版本的雅可比三重积恒等式:

$$\dim_{q,t} F_d = \prod_{j\in\frac{1}{2}+2\mathbb{Z}_{\geq 0}} (1+tq^{j+1})(1+t^{-1}q^j) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} t^m q^{\frac{2m^2+m}{2}} \prod_{j\in\mathbb{Z}_{>0}} \frac{1}{1-q^{2j}},$$

其中再次有能量 $|0\rangle = 0$和能量 $\phi_j = -j$。两个不可约 $so_{\infty,\ even}$表示对应于

$$\sum_{m\in 2\mathbb{Z}} t^m q^{\frac{2m^2+m}{2}} \prod_{j\in\mathbb{Z}_{>0}} \frac{1}{1-q^{2j}} \quad \text{and} \quad \sum_{m\in 1+2\mathbb{Z}} t^m q^{\frac{2m^2+m}{2}} \prod_{j\in\mathbb{Z}_{>0}} \frac{1}{1-q^{2j}}.$$

由于双线性方程 (1.58) 中出现了两项，这个层级可以改写为仅由一个 2×2 矩阵 Lax-Sato 方程构成的形式（更多详情请参见 [16]的引言）。具体而言，对于 $\tau(t) = \sum_{j\in 2\mathbb{Z}} \tau_j q^j$，对每个 $k \in \mathbb{Z}$，定义一个首一的 2×2矩阵伪微分伴随算子 $P(k;\ t, \partial)$，其符号为

$$P(k;t,z) = \frac{1}{\tau_k(t)} \begin{pmatrix} e^{-z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_t}\tau_k(t) & z^{-2}e^{(-z)^{-1}\cdot\tilde{\partial}_t}\tau_{k+2}(t) \\ z^{-2}e^{-z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_t}\tau_{k-2}(t) & e^{(-z)^{-1}\cdot\tilde{\partial}_t}\tau_k(t) \end{pmatrix},$$

以及由 $L = L(k;\, t, \partial) = P(k;\, t, \partial)(E_{11}\partial - E_{22}\partial)P(k;\, t, \partial)^{-1}$ 给出的Lax 算子。还需要一个辅助算子 $D(\partial) = D(k;\, t, \partial)$，其定义为 $D(\partial) = P(\partial)(E_{11} - E_{22})P(\partial)^{-1}$。然后，对于每个 k，这些算子显然彼此对易，并满足以下 Lax-Sato 方程，参见小节 4.4：

$$\frac{\partial L}{\partial t_i} = [(L^i D)_+, L], \quad \frac{\partial D}{\partial t_i} = [(L^i D)_+, D].$$

此外， L 和 D 满足以下附加条件

$$L(\partial)^* = (E_{11} - E_{22})L(\partial)(E_{11} - E_{22}), \quad D(\partial)^* = -(E_{11} - E_{22})D(\partial)(E_{11} - E_{22}).$$

为了得到一个 1×1 矩阵 dressing 算子，需要修改玻色化，参见 [30] 以了解这一构造。然而，该构造不允许约化到仿射李代数，因此我们不会在引言中描述它。它是小节 4.4 中构造的一个特例，即取 $r = 0$ 和 $s = 1$时的情形。

$x = b$、 $x = d$ 和 $x = c$ 情形下的多分量玻色化更为复杂。对于任意一对非负整数 s和 r，只要满足 $r + s > 0$，都可以构造这些玻色化。关于它们的构造，请参见第 4.1 节和第 4.2 节；关于相应的 s、r-分量 BKP、DKP 和 CKP 层级的构造，请参见第 4.3 节。

与 s、r-分量 b （以及 d情形下的）玻色化等价的恒等式，是 s 个雅可比三重积恒等式 (1.20)-(1.21) 与 r 个 (1.41) 的乘积；而在 c 情形下，相应的恒等式是 r 个 (1.51) 与 s 个以下恒等式的乘积。据我们所知，该恒等式是新的，参见小节 3.6.2。

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}_{>0}} \frac{1 - q^i}{(1 - tq^{i-\frac{1}{2}})(1 - t^{-1}q^{i-\frac{1}{2}})} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k}{2}}t^k}{(1-q)\cdots(1-q^k)} q^{jk} \frac{q^{\frac{j}{2}}t^{-j}}{(1-q)\cdots(1-q^j)}. \tag{1.59}$$

在文献 [5], [12], Date 中，Jimbo、Kashiwara 和 Miwa 首先开展了将 KP 型层级约化到仿射李代数的研究。我们将其推广到多分量情形，见第4.2小节。

在单分量情形中，固定一个正整数 N，并令 $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}}$，若$x = a, b, c$且 $\omega = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{N}}$，若 $x = d$。定义这些场

$$\begin{aligned} A_k(z) &=: \psi^+(z)\psi^-(z\omega^k) :, \\ B_k(z) &= \frac{1}{2} : \tilde{\phi}(z)\tilde{\phi}(-z\omega^k) :, \\ C_k(z) &= \frac{1}{2} : b(z)b(-z\omega^k) :, \\ D_k(z) &= \frac{1}{2} : \phi(z)\phi(-z\omega^k) : . \end{aligned} \tag{1.60}$$

那么显然，见 (1.14)，对于 $X = A, B, C$ 和 D， $X_0(z) = \alpha_x(z)$，而场 $X_k(z)$ 的模张成一个包含相应海森堡李代数的李代数。

在 $x = a$ 情形下，场 $A_k(z)$、 $k = 0$、.....、 $N-1$ 的模张成仿射李代数 $\hat{} gl_N$，它是环路代数 $gl_N(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ 的中心扩张。元素 $g \in gl_N$ 在 $F_a \otimes F_a$ 上的 $\hat{}$ 对角作用不仅与卡西米尔算子 S 对易，也与这些算子对易。

$$\mathrm{Res}_{z=0} z^{\ell N} \psi^+(z) \otimes \psi^-(z) dz, \quad \ell = 1, 2, \dots,$$

这意味着，在费米子图景中， N 约化的 τ 函数 τ 也满足该方程。

$$\mathrm{Res}_{z=0} z^{\ell N} \psi^+(z)\tau \otimes \psi^-(z)\tau dz, \quad \ell = 1, 2, \dots.$$

这在玻色子图景中表明， $\tau(t)$ 不仅满足 (1.22)，还满足以下所有方程

$$\mathrm{Res}_{z=0} z^{\ell N} e^{z\cdot(t-\overline{t})} e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{\overline{t}} - \tilde{\partial}_t)} \tau(t)\tau(\overline{t}) dz = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots. \tag{1.61}$$

这就是 N-KdV 层次，其中 $N = 2$ 的情形是经典 KdV 层次，参见 [6]。注意， $\ell = 0$ 的方程 (1.61) 就是 KP层级 (1.22)。众所周知，参见例如 [5], ，这等价于 τ 函数满足

$$\frac{\partial \tau(t)}{\partial t_{\ell N}} = c_\ell \tau(t), \quad \ell = 1, 2, \dots., \quad \text{with } c_\ell \in \mathbb{C}. \tag{1.62}$$

如果 KP τ 函数 $\tau(t)$ 满足 (1.62)，那么不难验证，对 $\ell = 0$ 关于 t_{kN} 求导时，我们得到 $\ell = k$ 的 (1.61)。反过来结论也成立，但证明并不那么直接，证明请参见第 7.1 小节。

由于 τ 函数 $\tau(t)$ 满足 (1.62)，其符号由 (1.23) 给出的伴随算子 $P(t, \partial)$ 满足 $\frac{\partial P_{(t,\ \partial)}}{\partial t_{\ell N}} = 0$。因此，由 (1.25) ~~的第~~二个方程可知 $(L^{\ell N})_- = 0$，这意味着 $\mathcal{L} := L^N$ 是一个首一的 N 阶微分算子。对于 $\mathcal{L}$，有如下 Lax-Sato 方程:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_k} = [(\mathcal{L}^{\frac{k}{N}})_+, \mathcal{L}], \quad k = 1, 2, \dots. \tag{1.63}$$

在 $x = b$ 情形下，生成场 $B_k(z)$ 的模（见 (1.60)）张成扭曲仿射李代数 $\hat{} gl_N^{(2)}$ （若 N 为奇数），以及 $\hat{} so_N^{(2)}$ （若 N 为偶数）。一个 N-约化的 BKP τ 函数满足

$$\mathrm{Res}_{z=0} z^{\ell N} \tilde{\phi}(z)\tau \otimes \tilde{\phi}(-z)\tau \frac{dz}{z} = \frac{\delta_{\ell,0}}{2} \tau \otimes \tau, \quad \ell = 0, 1, \dots. \tag{1.64}$$

与 $x = a$ 情形一样，这意味着 $(L^{kN})_- = 0$。因此，微分算子 $\mathcal{L} = L^N$ 满足 (1.63)。它满足额外条件 $\mathcal{L}^* = (-1)^N \partial^{-1} \mathcal{L} \partial$。

回想一下，BKP tau 函数仅依赖于奇数的 t_k。因此，若 N 为奇数，则很容易再次验证，对于同一个 ℓ，奇数的 ℓ 满足方程 (1.62) 蕴含 (1.64)。

当 N 为偶数时， $x=c$ 约化给出仿射李代数 $\hat{}sp_N$；当 N 为奇数时，则给出 $\hat{}gl_N^{(2)}$ （参见 [5]）。 N 约化的 CKP τ 函数满足以下方程（见第 7.5 小节）：

$$\mathrm{Res}_{z=0} z^{\ell N} b(z)\tau \otimes b(-z)\tau dz = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots. \tag{1.65}$$

与 $x=a$ 和 b 的情况一样，我们发现 $\mathcal{L} := L^N$ 再次是满足(1.63) 的微分算子，并且条件 $\mathcal{L}^* = (-1)^N \mathcal{L}$。

当 $x=d$ 时，约化给出 $\hat{}so_{2N}$。τ 函数满足这些方程。

$$\mathrm{Res}_{z=0} z^{2\ell N} \left(\phi^+(z)\tau \otimes \phi^-(z)\tau + \phi^-(z)\tau \otimes \phi^+(z)\tau\right) dz = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots. \tag{1.66}$$

与之前一样， $\mathcal{L} = L^N$ 是一个 N 阶（2×2 矩阵）微分算子。对于 $\mathcal{L}$ 和 D，有以下 Lax-Sato 方程:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_k} = [(\mathcal{L}^{\frac{k}{N}} D)_+, \mathcal{L}], \quad \frac{\partial D}{\partial t_k} = [(\mathcal{L}^{\frac{k}{N}} D)_+, D], \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.67}$$

其中，与前面一样， $D(\partial) = P(\partial)(E_{11} - E_{22})P(\partial)^{-1}$。注意，当 N 为偶数时， LD也是 N次根的 $\mathcal{L}$。

$x=a$ 的多分量情形中的约化（参见例如 [22] 和 [15]）由 gl_N 或 sl_N的魏尔群的共轭类参数化，该魏尔群即置换群 S_N。 S_N 的共轭类与 N的分拆 $\lambda =$（λ_1、 λ_2、.....、 λ_s）一一对应，其中 λ_i是该共轭类中一个置换的循环分解中各循环的长度。

在 s 中， λ 个非零部分的每个分拆 N 都给出 s 分量 KP层级 的一种约化，我们称之为 λ-KdV 层次。例如，当 $N=2$ 时，有两个分拆 (1, 1) 和 (2)。前者导出 AKNS 层次，后者则导出 KdV 层次。

ˆ 我们可以用生成级数来表示仿射李代数 gl_N 的生成级数

$$:\psi^{+a}(\omega_a^k z^{\lambda_b})\psi^{-b}(\omega_b^\ell z^{\lambda_a}):, \quad 1 \le a, b \le s, \quad 0 \le k < \lambda_a, \quad 0 \le \ell < \lambda_b,$$

其中 $\omega_a = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda_a}}$ 对于 $a=1$， ....., s。分拆 λ 的每个部分 λ_a 对应于一个 ˆ gl_{λ_a}，即场的模： $\psi^{+a}(\omega_a^k z^{\lambda_a})\psi^{-a}(\omega_a^\ell z^{\lambda_a})$:，其中 $0 \le k, \ell < \lambda_a$) 张成 gl_{λ_a}。(λ_1, λ_2, ..., λ_s)-KdV τ 函数满足以下方程

$$\mathrm{Res}_{z=0} \sum_{a=1}^{s} z^{p\lambda_a} \psi^{+a}(z)\tau \otimes \psi^{-a}(z)\tau dz = 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.68}$$

对于 $p=0$ ，这是方程 (1.33)。因此，经过 s 分量玻色化后，对于 $p=0$，我们有 1、2、.....

$$\mathrm{Res}_{z=0} \sum_{j=1}^{s} (-1)^{|\underline{k}+\underline{\ell}|_{j-1}} z^{p\lambda_j + k_j - \ell_j - 2 + 2\delta_{js}} e^{z\cdot(t^{(j)} - \overline{t}^{(j)})} e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(j)}} - \tilde{\partial}_{t^{(j)}})} \tau_{\underline{k}+\underline{e}_s-\underline{e}_j}(t)\tau_{\underline{\ell}+\underline{e}_j-\underline{e}_s}(\overline{t}) = 0, \tag{1.69}$$

其中 $p=0$ 的方程为 (1.34)。与单分量情形一样，这种约化对应于取微分算子 $\mathcal{L}$，而非伪微分算子L。然而，一般而言，微分算子 $\mathcal{L}$ 并不是伪微分算子 L 的幂。对于一般的分拆 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s)$，$p=1$ 的方程 (1.69) 意味着

$$\mathcal{L}=\sum_{j=1}^{s}L^{\lambda_j}C^{(j)}$$

这是一个微分算子，更多详情请参见第 7.1 小节。该算子满足 Lax-Sato 方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t_i^{(j)}}=[(\mathcal{L}^{\frac{i}{\lambda_j}}C^{(j)})_+,\mathcal{L}],\quad i=1,2,\dots,$$

且辅助算子 $C^{(k)}$ 与 $1\le k\le s$ 满足

$$\frac{\partial C^{(k)}}{\partial t_i^{(j)}}=[(\mathcal{L}^{\frac{i}{\lambda_j}}C^{(j)})_+,C^{(k)}],\quad i=1,2,\dots.$$

与单分量 N-KdV 情形一样，τ 函数还满足一个附加约束，即

$$\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial\tau_{\underline{k}}(t)}{\partial t^{(a)}_{\ell\lambda_a}}=c_\ell\tau_{\underline{k}}(t),\quad \text{for } \ell=1,2,\dots,\ \text{with } c_\ell\in\mathbb{C},$$

且对于所有 $\tau_{\underline{k}}(t)$，c_ℓ 都相同。更多详情请参见第 7.1 小节。

对于其他经典李代数 so_N 和 sp_N，相应多分量层级的约化也对应于它们的魏尔群 W 的共轭类。

回想一下，根据 W 关于 so_{2n+1} 和 sp_{2n}（分别为 so_{2n}）的定义之一，该群由区间 $[-n,n]$ 中所有非零整数的置换构成，并满足 $\pi(-j)=-\pi(j)$（此外，满足 $j\pi(j)<0$ 的 j 的数量是 4 的倍数）。每个这样的置换都是互不相交的正循环和负循环的乘积；若循环中出现的 j 满足 $-j$ 不出现（分别为出现），则称该循环为正循环（分别为负循环）。将正循环中所有元素的符号反转后，仍得到一个正循环，称为它的孪生循环。若对负循环进行同样操作，则该循环保持不变。还要注意，负循环的长度总是偶数。

按如下方式将一个分拆对 (λ,μ) 与元素 $w\in W$ 相关联。分拆 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_s)$ 由正循环的长度组成，其中每对孪生循环只计一个。分拆 $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_r)$ 由负循环长度的一半组成。

仿射李代数 $\hat{}so_N$ 的约化层级构造基于 s 对带电费米子场 $\psi^{\pm a}(z)$、$a=1$、……、s，以及 r 个扭曲中性费米子场 $\tilde{\phi}^{s+b}(z)$、$b=1$、……、r。对于 $\hat{}so_{2n+1}$，还存在一个额外的场 $\sigma(z)$，我们不会使用顶点算子对其进行玻色化。原因是——

对应于该场的 Heisenberg李代数的元素不属于 $\hat{}so_{2n+1}$。

更简单的情形是 $\hat{}so_{2n}$，即 $x=d$ 情形（更多详情请参见第7.2小节）。这个仿射李代数是 d_∞ 的子代数，并且双线性恒等式为，见（7.15），

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(\sum_{b=1}^{s} z^{p\lambda_b}\left(\psi^{+b}(z)\otimes\psi^{-b}(z)+\psi^{-b}(z)\otimes\psi^{+b}(z)\right)+ \right. \\ \left. +\sum_{c=s+1}^{r+s} z^{2p\mu_c-1}\tilde{\phi}^c(z)\otimes\tilde{\phi}^c(-z)\right)(\tau\otimes\tau)dz=0,\quad \text{for } p=0,1,2,\dots. \tag{1.70}$$

$p=0$ 的方程是 s,r分量 DKP 层级，而关于 $p=1$、2、.....的方程给出了与分拆对（λ,μ）相关的约化到 $\hat{}so_{2n}$，因此 $\lambda_1+\cdots+\lambda_s+\mu_1+\cdots+\mu_r=n$。注意，在这种情况下，$r$ 总是偶数。s,r-玻色化是同构。

$$\sigma_{s,r}: F_d \xrightarrow{\sim} B_{s,r}=\mathbb{C}[q^{\underline{k}},\theta_1,\dots,\theta_{\frac{r}{2}},t_1^{(a)},t_2^{(a)},\dots,t_1^{(b)},t_3^{(b)},\dots \mid 1\le a\le s<b\le r+s],$$

其中 $\underline{k}=(k_1,\dots,k_s)\in\mathbb{Z}^s$，且 θ_j 是反对易变量。将 $\sigma_{s,r}$ 应用于此表达式，并使用用于带电自由费米子场的顶点算子 (1.32)，以及（参见 (1.42)）

$$\sigma_{s,r}\tilde{\phi}^{s+b}(z)\sigma_{s,r}^{-1}=R_b e^{z\circ t^{(s+b)}}e^{-2(z^{-1}\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+b)}})},\quad R_b=\mathrm{const}\left(\frac{\partial}{\theta_{\left[\frac{b}{2}\right]}}-(-1)^b\theta_{\left[\frac{b}{2}\right]}\right) \tag{1.71}$$

对于扭曲中性自由费米子场，我们以与$x=a$ 情形类似的方式，得到关于 τ 函数（族）的相当复杂的双线性恒等式 (7.16)。

在 $x=b$ 情形下，我们可以将仿射李代数 $\hat{}so_{2n+1}$ 嵌入 b_∞ 和 d_∞ 中，从而得到该仿射李代数的不同 1级表示。对于 d_∞ 嵌入，其双线性恒等式与表达式 (1.70) 类似，但左端还需加上以下一项：$\sum_j \sigma_j\tau\otimes\sigma_{p-j}\tau$.然后应用$\sigma_{s,\ r}$ 便得到双线性恒等式 (7.29)。这里，附加的场 $\sigma(z)$ 被玻色化为反对易变量 $\sigma_{-j}=\xi_j$ 和 $\sigma_j=\frac{\partial}{\partial\xi_j}$、$j>0$ 的生成级数，其中若 r 为奇数，则 $j\in\mathbb{Z}$；若 r 为偶数，则 $j\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$。$\sigma_0$ 是特殊的，它是算子R_{r+1}。因此，在这种情况下，τ 函数（或者更确切地说，τ 函数族）不仅依赖于 $t_i^{(c)}$（对于 $c=1$、.....、$r+s$），还依赖于这些 ξ_j。嵌入 b_∞ 会导出与 (7.29) 类似的双线性恒等式。

用这些场构造与$\hat{}so_N$ 相关的约化层次，暗示了一个（$2s+r$）×（$2s+r$）矩阵值伴随算子。然而，如果 $r>1$，这个伴随算子不可逆。我们通过考察某个主子式来解决这个问题，并在双线性恒等元中将反对易变量 ξ_j 以及时间 $t_k^{(s+b)}$（对于 $b=1,...,s$ 或对于 $b=1,\dots,s-1$）都置为零。这导致了两种不同的方法：一种采用 $2s\times 2s$ 矩阵 dressing算子，另一种采用一个（$2s+1$）×（$2s+1$）矩阵值伴随算子。由于第二种

第一种相当复杂，我们将在本引言中仅概述第一种；关于第二种以及第一种的更多细节，请参阅第 4.4 节和第 7.2–7.4 小节。

在第一种方法中，对于 $x = b$ 和 d 情形，我们从 $p = 0$ 的双线性恒等式 (1.70) 出发（以及 $\hat{}so_{2n+1}$中的双线性恒等式，其中有额外场$\sigma(z)$），仅使用与 2s 个带电场 $\psi^{\pm a}(a)$、$a = 1$、.....、s相关的项，以类似于 $x = a$ 情形的方式构造 $2s \times 2s$ 矩阵 dressing 算子 $P(t, \partial)$。相应的 Lax 算子 L 以及辅助算子 D^j 和 E^j 分别由 dressing 算子 $P(\sum_{j=1}^{s}{}_{s+j})\partial$、$E_{jj} - E_{s+j,\,s+j}$和 $E_{jj} + E_{s+j,\,s+j}$伴随得到。约化 Lax算子 $\mathcal{L}$ 由分拆 λ确定，即：

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} L^{\lambda_j} E^j,$$

它与辅助算子一起满足 Lax-Sato 方程 s

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_j^{(a)}} = [(\mathcal{L}^{\frac{j}{\lambda_a}} D^a)_+, \mathcal{L}], \quad \frac{\partial D^k}{\partial t_j^{(a)}} = [(\mathcal{L}^{\frac{j}{\lambda_a}} D^a)_+, D^k], \quad \frac{\partial E^k}{\partial t_j^{(a)}} = [(\mathcal{L}^{\frac{j}{\lambda_a}} D^a)_+, D^k].$$

如果 $\mu \neq \emptyset$, $\mathcal{L}$ 不再是微分算子，而是约束 KP 型算子，即其积分部分具有某种简单形式（如下所示），那么分拆 μ决定了该算子的积分部分。对于 $\hat{}so_{2n}$，我们得到

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ + \sum_{i=1}^{r} \sum_{n=0}^{2\mu_i} W^n E_{ii} \partial^{-1} \tilde{W}^{2\mu_i - n},$$

其中 W^j（分别是 $\tilde{W}^j$）是某些依赖于 $t_i^{(a)}$ 的 $2s \times r$（分别是 $r \times 2s$）矩阵函数，对于 $a = 1$, . . ., s, $i = 1, 2, \ldots$. 注意，如果 $\mu = \emptyset$，那么 $\mathcal{L}$ 没有积分部分，并且 $\mathcal{L}$ 是一个微分算子。

对于 $\hat{}so_{2n+1}$，有额外场 $\sigma(z)$。该场会在算子的积分部分中引入一些额外项，详情见第 7.3–7.4 小节。

由于李代数 sp_{2n} 的魏尔群与 so_{2n+1}的魏尔群相同，因此向仿射李代数 $\hat{}sp_{2n}$ 的约化与 $\hat{}so_{2n+1}$的情形一样，取决于将 n 分解为两个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$（对应正循环）和 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$（对应负循环），使得 $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s + \mu_1 + \cdots + \mu_r$。$\mu$ 的每个部分都与一个中性辛玻色场 $b^c(z)$、$c = s + 1$、...、$s + r$ 相关，见 (1.10) 和 (1.11)。λ 的每个部分都与一对带电自由辛玻色子 $b^{\pm a}(z)$、$a = 1$、...、s 相关。这些场满足

$$[b^{\pm a}(z), b^{\pm c}(w)]_- = 0, \quad [b^{+a}(z), b^{-c}(w)]_- = \delta_{ac}\delta(z - w) \quad a, c = 1, \ldots, s.$$

此情形下的双线性恒等式为（见（7.58））：

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{z=0} \Big\{ \sum_{a=1}^{s} z^{p\lambda_a} \left(b^{-a}(z)\tau \otimes b^{+a}(z)\tau - b^{+a}(z)\tau \otimes b^{-a}(z)\tau \right) + \\ + \sum_{c=s+1}^{r+s} z^{2p\mu_{c-s}} b^c(z)\tau \otimes b^c(-z)\tau \Big\} dz = 0. \end{aligned} \tag{1.72}$$

注意，这与方程（1.70）类似，但此处费米子场 $\psi^{\pm a}(z)$、$\phi^{c}(z)$ 分别被辛玻色子场 $b^{\pm a}(z)$、$b^{c}(z)$ 取代。仅针对 $p=0$ 的特殊情形，即 $s=1$ 和 $r=0$（分别为 $r=0$ 和 $s=1$），已在 [1]（分别为 [26]）中研究。关于这些场的玻色化，请参阅第 3.7.2 小节。这些场依赖于对易时间 $t_k^{(a)}$（对应 $1\le a\le s$ 和 $k=1$、2、.....）以及反对易变量 ξ_ℓ^a、$\ell\in\mathbb{Z}$。同样，存在一整组通过双线性恒等式相互联系的 τ 函数。与单分量 $x=c$ 情形一样，我们聚焦于 τ_0，并构造一个 $(2s+r)\times(2s+r)$ 矩阵首一包络算子 $P(t,\partial)$。这次 P 可逆，我们通过对算子进行伴随变换，构造 Lax 算子（见小节 4.4）L 以及辅助算子 C^b 和 D^a

$$\left(\sum_{a=1}^{s}(E_{aa}-E_{s+a,s+a})\,\partial+\sum_{c=s+1}^{s+r}E_{s+c,s+c}\right)\partial,\ \text{and}\ \ E_{bb},\ E_{aa}-E_{s+a,s+a},$$

由 P 得到。约化Lax算子 $\mathcal{L}$ 是通过对算子进行 dressing 得到的算子

$$\sum_{a=1}^{s}\left(E_{aa}+(-1)^{\lambda_a}E_{s+a,s+a}\right)\partial^{\lambda_a}+\sum_{c=s+1}^{s+r}E_{s+c,s+c}\partial^{2\mu_{c-s}}.$$

它满足以下 Lax-Sato 方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t_k^a}=[(\mathcal{L}^{\frac{k}{\lambda_a}}D^a)_+,\mathcal{L}],\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t_k^c}=[(\mathcal{L}^{\frac{k}{2\mu_{c-s}}}C^{s+c})_+,\mathcal{L}],\quad a=1,\dots s,\ c=s+1,\dots,s+r,$$

辅助算子的 Lax 方程为

$$\frac{\partial D^b}{\partial t_k^a}=[(\mathcal{L}^{\frac{k}{\lambda_a}}D^a)_+,D^b],\quad \frac{\partial D^b}{\partial t_k^c}=[(\mathcal{L}^{\frac{k}{2\mu_{c-s}}}C^{s+c})_+,D^b],$$
$$\frac{\partial C_{s+d}}{\partial t_k^a}=[(\mathcal{L}^{\frac{k}{\lambda_a}}D^a)_+,C_{s+d}],\quad \frac{\partial C_{s+d}}{\partial t_k^c}=[(\mathcal{L}^{\frac{k}{2\mu_{c-s}}}C^{s+c})_+,C_{s+d}].$$

Lax 算子 $\mathcal{L}$ 满足约束

$$\mathcal{L}^*=M\mathcal{L}M,\quad \text{where } M=\sum_{a=1}^{s}(E_{a,s+a}+E_{s+a,a})+\sum_{b=1}^{r}E_{2s+b,2s+b}.$$

注意，$\mathcal{L}=\mathcal{L}^*$，如果 $\lambda=\emptyset$。

下面介绍本文的内容。

在第 2 节中，我们回顾经典有限维李代数、相应的仿射李代数，以及记作 a_∞、b_∞、c_∞ 和 d_∞ 的无限矩阵李代数的中心扩张。通过考察 $\mathbb{C}^\infty$ 与 $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ 之间的向量空间同构，我们将每个经典仿射李代数构造为 a_∞、b_∞、c_∞ 或 d_∞ 的子代数。在第2.5小节中，我们为扭曲仿射李代数建立了类似的结果。本节基于 [13]，第 7 章。

在第 3 节中，我们定义了 Clifford（分别为 Weyl）代数，以及李代数 x_∞ 在 $x = a$、b、d （分别为 c）上的相应自旋（分别为 Weyl）模 F_x ，其层数为 1（分别为 $-\frac{1}{2}$）。这些 Clifford（分别为 Weyl）代数生成元的生成级数称为（自由）费米子（分别为玻色子）场，它们可通过顶点算子构造。由于 x_∞ 的自然基的生成级数可表示为两个此类场的正规序乘积，我们得到了这些李代数的顶点算子实现，称为 F_x 的玻色化。

在第 3.5 节和第 3.7 节中，我们构造了 F_x的多分量玻色化。这一思想由 Date、Jimbo、Kashiwara 和Miwa 在 20世纪80年代的一系列论文 [5]-[8] 中提出，并在 [15] 和 [16]中得到进一步发展。据我们所知， c_∞的构造是新的。注意，虽然对于 $x = a$ ，每个正整数 s都存在一个 s分量的玻色化，但对于 $x = b$、c 和 d ，每一对非负的 s 和 r $s + r \neq 0$都存在一个（s、r）分量的玻色化。

在第4节中，我们利用这些玻色化来定义作用于 τ 函数 $\tau \in F_x$ 的 KP型方程层级，称为 $x = a$的 KP 层级、b的 BKP层级、d 的DKP 层级（分别称为 c 的 CKP 层级），这些定义是用相应Clifford 代数（分别为 Weyl 代数）的自由场表述的。利用多分量玻色化，我们得到 τ 函数的Hirota 双线性方程。利用 [27], [5]-[8], [15] 和 [16], 的思想，我们将这些方程转化为某些伪微分算子的Lax-Sato 方程。再次强调， $x = c$ 的构造是新的。文献中存在各种CKP层级。对于$(s, r) = (1,0)$（分别为 $= (0,1)$），我们的层级与 [1] （分别为[26]）中给出的层级一致。 [21], [2]和 [3] 中描述的 CKP层级（另见 [17]）则有所不同。这些作者研究的是 KP 层级的某种限制，该限制与某个对合下的不动点有关。这给出了KP层级的特殊解，这些特殊解在该对合下保持不变。当所有偶数流都设为零时，CKP τ 函数就是这个特殊KP τ 函数的平方根。特别地，他们的 c_∞ 表示的层数为1，而我们在 F_c 中对 c_∞ 的（亚辛）表示的层数为 $-\frac{1}{2}$。

在第 5 节中，我们开始讨论 KP型层级的约化，这些约化对应于将 F_x 中的表示限制到李代数 x_∞ $(x = a, b, c, d)$ 的经典仿射子代数 $\hat{\mathfrak{g}}$，其中 $\mathfrak{g}$ 是 X 型的经典李代数。此类最简单的约化此前已在 [5]-[8] 中研究过。我们的主要观察是，对于 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群中的任意共轭类，都可以自然地关联一个这样的约化。为此，对于任意单李代数 $\mathfrak{g}$，我们采用 [19] 中引入的以下构造。令 $\mathfrak{h}$ 为其 Cartan子代数，W 为其魏尔群，并令 $(\cdot|\cdot)$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的非零不变双线性形式。取 w 属于 W 的一个共轭类，并令 $\tilde{w}$ 为 w 的一个提升，使得 $\tilde{w}$ 在 G 中与 σ 共轭，其中 σ 是 N 阶的、形如 $\sigma = e^{2\pi\sqrt{-1}h_w}$ 的元素，而 $h_w \in \mathfrak{h}$ 与 w 在 $\mathfrak{h}$中的不动点集正交。令 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\bar{j}\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\bar{j}}$ 为 $\mathfrak{g}$的 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 分次，由 σ 的特征子空间定义；并令 $L(\mathfrak{g}, \sigma) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} t^j \mathfrak{g}_j \bmod N \subset \mathfrak{g}[t, t^{-1}]$ 为相应的等变环路代数。它通过映射 $t^j g \mapsto g(j) := t^{-\operatorname{ad} h_w}(t^{\frac{j}{N}} g)$ 同构于环路代数 $\mathfrak{g}[t, t^{-1}]$，其中 $g \in \mathfrak{g}_j \bmod N$。然后，子代数 $H_w = \operatorname{span}\{h(j) | h \in \mathfrak{h}, j \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathfrak{g}[t, t^{-1}]$ 的极大阿贝尔子代数。令 Z_w 为 H_w 在环群 $G(\mathbb{C}(t, t^{-1}))$ 中的中心化子。 [19] 的主要结果是：$\hat{\mathfrak{g}}$ 的 1级表示相对于中心扩张 H_w 是不可约的。

ˆ ˆ 和 Z_w，前提是 $\mathfrak{g}$ 为单李代数。由于 H_w 是海森堡李代数，这引出了表示的“协调”，以及与 w 的共轭类相关的 ˆ$\mathfrak{g}$ 的顶点算子构造。本节回顾这一构造的显式形式，该构造已在 [22] 和 [23], 中针对 A 和 D 类型的 $\mathfrak{g}$ 给出，也已在 [24], 中针对该类型的扭仿射李代数给出，并在 [25] 中针对 B 类型的 $\mathfrak{g}$ 给出。本节还给出 $\mathfrak{g}$ 的 C 类型 $\mathfrak{g}$ 的亚辛表示（级别为 $-\frac{1}{2}$）的顶点算子构造。这一构造似乎是新的。

作为第 5 节结果的一个附带应用，我们在第 6 节构造了一个映射，将 W 的共轭类映到所有经典李代数 $\mathfrak{g}$的幂零轨道上。对于类型 C，它与 Lusztig 的映射一致；但对于类型 B和 D，则有所不同。

在第 7 节中，我们系统地描述了 KP、DKP、BKP 和 CKP 层级向仿射李代数 ˆ$\mathfrak{g}$ （类型为 A、 D、 B 和 C）的约化；这些仿射李代数与 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群的每个共轭类相关联。我们得到了相应的 τ 函数方程，并构造了相关的缀饰算子、Lax 算子和辅助算子。类型为 A 和 C的李代数对应的 Lax 算子是矩阵微分算子；类型为 B 和 D 的李代数对应的 Lax 算子则是约束 KP 型矩阵伪微分算子。我们证明，这些 Lax 算子和辅助算子满足某些 Lax-Sato 方程；对于 $x = a$ 情形，这些方程等价于关于 τ 函数的双线性方程。

尽管上述某些构造（ c型的情形除外）多年来已为人所知，但此前尚未对与这些经典仿射李代数相关的层级作出系统描述。（ a型仿射李代数的情形曾在 [15] 中简要提及。）

最后，在第 8 节中，我们为 A 型和 D型扭曲仿射李代数建立了这一构造。在第 7 节和第 8 节中，某些与特定共轭类相关的情形早已为人所知，但据我们所知，此前尚未对所有情形作出系统描述。

在引言结尾，我们想提出关于与泊松顶点代数 $W(\mathfrak{g}, f)$ 相关的双哈密顿演化偏微分方程层级的解的猜想（例如参见 [9]），以及 w约化 XKP 层级的 τ 函数；其中 $\mathfrak{g}$ 是 X=A、B、C、D 型的经典李代数，而 w 是 $\mathfrak{g}$的魏尔群 W 中某个共轭类的代表元。

猜想1.1令 F 为从 W 的共轭类集合到 $\mathfrak{g}$的幂零轨道的映射，该映射构造于第*6*章，并令 $W(\mathfrak{g}, F(w))$ 为与 $\mathfrak{g}$ 及 $F(w)$的轨道相关联的经典仿射 W代数。那么，在第*7*章构造的 w-约化 *XKP* 层级的 *τ*函数给出了与泊松顶点代数 $W(\mathfrak{g}, F(w))$相关联的双哈密顿层级的解。

这一猜想对于约化 AKP=KP 层级的有效性已在 [4]中得到证明。

对于任意单连通单李代数 $\mathfrak{g}$ 及其幂零元 f（更准确地说，是其伴随轨道），有一个相关猜想如下:

猜想 1.2 W（$\mathfrak{g}$, f）层级的解可以由 w实现的基本表示的最高权向量轨道中的元素得到

$\mathfrak{g}\hat{}$的，该构造于 *[19],* 其中， f 是 w 在 ***Kazhdan-Lusztig***映射下的像（见 *[31]*）。

全文中，基域为 $\mathbb{C}$。

2 李代数

本节基本遵循 [13],第7章。

2.1 经典李代数

我们将由复数 $n \times n$矩阵组成、括号为 $[a, b] = ab - ba$的 gl_n 上的李代数记作 gl_n。其基由矩阵 e_{ij}构成，这些矩阵在第i行第 j列处为 1，其余位置均为 0。

设 v_j，其中 $1 \leq j \leq n$ 为 $\mathbb{C}^n$的标准基向量。考虑 $\mathbb{C}^n$上的以下对称双线性形式:

$$(v_i, v_j)_{so_n} = \delta_{i+j,n+1}. \tag{2.1}$$

李代数 so_n 是 gl_n的子代数，由满足以下条件的元素 $a \in gl_n$ 组成

$$(av, w)_{so_n} = -(v, aw)_{so_n}. \tag{2.2}$$

元素

$$e_{ij} - e_{n+1-j,n+1-i}, \qquad 1 \leq i, j \leq n, \tag{2.3}$$

张成 so_n。注意，这种元素的迹为零，因此 so_n 是 sl_n的子代数。为后续使用，我们对 $1 \leq i$、$j \leq \frac{n}{2}$ 引入

$$\begin{aligned} e_{ij}^{+-} &= e_{ij} - e_{n+1-j,n+1-i}, \\ e_{ij}^{++} &= -e_{ji}^{++} = e_{i,n+1-j} - e_{j,n+1-i}, \\ e_{ij}^{--} &= -e_{ji}^{--} = e_{n+1-i,j} - e_{n+1-j,i}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

当 n为奇数时，还可引入

$$e_i^{+} = e_{i,\frac{n+1}{2}} - e_{\frac{n+1}{2},n+1-i}, \quad e_i^{-} = e_{n+1-i,\frac{n+1}{2}} - e_{\frac{n+1}{2},i}. \tag{2.5}$$

考虑 $\mathbb{C}^{2n}$上的以下反对称双线性形式:

$$(v_i, v_j)_{sp_{2n}} = (-1)^i \delta_{i+j,2n+1}, \tag{2.6}$$

那么，满足条件 (2.2) 的元素 $a \in gl_{2n}$ （其中我们将对称双线性形式 $(\cdot,\cdot)_{so_n}$ 替换为反对称双线性形式 $(\cdot,\cdot)_{sp_{2n}}$）构成子代数 sp_{2n}。这些元素

$$(-1)^j e_{ij} - (-1)^i e_{2n+1-j,2n+1-i}, \qquad 1 \leq i, j \leq 2n, \tag{2.7}$$

跨度 sp_{2n}。同样， sp_{2n} 是 sl_{2n} 的子代数。我们还为 $1 \leq i, j \leq n$ 引入

$$\begin{aligned} e_{ij}^{+-} &= e_{ij} - (-1)^{i+j} e_{2n+1-j,2n+1-i}, \\ e_{ij}^{++} &= (-1)^{i+j} e_{ji}^{++} = e_{i,2n+1-j} - (-1)^{i+j+1} e_{j,2n+1-i}, \\ e_{ij}^{--} &= (-1)^{i+j} e_{ji}^{--} = e_{2n+1-i,j} - (-1)^{i+j+1} e_{2n+1-j,i}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

对于经典李代数 $\mathfrak{g}$，我们选择如下非退化对称不变双线性形式：

$$(g|h) = \gamma_x \mathrm{Tr}\, \mathrm{gh}, \quad \mathrm{g}, \mathrm{h} \in \mathfrak{g}, \tag{2.9}$$

其中， $x = a$、 b、 c 或 d分别对应于情形 $\mathfrak{g} = gl_n$、 so_{2n+1}、 sp_{2n} 或 so_{2n}，并且

$$\gamma_x = 1 \quad \text{if } x = a \text{ or } c, \text{ and } \gamma_x = \frac{1}{2} \text{ if } x = b \text{ or } d.$$

这是 $\mathfrak{t}$ 通常的选择是将长根的长度平方取为 2。

经典李代数 $\mathfrak{g}$ 的标准 *Cartan*子代数 $\mathfrak{h}$ 由 $\mathfrak{g}$ 中所有对角矩阵构成。关于双线性形式 (2.9)，它以如下元素 $(1 \leq i \leq n)$ 为正交归一基：

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} = gl_n: &\quad \epsilon_i = e_{ii}, \\ \mathfrak{g} = so_{2n+1}: &\quad \epsilon_i = e_{ii} - e_{2n+2-i,2n+2-i}, \\ \mathfrak{g} = sp_{2n}: &\quad \epsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{ii} - e_{2n+1-i,2n+1-i}), \\ \mathfrak{g} = so_{2n}: &\quad \epsilon_i = e_{ii} - e_{2n+1-i,2n+1-i}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

有如下 $\mathfrak{g}$ 的根空间分解：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \text{where } \mathfrak{g}_\alpha = \{g \in \mathfrak{g} \,|\, [h, g] = (\alpha, h)g \text{ for } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Eve根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 是 1 维的，因此有如下的根集 Δ ：

$$\begin{aligned} gl_n: &\quad \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j) \,|\, 1 \leq i < j \leq n\}, \\ so_{2n+1}: &\quad \{\pm\epsilon_k,\ \pm(\epsilon_i - \epsilon_j),\ \pm(\epsilon + \epsilon_j) \,|\, 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i < j \leq n\}, \\ sp_{2n}: &\quad \{\pm 2\epsilon_k,\ \pm(\epsilon_i - \epsilon_j),\ \pm(\epsilon + \epsilon_j) \,|\, 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i < j \leq n\}, \\ so_{2n}: &\quad \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j),\ \pm(\epsilon + \epsilon_j) \,|\, 1 \leq i < j \leq n\}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

以及以下根空间：

$$\begin{aligned} gl_n: &\quad \mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} = \mathbb{C} e_{ij}; \\ so_{2n+1}: &\quad \mathfrak{g}_{\epsilon_i} = \mathbb{C} e_i^+,\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i} = \mathbb{C} e_i^-,\ \mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} = \mathbb{C} e_{ij}^{+-},\ \mathfrak{g}_{\epsilon_i + \epsilon_j} = \mathbb{C} e_{ij}^{++},\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i - \epsilon_j} = \mathbb{C} e_{ij}^{--}; \\ sp_{2n}: &\quad \mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} = \mathbb{C} e_{ij}^{+-},\ \mathfrak{g}_{\epsilon_i + \epsilon_j} = \mathbb{C} e_{ij}^{++},\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i - \epsilon_j} = \mathbb{C} e_{ij}^{--}; \\ so_{2n}: &\quad \mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} = \mathbb{C} e_{ij}^{+-},\ \mathfrak{g}_{\epsilon_i + \epsilon_j} = \mathbb{C} e_{ij}^{++},\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i - \epsilon_j} = \mathbb{C} e_{ij}^{--}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

回顾，魏尔群 W 是 $\mathfrak{g}$ 的 $GL(\mathfrak{h})$的子群，由所有反射 r_α、 $\alpha \in \Delta$ 生成。 W 的元素通过置换这些基向量而作用于由（2.10）给出的Cartan子代数的正交归一基，对于 $\mathfrak{g} = gl_n$而言如此。对于$\mathfrak{g} = so_{2n+1}$ 或 sp_{2n}，魏尔群的元素置换这些基向量，并且还改变其中任意数量基向量的符号。对于 $\mathfrak{g} = so_{2n}$，符号变化仅限于偶数个。因此，魏尔群的共轭类由 $\mathfrak{g} = gl_n$的循环类型参数化，而其他 $\mathfrak{g}$的共轭类则由正循环类型和负循环类型参数化；对于 $\mathfrak{g} = so_{2n}$，负循环的数量为偶数。

2.2 环代数与仿射李代数

设 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维李代数。与之对应的环代数定义为李代数 $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$，其括号为

$$[g \otimes t^k, h \otimes t^\ell] = [g, h] \otimes t^{k+\ell}, \quad g, h \in \mathfrak{g},\ k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

通常我们用 $t^k g$ 代替 $g \otimes t^k$。给定 $\mathfrak{g}$ 上的一个非退化对称不变双线性形式 $(\cdot|\cdot)$，可以构造 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的一个李代数中心扩张 $\hat{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}K$，其中心为一维空间 $\mathbb{C}K$，括号为

$$[t^k g + \lambda K, t^\ell h + \mu K] = t^{k+\ell}[g, h] + k\delta_{k,-\ell}(g|h)K.$$

本文中，我们将令 $\mathfrak{g}$ 为以下经典李代数之一： gl_n （或 sl_n）、sp_{2n}、 so_{2n+1} 和 so_{2n}，并在 $\mathfrak{g}$ 上选取双线性形式为 (2.9)。采用这一双线性形式 $(\cdot|\cdot)$ 的李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 称为 仿射李代数。

我们可以通过自同构 σ 对这一构造进行扭曲。设 σ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个有限阶自同构，阶为 N，即 $\sigma^N = id$，那么这就定义了 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\overline{j} \in \mathbb{Z}_N} \mathfrak{g}_{\overline{j}}$的一个 $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$-分次，定义为 $\sigma(g_{\overline{j}}) = e^{\frac{2\pi j}{N}} g_{\overline{j}}$，其中 $g_{\overline{j}} \in \mathfrak{g}_{\overline{j}}$。

$\hat{}$ 将扭曲仿射李代数 $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ 定义为 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的如下子代数：

$$\hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma) = \mathbb{C}K \oplus \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} t^j \mathfrak{g}_{j \bmod N}. \tag{2.13}$$

$\hat{}$ 对任意内自同构 σ，李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 和 $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ 都同构，但对于外自同构则不然（参见 [13], 第 8 章）。令 $J_n = \sum_{k=1}^n e_{j,\ n+1-j} \in GL_n$和 O 分别为 v_n 和 v_{n+1} 的转置矩阵。定义 $\sigma \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ 为

$$\begin{aligned} &\sigma(g) = -\operatorname{Ad} J_n(g^t) = -J_n g^t J_n, \quad \text{for } g \in \mathfrak{g} = gl_n \quad \text{and} \\ &\sigma(g) = \operatorname{Ad} O(g) = OgO, \quad \text{for } g \in \mathfrak{g} = so_{2n}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

在这两种情况下， σ 都是阶为 2 的外自同构，因此我们得到相应的扭曲仿射李代数 $\hat{\mathfrak{g}}^{(2)} := \hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma)$，它与 $\hat{\mathfrak{g}}$ 不同构。

注意，如果 $\mathfrak{g} = gl_n$， σ（e_{ij}）$= -e_{n+1-j,\ n+1-i}$，因此不动点集（gl_n）$_{\overline{0}}$ 恰好等于 so_n，如（2.3）中所示，即

$$\begin{aligned} &e_{ij} - e_{n+1-j,n+1-i} \in (gl_n)_{\overline{0}}, \quad \text{and} \\ &e_{ij} + e_{n+1-j,n+1-i} \in (gl_n)_{\overline{1}}, \quad 1 \le i, j \le n. \end{aligned} \tag{2.15}$$

对于 $\mathfrak{g} = so_{2n}$, $e_{ij} - e_{2n+1-j,\ 2n+1-i} \in (so_{2n})_{\overline{0}}$，对于 $1 \le i$、$j \le 2n$，其中 i、$j \ne n$ 或 $n+1$ 均成立。并且

$$\begin{aligned} &e_{in} - e_{n+1,2n+1-i} + e_{i,n+1} - e_{n,2n+1-i} \in (so_{2n})_{\overline{0}}, \\ &e_{in} - e_{n+1,2n+1-i} - e_{i,n+1} + e_{n,2n+1-i} \in (so_{2n})_{\overline{1}}, \qquad 1 \le i \le 2n, \end{aligned} \tag{2.16}$$

特别是 $e_{n,n} - e_{n+1,n+1} \in (so_{2n})_{\overline{1}}$。因此 $(so_{2n})_{\overline{0}} = so_{2n-1}$。

2.3 经典无限矩阵代数

令$\overline{a}_\infty$ 为由无限矩阵 $(a_{ij})_{i,\ j\in\mathbb{Z}}$ 组成的李代数，满足 $a_{ij} \in \mathbb{C}$，$a_{ij} = 0$ 当 $|i-j| >> 0$时。这个李代数具有非平凡的中心扩张$a_\infty = \overline{a}_\infty \oplus \mathbb{C}K$，其括号

$$[a + \lambda K, b + \mu K] = ab - ba + \omega(a,b)K, \quad a, b \in \overline{a}_\infty, \tag{2.17}$$

其中 ω 是一个二阶余循环，详述如下。设 E_{ij} 为一个矩阵，其 (i,j)-th 项为 1，其余各项均为 0，则 ω 由下式给出。

$$\omega(E_{ij}, E_{ji}) = -\omega(E_{ji}, E_{ij}) = 1 \quad \text{if } i \le 0, j > 0, \quad \text{and } \omega(E_{ij}, E_{k\ell}) = 0 \text{ otherwise}, \tag{2.18}$$

该映射通过双线性性扩展到整个 $\overline{a}_\infty$。李代数 a_∞ 在列向量空间 $\mathbb{C}^\infty = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}e_j$ 上自然地作用为,

$$E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i, \quad K = 0,$$

其中，e_j 是一个列向量，j位上的元素为 1，其余元素均为 0。

我们通过在 $\mathbb{C}^\infty$ 上引入如下双线性形式来定义另外两个经典无限矩阵代数$\overline{b}_\infty$、$\overline{c}_\infty$ 和 $\overline{d}_\infty$（参见(2.1)和(2.2)）

$$(e_i, e_j)_b = \delta_{i,\ -j}, \quad (e_i, e_j)_c = (-1)^i \delta_{i,\ 1-j}, \quad \text{和 } (e_i, e_j)_d = \delta_{i,1-j}, \qquad i, j \in \mathbb{Z}. \tag{2.19}$$

那么对于 $x = b$、c、d

$$\overline{x}_\infty = \{g \in \overline{a}_\infty \,|\, (gv, w)_x = -(v, gw)_x \text{ for all } v, w \in \mathbb{C}^\infty\},$$

其中心扩张是 a_∞ 的子代数:

$$x_\infty = \overline{x}_\infty \oplus \mathbb{C}K,$$

其中括号由 (2.17) 给出。

在 b、c、d 情形下，元素 (i、$j \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} B_{ij} &:= E_{-i,j} - E_{-j,i}, \\ C_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &:= (-1)^j E_{-i,j} - (-1)^i E_{1-j,1+i}, \\ D_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &:= E_{-i,j} - E_{1-j,1+i}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

分别张成相应的李代数 $\overline{x}_\infty$（若允许无穷和）。李代数 $\overline{a}_\infty$ 具有标准的 三角分解

$$\overline{a}_\infty = \overline{a}_\infty^- \oplus \overline{a}_\infty^0 \oplus \overline{a}_\infty^+,$$

由严格下三角、对角和严格上三角矩阵构成的子代数之和。它通过将 $\mathbb{C}K$ 加到 $\overline{a}_\infty^0$ 上，在 a_∞ 上诱导出一个分解。这一三角分解在所有 x_∞ 上也诱导出一个分解。

2.4 仿射李代数作为经典无限矩阵李代数的子代数

设 $\mathfrak{g} = gl_n$，则环路代数 $\tilde{gl}_n$ 自然作用于环空间 $\mathbb{C}[t, t^{-1}]^n = \mathbb{C}^n \otimes C[t, t^{-1}]$。利用 $\mathbb{C}^n$ 的标准基 v_1、v_2、$\ldots v_n$，我们可以如下将此环空间与 $\mathbb{C}^\infty$ 识别：

$$e_{kn+j} = t^{-k} v_j, \quad k \in \mathbb{Z},\ 1 \le j \le n, \tag{2.21}$$

从而，$t^k e_{ij} \in \tilde{gl}_n$ 中的一个元素可与 $\overline{a}_\infty$ a中的一个元素对应 s

$$t^k e_{ij} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} E_{(\ell-k)n+i, \ell n+j}, \tag{2.22}$$

˜ ˆ 产生一个嵌入 $gl_n \subset \overline{a}_{\infty\circ}$ 这诱导出一个嵌入 $gl_n \subset a_{\infty\circ}$ （容易验证余循环相匹配。）

令 $\mathfrak{g} = so_{n\circ}$ 于是，环路代数 $\tilde{so}_n$ 自然作用于环空间 $\mathbb{C}[t, t^{-1}]^n$。我们可以使用同一对应 (2.22) 获得

$$\begin{aligned} t^k e_{ij} - t^k e_{n+1-j, n+1-i} &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} E_{(\ell-k)n+i, \ell n+j} - \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} E_{(\ell-k+1)n+1-j, (\ell+1)n+1-i} \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(E_{(\ell-k)n+i, \ell n+j} - E_{-\ell n+1-j, -(\ell-k)n+1-i} \right) \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} D_{-(\ell-k)n-i+\frac{1}{2}, \ell n+j-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

由于 (2.20)，这使得 $\tilde{so}_n$ 成为 $\overline{d}_\infty$ 的子代数。该嵌入在 d_∞ 中诱导出仿射李代数 ˆ so_n 的一个嵌入，其余循环为 $\gamma_d \omega$，其中 $\gamma_d = \frac{1}{2}$，而 ω 是余循环 (2.18) 的限制。

x_∞ 的三角分解在相应的仿射子代数上诱导出标准三角分解 [13] 。

我们还可以在 $n = 2m+1$ 为奇数时，选择不同于（2.21）的同一对应，即通过以下方式将 $\mathbb{C}[t, t^{-1}]^{2m+1}$ 与 $\mathbb{C}^\infty$ 同一对应

$$e_{k(2m+1)+j-m-1} = t^{-k} v_j, \quad k \in \mathbb{Z},\ 1 \le j \le 2m+1. \tag{2.24}$$

于是我们得到同一对应

$$\begin{aligned} &t^k e_{ij} - t^k e_{2m+2-j, 2m+2-i} = \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(E_{(\ell-k)(2m+1)+i-m-1, \ell(2m+1)+j-m-1} - E_{(\ell-k)(2m+1)+m+1-j, \ell(2m+1)+m+1-i} \right) \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(E_{(\ell-k)(2m+1)+i-m-1, \ell(2m+1)+j-m-1} - E_{-\ell(2m+1)+m+1-j, (k-\ell)(2m+1)+m+1-i} \right) \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} B_{-(\ell-k)(2m+1)-i+m+1, \ell(2m+1)+j-m-1}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

由（2.20）可知，这使得 $\tilde{so}_{2m+1}$ 成为 $\overline{b}_\infty$的子代数。回想一下， $\gamma_b = \frac{1}{2}$。这个嵌入诱导出一个嵌入：将带有“非标准”余循环的 $\hat{}so_{2m+1}$ 嵌入 b_∞ 中

$$\frac{1}{2}\omega(t^k a, t^\ell b) = \frac{k}{2}\delta_{k,-\ell}\left(\mathrm{Tr}(ab) + \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Tr}((e_{ii} - e_{2m+2-i,2m+2-i})[a,b])\right). \tag{2.26}$$

由于第二项是平凡余循环，这个非标准余循环等价于$\frac{1}{2}\omega$。

最后，设 $\mathfrak{g} = sp_{2n}$。将 n 替换为 $2n$后，同一对应 (2.22) 给出以下同一对应，

$$\begin{aligned}(-1)^j t^k e_{ij} - (-1)^i t^k e_{2n+1-j,2n+1-i} &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}(-1)^j E_{2(\ell-k)n+i,2\ell n+j} - \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}(-1)^i E_{2(\ell-k+1)n+1-j,2(\ell+1)n+1-i}\\ &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}((-1)^j E_{2(\ell-k)n+i,2\ell n+j} - (-1)^i E_{-2\ell n+1-j,-2(\ell-k)n+1-i})\\ &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} C_{-2(\ell-k)n-i+\frac{1}{2},2\ell n+j-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

由 (2.20) 可知，这使得 $\tilde{sp}_{2n}$ 成为 $\overline{c}_\infty$的子代数。此嵌入诱导出一个从 $\hat{}sp_{2n}$ 到 c_∞ 的嵌入，其余循环为 ω，因此 ω 的系数为 $\gamma_c = 1$。 x_∞ 的三角分解诱导出经典仿射李代数 $\hat{}\mathfrak{g}$的三角分解 [13] 。

利用 (2.19) 以及同一对应 (2.21) 和 (2.24)，我们得到如下结果

引理 2.1 我们在环空间 $\mathbb{C}[t,t^{-1}]^N$上有以下双线性形式，它们是从 $\mathbb{C}^\infty$限制而来：

$$\begin{aligned}(t^k v, t^\ell w)_b =& \delta_{k+\ell,1}(v,w)_{so_{2n+1}}, && embedding\ (2.22),\ N = 2n+1,\\ (t^k v, t^\ell w)_c =& \delta_{k+\ell,1}(v,w)_{sp_{2n}}, && embedding\ (2.22),\ N = 2n,\\ (t^k v, t^\ell w)_d =& \delta_{k+\ell,1}(v,w)_{so_{2n}}, && embedding\ (2.22),\ N = 2n,\\ (t^k v, t^\ell w)_b =& \delta_{k+\ell,0}(v,w)_{so_{2n+1}}, && embedding\ (2.24),\ N = 2n+1,\end{aligned}$$

使得对于 $x = b,\ c,$ 或 d， 我们有

$$\hat{\mathfrak{g}} = \{g \in \hat{gl}_N \,|\, (gv,w)_x = -(v,gw)_x \ for\ all\ v,w \in \mathbb{C}[t,t^{-1}]^N\}.$$

2.5 扭曲仿射李代数作为经典无限维矩阵李代数的子代数

在本小节中，我们将扭曲的经典仿射李代数 $\hat{}\mathfrak{g}^{(2)}$（对应 $\mathfrak{g} = gl_n$ 和 so_{2n}）嵌入到 d_∞（前一种情形中 n 为偶数）或 b_∞（其他情形）中。我们沿用非扭曲情形的做法，将基 $e_j \in \mathbb{C}^\infty$、$j \in \mathbb{Z}$ 与环空间的一个子空间 $(\mathbb{C}[t,t^{-1}])^n$（分别为 $(\mathbb{C}[t,t^{-1}])^{2n}$）的基联系起来，其中该子空间对于 $\mathfrak{g} = gl_n$（分别为 $\mathfrak{g} = so_{2n}$）在 $\hat{}\mathfrak{g}^{(2)}$ 的作用下保持不变。我们选取 $\mathbb{C}^n$（分别为 $\mathbb{C}^{2n}$）的一组基。

由 J_n （分别为 O）的特征向量组成，这给出了$\mathbb{C}^\infty$ 与环空间子空间之间的以下同一对应:

$$\begin{aligned}
gl_{2m}: &\quad e_{k(2m)+j-m} = c_k \frac{t^{-k}}{\sqrt{2}}(v_j + (-1)^k v_{2m+1-j}),\\
gl_{2m+1}: &\quad e_{k(2m+1)+j-m-1} = c_k \frac{t^{-k}}{\sqrt{2}}(v_j + (-1)^k v_{2m+2-j}).\\
so_{2n}: &\quad e_{2nk+i-n} = t^{-2k} v_i, \quad e_{2nk+n-i} = t^{-2k} v_{2n+1-i}, \qquad i = 1, \dots, n-1\\
&\quad e_{2nk} = \frac{t^{-2k}}{\sqrt{2}}(v_n + v_{n+1}),\\
&\quad e_{2nk+n} = (-1)^k \frac{t^{-2k-1}}{\sqrt{2}}(v_n - v_{n+1}),
\end{aligned}$$

其中

$$c_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k \text{ even},\\ \sqrt{-1} & \text{if } k \text{ odd}. \end{cases} \tag{2.28}$$

由此得到以下同一对应:

$\hat{gl}^{(2)}_{2m} \subset d_\infty$:

$$t^k(e_{ij} - (-1)^k e_{2m+1-j,2m+1-i}) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} (c_{\ell-k})^{-1} c_\ell D_{-2m(\ell-k)-i+m+\frac{1}{2},2m\ell+j-m-\frac{1}{2}}; \tag{2.29}$$

$\hat{gl}^{(2)}_{2m+1} \subset b_\infty$:

$$t^k(e_{ij} - (-1)^k e_{2m+2-j,2m+2-i}) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} (c_{\ell-k})^{-1} c_\ell B_{-(2m+1)(\ell-k)-i+m+1,(2m+1)\ell+j-m-1}; \tag{2.30}$$

$\hat{}so_{2n}^{(2)} \subset b_\infty$: $(1 \le i, j < n)$

$$
\begin{aligned}
t^{2k}(e_{ij} - e_{2n+1-j,2n+1-i}) &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} B_{-2n(\ell-k)+n-i,2n\ell+j-n},\\
t^{2k}(e_{i,2n+1-j} - e_{j,2n+1-i}) &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} B_{-2n(\ell-k)+n-i,2n\ell+n-j},\\
t^{2k}(e_{2n+1-i,j} - e_{2n+1-j,i}) &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} B_{-2n(\ell-k)+i-n,2n\ell+j-n},\\
\frac{t^{2k}}{\sqrt{2}}(e_{in} + e_{i,n+1} - e_{n,2n+1-i} - e_{n+1,2n+1-i}) &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} B_{-2n(\ell-k)+n-i,2n\ell},\\
\frac{t^{2k}}{\sqrt{2}}(e_{2n+1-i,n} + e_{2n+1-i,n+1} - e_{n,i} - e_{n+1,i}) &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} B_{-2n(\ell-k)+i-n,2n\ell},\\
\frac{t^{2k+1}}{\sqrt{2}}(e_{in} - e_{i,n+1} + e_{n,2n+1-i} - e_{n+1,2n+1-i}) &= (-1)^k \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} B_{-2n(\ell-k)+n-i,2n\ell+n},\\
\frac{t^{2k+1}}{\sqrt{2}}(e_{2n+1-i,n} - e_{2n+1-i,n+1} + e_{n,i} - e_{n+1,i}) &= (-)^k \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} B_{-2n(\ell-k)+i-n,2n\ell+n},\\
t^{2k+1}(e_{nn} - e_{n+1,n+1}) &= (-1)^k \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} B_{-2n(\ell-k),2n\ell+n}.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

注意，在所有情况下，矩阵的周期分别为 $4m$、 $4m+2$、 $2n$，对应于 $\hat{}gl_{2m}^{(2)}$、$\hat{}gl_{2m+1}^{(2)}$、 $\hat{}so_{2n}^{(2)}$。

注 2.2 自同构 σ 在 d_∞ （分别为 b_∞）上诱导出一个自同构，对于 $\hat{}gl_n^{(2)}$，该自同构由 J 的共轭给出；对于 $\hat{}so_{2n}^{(2)}$，则由 O 给出，其中

$$
\begin{aligned}
J &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{j=1}^{2m} E_{k(2m)+j-m,k(2m)+j-m}, \quad n = 2m,\\
\big(resp.\ J &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{j=1}^{2m+1} E_{k(2m+1)+j-m+1,k(2m+1)+j-m+1}, \quad n = 2m+1\big),\\
O &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{\delta_{jn}} E_{2kn+j,2kn+j}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

请注意，矩阵 $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ 对应于 $\hat{}gl_n^{(2)}$ 的一个元素并满足

$$
a_{i+pn,j+pn} = J^p a_{i,j} J^p = c_i^{2p} c_j^{2p} a_{ij}, \quad p \in \mathbb{Z}. \tag{2.33}
$$

和之前一样，我们可以将 x_∞ 的余循环限制到$\hat{}\mathfrak{g}^{(2)}$。可以验证，这

会给出$\hat{gl}^{(2)}_{2m+1}$对应的余循环（2.26），以及其余情况下的以下余循环：

$$\hat{gl}^{(2)}_{2m}: \qquad \frac{1}{2}\omega(t^k a, t^\ell b) = \frac{k}{2}\delta_{k,-\ell}\left(\mathrm{Tr}(ab) + \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Tr}((e_{ii} - e_{2m+1-i,2m+1-i})[a,b])\right),$$

$$\hat{so}^{(2)}_{2n}: \qquad \frac{1}{2}\omega(t^k a, t^\ell b) = \frac{k}{2}\delta_{k,-\ell}\left(\mathrm{Tr}(ab) + \sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Tr}((e_{ii} - e_{2n+1-i,2n+1-i})[a,b])\right).$$

引理 2.3 我们在环空间$\mathbb{C}[t,t^{-1}]^N$的子空间上有以下双线性形式，它们由 $\mathbb{C}^\infty$限制而来：

$$\begin{aligned}
(t^k v, t^\ell w)_{\hat{gl}^{(2)}_{2n}} &= (-1)^k \delta_{k,\ell}(v,w)_{so_{2n}}, && N = 2n,\\
(t^k v, t^\ell w)_{\hat{gl}^{(2)}_{2n+1}} &= (-1)^k \delta_{k,\ell}(v,w)_{so_{2n+1}}, && N = 2n+1,\\
(t^k v, t^\ell w)_{\hat{so}^{(2)}_{2n}} &= (-1)^k \delta_{k,\ell}(Ov,w)_{so_{2n}}, && N = 2n.
\end{aligned}$$

3 经典无限矩阵李代数的表示

本节将回顾经典无限矩阵代数的自旋模和魏尔模。这些模对于描述本文所用的经典仿射李代数的表示至关重要。

3.1 a_∞ 的旋量模

将克利福德代数 $C\ell$ 视为由 $\psi_i^\pm$、$i \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ 生成的含幺结合代数，并满足以下关系。

$$\psi_i^\lambda \psi_j^\mu + \psi_j^\mu \psi_i^\lambda = \delta_{\lambda,-\mu}\delta_{i,-j}, \quad i,j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z},\ \lambda,\mu = + \text{ or } -. \tag{3.1}$$

其相应的旋量模 $F = F_a$ 定义为不可约的 $C\ell$-模，它具有真空向量 $|0\rangle$，满足关系

$$\psi_j^\pm |0\rangle = 0 \text{ for } j > 0.$$

众所周知的 a_∞ 在 F 上的表示 r 定义为

$$r(K) = I, \quad r(E_{ij}) =: \psi^+_{-i+\frac{1}{2}}\psi^-_{j-\frac{1}{2}}:, \quad i,j \in \mathbb{Z}, \tag{3.2}$$

其中，按照惯例，正规序乘积 $:\psi_i\psi_j:$ 定义为：若 $i \le j$，则等于 $\psi_i\psi_j$；否则等于 $-\psi_j\psi_i$。通过如下方式定义 F 上的荷：

$$\mathrm{charge}(|0\rangle) = 0 \text{ and } \mathrm{charge}(\psi_j^\pm) = \pm 1.$$

于是， F 分解为电荷扇区

$$F = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} F^{(m)}, \quad \text{where } F^{(m)} = \{v \in F \,|\, \text{charge}(v) = m\}. \tag{3.3}$$

每个子空间 $F^{(m)}$ 都是一个不可约最高权 a_∞ 模 [18], [13], ，满足条件:

$$|\pm m\rangle = \psi^{\pm}_{\frac{1}{2}-m}\psi^{\pm}_{\frac{3}{2}-m}\cdots\psi^{\pm}_{-\frac{1}{2}}|0\rangle, \qquad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

是其最高权向量，即

$$r(E_{ij})|\pm m\rangle = 0 \text{ for } i < j.$$

最高权由 $r(E_{ii})|m\rangle = |m\rangle$ 对于 $1 \leq i \leq m$, $r(E_{ii})|-m\rangle = -|-m\rangle$对于 $1-m \leq i \leq 0$, 若 $m \geq 1$, 以及 $r(E_{ii}|m\rangle = 0$ 在所有其他情况下.

这些元素

$$\psi^+_{i_1}\psi^+_{i_2}\cdots\psi^+_{i_p}\psi^-_{j_1}\psi^-_{j_2}\cdots\psi^-_{j_p}|m\rangle,$$

$i_1 < i_2 < \cdots < i_p < -m$ 和 $j_1 < j_2 < \cdots < j_p < m$ 构成 $F^{(m)}$的一组基。

ˆ最后，利用嵌入 (2.22)，将旋量模 F 限制到 a_∞ 后，它是 gl_n-模，其中每个 $F^{(m)}$ 都是不可约的 r 级别（K） $= 1$ 最高权ˆ gl_n-模 [18]。

3.2 b_∞ 和 d_∞的旋量模

回顾双线性形式 (2.19) 以及第 2.3 小节中对 $x = b$ 和 d 的 x_∞ 的描述。于是，元素 $B_{jk} = E_{-j,k} - E_{-k,j} = -B_{kj}$，其中 $j > k$, $C_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} =(-1)^k E_{-j,k} - (-)^j E_{-k+1,j+1} = C_{k-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, $D_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} = E_{-j,k} - E_{-k+1,j+1} = -D_{k-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$，其中 $j \geq k$，由 (2.20) 给出，连同 K，分别构成 $b_\infty, c_\infty, d_\infty$ 的一组基。注意，限制在 x_∞ 上的表示 r 由下式给出

$$\begin{aligned}
r(B_{jk}) &=: \psi^+_{j+\frac{1}{2}}\psi^-_{k-\frac{1}{2}} - \psi^+_{k+\frac{1}{2}}\psi^-_{j-\frac{1}{2}} :, && r(K) = I;\\
r(C_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}) &= (-1)^k : \psi^+_{j+\frac{1}{2}}\psi^-_{k-\frac{1}{2}} - (-1)^j\psi^+_{k-\frac{1}{2}}\psi^-_{j+\frac{1}{2}} :, && r(K) = I;\\
r(D_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}) &=: \psi^+_{j+\frac{1}{2}}\psi^-_{k-\frac{1}{2}} - \psi^+_{k-\frac{1}{2}}\psi^-_{j+\frac{1}{2}} :, && r(K) = I.
\end{aligned}$$

这提示我们在克利福德代数 $C\ell$ 上定义对合 ι_b 和 ι_d，以及一个阶为 4 的自同构 ι_c（它保持关系式 (3.1)）：

$$\begin{aligned}
\iota_b(\psi^+_{j+\frac{1}{2}}) &= \psi^-_{j-\frac{1}{2}}, & \iota_b(\psi^-_{k-\frac{1}{2}}) &= \psi^+_{k+\frac{1}{2}},\\
\iota_c(\psi^+_{j+\frac{1}{2}}) &= (-1)^j\psi^-_{j+\frac{1}{2}}, & \iota_c(\psi^-_{k-\frac{1}{2}}) &= (-1)^k\psi^+_{k-\frac{1}{2}},\\
\iota_d(\psi^+_{j+\frac{1}{2}}) &= \psi^-_{j+\frac{1}{2}}, & \iota_d(\psi^-_{k-\frac{1}{2}}) &= \psi^+_{k-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

这通过 r 在 $\overline{a}_\infty$上诱导出如下对合

$$\iota_b(E_{jk}) = -E_{-k,-j}, \quad \iota_c(E_{jk}) = -(-1)^{j+k}E_{-k+1,-j+1}, \quad \text{and } \iota_d(E_{jk}) = -E_{-k+1,-j+1},$$

thus

$$x_\infty = \{g \in a_\infty | \iota_x(g) = g\} \quad \text{for } x = b,\ c \text{ or } d.$$

引入 $C\ell$的以下元素:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i &= \frac{\psi^+_{i+\frac{1}{2}} + \psi^-_{i-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \quad \text{for } i \in \mathbb{Z}, \\ \phi_i &= \frac{\psi^+_i + \psi^-_i}{\sqrt{2}} \quad \text{for } i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

它们生成克利福德代数 $C\ell_x$，其中 $x = b$ 或 d，满足关系

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i\tilde{\phi}_j + \tilde{\phi}_j\tilde{\phi}_i = \delta_{i,-j},\ i,j \in \mathbb{Z}, \quad \text{if } x = b, \\ \phi_i\phi_j + \phi_j\phi_i = \delta_{i,-j},\ i,j \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}, \quad \text{if } x = d. \end{aligned} \tag{3.6}$$

我们分别定义 $x = b$ 和 d 上的旋量模 F_x （对应 $C\ell_x$ ）及其对偶，由真空向量 $|0\rangle$ （分别为 $\langle 0|$）生成，并满足以下条件:

$$\begin{aligned} &\tilde{\phi}_j|0\rangle = \phi_j|0\rangle = 0 \text{ for } j > 0 \text{ (resp. } \langle 0|\tilde{\phi}_j = \langle 0|\phi_j = 0 \text{ for } j < 0), \\ &\tilde{\phi}_0|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \text{ (resp. } \langle 0|\tilde{\phi}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|). \end{aligned} \tag{3.7}$$

~ ~ ~元素 $\phi_{j_1}\phi_{j_2}\cdots\phi_{j_p}|0\rangle$ （分别为 $\phi_{j_1}\phi_{j_2}\cdots\phi_{j_p}|0\rangle$）满足 $j_1 < j_2 < \cdots < j_p < 0$，构成 F_b （分别为 F_d）的一组基。我们定义 b_∞ 在 F_b上的自旋表示 r_b ，以及 d_∞ 在 F_d上的自旋表示 r_d ，如下:

$$\begin{aligned} &r_b(B_{jk}) =: \tilde{\phi}_j\tilde{\phi}_k :\ \text{for } i,j \in \mathbb{Z}, \quad r_b(K) = \frac{1}{2}I\ (= \gamma_b I), \\ &r_d(D_{jk}) =: \phi_j\phi_k :\ \text{for } i,j \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}, \quad r_d(K) = \frac{1}{2}I\ (= \gamma_d I). \end{aligned} \tag{3.8}$$

于是， F_b 是一个不可约的最高权 b_∞-模，最高权向量为 $|0\rangle$，但 F_d分裂为两个不可约的最高权 d_∞-模 $F_d^{\overline{0}} \oplus F_d^{\overline{1}}$，由~的 $\mathbb{Z}_2$-分次定义，其中 $\deg(|0\rangle) = \overline{0}$且 $\deg(\phi_i) = \overline{1}$。 $F_d^{\overline{0}}$的最高权向量是$|\overline{0}\rangle = |0\rangle$ ，而 $F_d^{\overline{1}}$的最高权向量是$|\overline{1}\rangle = \sqrt{2}\tilde{\phi}_{-\frac{1}{2}}|0\rangle$。

x_∞ 旋量模中的嵌入 (2.23) $\hat{}so_n$ in d_∞ （分别为 (2.25) $\hat{}so_{2m+1}$ in b_∞）通过限制，分别给出 $\hat{}so_n$ 的不可约最高权表示，其最高权为 $F_d^{\overline{0}}$ 的 Λ_0 和 Λ_1（分别为 $\hat{}so_{2m+1}$ 的不可约最高权表示，其最高权为 Λ_m） [23], [25]。下文中， Λ_j 表示 $\hat{}\mathfrak{g}$ 的基本权。

注3.1如果我们通过同一对应为 $\tilde{so}_{2m}$ 选择另一个嵌入

$$e_{2km+jmn} = t^{-k}v_j, \quad k \in \mathbb{Z},\ 1 \le j \le 2m,$$

我们得到 $\hat{}so_{2m}$ 的一个不可约表示，其最高权为其他权，即 $F_d^{\overline{0}}$ 的 Λ_m 和 Λ_{m-1}，分别对应 $F_d^{\overline{1}}$。由于这种情况下的描述类似，

可以利用李代数的一个外自同构，将这些表示与最高权分别为 Λ_0 和 Λ_1 的表示互换。因此，这里不再描述这种情况。在扭曲情形中， b_∞ 中的嵌入 (2.30) 和 (2.31) 分别给出 $\hat{}gl^{(2)}_{2m+1}$ 和 $\hat{}so^{(2)}_{2n}$ 的一个不可约表示，其最高权分别为 Λ_0 和 Λ_{n-1}。$\hat{}gl^{(2)}_{2m}$ 到 d_∞ 中的嵌入 (2.29) 给出 $F^{\overline{0}}_d$ 中 $\hat{}gl^{(2)}_{2m}$ 的两个不可约最高权表示，其最高权分别为 Λ_0 和 Λ_1，分别对应 $F^{\overline{1}}_d$。同样地，对于 $\hat{}so_{2m}$，我们也可以为 $\hat{}so^{(2)}_{2n}$ 定义另一种嵌入，从而得到最高权为 Λ_0 的不可约表示。然而，这里同样可以应用一个外自同构，将该表示与最高权为 Λ_{n-1} 的表示互换。

注 *3.2* 定义扭曲仿射李代数的自同构 σ，在 $x = b$ 或 d 上诱导出一个自同构。将 x_∞ 视为 a_∞ 的子代数，我们发现，对于 $\hat{\mathfrak{g}}^{(2)} = \hat{}gl^{(2)}_n$，有 $\sigma(E_{ij}) = JE_{ij}J$，其中 J 由 *(2.32)* 给出；对于 $\hat{\mathfrak{g}}^{(2)} = \hat{}so^{(2)}_{2n}$，有 $\sigma(E_{ij}) = OE_{ij}O$，其中 O 由 *(2.32)* 给出。我们可以将此自同构扩展为克利福德代数 $C\ell_d$（分别为 $C\ell_b$）上的自同构，记作 σ，即对于 $j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$，有 $\sigma(\phi_j) = J\phi_j = \sigma_j\phi_j$（分别地，对于 $i \in \mathbb{Z}$，有 $\sigma(\tilde{\phi}_i) = J\phi_i = \sigma_i\tilde{\phi}_i$）。注意， J 对列向量 ϕ 的作用是从左侧进行矩阵乘法。更明确地说，

$$
\begin{aligned}
\hat{gl}^{(2)}_{2m}: &\quad \sigma(\phi_{k(2m)+j-m-\frac{1}{2}}) = c_k^2\phi_{k(2m)+j-m-\frac{1}{2}}, \quad k\in\mathbb{Z},\ j=1,\dots,2n,\\
\hat{gl}^{(2)}_{2m+1}: &\quad \sigma(\tilde{\phi}_{k(2m+1)+j-m+1}) = c_k^2\tilde{\phi}_{k(2m+1)+j-m+1}, \quad k\in\mathbb{Z},\ j=1,\dots,2n+1,\\
\hat{so}^{(2)}_{2n}: &\quad \sigma(\tilde{\phi}_{k(2n)+j}) = \begin{cases} \tilde{\phi}_{k(2n)+j} & j=1,\dots,n-1,n+1,\dots 2n,\\ (-1)^k\tilde{\phi}_{k(2n)+n} & j=n,\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

其中 c_k 由 (2.28) 给出。注意，在后续计算中， $\sigma_i = \sigma_{-i}$ 这个自同构可通过 $\sigma(|0\rangle) = |0\rangle$ 扩展到旋量模，因为它保持 $|0\rangle$ 的湮灭空间不变（该空间是 $\mathbb{C}^\infty$ 的子空间，由所有满足 $\phi|0\rangle = 0$ 的元素 ϕ 组成）。

3.3 c_∞ 的魏尔模（参见 [8]）

引入自由辛玻色子 b_i、 $i \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$，它们构成魏尔代数 $C\ell_c$，其对易关系为

$$b_ib_j - b_jb_i = (-1)^{i-\frac{1}{2}}\delta_{i,-j}, \quad i,j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}.$$

将空间 F_c 定义为一个不可约的 $C\ell_c$-模，由真空向量 $|0\rangle$（其对偶由 $\langle 0|$ 生成）生成，并满足以下条件

$$b_j|0\rangle = 0 \qquad (\text{resp. } \langle 0|b_{-j} = 0) \quad \text{for } j > 0.$$

这些元素

$$b_{j_1}b_{j_2}\cdots b_{j_p}|0\rangle, \quad \text{with } j_1 \le j_2 \le \cdots j_p < 0,$$

构成 F_c的一组基。定义 F_c中的 c_∞ 的一个表示,

$$r_c(C_{ij}) =: b_i b_j : \text{ for } i,j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}, \quad r_c(K) = -\frac{1}{2}I. \tag{3.9}$$

与 F_d的情形一样， c_∞-模 F_c 分解为两个不可约模，其最高权分别为$-\frac{1}{2}\Lambda_0$和 $-\frac{3}{2}\Lambda_0+\Lambda_1$，位于 $F_c^{\bar{0}}$中，分别为 $F_c^{\bar{1}}$。嵌入(2.27)给出了$\hat{}sp_{2n}$ 的一个最高权表示，其最高权向量与c_∞的相同。

3.4 生成费米子场和玻色子场

鉴于第3.1–3.3节，引入以下费米子和辛玻色子的生成场

$$\begin{aligned}
\psi^{\pm}(z) &= \sum_{j\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \psi_j^{\pm} z^{-j-\frac{1}{2}} && \text{(charged free fermions)},\\
\tilde{\phi}(z) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\phi}_j z^{-j} && \text{(twisted neutral free fermions)},\\
b(z) &= \sum_{j\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} b_j z^{-j-\frac{1}{2}} && \text{(neutral free symplectic bosons)},\\
\phi(z) &= \sum_{j\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \phi_j z^{-j-\frac{1}{2}} && \text{(neutral free fermions)}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

利用这些场，我们可以定义 F_x 中 x_∞对 $x=a$、 b、 c、 d的表示的生成级数，即

$$\begin{aligned}
a_\infty: &\quad A(y,z) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} r_a(E_{ij}) y^{i-1} z^{-j} =: \psi^+(y)\psi^-(z) :,\\
b_\infty: &\quad B(y,z) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} r_b(B_{ij}) y^{-i} z^{-j} =: \tilde{\phi}(y)\tilde{\phi}(z) :,\\
c_\infty: &\quad C(y,z) = \sum_{i,j\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} r_c(C_{ij}) y^{-i-\frac{1}{2}} z^{-j-\frac{1}{2}} =: b(y)b(z) :,\\
d_\infty: &\quad D(y,z) = \sum_{i,j\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} r_d(D_{ij}) y^{-i-\frac{1}{2}} z^{-j-\frac{1}{2}} =: \phi(y)\phi(z) : .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

遗憾的是，如果想用顶点算子来表示定义 b_∞ 和 d_∞ 的费米子场，这些场并不那么方便。因此我们定义新的场。对于 b_∞ 和 d_∞ ，令

$$\tilde{\phi}^1(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\phi}_j^1 z^{-j},$$

其中

$$\text{for } b_\infty: \quad \tilde\phi^1_{2j} = \tilde\phi_{2j}, \quad \tilde\phi^1_{2j+1} = \sqrt{-1}\tilde\phi_{2j+1}, \quad j \in \mathbb{Z};$$

$$\text{for } d_\infty: \quad \tilde\phi^1_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{\frac12} + \phi_{-\frac12}), \quad \tilde\phi^1_{-2j} = \phi_{-2j-\frac12}, \quad \tilde\phi^1_{-2j+1} = \phi_{-2j+\frac12}, \quad j \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

$$\tilde\phi^1_{2j} = \phi_{2j+\frac12}, \quad \tilde\phi^1_{2j-1} = \sqrt{-1}\phi_{2j-\frac12}, \quad (j \in \mathbb{Z}_{>0}), \quad \sigma_0 = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(\phi_{\frac12} - \phi_{-\frac12}). \tag{3.12}$$

那么，这些元素满足引言中扭曲中性费米子场的反对易关系 (1.6):

$$\tilde\phi^1_j\tilde\phi^1_k + \tilde\phi^1_k\tilde\phi^1_j = (-1)^j\delta_{j,-k}, \quad \sigma_0^2 = \frac{1}{2} \quad \text{and } \sigma_0\tilde\phi^1_j + \tilde\phi^1_j\sigma_0 = 0$$

and

$$(\tilde\phi^1_0 - \sqrt{-1}\sigma_0)|0\rangle = 0, \qquad \tilde\phi^1_j|0\rangle = 0, \quad j > 0. \tag{3.13}$$

令 $\tilde\phi^1(z) = \sum_{j\in z}\tilde\phi_j z^{-j}$，我们得到基 o 的如下生成级数 f

$$b_\infty: \quad E^{11}(y,z) =: \tilde\phi^1(y)\tilde\phi^1(z) :,$$

$$d_\infty: \quad E^{11}(y,z) =: \tilde\phi^1(y)\tilde\phi^1(z) :, \quad \text{and } E^1(z) =: \tilde\phi^1(z)\sigma_0 : .$$

注意，在后一种情况下， $E^{11}(y,z)$ 的模构成 d_∞ 内的一个 b_∞ 子代数。

3.5 F_x 和 x_∞ 的多分量实现

通过重新标记克利福德代数和魏尔代数的生成元，可以得到 $x = a$、b、c 和 d 的模 F_x 的多分量实现。

对于 a_∞，我们可以进行重标记，使得原来的一对场变为 $\psi^{\pm}(z)$ 对这样的场，其中 s 是一个正整数。最简单的这种重标记是 (1.27)（参见 [15], 第 3253 页）：

$$\psi^{\pm a}_j = \psi^{\pm}_{sj\pm\frac12(s-2a+1)}, \quad a = 1,\dots,s, \tag{3.14}$$

对于 其右侧的下标为 $\equiv \pm\frac12(1-2a)$。于是我们有 w e

$$\psi^{+a}_i\psi^{+b}_j + \psi^{+b}_j\psi^{+a}_i = \psi^{-a}_i\psi^{-b}_j + \psi^{-b}_j\psi^{-a}_i = 0, \quad \psi^{+a}_i\psi^{-b}_j + \psi^{-b}_j\psi^{-a}_i = \delta_{ab}\delta_{i,\ -j}, \tag{3.15}$$

and

$$\psi^{\pm a}_j|0\rangle = 0 \qquad \text{for } j > 0, \quad a = 1,\dots,s. \tag{3.16}$$

我们将相应场定义为

$$\psi^{\pm a}(z) = \sum_{j\in\frac12+\mathbb{Z}}\psi^{\pm a}_j z^{-j-\frac12}, \qquad a = 1,\dots,s. \tag{3.17}$$

因此，我们得到 s^2 a_∞的生成场，即

$$A^{ab}(y,z) =: \psi^{+a}(y)\psi^{-b}(z) :, \quad 1 \le a,b \le s.$$

在 $x=b$ 和 d 的情形下， F_x 和 x_∞ 的多分量实现可用 $s\geq 0$ 对带电费米场和 $r\geq 0$ 个中性扭曲费米场来表示，其中 $s+r>0$。此外，在 $x=b$（分别为 d）的情形下，若 r 为偶数（分别为奇数），还需要一个费米子 σ_0。我们按如下方式进行重标记。原则上，若将 ϕ_i 重标记为 $i>0$，并将 ϕ_i 重标记为 i≥ 0，那么负指标对应的项便随之确定。下面说明 $x=b$的情形。我们首先按块进行重标记：将 $2s$个费米子重标记，从而得到如下带电费米子： $\phi_{(2s+r)+j+1+q}=\psi^{-1}_{j+\frac{1}{2}}$、 $\phi_{(2s+r)+j+2+q}=\psi^{+1}_{j+\frac{1}{2}}$、 $\phi_{(2s+r)+j+3+q}=\psi^{-2}_{j+\frac{1}{2}}$、 $\phi_{(2s+r)+j+4+q}=\psi^{+2}_{j+\frac{1}{2}}$、……、 $\phi_{(2s+r)+j+2s+q}=\psi^{+s}_{j+\frac{1}{2}}$。这里， q 是一个取决于 r的正整数。接着，我们重标记 r 个费米子，以得到满足 $j>0$的$\tilde{\phi}^{s+c}_j$。具体如下： $\tilde{\phi}^{s+1}_j=$常数$\tilde{\phi}_{(r+2s)j+2s+1+q}$、 $\tilde{\phi}^{s+2}_j=$常数$\tilde{\phi}_{(r+2s)j+2s+2+q}$、……、 $\tilde{\phi}^{s+r}_j=$常数$\tilde{\phi}_{(r+2s)j+2s+r+q}$。我们需要这个常数，以得到正确的对易关系。最后，我们希望得到 $\tilde{\phi}^{r+c}_0$。注意，我们希望它们满足如下对易关系 $(\tilde{\phi}^{r+c}_0)^{\,2}=\frac{1}{2}$。然而，只有一个费米子满足这一关系，即 ϕ_0。因此，我们必须构造$r-1$ 个这样的费米子。可以如下实现：将一个产生~ ~ ~与一个湮灭费米子 ϕ_{-j} 和 ϕ_j结合起来。注意，我们尚未将 ϕ_j 重标记为$1\leq j\leq q$。让

$$\tilde{\phi}^{s+1}_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\phi}_1+\tilde{\phi}_{-1}),\quad \tilde{\phi}^{s+2}_0=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(\tilde{\phi}_1-\tilde{\phi}_{-1}),$$

于是这些元素满足 $(\tilde{\phi}^{s+1}_0)^{\,2}=(\tilde{\phi}^{s+2}_0)^{\,2}=\frac{1}{2}$。对于其他的 $r-3$ 个元素，我们也可以进行类似的处理。如果 r 为奇数，就可以通过这种方式得到所有元素 $\tilde{\phi}^{s+a}_0$，其中特别有 $\tilde{\phi}^{s+r}_0=\tilde{\phi}_0$。因此在这种情况下，$q=\frac{r-1}{2}$。如果 r 为偶数，我们尚未对~ ~ϕ_0进行重标记，因此令 $\sigma_0=\phi_0$。注意，在这种情况下 $q=\frac{r}{2}$。在 $x=d$中，我们进行类似的处理；此时偶数与奇数的作用互换。

具体而言，我们分别将 ϕ_j，$j\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$重标记为属于 $C\ell_b$（分别属于 $\tilde{C}\ell_d$）。对于 $x=b$，当 $r\geq 1$为奇数时，令 $r=2q+1$，当 $r\geq 0$ 为偶数时，令 $r=2q$。并引入 $C\ell_b$ 的以下生成元，其中 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、$1\leq a\leq s$、 $1\leq c\leq r$：

$$\begin{aligned}
&\tilde{\phi}^{s+b}_{\pm(2j+1)}=\sqrt{-1}\tilde{\phi}_{\pm(2j(2s+r)+q+2s+b)},\quad \tilde{\phi}^{s+b}_{\pm 2j+2}=\tilde{\phi}_{\pm((2j+1)(2s+r)+q+2s+b)},\\
&\psi^{\mp a}_{\pm(j+\frac{1}{2})}=\tilde{\phi}_{\pm(j(2s+r)+q+2a-1)},\quad \psi^{\pm a}_{\pm(j+\frac{1}{2})}=\tilde{\phi}_{\pm(j(2s+r)+q+2a)},\\
&\tilde{\phi}^{s+2c-1}_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\phi}_c+\tilde{\phi}_{-c}),\quad \tilde{\phi}^{s+2c}_0=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(\tilde{\phi}_c-\tilde{\phi}_{-c}),\\
&\tilde{\phi}^{s+r}_0=\tilde{\phi}_0,\quad \text{if } r=2q+1,\sigma_0=\tilde{\phi}_0,\quad \text{if } r=2q.
\end{aligned}\tag{3.18}$$

对于 $x=d$，若 $r\geq 1$ 为奇数，则令 $r=2q-1$；若 $r\geq 0$ 为偶数，则令 $r=2q$，并引入 $C\ell_d$ 的以下生成元，其中 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、 $1\leq a\leq s$、 $1\leq b\leq r$，

$1 \le c \le q$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\phi}^{s+b}_{\pm(2j+1)} = \sqrt{-1}\phi_{\pm(2j(2s+r)+q+2s+b-\frac{1}{2})}, \quad \tilde{\phi}^{s+b}_{\pm 2j+2} = \phi_{\pm((2j+1)(2s+r)+q+2s+b-\frac{1}{2})},\\
&\psi^{\mp a}_{\pm(j+\frac{1}{2})} = \phi_{\pm(j(2s+r)+q+2a-\frac{3}{2})}, \quad \psi^{\pm a}_{\pm(j+\frac{1}{2})} = \phi_{\pm(j(2s+r)+q+2a-\frac{1}{2})},\\
&\tilde{\phi}^{s+2c-1}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{c-\frac{1}{2}} + \phi_{\frac{1}{2}-c}), \quad \tilde{\phi}^{s+2c}_0 = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(\phi_{c-\frac{1}{2}} - \phi_{\frac{1}{2}-c}),\\
&\tilde{\phi}^{s+r}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{q-\frac{1}{2}} + \phi_{\frac{1}{2}-q}), \quad \sigma_0 = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(\phi_{q-\frac{1}{2}} - \phi_{\frac{1}{2}-q}), \quad \text{if } r = 2q-1.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

因此，在这两种情况下，我们都得到 s 对带电费米场

$$\psi^{\pm a}(z) = \sum_{j\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \psi^{\pm a}_j z^{-j-\frac{1}{2}}, \quad 1 \le a \le s,$$

和 r 扭曲中性场

$$\tilde{\phi}^{\pm b}(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\phi}^b_j z^{-j}, \quad s < b \le r+s.$$

此外，如果 $x = b$ 和 r 为偶数，且 $x = d$ 和 r 为奇数，我们还有一个额外的费米子 σ_0。

带电费米子之间的对易关系，以及它们在真空上的作用，分别为 (3.15) 和 (3.16)。其余的对易关系是

$$\begin{aligned}
&\sigma_0\psi^{\pm a}_i + \psi^{\pm a}_i\sigma_0 = \sigma_0\tilde{\phi}^b_i + \tilde{\phi}^b_i\sigma_0 = 0,\ \sigma_0^2 = \frac{1}{2},\ \psi^{\pm a}_i\tilde{\phi}^b_j + \tilde{\phi}^b_j\psi^{\pm a}_i = 0,\\
&\tilde{\phi}^b_j\tilde{\phi}^c_k + \tilde{\phi}^c_k\tilde{\phi}^b_= (-1)^j\delta_{bc}\delta_{j,-k}, \quad i \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z},\ j,k\in\mathbb{Z},\ 1 \le a \le s < b, c \le r+s,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

且我们在真空上有如下作用

$$(\tilde{\phi}^{s+2k-1}_0 - \sqrt{-1}\tilde{\phi}^{s+2k}_0)|0\rangle = \tilde{\phi}^b_j|0\rangle = 0, \qquad \text{for } j > 0,\ 1 \le k \le \frac{r}{2}, \tag{3.21}$$

连同

$$\sigma_0|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle, \quad \text{if } r \text{ even}, \quad \tilde{\phi}^{s+r}_0|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle, \quad \text{if } r \text{ odd}, \tag{3.22}$$

若 $x = b$ 且（参见 (3.13)）：

$$(\tilde{\phi}^{s+r}_0 - \sqrt{-1}\sigma_0)|0\rangle = 0, \quad \text{if } r \text{ is odd}, \tag{3.23}$$

若 $x = d$。

表示 r_x 对应于 $x = b$ 或 d 的生成场分别为（δ、$\epsilon = +$ 或 $-$、$1 \le a$、$b \le s < c$、$d \le s+r$）：

$$\begin{aligned}
&E^{\delta a,\epsilon b}(y,z) =: \psi^{\delta a}(y)\psi^{\epsilon b}(z):\ \text{若 } r > 0, E^{\delta a,c}(y,z) =: \psi^{\delta a}(y)\tilde{\phi}^c(z):\ \text{若 } r,\\
&s > 0, E^{c,d}(y,z) =: \tilde{\phi}^c(y)\tilde{\phi}^d(z):\ \text{若 } s > 0, E^{\delta a}(z) =: \psi^{\delta a}(z)\sigma_0:,\ \text{若 } s > 0,\\
&(x = b \text{ 且 } r \text{ 为偶数}) \text{或} (x = d \text{ 且 } r \text{ 为奇数}),\ E^c(z) =: \phi^c(z)\sigma_0:,\\
&\text{若 } r > 0, \quad (x = b \text{ 且 } r \text{ 为偶数}) \text{或} (x = d \text{ 且 } r \text{ 为奇数})。
\end{aligned} \tag{3.24}$$

对于 c_∞，我们可以选择魏尔代数的另一组基，从而得到$r \geq 0$ 个中性辛玻色场，如上一节所示。与 $x = b, d$ 情形类似，也可以得到 $s \geq 0$ 所谓的带电辛玻色场 $b^{+a}(z)$和 $b^{-a}(z)$，其中 $1 \leq a \leq s$。例如，可以通过如下方式进行重标记。若 r 为偶数（$j > 0, 1 \leq a \leq s$,$1 \leq c \leq \frac{r}{2}$），

$$\begin{aligned}
&b^{s+2c-1}_{\pm(2j+\frac{1}{2})} = b_{\pm(2j(r+2s)+2c-\frac{3}{2})}, \quad b^{s+2c}_{\pm(2j+\frac{1}{2})} = \sqrt{-1}b_{\pm(2j(r+2s)+2c-\frac{1}{2})},\\
&b^{s+2c-1}_{\pm(2j+\frac{3}{2})} = \sqrt{-1}b_{\pm((2j+1)(r+2s)+2c-\frac{3}{2})}, \quad b^{s+2c}_{\pm(2j+\frac{3}{2})} = b_{\pm((2j+1)(r+2s)+2c-\frac{1}{2})},\\
&b^{\pm a}_{\pm(j+\frac{1}{2})} = b_{\pm(j(r+2s)+r+2a-\frac{3}{2})}, \quad b^{\pm a}_{\mp(j+\frac{1}{2})} = b_{\mp(j(r+2s)+r+2a-\frac{1}{2})}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

若 r 是奇数（$j > 0$、 $1 \leq a \leq s$ 、$1 \leq c < \frac{r}{2}$），

$$\begin{aligned}
&b^{s+r}_{\pm(j+\frac{1}{2})} = b_{\pm(j(r+2s)+r-\frac{1}{2})},\\
&b^{s+2c-1}_{\pm(j+\frac{1}{2})} = b_{\pm(j(r+2s)+2c-\frac{3}{2})}, \quad b^{s+2c}_{\pm(j+\frac{1}{2})} = \sqrt{-1}b_{\pm(j(r+2s)+2c-\frac{1}{2})},\\
&b^{\pm a}_{\pm(2j+\frac{1}{2})} = \sqrt{-1}b_{\pm(2j(r+2s)+r+2a-\frac{3}{2})}, \quad b^{\pm a}_{\mp(2j+\frac{3}{2})} = \sqrt{-1}b_{\mp((2j+1)(r+2s)+r+2a-\frac{3}{2})},\\
&b^{\mp a}_{\pm(2j+\frac{1}{2})} = b_{\pm(2j(r+2s)+r+2a+\frac{1}{2})}, \quad b^{\mp a}_{\mp(2j+\frac{3}{2})} = \sqrt{-1}b_{\mp((2j+1)(r+2s)+r+2a+\frac{1}{2})}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

对于 $1 \leq a \leq s$，我们有

$$b^{\pm a}(z) = \sum_{i \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} b^{\pm a}_i z^{-i-\frac{1}{2}}, \quad b^c(z) = \sum_{i \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} b^c_i z^{-i-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq a \leq s < c \leq r+s,$$

它们满足

$$\begin{aligned}
&b^{+a}_i b^{+c}_j - b^{+c}_j b^{+a}_i = b^{-a}_i b^{-c}_j - b^{-c}_j b^{-a}_i = 0,\ b^{+a}_i b^{-c}_j - b^{-c}_j b^{-a}_i = \delta_{ab}\delta_{i,-j},\\
&b^e_i b^d_j - b^d_j b^e_i = (-1)^{i-\frac{1}{2}}\delta_{de}\delta_{i,-j},\ b^{\pm a}_i b^d_j - b^d_j b^{\pm a}_i = 0,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

对于 $1 \leq a$、 $c \leq s < d$、 $e \leq s + r$、 i、 $j \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$。

对真空向量的作用如下

$$b^{\pm a}_j|0\rangle = b^c_j|0\rangle = 0 \quad \text{for } j > 0. \tag{3.28}$$

因此，表示 r_c 的生成场为（δ、 $\epsilon = +$ 或 $-$、 $1 \leq a$、 $c \leq s < d$、 $e \leq s + r$）

$$C^{\delta a,\epsilon c}(y,z) =: b^{\delta a}(y)b^{\epsilon c}(y) :,\ C^{\delta a,d}(y,z) =: b^{\delta a}(y)b^d(z) :,\ C^{de}(y,z) =: b^d(y)b^e(z) : . \tag{3.29}$$

注记3.3 请注意，我们在此使用的重标记不同于第*4*节中的重标记。那里的重标记是由$\hat{}\mathfrak{g}$ 和$\hat{}\mathfrak{g}^{(2)}$ 嵌入到 x_∞ ，以及构造所依据的 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群中的元素所诱导的。如果我们使用上述重标记，那么第*4*节的构造将无法得到$\overline{x}_\infty$中的矩阵。

3.6 F_x的顶点算子实现

3.6.1 a、 b 和 d型的玻色化

在第 3.5 节中，我们得到了两类费米子场，即带电费米场 $\psi^{\pm a}(z)$、 $1 \le a \le s$, 以及扭曲中性费米子场 $\tilde{\phi}^b(z)$、$s < b \le r + s$；在某些情况下，还得到一个额外的算子 σ_0。我们可以为带电费米场和扭曲中性费米子场关联自由玻色场

$$\begin{aligned} \alpha^a(z) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha^b_j z^{-j-1} =: \psi^{+b}(z)\psi^{-b}(z) :,\ 1 \le b \le s, \\ \alpha^{s+b}(z) &= \sum_{j\in 1+2\mathbb{Z}} \alpha^{s+b}_j z^{-j} = \frac{1}{2} : \tilde{\phi}^{s+b}(z)\tilde{\phi}^{s+b}(-z) :,\ 1 \le b \le r. \end{aligned} \tag{3.30}$$

它们的模满足海森堡李代数的关系:

$$\begin{aligned} &= j\delta_{ab}\delta_{jk}\ 1 \le a \le s,\ 1 \le b \le s + r,\ j,k \in \mathbb{Z},\ k \text{ odd if } b > s, \\ [\alpha^a_j, \alpha^b_k] &= \frac{j}{2}\delta_{ab}\delta_{jk},\ s + 1 \le a \le r + s,\ 1 \le b \le s + r,\ j,k \in \mathbb{Z},\ j \text{ odd},\ k \text{ odd if } b > s. \end{aligned} \tag{3.31}$$

其在真空向量上的作用为

$$\alpha^a_j|0\rangle = 0, \quad \text{for } j \ge 0.$$

注意

$$[\alpha^b_i, \psi^{\pm a}(z)] = \pm\delta_{ab} z^i \psi^{\pm a}(z) \quad \text{for } i \in \mathbb{Z},\ i \text{ odd if } b > s. \tag{3.32}$$

这使得我们能够（参见 [22] 或 [15]）几乎完全用海森堡代数来表示这些费米子场；具体而言，对于 $1 \le a \le s$ ，有

$$\psi^{\pm a}(z) = Q^{\pm 1}_a z^{\pm\alpha^a_0} \exp\left(\mp \sum_{k<0} \frac{\alpha^a_k}{k} z^{-k}\right) \exp\left(\mp \sum_{k>0} \frac{\alpha^a_k}{k} z^{-k}\right), \tag{3.33}$$

其中，算子 Q_a 由下式唯一确定。

$$Q_a|0\rangle = \psi^{+a}_{-\frac{1}{2}}|0\rangle, \quad Q_a\psi^{\pm b}_i = (-1)^{\delta_{ab}-1}\psi^{\pm b}_{i\mp\delta_{ab}} Q_a. \tag{3.34}$$

容易直接验证，对于 $a < b, 1 \le a, b, c \le s$ ，我们有

$$Q_aQ_b = -Q_bQ_a \quad [\alpha^a_i, Q_c] = \delta_{ac}\delta_{i0}Q_c. \tag{3.35}$$

如果 $x = a$，我们有 s 对带电自由费米子。当 $x = b$ 或 d 时，我们还另外有 r 个扭曲的中性自由费米子场。

对于中性扭曲场，海森堡元素 α^b_k、 k odd 与 $s < b \le s + r$ 的对易关系为:

$$[\alpha^b_k, \tilde{\phi}^c(z)] = \delta_{b,c} z^k \tilde{\phi}^c(z) \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}_{odd}. \tag{3.36}$$

因此，对于 $s<b\le r+s$，我们有

$$\tilde{\phi}^b(z)=R_{b-s}\exp\left(-2\sum_{k<0,\,\mathrm{odd}}\frac{\alpha_k^b}{k}z^{-k}\right)\exp\left(-2\sum_{k>0,\,\mathrm{odd}}\frac{\alpha_k^b}{k}z^{-k}\right),\tag{3.37}$$

$$R_b|0\rangle=\tilde{\phi}_0^{s+b}|0\rangle,\quad \text{and } R_bR_c+R_cR_b=\delta_{bc},\ R_bQ_a+Q_aR_b=0.\tag{3.38}$$

如果 $x=b$ 和 r 是偶数，或者 $x=d$ 和 r 是奇数，我们还会有一个额外的算子 σ_0，使得 $\sigma_0^2=\frac{1}{2}$。该算子与海森堡代数中的所有算子 α_k^a 对易，并且与算子 Q_a（$1\le b\le s$）和 R_b（$s<b\le r+s$）反对易。

如果 $x=b$ 和 r 是奇数，那么 $\sigma_0|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle$。如果 $x=d$ 和 r 是偶数，那么$\sigma_0|0\rangle=-\sqrt{-1}\tilde{\phi}_0^{r+s}|0\rangle$。

q 维数公式如下： a_∞ 模 $F^{(m)}$，

$$\dim_q F^{(m)}=\sum_{\substack{j_1,\dots j_s\in\mathbb{Z}\\ j_1+\cdots+j_s=m}}q^{\frac{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_s^2}{2}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^i)^s}.\tag{3.39}$$

在 b 情形下，旋量模 F 对于 b_∞ 是不可约的；在这种情况下，我们得到如下的 q维数公式。

$$\dim_q F=2^{[\frac{r}{2}]}\sum_{j_1,\dots j_s\in\mathbb{Z}}q^{\frac{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_s^2}{2}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^i)^s(1-q^{2i-1})^r}.$$

F分解为两个不可约 d_∞模 $F^{\overline{0}}$和 $F^{\overline{1}}$，两者具有相同的q维数公式，但 $r=0$时除外。我们有

$$\dim_q F^{\overline{\epsilon}}=\begin{cases}2^{[\frac{r-1}{2}]}\sum_{j_1,\dots j_s\in\mathbb{Z}}q^{\frac{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_s^2}{2}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^i)^s(1-q^{2i-1})^r}, & \text{for } r\neq 0,\\ \sum_{\substack{j_1,\dots j_s\in\mathbb{Z}\\ j_1+\cdots+j_s\in\epsilon+\mathbb{Z}}}q^{\frac{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_s^2}{2}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^i)^s}, & \text{when } r=0.\end{cases}\tag{3.40}$$

3.6.2 c 型的玻色化

回想一下，在 $C\ell_c$ 的多分量构造中，我们有两类辛玻色子场，即带荷场 $b^{\pm a}(z)$、$1\le a\le s$（以及中性场 $b^c(z)$、$s<c\le r+s$），它们满足 (3.27) 和 (3.28)。

$$\begin{aligned}\alpha^a(z)&=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\alpha_j^a z^{-j-1}=:b^{+a}(z)b^{-a}(z):\quad 1\le a\le s,\\ \alpha^c(z)&=\sum_{j\in 1+2\mathbb{Z}}\alpha_j^c z^{-j}=\frac{1}{2}:b^c(z)b^c(-z):\quad s<c\le s+r,\end{aligned}\tag{3.41}$$

以及 t 它们的模满足海森堡李代数的对易关系：

$$\begin{aligned}
&= -j\delta_{ab}\delta_{jk}\ 1 \le a \le s,\ 1 \le b \le s+r,\ j,k \in \mathbb{Z},\ k \text{ odd if } b > s,\\
[\alpha^a_j, \alpha^b_k] &= -\frac{j}{2}\delta_{ab}\delta_{jk},\ s+1 \le a \le r+s,\ 1 \le b \le s+r,\ j,k \in \mathbb{Z},\ j \text{ odd},\ k \text{ odd if } b > s,\\
&\alpha^a_j|0\rangle = 0, \quad \text{for } j \ge 0.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

我们从带电场开始。对易关系可以改写为

$$b^{\pm a}(y)b^{\pm c}(z) - b^{\pm c}(z)b^{\pm a}(y) = 0, \quad b^{+a}(y)b^{-c}(z) - b^{-c}(z)b^{+a}(y) = \delta_{ac}\delta(y-z).$$

Then

$$[\alpha^i_k, b^{\pm a}(z)] = \mp z^k \delta_{i,a} b^{\pm a}(z), \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}, \tag{3.43}$$

因此,

$$b^{\pm a}(z) = E^a_-(z)^{\pm 1} Q^{\pm a}(z) E^a_+(z)^{\pm 1} \tag{3.44}$$

其中

$$E^a_-(z) = \exp\left(-\sum_{k<0} \frac{\alpha^a_k}{k} z^{-k}\right), \qquad E^a_+(z) = \exp\left(-\sum_{k>0} \frac{\alpha^a_k}{k} z^{-k}\right), \tag{3.45}$$

and

$$[\alpha^i_k, Q^{\pm a}(z)] = \mp \delta_{i,a}\delta_{k,0} Q^{\pm a}(z) \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}.$$

按照 [1],我们设

$$\Theta^{\pm a}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Theta^{\pm a}_k z^{-k-1} := E^a_-(z)^{\mp 1} b^{\pm a}(z) z^{\mp \alpha^a_0} E^a_+(z)^{\mp 1}, \tag{3.46}$$

Then

$$\Theta^{\pm a}(z)|0\rangle = E^a_-(z)^{\mp 1} \sum_{i>0} b^{\pm a}_{-i}|0\rangle z^{i-\frac{1}{2}} \in F_c[[z]],$$

因此,

$$\Theta^{\pm a}_k|0\rangle = 0 \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

引理 3.4 设 $i_{z,\ y}R$（y，z）表示有理函数R（y，z）在域 $|z| > |y|$ 中的幂级数展开，并设 λ，$\mu = \pm 1$。则

$$\begin{aligned}
E^a_-(y)^\lambda E^b_+(z)^\mu &= i_{z,y}(1 - \frac{y}{z})^{\lambda\mu\delta_{ac}} E^b_+(z)^\mu E^a_-(y)^\lambda,\\
E^a_+(z) b^{\pm c}(y) &= i_{z,y}(1 - \frac{y}{z})^{\mp\delta_{ac}} b^{\pm c}(y) E^a_+(z),\\
E^a_-(y) b^{\pm c}(z) &= i_{z,y}(1 - \frac{y}{z})^{\pm\delta_{ac}} b^{\pm c}(z) E^a_-(y),\\
[\alpha^i(y), \theta^{\pm a}(z)] &= \mp \frac{\delta_{i,a}}{y} \theta^{\pm a}(z).
\end{aligned}$$

证明 设 $|z|>|y|$，则

$$\begin{aligned}E^a_-(y)^\lambda E^b_+(z)^\mu &= \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda\mu}{k^2}\left(\frac{y}{z}\right)^k[\alpha^a_{-k},\alpha^b_k]\right)E^b_+(z)^\mu E^a_-(y)^\lambda\\ &= \exp\left(-\delta_{ab}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda\mu}{k}\left(\frac{y}{z}\right)^k\right)E^b_+(z)^\mu E^a_-(y)^\lambda\\ &= i_{z,y}(1-\frac{y}{z})^{\lambda\mu\delta_{ab}}E^b_+(z)^\mu E^a_-(y)^\lambda.\end{aligned}$$

接下来，由于

$$\alpha^a_k b^{\pm c}(z) = b^{\pm c}(z)(\alpha^a_k \mp \delta_{ac}z^k),\quad \text{for } k\in\mathbb{Z},$$

also

$$\begin{aligned}E^a_+(z)b^{\pm c}(y) &= b^{\pm c}(y)\exp\left(-\sum_{k>0}\frac{1}{k}z^{-k}(\alpha^a_k\mp\delta_{ac}y^k)\right)\\ &= \exp\left(\pm\delta_{ac}\sum_{k>0}\frac{1}{k}\left(\frac{y}{z}\right)^k\right)b^{\pm c}(y)E^a_+(z)\\ &= i_{z,y}(1-\frac{y}{z})^{\mp\delta_{ac}}b^{\pm c}(y)E^a_+(z).\end{aligned}$$

最后一个恒等式由 (3.43) 得出。 □

Us利用该引理和表达式 (3.46)，我们发现，对于 $\lambda=\pm$，有

$$\begin{aligned}\Theta^{+a}(y)\Theta^{\lambda b}(z) &= i_{y,z}(y-z)^{\lambda\delta_{ab}}E^a_-(y)^{-1}E^b_-(z)^{-\lambda 1}b^{+a}(y)b^{\lambda b}(z)y^{-\alpha^a_0}z^{-\lambda\alpha^b_0}E^a_+(y)^{-1}E^b_+(z)^{-\lambda 1}\\ &= i_{y,z}(y-z)^{\lambda\delta_{ab}}E^a_-(y)^{-1}E^b_-(z)^{-\lambda 1}(:b^{+a}(y)b^{\lambda b}(z):+\\ &\quad+\delta_{ab}\delta_{\lambda,-}i_{y,z}(y-z)^{\lambda 1})y^{-\alpha^a_0}z^{-\lambda\alpha^b_0}E^a_+(y)^{-1}E^b_+(z)^{-\lambda 1},\\ \Theta^{\lambda b}(z)\Theta^{+a}(y) &= i_{z,y}(z-y)^{\lambda\delta_{ab}}E^a_-(y)^{-1}E^b_-(z)^{-\lambda 1}(:b^{\lambda b}(z)b^{+a}(y):\\ &\quad-\delta_{ab}\delta_{\lambda,-}i_{z,y}(z-y)^{\lambda 1})y^{-\alpha^a_0}z^{-\lambda\alpha^b_0}E^a_+(y)^{-1}E^b_+(z)^{-\lambda 1}.\end{aligned}$$

由 (3.43)，我们推得♀♀♀♀♀♀

$$\begin{aligned}\Theta^{+a}(y)\Theta^{+b}(z)-(-1)^{\delta_{ab}}\theta^{+b}(z)\Theta^{+a}(y)=0,\\ \Theta^{+a}(y)\Theta^{-b}(z)-\Theta^{-b}(z)\Theta^{+a}(y)=0,\quad \text{if } a\neq b,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\Theta^{+a}(y)\Theta^{-a}(z)+\Theta^{-a}(z)\Theta^{+a}(y)=\\ &E^a_-(y)^{-1}E^a_-(z)(\delta(y-z):b^{+a}(y)b^{-a}(z):+\partial_z\delta(y-z))E^a_+(y)^{-1}E^a_+(z)y^{-\alpha^a_0}z^{\alpha^a_0}=\\ &\delta(y-z)\alpha^a(z)+\partial_z\delta(y-z)-\delta(y-z)\alpha^a(z)\\ &=\partial_z\delta(y-z).\end{aligned}\tag{3.47}$$

这里我们使用了泰勒公式。类似地，可以证明tha t

$$\Theta^{-a}(y)\Theta^{-b}(z)-(-1)^{\delta_{ab}}\Theta^{-b}(z)\Theta^{-a}(y)=0.\tag{3.48}$$

请注意，仍然

$$[\alpha_k^a, \Theta^{\pm b}(z)] = \mp\delta_{ab}\delta_{k0}\Theta^{\pm b}(z). \tag{3.49}$$

为便于计算能量次数，我们通过设定 $\Theta^{\pm a} = Q_a^{\mp 1}\theta^{\pm a}(z)$ 引入算子 Q_a，其中 $[\alpha_0, Q_a] = Q_a$；于是，$\theta^{\pm a}(z)$ 满足与 $\Theta^{\pm a}(z)$ 相同的对易关系，唯一的区别是 $[\alpha_k^a, \theta^{\pm b}(z)] = 0$。因此，

$$b^{\pm a}(z) = Q_a^{\mp 1} z^{\pm\alpha_0^a} E_-^a(z)^{\pm 1}\theta^{\pm a}(z)E_+^a(z)^{\mp 1}. \tag{3.50}$$

这个最后的公式在只有一对这样的辛玻色子场时就已经出现在 [10] 中。注意，$Q_a^{\pm 1}$ 是一个总是与每个 $\theta_j^{\pm a}$ 一同出现的算子。原则上我们不需要引入它，但目前在计算 F 的能量分解时，这个算子会很方便。我们将在下一段中说明这一点。还要注意，$Q_a b^{\pm c}(z) = z^{\pm\delta_{ac}} b^{\pm c}(z) Q_a$。

暂时假设只有一对这样的 $b^{\pm}(z)$。那么，能量为 $\frac{n}{2}$ 的 $(b_{-\underline{1}}^{\pm})^n|0\rangle$，$_2$ 等于 $b^{\pm}(z_n)\cdots b^{\pm}(z_1)|0\rangle$ 的常数项。利用（3.50），这等于

$$\theta_{-n}^{\pm}\theta_{1-n}^{\pm}\cdots\theta_{-2}^{\pm}\theta_{-1}^{\pm}Q^{\mp n}|0\rangle. \tag{3.51}$$

更一般地，能量的

$$\theta_{-j_m}^{-}\cdots\theta_{-j_1}^{-}\theta_{-k_n}^{+}\cdots\theta_{-k_1}^{+}Q^{m-n}|0\rangle, \quad \text{where } j_m > \cdots j_1 > 0 \text{ and } k_n > \cdots > k_1 > 0, \tag{3.52}$$

等于

$$j_1 + \cdots + j_m + k_1 + \cdots + k_n - \frac{(m-n)^2}{2}. \tag{3.53}$$

这可以如下看出。考虑元素。

$$b_{m-n-j_m+\frac{1}{2}}^{-}\cdots b_{-n-j_1+\frac{1}{2}}^{-} b_{n-k_n-\frac{1}{2}}^{+}\cdots b_{-k_1+\frac{1}{2}}^{+}|0\rangle,$$

显然具有能量 (3.53)。它是 亚洲AV

$$y_m^{j_m+n-m}\cdots y_2^{j_2+n-2} y_1^{j_1+n-1} z_n^{k_n-n}\cdots z_2^{k_2-2} z_1^{k_1-1}$$

in

$$\begin{aligned}
&b^-(y_m)\cdots b^-(y_1)b^+(z_n)\cdots b^+(z_1)|0\rangle = \\
&z_2^{-1}z_3^{-2}z_n^{-n-1}y_1^n y_2^{n-1}\cdots y_m^{n-m+1}\theta^-(y_m)\cdots\theta^-(y_1)\theta^+(z_n)\theta^+(z_1)Q^{m-n}|0\rangle + \cdots = \\
&y_m^{j_m+n-m}\cdots y_1^{j_1+n-1} z_n^{k_n-n}\cdots z_1^{k_1-1}\theta_{-j_m}^{+}\cdots\theta_{-j_1}^{+}\theta_{-k_n}^{+}\cdots\theta_{-k_1}^{+}Q^{m-n}|0\rangle + \cdots
\end{aligned}$$

因此，

$$\text{energy}(\theta_{-j}^{\pm}) = j, \quad \text{energy}(Q^m|0\rangle) = -\frac{m^2}{2}, \qquad j, m \in \mathbb{Z},\ j > 0.$$

形式为 (3.52) 的元素可以通过多个形式为 $\theta_i^{\pm}\theta_k^{\mp}$ 的元素作用于一个元素 (3.51) 得到。

引理 3.5 令

$$F_{ann} = \{w \in F | \, \alpha_k w = 0, \quad for \ all \ k > 0\}.$$

因此，元素 (3.52) 构成了 F_{ann}的一组基。

证明 只需考察形如 (3.51) 的元素的线性组合，其中能量（记为 N）固定，荷 $m-n$（即 α_0 的特征值）也固定。由于能量为 N，形如 (3.52) 且具有该能量的元素只有有限个。现在令

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \theta^-_{-j^i_{m_i}} \cdots \theta^-_{-j^i_1} \theta^+_{-k^i_{n_i}} \cdots \theta^+_{-k^i_1} Q^{m-n} |0\rangle = 0, \tag{3.54}$$

其中我们对所有能量为 N 且荷为 $m-n$ 的元素取线性组合。比较这个和中的任意两个元素，总存在一对$\theta^\pm_a$和 $\theta^\pm_b$，使得其中一个出现在这两个元素之一中而在另一个中缺失，反之亦然。因此，我们可以通过令 $\lambda_i = 0$作用于该和，证明系数

$$\theta^-_{-j^i_{m_i}} \theta^+_{j^i_{m_i}} \cdots \theta^-_{-j^i_1} \theta^+_{j^i_1} \theta^+_{-k^i_{n_i}} \theta^-_{k^i_{n_i}} \cdots \theta^+_{-k^i_1} \theta^-_{k^i_1}$$

作用于这个和，从而消去除 $\lambda_i \theta^-_{-j^i_{m_i}} \cdots \theta^-_{-j^i_1} \theta^+_{-k^i_{n_i}} \cdots \theta^+_{-k^i_1}$ 以外的所有项。因此，形如 (3.52) 的元素构成了 F_{ann} 的一组基。□

因此，利用（3.53），我们得到:

推论 3.6 q, t 的维数等于 F_{ann} 的维数。

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} t^{\,m-n} q^{-\frac{(m-n)^2}{2}} s_m(q) s_n(q), \tag{3.55}$$

其中，s_m（q）是关于 q 的幂级数，其定义为 $\prod_{j=1}^{\infty}$（$1+sq^j$）$= \sum_{m=0}^{\infty} s_m$（$q$）$s^m$ 展开式中 s^m 的系数。

注意，s_m(q)中 q^k 的系数是将数k 写成 m 个互不相同的正整数之和的所有可能方式。众所周知,

$$s_m(q) = \frac{q^{\frac{m^2+m}{2}}}{(1-q)\cdots(1-q^m)}.$$

因此我们发现agaduhan

$$\dim_{q,t} F = \prod_{i \in \mathbb{Z}_{>0}} \frac{1}{1-q^i} \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k}{2}} t^k}{(1-q)\cdots(1-q^k)} q^{jk} \frac{q^{\frac{j}{2}} t^{-j}}{(1-q)\cdots(1-q^j)}. \tag{3.56}$$

另一方面，通过用辛玻色子 $b^\pm_j$ 表示 F 的能量和荷，我们发现%timeout

$$\dim_{q,t} F = \prod_{i \in \mathbb{Z}_{>0}} \frac{1}{(1-tq^{i-\frac{1}{2}})(1-t^{-1}q^{i-\frac{1}{2}})}. \tag{3.57}$$

这意味着（3.57）的右端等于（3.56）的右端，从而得到一个值得注意的恒等式，我们在文献中未能找到。在 [1], 第 3 节以及 [11], 第 7.2 节和附录中，还给出了一些关于辛玻色子的 q-维数的其他公式。

接下来，我们来描述中性场，更多详情请参见 [1] 或 [26] 。对易关系可以改写为

$$b^a(y)b^c(z) - b^c(z)b^a(y) = \delta_{ac}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{y}\left(-\frac{y}{z}\right)^k = \delta_{ac}\delta(y+z).$$

由于对于 $a > s$,

$$[\alpha^a_k, b^c(z)] = -\delta_{ac}z^k b^c(z), \quad [\alpha^a_k, \alpha^c_\ell] = -\frac{\delta_{ac}}{2}k, \quad \text{for } k \in 1+2\mathbb{Z},\ \ell\in\mathbb{Z},\ \text{odd if } c > s.$$

我们定义

$$\Theta^a(z) = \sum_{k\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\theta^a_k z^{-k-\frac{1}{2}} := V^a_-(z)^{-1}b^a(z)V^a_+(z)^{-1},$$

其中（参见 (1.47)）

$$V^a_-(z) = \exp\left(-2\sum_{k<0,\,\text{odd}}\frac{\alpha^a_k}{k}z^{-k}\right), \qquad V^a_+(z) = \exp\left(-2\sum_{k>0,\,\text{odd}}\frac{\alpha^a_k}{k}z^{-k}\right), \quad (3.58)$$

Then

$$\Theta^a(z)|0\rangle = V^a_-(z)^{-1}\sum_{i>0}b^a_{-i}z^{i-\frac{1}{2}}|0\rangle \in F_c[[z]],$$

因此

$$\theta^a_k|0\rangle = 0 \quad \text{for } k \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

以与之前类似的方式，详情请参见 [26] （注意 $\alpha_k = -J_k$），我们得到

$$\Theta^a(y)\Theta^b(-z) - (-1)^{\delta_{ab}}\Theta^b(-z)\Theta^a(y) = 2\delta_{ab}z^{\frac{1}{2}}\partial_z(z^{\frac{1}{2}}\delta(y-z)).$$

注意到我们还有

$$\Theta^{\pm a}(y)\Theta^b(z) - \Theta^b(z)\Theta^{\pm a}(y) = 0 \quad \text{for } a \leq s,\ b > s.$$

因此我们有了

命题 3.7 对于 $a \leq s$ 和 $j > s$ 我们有

$$\begin{aligned} b^{\pm a}(z) =& Q_a^{\pm 1}z^{\pm\alpha^a_0}E^a_-(z)^{\pm 1}\theta^{\pm a}(z)E^a_+(z)^{\mp 1} = E^a_-(z)^{\pm 1}\Theta^{\pm a}(z)E^a_+(z)^{\mp 1}z^{\pm\alpha^a_0}, \\ b^j(z) =& V^j_-(z)\Theta^j(z)V^j_+(z), \end{aligned} \quad (3.59)$$

其中 $E^a_\pm(z)$ $(V^j_\pm(z))$ 由 (3.45) （分别由(4.39)）给出，使得引理 *3.4* 的最后一个方程成立。场 $\theta^{\pm a}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\theta^{\pm a}_k z^{-k-1}$ 和 $\Theta^j(z) = \sum_{k\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\theta^j_k z^{-k-\frac{1}{2}}$的模满足以下（反）对易关系

$$\begin{aligned} \theta^{\pm a}_k\theta^{\pm b}_\ell - \theta^{\pm b}_\ell\theta^{\pm a}_k = \theta^{\pm a}_k\theta^j_\ell - \theta^j_\ell\theta^{\pm a}_k = 0, \\ \theta^{+a}_k\theta^{-b}_\ell - (-1)^{\delta_{ab}}\theta^{-b}_\ell\theta^{+a}_k = \delta_{ab}\delta_{k,-\ell}k, \\ \theta^i_k\theta^j_\ell - (-1)^{\delta_{ij}}\theta^j_\ell\theta^i_k = (-1)^{k-\frac{1}{2}}\delta_{ij}\delta_{k,-\ell}2k. \end{aligned}$$

备注 3.8 在 *[1] I. Anguelova* 进一步对场 $\Theta^{\pm a}(z)$ 进行玻色化，这遵循了 *[10]*的一个想法。我们这里不这么做，而是继续研究场 $\Theta^{\pm a}(z)$，并大致按照 *[14]*的方式为它们寻找一种实现。

魏尔模 F 分解为两个不可约的 c_∞ 模 $F^{\overline{\epsilon}}$, $\overline{\epsilon} \in \mathbb{Z}_2$ 。 q维数公式可以用变量 x最方便地描述，使得 $x^2 = 1$。我们有 s 个带荷的（分别为 r个中性的）辛玻色场。因此，我们将 s 份（3.56）与 r 份（1.51）相结合，得到

$$\begin{aligned}\dim_q F^{\overline{0}} + xF^{\overline{1}} &= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1-xq^{j-\frac{1}{2}})^{r+2s}} \\ &= \left(\sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k}{2}}x^k}{(1-q)\cdots(1-q^k)} q^{jk} \frac{q^{\frac{j}{2}}x^j}{(1-q)\cdots(1-q^j)}\right)^s \times \\ &\quad \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(1+xq^{j-\frac{1}{2}})^r}{(1-q^j)^s(1-q^{2j-1})^r}.\end{aligned} \tag{3.60}$$

3.7 玻色子实现的 F_x

3.7.1 F_x 的玻色子实现，克利福德代数情形

在第 3.6.1 小节中，我们找到了生成克利福德代数 $C\ell_x$（适用于 $x = a$、b、d）的多分量费米子场的玻色化，并描述了旋量模 F_x。该描述基于海森堡代数以及一些附加算子 Q_a 和 R_b。在本小节中，我们将使用海森堡李代数的福克空间表示，给出 F_x 相应的玻色描述：

$$\alpha^j_k = \frac{\partial}{\partial t^{(j)}_k}, \quad \alpha^j_{-k} = kt^{(j)}_k, \quad k \in \mathbb{Z}_{>0},\ 1 \le j \le s, \tag{3.61}$$

对于带电场和

$$\alpha^j_k = \frac{\partial}{\partial t^{(j)}_k}, \quad \alpha^j_{-k} = \frac{k}{2}t^{(j)}_k, \quad k \in \mathbb{Z}_{odd>0}, \quad s < j \le r+s, \tag{3.62}$$

对于中性场。

对于 $x = a$，我们令

$$B_s = \mathbb{C}[q_j, q_j^{-1}, t^{(j)}_1, t^{(j)}_2, \dots \,|\, 1 \le j \le s].$$

回顾由 (3.34) 定义的 F_a 上的算子 Q_j ，我们通过以下性质定义一个同构$\sigma : F_a \to B_s$

$$\sigma(Q_1^{k_1}Q_2^{k_2}\cdots Q_s^{k_s}|0\rangle) = q_1^{k_1}q_2^{k_2}\cdots q_s^{k_s}, \tag{3.63}$$

and

$$\sigma r(\alpha^j_0)\sigma^{-1} = q_j\frac{\partial}{\partial q_j}, \quad \sigma r(\alpha^j_k)\sigma^{-1} = \frac{\partial}{\partial t^{(j)}_k}, \quad \sigma r(\alpha^j_{-k})\sigma^{-1} = kt^{(j)}_k, \quad k > 0, \tag{3.64}$$

更多详情请参见 [22] 或 [15], 。此外，还有

$$\sigma Q_j \sigma^{-1} = (-1)^{\sum_{k=1}^{j-1} q_k \frac{\partial}{\partial q_k}} q_j. \tag{3.65}$$

因此，将 (3.64)代入(3.33)，我们得到 (1.32)。直接验证（参见 [22] 或 [15]）可得，对于 $1 \le a$、$b \le s$，且 $a \ne b$:

$$\begin{aligned}
\sigma E^{+a,-b}(w,z)\sigma^{-1} =& \sigma : \psi^{+a}(w)\psi^{-b}(z) : \sigma^{-1} \\
=& q_a (-1)^{\sum_{\ell=1}^{a-1} q_\ell \frac{\partial}{\partial q_\ell}} q_b^{-1} (-1)^{\sum_{\ell=1}^{b-1} q_\ell \frac{\partial}{\partial q_\ell}} w^{q_a \frac{\partial}{\partial q_a}} z^{-q_b \frac{\partial}{\partial q_b}} e^{z\cdot t^{(a)} - w\cdot t^{(b)}} e^{w^{-1}\cdot \tilde\partial_{t^{(b)}} - z^{-1}\tilde\partial_{t^{(a)}}}, \\
\sigma E^{+a,-a}(w,z)\sigma^{-1} =& \sigma : \psi^{+a}(w)\psi^{-a}(z) : \sigma^{-1} \\
=& i_{w,z} \frac{1}{w-z} \Big[\Big(\frac{w}{z}\Big)^{q_a \frac{\partial}{\partial q_a}} e^{z\cdot t^{(a)} - w\cdot t^{(a)}} e^{w^{-1}\cdot \tilde\partial_{t^{(a)}} - z^{-1}\cdot \tilde\partial_{t^{(a)}}} - 1 \Big].
\end{aligned} \tag{3.66}$$

对于 $x = b$ 或 d，其中通常同时包含 r 中性场和 s带电场，我们必须通过 p 变量 θ_i、$1 \le i \le p$来扩展福克空间 B_s，对于$r = 2p$ 或 $r = 2p+1$，在 b情形下，以及对于 $r = 2p$ 或 $r = 2p-1$，在 d情形下，它们满足反对易关系： $\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$。因此，对于 $x = b$ 或 d，我们令

$$B_{s,r} = \mathbb{C}[\theta_i, q_j, q_j^{-1}, t^{(\ell)} |\ 1 \le i \le p,\ 1 \le j \le s,\ 1 \le \ell \le s+r], \tag{3.67}$$

其中， $t^{(\ell)} = (t_1^{(\ell)}, t_2^{(\ell)}, t_3^{(\ell)}, \ldots)$ 若 $1 \le \ell \le s$，而 $t^{(\ell)} = (t_1^{(\ell)}, t_3^{(\ell)}, t_5^{(\ell)}, \ldots)$ 若 $\ell > s$。我们定义一个向量空间同构 $\sigma : F_x \to B_{s,r}$，使得

$$\sigma(Q_1^{a_1}\cdots Q_s^{a_s} R_1^{b_1}\cdots R_{\tilde r}^{b_{\tilde r}} |0\rangle) = q_1^{a_1} q_2^{a_2}\cdots q_s^{a_s} \left(R_1(\theta)\right)^{b_1} \left(R_2(\theta)\right)^{b_2} \cdots \left(R_{\tilde r}(\theta)\right)^{b_{\tilde r}} 1,$$

其中，在 b情形下为 $\tilde r = r$；在d情形下，若 r 为偶数则为 $\tilde r = r+1$，若 r 为奇数则为 $\tilde r = r+1$，并且

$$R_{2j-1}(\theta) := \frac{\frac{\partial}{\partial\theta_j} + \theta_j}{\sqrt{2}}, \quad R_{2j}(\theta) := \sqrt{-1}\frac{\frac{\partial}{\partial\theta_j} - \theta_j}{\sqrt{2}}, \quad 1 \le j \le p. \tag{3.68}$$

那么，对于 $j \le s$， $\sigma r_x(\alpha_k^j)\sigma^{-1}$可按（3.61）实现；对于 $j > s$，我们设:

$$\sigma r_x(\alpha_k^j)\sigma^{-1} = \frac{\partial}{\partial t_k^{(j)}}, \quad \sigma r(\alpha_{-k}^j)\sigma^{-1} = \frac{k}{2} t_k^{(j)}, \quad j > s,\ k > 0. \tag{3.69}$$

作用　由（3.65）给出。对于 $1 \le j \le 2p$， Q_j 的作用由下式给出

$$\sigma R_j \sigma^{-1} = (-1)^{\sum_{k=1}^{s} q_k \frac{\partial}{\partial q_k}} R_j(\theta), \tag{3.70}$$

其中， $R_j(\theta)$由（3.68）给出。对于 b_∞ 和 r 为奇数的情形，我们还有

$$R_r(\theta) = (-1)^{\sum_{j=1}^{p} \theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}}$$

因此，与之前一样，对于 $1 \le j \le r$， $\sigma\psi^{\pm j}(z)\sigma^{-1}$ 由 (1.32) 给出。对于 $1 \le j \le r$（例如参见 [16] 或 [25]），我们有 $\sigma\tilde\phi^{s+j}(z)\sigma^{-1}$ 由以下公式给出。

$$\sigma\tilde\phi^{s+b}(z)\sigma_{s,r}^{-1} = (-1)^{\sum_{j=1}^{s} q_j \frac{\partial}{\partial q_j}} R_b(\theta) e^{z\circ t^{(s+b)}} e^{-2(z^{-1}\circ\tilde\partial_{t^{(s+b)}})}. \tag{3.71}$$

最后，如果 $r=2p$ 对于 b_∞ 是偶数，或者 $r=2p-1$ 对于 d_∞ 是奇数，还存在一个算子 σ_0。有

$$\sigma\sigma_0\sigma^{-1}=S(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{\sum_{k=1}^s q_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\sum_{j=1}^p\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}}, & x=b,\\ \sqrt{-1}(-1)^{\sum_{k=1}^s q_k\frac{\partial}{\partial q_k}}\frac{\frac{\partial}{\partial\theta_p}-\theta_p}{\sqrt{2}}, & x=d.\end{cases}\tag{3.72}$$

利用小节 3.6.1 的结果，我们在福克空间 $B_{r,s}$ 上得到 b_∞ 或 d_∞ 的一个表示。容易验证，对于 $1\le a$、$b\le s$，方程 (3.66) 仍然成立。令 a、$d\le s$ 和 $1\le b$、$c\le r$，则

$$\begin{aligned}
&\sigma E^{\pm a,\pm d}(w,z)\sigma^{-1}=\sigma:\psi^{\pm a}(w)\psi^{\pm d}(z):\sigma^{-1}=\\
&\quad=(w-z)^{\delta_{ad}}q_a^{\pm1}(-1)^{\sum_{\ell=1}^{a-1}q_\ell\frac{\partial}{\partial q_\ell}}q_d^{\pm1}(-1)^{\sum_{\ell=1}^{d-1}q_\ell\frac{\partial}{\partial q_\ell}}w^{\pm q_a\frac{\partial}{\partial q_a}}z^{-\pm q_d\frac{\partial}{\partial q_d}}\times\\
&\qquad e^{\pm(z\cdot t^{(a)}+w\cdot t^{(b)})}e^{\mp(z^{-1}\cdot\tilde\partial_{t^{(a)}}+w^{-1}\cdot\tilde\partial_{t^{(b)}})},\\
&\sigma E^{s+b,s+c}(w,z)\sigma^{-1}=\sigma:\tilde\phi^{s+b}(w)\tilde\phi^{s+c}(z):\sigma^{-1}\\
&\quad=i_{w,z}\left(\frac{w-z}{w+z}\right)^{\delta_{bc}}\left[R_b(\theta)R_c(\theta)e^{(z\circ t^{(s+b)}+w\circ t^{(s+c)})}e^{-2(z^{-1}\circ\tilde\partial_{t^{(s+b)}}+w^{-1}\circ\tilde\partial_{t^{(s+c)}})}-\delta_{bc}\right],\\
&\sigma E^{\pm a,s+b}(w,z)\sigma^{-1}=\sigma:\psi^{\pm a}(w)\tilde\phi^{s+b}(z):\sigma^{-1}=\\
&\quad=q_a(-1)^{\sum_{i=a}^s q_i\frac{\partial}{\partial q_i}}w^{\pm q_a\frac{\partial}{\partial q_a}}R_b(\theta)e^{\pm z\cdot t^{(a)}+w\circ t^{(s+b)}}e^{\mp z^{-1}\cdot\tilde\partial_{t^{(a)}}-2(w^{-1}\circ\tilde\partial_{t^{(s+b)}})}.
\end{aligned}\tag{3.73}$$

如果存在 σ_0，我们还有

$$\begin{aligned}
&\sigma E^{\pm a}(z)\sigma^{-1}=\sigma:\psi^{\pm a}(z)\sigma_0:\sigma^{-1}=\ q_a^{\pm1}(-1)^{\sum_{\ell=1}^{a-1}q_\ell\frac{\partial}{\partial q_\ell}}S(\theta)z^{\pm q_a\frac{\partial}{\partial q_a}}e^{\pm z\cdot t^{(a)}}e^{\mp z^{-1}\cdot\tilde\partial_{t^{(a)}}},\\
&\sigma E^{s+b}(z)\sigma^{-1}=\sigma:\tilde\phi^{s+b}(z)\sigma_0:\sigma^{-1}=R_b(\theta)S(\theta)e^{z\circ t^{(s+b)}}e^{-2(z^{-1}\circ\tilde\partial_{t^{(s+b)}})},
\end{aligned}\tag{3.74}$$

其中 $S(\theta)$ 由 (3.72) 给出。

3.7.2 F_c 的玻色子实现：魏尔代数情形

我们利用小节 3.6.2 的结果来得到 F_c 的玻色子实现。令

$$C_{s,r}=\mathbb{C}[t_i^{(a)},t_j^{(c)},\xi_k^a,\xi_\ell^c|\,1\le a\le s<c\le s+r;,i\in\mathbb{Z}_{>0},\,j\in\mathbb{Z}_{odd>0},\,k\in\mathbb{Z}_{\neq0},\,\ell\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\ge0}],\tag{3.75}$$

其中 ξ_k^a 是反对易变量，并定义向量空间同构 $\sigma: F_c\to C_{s,\,r}$ 如下。再次使用海森堡代数的标准实现（$1\le a\le s<c\le s+r$、$i\in\mathbb{Z}_{>0}$ 和 $j\in\mathbb{Z}_{odd>0}$）

$$\begin{aligned}
&\sigma\alpha_{-i}^a\sigma^{-1}=it_i^{(a)},\quad \sigma\alpha_i^a\sigma^{-1}=-\frac{\partial}{\partial t_i^{(a)}},\\
&\sigma\alpha_{-j}^c\sigma^{-1}=\frac{1}{2}jt_j^{(c)},\quad \sigma\alpha_j^c\sigma^{-1}=-\frac{\partial}{\partial t_j^{(c)}}.
\end{aligned}$$

我们将场 $\Theta^{\pm a}(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Theta_j^{\pm a}z^{-j-1}=Q_a^{\mp a}\theta^{\pm a}(z)$ $(1\le a\le s)$ 的模（对于 $\Theta^c(z)$ $s<c\le r$）以及 $\theta(z)$ 的模（对于 $a\le s$）实现为乘法和微分运算。

格拉斯曼变量，即对于 $a = 1, \ldots, s$,

$$\sigma\Theta^{\pm a}(z)\sigma^{-1} = \Xi^{\pm a}(z)S_a, \qquad \sigma\Theta^{c}(z)\sigma^{-1} = \Xi^{c}(z)S_c,$$

其中 $(a \le s < c)$

$$\begin{aligned}
\Xi^{+a}(z) &= \frac{\partial}{\partial\xi_0^a}z^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} -k\xi_k^a z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\xi_{-k}^a}z^{-k-1},\\
\Xi^{-a}(z) &= -\frac{\partial}{\partial\xi_0^a}z^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k\xi_{-k}^a z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\xi_k^a}z^{-k-1},\\
\Xi^{c}(z) &= \sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\ge 0}}\left((-1)^{i+\frac{1}{2}}2i\xi_i^c z^{i-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial\xi_i^c}z^{-i-\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned} \tag{3.76}$$

这里的算子 S_a 作用为

$$S_a(1) = 1, \qquad S_a\xi_k^b S_a^{-1} = \begin{cases} -\xi_k^b & \text{if } a > b,\\ \xi_k^b & \text{if } a \le b,\end{cases}, \qquad S_a\frac{\partial}{\partial\xi_k^b}S_a^{-1} = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial\xi_k^b} & \text{if } a > b,\\ \frac{\partial}{\partial\xi_k^b} & \text{if } a \le b.\end{cases}$$

因此，对于这些模，我们得到

$$\sigma\Theta_0^{\pm a}\sigma^{-1} = \pm\frac{\partial}{\partial\xi_{\mp j}^a}S_a, \quad \sigma\Theta_{-j}^{\pm a}\sigma^{-1} = \mp j\xi_{\pm j}^a S_a, \quad \sigma\Theta_j^{\pm a}\sigma^{-1} = -\frac{\partial}{\partial\xi_{\mp j}^a}S_a, \quad j \in \mathbb{Z}_{>0},$$

$$\sigma\theta_{-k}^c\sigma^{-1} = (-1)^{k+\frac{1}{2}}2k\xi_k^c S_c, \quad \sigma\theta_k^c\sigma^{-1} = \frac{\partial}{\partial\xi_k^c}S_c, \quad k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{>0}$$

我们仍需为 $1 \le a \le s$ 定义 $\sigma\alpha_0^a\sigma^{-1}$。公式（3.49）表明如下:

$$\sigma\alpha_0^a\sigma^{-1} = T_a := -\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^a\frac{\partial}{\partial\xi_k^a} + \sum_{k=0}^{\infty}\xi_{-k}^a\frac{\partial}{\partial\xi_{-k}^a}. \tag{3.77}$$

注释 3.9 注意，这里我们使用场 $\Theta^{\pm a}(z)$，而不是 $\theta^{\pm a}(z)$，这意味着我们不考虑算子 Q_a。使用 $\theta^{\pm a}(z)$ 而不是 $\Theta^{\pm a}(z)$时，算子 Q_a 会出现在场 $\theta^{\pm a}(z)$ 中，我们可以假设 $\sigma Q_a\sigma^{-1} = q_a$，但此时 $\sigma\alpha_0^a\sigma^{-1} = q_a\frac{\partial}{\partial q_a}$。

利用以上所有结果和公式（3.59），我们得到 $1 \le a \le s < c \le r + s$:

$$\begin{aligned}
\sigma b^{\pm a}(z)\sigma^{-1} &= e^{\pm z\cdot t^{(a)}}\Xi^{+a}(z)z^{\pm T_a}e^{\pm z\cdot\tilde{\partial}_{t^{(a)}}}S_a,\\
\sigma b^{c}(z)\sigma^{-1} &= e^{z\circ t^{(c)}}\Xi^{c}(z)e^{2(z\circ\tilde{\partial}_{t^{(c)}})}S_c.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

注 3.10 因此，我们总是希望按一种优先顺序来排列格拉斯曼变量，即字典序，也就是 $\xi_i^k <_{\text{lex}} \xi_j^\ell$，当 $k < \ell$ 时，或当 $k = \ell$ 和 $i < j$ 时。因此，我们总是按以下顺序书写单项式。

$$\xi_{i_1}^{k_1}\xi_{i_2}^{k_2}\cdots\xi_{i_m}^{k_m}, \quad with\ (i_1,k_1) <_{\text{lex}} (i_2,k_2) <_{\text{lex}} \cdots <_{\text{lex}} (i_m,k_m).$$

我们使用顶点算子 (3.78) 推导 $1 \le a \le d \le s$

$$\begin{aligned}
&\sigma C^{\pm a,\pm d}(z,w)\sigma^{-1} = \sigma : b^{\pm a}(z)b^{\pm d}(w) : \sigma^{-1} \\
&= i_{z,w}\left(\frac{1}{z-w}\right)^{\delta_{ad}} e^{\pm(z\cdot t^{(a)}+w\cdot t^{(d)})}\Xi^{\pm a}(z)\Xi^{\pm d}(w)z^{\pm T_a}w^{\pm T_d}e^{\pm(z^{-1}\cdot\tilde\partial_{t^{(a)}}+w^{-1}\cdot\tilde\partial_{t^{(d)}})}S_aS_d, \\
&\sigma C^{+a,-d}(z,w)\sigma^{-1} = \sigma : b^{+a}(z)b^{-d}(w) : \sigma^{-1} \\
&= (z-w)^{\delta_{ad}}\, e^{z\cdot t^{(a)}-w\cdot t^{(d)}}\Xi^{+a}(z)\Xi^{-d}(w)z^{T_a}w^{-T_d}e^{(z^{-1}\cdot\tilde\partial_{t^{(a)}}-w^{-1}\cdot\tilde\partial_{t^{(d)}}}S_aS_d - i_{z,w}\left(\frac{\delta_{ad}}{z-w}\right),
\end{aligned} \tag{3.79}$$

对于 $s < a \le c \le r+s$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sigma C^{a,c}(z,w) : \sigma^{-1} = \sigma : b^{a}(z)b^{c}(w) : \sigma^{-1} \\
&= i_{z,w}\left(\frac{z+w}{w-z}\right)^{\delta_{ac}} \Xi^{a}(z)\Xi^{b}(w)e^{z\circ t^{(a)}+w\circ t^{(c)}}e^{2(z^{-1}\circ\tilde\partial_{t^{(a)}}+w^{-1}\circ\tilde\partial_{t^{(c)}})}S_aS_c - i_{z,w}\frac{\delta_{ac}}{z+w}.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

最后，当 $1 \le a \le r < c \le r+s$ 时，混合项为

$$\begin{aligned}
\sigma C^{\pm a,c}(z,w) : \sigma^{-1} &= \sigma : b^{\pm a}(z)b^{c}(w) : \sigma^{-1} \\
&= e^{\pm z\cdot t^{(a)}+w\circ t^{(c)}}\Xi^{+a}(z)\Xi^{c}(w)z^{\pm T_a}e^{\pm z^{-1}\cdot\tilde\partial_{t^{(a)}}+w^{-1}\circ\tilde\partial_{t^{(c)}})}S_aS_c.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

4 KP 型层级

4.1 KP、BKP 和 DKP 层级的费米子描述

KP层级。回忆模 F 的荷分解 (3.3)。根据定义，非零元素 $\tau \in F^{(0))}$ 满足 KP 层级（参见 (1.5)），如果

$$S(\tau\otimes\tau) = \sum_{i\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_i^+\tau\otimes\psi_{-i}^-\tau = 0. \tag{4.1}$$

注意，(4.1) 可以改写为 s 对带电自由费米子场$\psi^{\pm j}(z)$ 的形式，这些场由 (3.17) 定义，如下所示。:

$$S(\tau\otimes\tau) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_i^{+j}\tau\otimes\psi_{-i}^{-j}\tau = \mathrm{Res}_{z=0}\sum_{j=1}^{s}\psi^{+j}(z)\tau\otimes\psi^{-j}(z)\tau dz. \tag{4.2}$$

方程（4.1）或（4.2）是费米子图景中的KP层级。若应用第3.7.1节中构造的同构 σ，它就变为一个微分方程层级。取 $\tau \in F^{(m)}$ 会产生相同的层级。

B　　KP层级。回顾第 3.2 节，旋量模 F_b 是一个　　n

不可约的 $C\ell_b$-模 F_b。下面关于非零 $\tau \in F_b$ 的方程称为费米子图景中的 BKP 层级（参见 (1.7)）：

$$S_B(\tau\otimes\tau)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\tilde{\phi}_i\tau\otimes\tilde{\phi}_{-i}\tau=\frac{1}{2}\tau\otimes\tau. \tag{4.3}$$

该方程描述了 B_∞-真空向量 $|0\rangle$的轨道，更多详情请参见 [16] 。方程(4.3)可用 s 对带电自由费米子场 $\psi^{\pm b}(z)$、 $b=1$、.. .、 s以及 r 中性扭曲自由费米子场 $\tilde{\phi}^c(z)$、 $c=s+1$、.. .、 $s+r$改写如下：若 $r=2p+1$ 为奇数，则(4.3)变为

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0}\Bigg(&\sum_{b=1}^{s}\left(\psi^{+b}(z)\otimes\psi^{-b}(z)+\psi^{-b}(z)\otimes\psi^{+b}(z)\right)+\\&+\sum_{c=s+1}^{s+2p+1}z^{-1}\tilde{\phi}^c(z)\otimes\tilde{\phi}^c(-z)\Bigg)(\tau\otimes\tau)dz=\frac{1}{2}\tau\otimes\tau.\end{aligned} \tag{4.4}$$

然而，如果 $r=2p$ 是偶数，我们有额外生成元 σ_0 ，因此 (4.3) 变为：

$$\begin{aligned}\left\{\sigma_0\otimes\sigma_0+\mathrm{Res}_{z=0}\Bigg(\right.&\sum_{b=1}^{s}\left(\psi^{+b}(z)\otimes\psi^{-b}(z)+\psi^{-b}(z)\otimes\psi^{+b}(z)\right)+\\&\left.+\sum_{c=s+1}^{s+2p}z^{-1}\tilde{\phi}^c(z)\otimes\tilde{\phi}^c(-z)\Bigg)dz\right\}(\tau\otimes\tau)=\frac{1}{2}\tau\otimes\tau.\end{aligned} \tag{4.5}$$

DKP 层级 回顾第 3.2 节，旋量模 F_d 分解为两个不可约的 d_∞-模 $F_d^{\overline{0}}\oplus F_d^{\overline{1}}$,。 $F_d^{\overline{0}}$ 的最高权向量是 $|\overline{0}\rangle=|0\rangle$，而 $F_d^{\overline{1}}$的最高权向量是$|\overline{1}\rangle=\sqrt{2}\phi_{-\frac{1}{2}}|0\rangle$。关于非零 $\tau_a\in F_d^a$的下列方程称为费米子图景中的 DKP 层级：

$$S_D(\tau_a\otimes\tau_a)=\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\phi_i\tau_a\otimes\phi_{-i}\tau_a=0,\quad a=\overline{0}\text{ or }\overline{1}. \tag{4.6}$$

该方程描述了最高权向量 $|\overline{a}\rangle$的 D_∞ 轨道，详见 [16] 更多细节。该群由满足 g （偶）可逆元素组成，其中 $g\phi_j g^{-1}=\sum_i a_{ij}\phi_i$，这里 $\sum_k a_{kj}a_{-k,\ j}=\delta_{i,\ -j}$，即 g 保持(2.19) 的双线性形式 $(\cdot,\cdot)_d$不变。

方程 (4.6) 可用 s 对带电自由费米子场 $\psi^{\pm b}(z)$ 和 r 中性扭曲场 $\tilde{\phi}^c(z)$ 表示，这些场在第 3.5 节中引入。若 $r=2p$为偶数，则 (4.6) 变为

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0}\Bigg(&\sum_{b=1}^{s}\left(\psi^{+b}(z)\otimes\psi^{-b}(z)+\psi^{-b}(z)\otimes\psi^{+b}(z)\right)+\\&+\sum_{c=s+1}^{s+2p}z^{-1}\tilde{\phi}^c(z)\otimes\tilde{\phi}^c(-z)\Bigg)(\tau_a\otimes\tau_a)dz=0.\end{aligned} \tag{4.7}$$

然而　；若 $r=2p-1$ 为奇数，则存在一个额外生成元 σ_0。于是 (4.6) 变为　：

$$\Big\{\sigma_0\otimes\sigma_0+\mathrm{Res}_{z=0}\left(\sum_{b=1}^{s}\big(\psi^{+b}(z)\otimes\psi^{-b}(z)+\psi^{-b}(z)\otimes\psi^{+b}(z)\big)+\right.\\ \left.+\sum_{c=s+1}^{s+2p-1}z^{-1}\tilde{\phi}^c(z)\otimes\tilde{\phi}^c(-z)\right)dz\Big\}(\tau_a\otimes\tau_a)=0. \tag{4.8}$$

4.2　CKP 层级的辛玻色子描述

回顾第 3.3 节，魏尔模 F_c 分解为两个不可约 c_∞ 模 $F_c^{\overline{0}}$ 和 $F_c^{\overline{1}}$，其最高权向量分别为 $|\overline{0}\rangle=|0\rangle$ 和 $|\overline{1}\rangle=b_{-\frac{1}{2}}|0\rangle$。费米子图景中的 CKP 层级（见 [26]）是定义在 $\tau\in F_c^{\overline{0}}$ 上的如下方程：

$$S_C(\tau\otimes\tau)=\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}(-1)^{i+\frac{1}{2}}b_i\tau\otimes b_{-i}\tau=0. \tag{4.9}$$

方程（4.9）可以用 s 带电场 $b^{\pm a}(z)$ 和 r 中性场 $b^c(z)$ 来重写：

$$\sum_{a=1}^{s}\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\big(b_i^{-a}\tau\otimes b_{-i}^{+a}\tau-b_i^{+a}\tau\otimes b_{-i}^{-a}\tau\big)+\sum_{c=s+1}^{r+s}\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}(-1)^{i+\frac{1}{2}}b_i^c\tau\otimes b_{-i}^c\tau=0. \tag{4.10}$$

用辛玻色场表示时，它变为

$$\mathrm{Res}_{z=0}\Big\{\sum_{a=1}^{s}\big(b^{-a}(z)\tau\otimes b^{+a}(z)\tau-b^{+a}(z)\tau\otimes b^{-a}(z)\tau\big)+\sum_{c=s+1}^{r+s}b^c(z)\tau\otimes b^c(-z)\tau\Big\}dz=0. \tag{4.11}$$

遗憾的是，取 $\tau\in F_c^{\overline{1}}$ 并不会得到相同的层级。

4.3 多分量 KP、BKP、CKP 和 DKP 层级的玻色子描述

KP 层级 方程（4.1）或（4.2）是费米子图景中的 KP 层级。若应用在（3.7.1）中构造的同构σ：$F\xrightarrow{\sim}B_s$，则它会成为一个微分方程层级，使得对于 $\tau\in F^{(0)}$

$$\sigma(\tau)=\tau(q,t)=\sum_{|\underline{k}|=0}\tau_{\underline{k}}(t)q^{\underline{k}}$$

成为关于 $t_1^{(i)}$、$t_2^{(i)}$ 等的 $t=$ 中的一个函数、$i=1$、.....、s，并且位于 sl_s 根格中，其格点为 $\underline{k}=(k_1,k_2,\dots k_s)$，其中 $|\underline{k}|=k_1+k_2+\cdots+k_s=0$，且 $q^{\underline{k}}=q_1^{k_1}q_2^{k_2}\cdots q_s^{k_s}$。若 $s=1$，则得到经典 KP 层级。对于 $s>1$，我们得到 s 分量 KP 层级。方程（4.1）描述了 $|0\rangle$ [18] 的 GL_∞ 群轨道。注意，在费米子图景中，这个方程是相同的。它只是

应用同构 σ 和 $\tau \in B_s^{(0)}$后，我们会因 s 的不同选择而得到不同的描述。利用费米子顶点算子 (3.33) 和 (4.2)，我们改写 (4.1)，得到 s 分量 KP 层级。令 $\underline{e}_i$ 为$\mathbb{Z}^s$中的基向量，其第 i 个位置为 1，其余位置为 0，并令 $|\underline{k}|_j = k_1+k_2+\cdots+k_j$。那么，对于每一对满足 $|\underline{k}| = |\underline{\ell}| = 0$ 的 $\underline{k}$、$\underline{\ell}$，我们都有定义在 $\tau_{\underline{k}}(t)$ 上的 s 分量 Hirota 双线性方程 KP 层级 (1.34)，$|\underline{k}| = 0$ （参见 (4.2)），它在玻色子图景中描述轨道$GL_\infty|0\rangle$。取 $\tau \in F^{(m)}$，我们便在$\tau_{\underline{k}}(t)$ 上得到相同的方程，$|\underline{k}| = m$，对应于 $|m\rangle$ 的 GL_∞ 轨道。

BKP 层级 在此情形下，F_b 不可约，且 $\sigma : F_b \xrightarrow{\sim} B_{s,\ r}$，其中$B_{s,\ r}$、$r = 2p$ 或 $r = 2p+1$由（3.67）给出，而 σ 则在（3.7.1）中构造。我们记

$$\sigma(\tau) = \tau(q,t,\theta) = \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^s,\underline{\ell}\in\mathbb{Z}_2^p} \tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(t) q^{\underline{k}}\theta^{\underline{\ell}},$$

其中 $q^{\underline{k}} = q_1^{k_1}q_2^{k_2}\cdots q_s^{k_s}$且 $\theta^{\underline{\ell}} = \theta_1^{\ell_1}\theta_2^{\ell_2}\cdots\theta_p^{\ell_p}$。现在利用 σ 并代入顶点算子（1.32）、（3.71）；若 $r = 2p$，则对 $\sigma\sigma_0\sigma^{-1}$使用公式（3.72），可得:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{z=0}\Big(\sum_{b=1}^{s}\Big((-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|_{b-1}} z^{k_b-\overline{k}_b-2+2\delta_{bs}} e^{z\cdot(t^{(b)}-\overline{t}^{(b)})} e^{z^{-1}\cdot(\tilde\partial_{\overline{t}^{(b)}}-\tilde\partial_{t^{(b)}})} \tau_{\underline{k}+\underline{e}_s-\underline{e}_b,\underline{\ell}}(t)\tau_{\overline{\underline{k}}+\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t}) + \\
&+ (-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|_{b-1}} z^{-k_b+\overline{k}_b-2-2\delta_{bs}} e^{z\cdot(\overline{t}^{(b)}-t^{(b)})} e^{z^{-1}\cdot(\tilde\partial_{t^{(b)}}-\tilde\partial_{\overline{t}^{(b)}})} \tau_{\underline{k}+\underline{e}_s+\underline{e}_b,\underline{\ell}}(t)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t})\Big) + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{2p}(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|+|\underline{\ell}+\overline{\underline{\ell}}|\left[\frac{c-1}{2}\right]+(c-1)(\ell_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}+\overline{\ell}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}+1)} z^{-1} e^{z\circ(t^{(s+c)}-\overline{t}^{(s+c)})}\times \\
&\quad e^{2(z^{-1}\circ(\tilde\partial_{\overline{t}^{(s+c)}}-\tilde\partial_{t^{(s+c)}}))}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}+\underline{e}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}}(t)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}+\underline{e}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}}(\overline{t}) \\
&+ \frac{\delta_{r,2p+1}}{2}(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|+|\underline{\ell}+\overline{\underline{\ell}}|} z^{-1} e^{z\circ(t^{(s+r)}-\overline{t}^{(s+r)})} e^{2(z^{-1}\circ(\tilde\partial_{\overline{t}^{(s+r)}}-\tilde\partial_{t^{(s+r)}}))}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}}(t)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t})\Big)dz \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta_{r,2p}}{2}(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|+|\underline{\ell}+\overline{\underline{\ell}}|}\right)\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}}(t)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t}).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

这里，$[x]$ 表示小于或等于 x的最大整数。

DKP 层级 这种情况与 BKP 情况类似，但在这里F_d 分解为两个不可约 d_∞ 模。同样有两种情况，即 $r = 2p$ 和$r = 2p-1$，我们记为

$$\sigma(\tau_a) = \tau^a(q,t,\theta) = \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^s,\underline{\ell}\in\mathbb{Z}_2^p,\,|\underline{k}|+|\underline{\ell}|=a \bmod 2} \tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(t) q^{\underline{k}}\theta^{\underline{\ell}},$$

于是，费米子 DKP 层级转化为以下方程组，对所有满足$|\underline{k}|+|\underline{\ell}|+1=a$ 模 2 的$\underline{k}$、$\overline{\underline{k}}\in\mathbb{Z}^s$、 $\underline{\ell}$、$\overline{\underline{\ell}}\in\mathbb{Z}_2^p$均成立:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=0}\Big(&\sum_{b=1}^{s}\big((-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|_{b-1}}z^{k_b-\overline{k}_b-2+2\delta_{bs}}e^{z\cdot(t^{(b)}-\overline{t}^{(b)})}e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(b)}}-\tilde{\partial}_{t^{(b)}})}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s-\underline{e}_b,\underline{\ell}}(t)\tau_{\overline{\underline{k}}+\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t})+\\
&+(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|_{b-1}}z^{-k_b+\overline{k}_b-2-2\delta_{bs}}e^{z\cdot(\overline{t}^{(b)}-t^{(b)})}e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{t^{(b)}}-\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(b)}})}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s+\underline{e}_b,\underline{\ell}}(t)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t})\big)+\\
&+\frac{1}{2}\sum_{c=1}^{r}(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|+|\underline{\ell}+\overline{\underline{\ell}}|\left[\frac{c-1}{2}\right]+(c-1)(\ell\left[\frac{c+1}{2}\right]+\overline{\ell}\left[\frac{c+1}{2}\right]+1)}z^{-1}e^{z\circ(t^{(s+c)}-\overline{t}^{(s+c)})}\times\\
&\qquad e^{2(z^{-1}\circ(\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(s+c)}}-\tilde{\partial}_{t^{(s+c)}}))}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}+\underline{e}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}}(t)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}+\underline{e}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}}(\overline{t})\big)dz\\
&=\frac{\delta_{r,2p-1}}{2}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}+\underline{e}_p}(t)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}+\underline{e}_p}(\overline{t}).
\end{aligned}\tag{4.13}$$

在上文中，我们用到了 $(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|+|\underline{\ell}+\overline{\underline{\ell}}|}=1$。

注 4.1 注意，对于相同的 $r=2p$，*DKP* 层级的方程作为 *BKP* 层级方程的子集出现。也就是说，只取那些满足 $|\underline{k}|+|\underline{\ell}|+1=|\overline{\underline{k}}|+|\overline{\underline{\ell}}|+1=a$ 模 2 的 $\underline{k}$、 $\underline{\ell}$ 以及 $\overline{\underline{k}}$、 $\overline{\underline{\ell}}$。由于 $a=\overline{0}$ 和 $a=\overline{1}$ 都出现在 *BKP* 层级中，除了这两个 *DKP* 层级之外，我们还得到所谓的修正 *DKP* 方程。参见（*[16],* 第 *2* 节）。

CKP层级现在利用同构 σ，参见第3.7.2小节，我们假设 $\tau(t,y,\xi)\in\sigma(F_0)$，因此

$\tau(t,\xi)\in$

$$\mathbb{C}[t_i^{(a)},t_j^{(c)},\xi_k^a,\xi_\ell^c|\,1\le a\le s<c\le s+r,\,i\in\mathbb{Z}_{>0},\,j\in\mathbb{Z}_{>0,odd},\,0\neq k\in\mathbb{Z},\,\ell\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\ge0}].\tag{4.14}$$

with

$$\tau(t,\xi)=\sum_w\tau_w(t)w,$$

其中

$$w=\xi_{k_1^1}^1\cdot\cdot\xi_{k_{i_1}^1}^1\xi_{\ell_1^1}^1\cdot\cdot\xi_{\ell_{j_1}^1}^1\xi_{k_2^1}^2\cdot\cdot\xi_{k_{i_2}^2}^2\xi_{\ell_2^1}^2\cdot\cdot\xi_{k_{j_2}^2}^2\cdot\cdot\xi_{k_1^s}^s\cdot\cdot\xi_{k_{i_s}^s}^s\xi_{\ell_1^s}^s\cdot\cdot\xi_{\ell_{j_s}^s}^s\xi_{m_1^{s+1}}^{s+1}\cdots\xi_{m_{j_{s+1}}^{s+1}}^{s+1}\cdot\cdot\xi_{m_1^{s+r}}^{s+r}\cdot\cdot\xi_{m_{j_{s+r}}^{s+r}}^{s+r},\tag{4.15}$$

使得 i_a、 $j_b\in\mathbb{Z}_{\ge0}$、 $k_p^a\in\mathbb{Z}_{<0}$、 $\ell_p^a\in\mathbb{Z}_{>0}$ 和 $m_q^c\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\ge0}$，其中 $k_p^a<k_{p+1}^a$、$\ell_p^a<\ell_{p+1}^a$ 和 $m_q^c<m_{q+1}^c$ 和 $i_1+\cdots i_s+j_1+\cdots+j_{s+r}\in2\mathbb{Z}$。

为描述 CKP 微分方程层级，我们将使用以下记号。设 ξ_j^b（分别地， ξ_k^c）是表达式 (4.15) 中出现（分别地，未出现）的一个格拉斯曼变量。我们用 $w\backslash\xi_j^b$（分别地， $w\cup\xi_k^c$）表示通过从 w 中移除 ξ_j^b（分别地，将 ξ_k^c 加到 w 中并按首选字典序排列）得到的单项式。将 (3.78) 代入 (4.11)，由此得到玻色子图景下的多分量 CKP 层级。设 w 由 (4.15) 给出

，而 $\overline{w}$ 由同一表达式给出，但其中所有 ξ_j^b 均替换为 $\overline{\xi}_j^b$，使得 w 和 $\overline{w}$ 中出现的格拉斯曼变量数量为奇数，则可得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=0}\Bigg\{ \sum_{a=1}^{s} \Bigg[& - z^{i_a-\overline{i}_a-j_a+\overline{j}_a} e^{z\cdot(t^{(a)}-\overline{t}^{(a)})} e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{t^{(a)}}-\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(a)}})} \times \\
& \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_{<0},\, k\neq k_1^a,\dots,k_{i_a}^a} N_a(w,\xi_k^a) z^k \tau_{w\cup\xi_k^a}(t) - \sum_{\ell=\ell_1^a,\dots,\ell_{j_a}^a} \ell N_a(w,\xi_\ell^a) z^\ell \tau_{w\setminus\xi_\ell^a}(t) \right) \times \\
& \left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}_{>0},\, \ell\neq\overline{\ell}_1^a,\dots,\overline{\ell}_{j_a}^a} N_a(\overline{w},\overline{\xi}_\ell^a) z^{-\ell} \tau_{\overline{w}\cup\overline{\xi}_\ell^a}(\overline{t}) - \sum_{k=\overline{k}_1^a,\dots,\overline{k}_{i_a}^a} k N_a(\overline{w},\overline{\xi}_k^a) z^{-k} \tau_{\overline{w}\setminus\overline{\xi}_k^a}(\overline{t}) \right) \\
& \quad - (-z)^{j_a-\overline{j}_a-i_a+\overline{i}_a} e^{-z\cdot(t^{(a)}-\overline{t}^{(a)})} e^{-z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{t^{(a)}}-\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(a)}})} \times \\
& \left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}_{>0},\, \ell\neq\ell_1^a,\dots,\ell_{j_a}^a} N_a(w,\xi_\ell^a)(-z)^{-\ell} \tau_{w\cup\xi_\ell^a}(t) - \sum_{k=k_1^a,\dots,k_{i_a}^a} k N_a(w,\xi_k^a)(-z)^{-k} \tau_{w\setminus\xi_k^a}(t) \right) \times \\
& \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_{k<0},\, k\neq\overline{k}_1^a,\dots,\overline{k}_{i_a}^a} N_a(\overline{w},\overline{\xi}_k^a)(-z)^{k} \tau_{\overline{w}\cup\overline{\xi}_k^a}(\overline{t}) - \sum_{\ell=\overline{\ell}_1^a,\dots,\overline{\ell}_{j_a}^a} \ell N_a(\overline{w},\overline{\xi}_\ell^a)(-z)^{\ell} \tau_{\overline{w}\setminus\overline{\xi}_\ell^a}(\overline{t}) \right) \Bigg] + \\
& + \sum_{c=s+1}^{r+s} \Bigg[e^{z\circ(t^{(c)}-\overline{t}^{(c)})} e^{2(z^{-1}\circ(\tilde{\partial}_{t^{(c)}}-\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(c)}}))} \times \\
& \left(\sum_{\substack{m\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0},\\ m\neq m_1^c,\dots,m_{j_c}^c}} N_c(w,\xi_m^c) z^{-m-\frac{1}{2}} \tau_{w\cup\xi_m^c}(t) - \sum_{m=m_1^c,\dots,m_{j_c}^c} (-1)^{m+\frac{1}{2}} 2m N_c(w,\xi_m^c) z^{m-\frac{1}{2}} \tau_{w\setminus\xi_m^c}(t) \right) \times \\
& \left(\sum_{\substack{m\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0},\\ m\neq\overline{m}_1^c,\dots,\overline{m}_{j_c}^c}} N_c(\overline{w},\overline{\xi}_m^c)(-z)^{-m-\frac{1}{2}} \tau_{\overline{w}\cup\overline{\xi}_m^c}(\overline{t}) - \sum_{m=\overline{m}_1^c,\dots,\overline{m}_{j_c}^c} (-1)^{m+\frac{1}{2}} 2m N_c(\overline{w},\overline{\xi}_m^c)(-z)^{m-\frac{1}{2}} \tau_{\overline{w}\setminus\overline{\xi}_m^c}(t) \right) \Bigg] \Bigg\} dz \\
& = 0,
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

其中，$N_b(w,\xi_n^b) = (-1)^{\{w\text{ 中指标为 }p<n\}}$. 的 ξ_p^b 的数量

4.4 KP、BKP、CKP 和 DKP 层级的波函数、Sato-Wilson 方程和 Lax 方程

KP层级

我们沿用 [15], 第四节中的论述。第一步是在(1.34)中将所有 $t_1^{(j)}$ 和 $\overline{t}_1^{(j)}$ 分别替换为 $t_1^{(j)}+x$和 $\overline{t}_1^{(j)}+\overline{x}$，从而 τ 函数也取决于

关于变量 x。引入 $s \times s$-矩阵

$$V^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, z) = P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z) R^{\pm}(\underline{\alpha}; \pm z) S^{\pm}(t, \pm z) e^{\pm xz},$$

其中

$$\begin{aligned} P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z)_{ij} &= \frac{(-1)^{|\underline{e}_i|_{j-1}} z^{\delta_{ij}-1}}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)} e^{\mp z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{t^{(j)}}} \left(\tau_{\underline{\alpha}\pm(\underline{e}_i - \underline{e}_j)}(x,t) \right), \\ R^{\pm}(\underline{\alpha}; \pm z) &= \sum_{j=1}^{s} (-1)^{|\underline{\alpha}|_{j-1}} z^{\pm\alpha_j} E_{jj}, \\ S^{\pm}(t, \pm z) &= \sum_{j=1}^{s} e^{\pm z\cdot t^{(j)}} E_{jj}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

于是 (1.34) 变为

$$\mathrm{Res}_{z=0} \sum_{j=1}^{s} V^{+}(\underline{\alpha}; x, t, z) E_{jj} V^{-}(\underline{\beta}; \overline{x}, \overline{t}, z)^{t} dz = 0. \tag{4.18}$$

令 $\partial = \partial_x$，并利用基本引理（见 [15], 引理 4.1），我们推导出矩阵伪微分算子的如下表达式。

$$\sum_{j=1}^{s} (P^{+}(\underline{\alpha}; x, t, \partial) R^{+}(\underline{\alpha}; \partial) E_{jj} R^{-}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^{*} P^{-}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^{*})_{-} = 0. \tag{4.19}$$

（注意，不能简单地在公式(4.17) 中用 ∂ 替换 $\pm z$。首先必须将 $P^{\pm}(\pm z)$写成 $P^{\pm}(\pm z) = I + \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{\pm}(\pm z)^{-k}$，然后写成 $P^{\pm}(\partial) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{\pm} \partial^{-k}$。这意味着，$P^{\pm}(\pm z)$ 是伪微分算子 $P^{\pm}(\partial)$ 的符号。）

取 $\underline{\alpha} = \underline{\beta}$，我们推导出佐藤-威尔逊方程

$$\begin{aligned} &P^{-}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^{*} = P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^{-1}, \\ &\frac{\partial P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial)}{\partial t_i^j} = -(P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial) \partial^{i} E_{jj} P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^{-1})_{-} P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial). \end{aligned} \tag{4.20}$$

现在介绍 Lax 算子

$$\begin{aligned} L = L(\underline{\beta}; t, x, \partial) = P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial) \partial P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^{-1}, \\ C^{j} = C^{j}(\underline{\beta}; x, t, \partial) = P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial) E_{jj} P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^{-1}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

我们由（4.20）推得

$$\frac{\partial L}{\partial t_i^{(j)}} = [(L^{i} C^{j})_{+}, L], \quad \frac{\partial C^{k}}{\partial t_i^{(j)}} = [(L^{i} C^{j})_{+}, C^{k}]. \tag{4.22}$$

BKP 层级（第一种方法）

一般而言 所有情况下都可以定义一个 $(2s + r) \times (2s + r)$-矩阵值波函数，形式为 i n

与前一种情况一样。然而，一般而言，相应的波算子 $P^{\pm}(\partial)$ 不可逆。这是个问题。因此，我们采用另一种方法。若假设 $s \neq 0$，且 $r = 0$ 或 s 任意而 $r = 1$，便不会有问题。在这些情况下，波算子 $P^{\pm}(\partial)$ 是可逆的。$r = 0$ 的情况表明应采用以下方法（$r = 1$ 的情况则表明应采用第二种方法，我们将在本节后面介绍）。因此，以下假设 $s \neq 0$。若 $r \geq 1$，我们在方程 (4.12) 中令所有变量 $t_j^{(c)} = \overline{t}_j^{(c)} = 0$ 对于 $c > s$ 和 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。接着，将所有 $t_1^{(a)}$（对于 $1 \leq a \leq s$）替换为 $t_1^{(a)} + x$，并类似地将 $\overline{t}_1^{(a)}$ 替换为 $\overline{t}_1^{(a)} + \overline{x}$。定义 $2s \times 2s$-矩阵值波函数 $V^{\pm}(\alpha;\, x, t, z)$ 如下：

$$\tilde{V}^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, z) = P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z) R^{\pm}(\underline{\alpha}; \pm z) S^{\pm}(t, \pm z) e^{\pm xz}, \tag{4.23}$$

其中，对于 $1 \leq i$、$j \leq s$ 以及所有 $a = 1$、.....、r

$$\begin{aligned}
P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z)_{ij} &= \frac{(-1)^{|\underline{e}_i|_{j-1}} z^{\delta_{ij}-1}}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)} e^{\mp z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{t^{(j)}}} \left(\tau_{\underline{\alpha}\pm(\underline{e}_i - \underline{e}_j)}(x,t)\right)\big|_{t^{(s+a)}=0}, \\
P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z)_{s+i,j} &= \frac{(-1)^{|\underline{e}_i|_{j-1}} z^{-\delta_{ij}-1}}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)} e^{\mp z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{t^{(j)}}} \left(\tau_{\underline{\alpha}\mp(\underline{e}_i + \underline{e}_j)}(x,t)\right)\big|_{t^{(s+a)}=0}, \\
P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z)_{i,s+j} &= \frac{(-1)^{|\underline{e}_i|_{j-1}} (-z)^{-\delta_{ij}-1}}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)} e^{\pm((-z^{-1})\cdot\tilde{\partial}_{t^{(j)}})} \left(\tau_{\underline{\alpha}\pm(\underline{e}_i + \underline{e}_j)}(x,t)\right)\big|_{t^{(s+a)}=0}, \\
P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z)_{s+i,s+j} &= \frac{(-1)^{|\underline{e}_i|_{j-1}} (-z)^{\delta_{ij}-1}}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)} e^{\pm((-z^{-1})\cdot\tilde{\partial}_{t^{(j)}})} \left(\tau_{\underline{\alpha}\mp(\underline{e}_i - \underline{e}_j)}(x,t)\right)\big|_{t^{(s+a)}=0},
\end{aligned} \tag{4.24}$$

and

$$\begin{aligned}
R^{\pm}(\underline{\alpha}; \pm z) &= \sum_{j=1}^{s} (-1)^{|\underline{\alpha}|_{j-1}} \left(z^{\pm\alpha_j} E_{jj} + (-z)^{\mp\alpha_j} E_{s+j,s+j}\right), \\
S^{\pm}(t, \pm z) &= \sum_{j=1}^{s} \left(e^{\pm z\cdot t^{(j)}} E_{jj} + e^{\mp(-z)\cdot t^{(j)}} E_{s+j,s+j}\right).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

对于 $r \geq 1$，定义 $2s \times r$-矩阵值函数

$$W^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, z) = (W^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t)_{ij}, z)_{1\leq i\leq 2s, 1\leq j\leq r}, = \sum_{n=0}^{\infty} W^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t)^n z^{-n},$$

with

$$\begin{aligned}
W^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, z)_{i,2c-1} &= \sqrt{-1}(-1)^{|\underline{k}|+|\underline{\ell}|_{c-1}} \frac{e^{\pm 2((z^{-1})\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+2c-1)}})} \tau_{\underline{k}\pm\underline{e}_i, \underline{\ell}+\underline{e}_c}(x,t)}{\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(x,t)}\big|_{t^{(s+a)}=0}, \\
W^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, z)_{s+i,2c-1} &= \sqrt{-1}(-1)^{|\underline{k}|+|\underline{\ell}|_{c-1}} \frac{e^{\pm 2((z^{-1})\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+2c-1)}})} \tau_{\underline{k}\mp\underline{e}_i, \underline{\ell}+\underline{e}_c}(x,t)}{\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(x,t)}\big|_{t^{(s+a)}=0}, \\
W^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, z)_{i,2c} &= (-1)^{|\underline{k}|+|\underline{\ell}|_c} \frac{e^{\pm 2((z^{-1})\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+2c)}})} \tau_{\underline{k}\pm\underline{e}_i, \underline{\ell}+\underline{e}_c}(x,t)}{\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(x,t)}\big|_{t^{(s+a)}=0}\big|_{t^{s+a}=0}, \\
W^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, z)_{s+i,2c} &= (-1)^{|\underline{k}|+|\underline{\ell}|_c} \frac{e^{\pm 2((z^{-1})\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+2c)}})} \tau_{\underline{k}\mp\underline{e}_i, \underline{\ell}+\underline{e}_c}(x,t)}{\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(x,t)}\big|_{t^{(s+a)}=0},
\end{aligned} \tag{4.26}$$

对于 $1 \le c \le p_\circ$ 如果 $r = 2p$，则全部如此；但如果 $r = 2p+1$，我们定义

$$
\begin{aligned}
W^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, z)_{i,r} &= \sqrt{-1}(-1)^{|\underline{k}|+|\underline{\ell}|} \frac{e^{\pm 2((z^{-1})\circ \tilde{\partial}_{t^{(s+r)}})} \tau_{\underline{k}\pm\underline{e}_i, \underline{\ell}+\underline{e}_{p+1}}(x,t)}{\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(x,t)}\Big|_{t^{(s+a)}=0}, \\
W^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, z)_{s+i,r} &= \sqrt{-1}(-1)^{|\underline{k}|+|\underline{\ell}|} \frac{e^{\pm 2(z^{-1}\circ \tilde{\partial}_{t^{(s+r)}})} \tau_{\underline{k}\mp\underline{e}_i, \underline{\ell}+\underline{e}_{p+1}}(x,t)}{\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(x,t)}\Big|_{t^{(s+a)}=0},
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

及 $2s \times 1$ 矩阵 $T^{\pm}(\alpha;\ x, t)$

$$
\begin{aligned}
T^{\pm}(\alpha; x, t)_{i1} &= \frac{\tau_{\underline{k}\pm\underline{e}_i, \underline{\ell}}(x,t)}{\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(x,t)}\Big|_{t^{s+a}=0}, \\
T^{\pm}(\alpha; x, t)_{s+i,1} &= \frac{\tau_{\underline{k}\mp\underline{e}_i, \underline{\ell}}(x,t)}{\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(x,t)}\Big|_{t^{s+a}=0}.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

因此，我们得到以下关于波函数的双线性恒等式:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{z=0} \sum_{j=1}^{s} V^{+}(\underline{\alpha}; x, t, z) \left(E_{jj} - E_{s+j,s+j}\right) V^{-}(\underline{\beta}; \overline{x}, \overline{t}, z)^t dz = \\
&(\frac{1}{2} - \frac{\delta_{r0}}{2}) W^{+}(\underline{\alpha}; x, t)^0 W^{-}(\underline{\beta}; \overline{x}, \overline{t})^{0t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta_{r,2p}}{2}(-1)^{|\underline{\alpha}-\underline{\beta}|}\right) T^{+}(\alpha; x, t) T^{-}(\beta; \overline{x}, \overline{t})^t.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

利用基本引理，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{s} \left(P^{+}(\underline{\alpha}; x, t, \partial) R^{+}(\underline{\alpha} - \underline{\beta}, \partial) \left(E_{jj} - E_{s+j,s+j}\right) P^{-}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^*\right)_{-} = \\
&\quad (\frac{1}{2} - \frac{\delta_{r0}}{2}) W^{+}(\underline{\alpha}; x, t)^0 \partial^{-1} W^{-}(\underline{\beta}; x, t)^{0t} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta_{r,2p}}{2}(-1)^{|\underline{\alpha}-\underline{\beta}|}\right) T^{+}(\alpha; x, t) \partial^{-1} T^{-}(\beta; x, t)^t.
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

取 $\underline{\alpha} = \underline{\beta}$，直接可验证(4.30)的右端等于0。

令 $\partial = \partial_x$ 并利用基本引理（见 [15], 引理 4.1），我们推导出矩阵伪微分算子的如下表达式

$$
\sum_{j=1}^{s} (P^{+}(\underline{\alpha}; x, t, \partial) R^{+}(\underline{\alpha}; \partial) \left(E_{jj} - E_{s+j,s+j}\right) R^{-}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^* P^{-}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^*)_{-} = 0.
\tag{4.31}
$$

令

$$
J = \sum_{j=1}^{s} E_{jj} - E_{s+j,s+j} = J^{-1},
\tag{4.32}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&JP^{-}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^* = P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^{-1} J, \\
&\frac{\partial P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial)}{\partial t_i^j} = -(P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial) \left(\partial^i E_{jj} - (-\partial)^i E_{s+j,s+j}\right) P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^{-1})_{-} P^{+}(\underline{\beta}; x, t, \partial).
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

现在引入 Lax 算子

$$\begin{aligned} L &= L(\underline{\beta};t,x,\partial) = P^+(\underline{\beta};x,t,\partial)J\partial P^+(\underline{\beta};x,t,\partial)^{-1},\\ D^j &= D^j(\underline{\beta};x,t,\partial) = P^+(\underline{\beta};x,t,\partial)\left(E_{jj}-E_{s+j,s+j}\right)P^+(\underline{\beta};x,t,\partial)^{-1},\\ E^j &= (D^j)^2 = E^j(\underline{\beta};x,t,\partial) = P^+(\underline{\beta};x,t,\partial)\left(E_{jj}+E_{s+j,s+j}\right)P^+(\underline{\beta};x,t,\partial)^{-1}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

我们由（4.33）推得,

$$\frac{\partial L}{\partial t_i^{(j)}} = [(L^iD^j)_+,L], \quad \frac{\partial D^k}{\partial t_i^{(j)}} = [(L^iD^j)_+,D^k], \quad \frac{\partial E^k}{\partial t_i^{(j)}} = [(L^iD^j)_+,E^k]. \tag{4.35}$$

Let

$$N = \sum_{j=1}^{s}\left(E_{j,s+j}+E_{s+,j}\right), \tag{4.36}$$

那么，利用 (4.24) 很容易验证,

$$P^-(\underline{\beta};x,t,\partial) = NP^+(\underline{\beta};x,t,\partial)N$$

现在令

$$K = JN = \sum_{j=1}^{s}\left(E_{j,s+j}-E_{s+j,j}\right), \tag{4.37}$$

then

$$L(\partial)^* = KL(\partial)K^{-1}, \quad D^j(\partial)^* = -KD^j(\partial)K^{-1}, \quad E^j(\partial)^* = KE^j(\partial)K^{-1}.$$

例 4.2 我们来考虑特殊情况 $s=1$。在这种情况下

$$\begin{aligned} L = &\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\partial + \begin{pmatrix}u_{11}^{(1)}&u_{12}^{(1)}\\u_{21}^{(1)}&-u_{11}^{(1)}\end{pmatrix}\partial^{-1} + \begin{pmatrix}u_{11}^{(2)}&-\frac{1}{2}u_{12x}^{(1)}\\-\frac{1}{2}u_{21x}^{(1)}&u_{11}^{(2)}+u_{11x}^{(1)}\end{pmatrix}\partial^{-2}+\\ &+\begin{pmatrix}u_{11}^{(3)}&u_{12}^{(3)}\\u_{21}^{(3)}&-u_{11}^{(3)}-2u_{11x}^{(2)}-u_{11xx}^{(1)}\end{pmatrix}\partial^{-3}+\cdots, \end{aligned}$$

$$D = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&u_{12}^{(1)}\\u_{21}^{(1)}&0\end{pmatrix}\partial^{-2} + \begin{pmatrix}0&-u_{12x}^{(1)}\\-u_{21x}^{(1)}&0\end{pmatrix}\partial^{-3}+\cdots$$

我们从 L 的 *Lax* 方程中得到以下方程组:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{11}^{(1)}}{\partial t_2} &= \left(2u_{11}^{(2)} + u_{11x}^{(1)}\right)_x , \\
\frac{\partial u_{12}^{(1)}}{\partial t_2} &= 2(u_{11}^{(1)}u_{12}^{(1)} + u_{12}^{(3)}) , \\
\frac{\partial u_{21}^{(1)}}{\partial t_2} &= -2(u_{21}^{(1)}u_{11}^{(1)} + u_{21}^{(3)}) , \\
\frac{\partial u_{11}^{(1)}}{\partial t_3} &= \frac{1}{2}\left(6(u_{11}^{(1)})^2 + 6u_{11}^{(3)} + 3u_{12}^{(1)}u_{21}^{(1)} + 6u_{11x}^{(2)} + 2u_{11xx}^{(1)}\right)_x , \\
\frac{\partial u_{21}^{(1)}}{\partial t_3} &= \frac{1}{2}\left(-12u_{11}^{(2)}u_{21}^{(1)} + 6u_{21x}^{(3)} - u_{21xxx}^{(1)}\right) , \\
\frac{\partial u_{12}^{(1)}}{\partial t_3} &= \frac{1}{2}\left(12(u_{11}^{(2)} + u_{11x}^{(1)})u_{12}^{(1)} + 6u_{12x}^{(3)} - u_{12xxx}^{(1)}\right) .
\end{aligned}$$

BKP 层级（第二种方法）

在这种情况下，我们假设 $r \geq 1$，在这种情况下 s 可以为0。我们沿用前一种情况的方法，设定 $t_j^{(s+c)} = 0$，但仅对于 $1 \leq c < r$，我们不代入 $t_j^{(s+r)} = 0$，而是将它们保留在方程中。接下来我们将 $t_1^{(a)}$ 替换为 $t_1^{(a)} + x$，对于 $1 \leq a \leq s$ 和$a = s + r$，并定义 $(2s + 1) \times (2s + 1)$-矩阵值波函数

$$\tilde{V}^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, z) = P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z)R^{\pm}(\underline{\alpha}; \pm z)S^{\pm}(t, \pm z)e^{\pm xz}, \tag{4.38}$$

其中对于 $1 \leq i$、$j \leq 2s$，系数 $P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z)_{ij}$ 由（4.24）给出。其他系数如下（$a = 1, \ldots, r - 1$）

$$\begin{aligned}
P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z)_{2s+1,j} &= \frac{z^{-1}}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)} e^{\mp z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{t^{(j)}}} \left(\tau_{\underline{\alpha}\mp\underline{e}_j}(x,t)\right)\big|_{t^{(s+a)}=0}, \\
P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z)_{2s+1,s+j} &= \frac{(-z)^{-1}}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)} e^{\pm((-z^{-1})\cdot\tilde{\partial}_{t^{(j)}})} \left(\tau_{\underline{\alpha}\pm\underline{e}_j}(x,t)\right)\big|_{t^{(s+a)}=0}, \\
P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z)_{i,2s+1} &= \frac{1}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)} e^{\pm 2(z^{-1}\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+r)}})} \left(\tau_{\underline{\alpha}\pm\underline{e}_i}(t)\right)\big|_{t^{(s+a)}=0}, \\
P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z)_{s+i,2s+1} &= \frac{1}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)} e^{\pm 2((z^{-1})\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+r)}})} \left(\tau_{\underline{\alpha}\mp\underline{e}_i}(t)\right)\big|_{t^{(s+a)}=0}, \\
P^{\pm}(\underline{\alpha}; x, t, \pm z)_{2s+1,2s+1} &= \frac{1}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)} e^{\pm 2((z^{-1})\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+r)}})} \left(\tau_{\underline{\alpha}}(t)\right)\big|_{t^{(s+a)}=0},
\end{aligned} \tag{4.39}$$

其中 $\underline{\alpha} = (\underline{k}, \underline{\ell})$ 和 $|\underline{\alpha}| = |\underline{k}| + |\underline{\ell}|$。这里,

$$\begin{aligned}
R^{\pm}(\underline{\alpha}; \pm z) &= (-1)^{|\underline{\alpha}|}E_{2s+1,2s+1} + \sum_{j=1}^{s}(-1)^{|\underline{\alpha}|_{j-1}}\left(z^{\pm\alpha_j}E_{jj} + (-z)^{\mp\alpha_j}E_{s+j,s+j}\right), \\
S^{\pm}(t, \pm z) &= e^{2(z\circ t^{(s+r)})}E_{2s+1,2s+1} + \sum_{j=1}^{s}\left(e^{\pm(z\cdot t^{(j)})}E_{jj} + e^{\mp((-z)\cdot t^{(j)})}E_{s+j,s+j}\right).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

我们定义 $(2s+1)\times(r-1)$-矩阵 $W^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t,z)=(W^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t,z))_{i,\ j}$，其中 $W^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t,z)_{i,\ j}$ 对于 $i=1,\dots 2s$ 的定义如 (4.26) 所示，并定义

$$\begin{aligned}W^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,z)_{2s+1,2c-1}=&\sqrt{-1}(-1)^{|\underline{k}|+|\underline{\ell}|_{c-1}}\frac{e^{\pm 2((z^{-1})\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+2c-1)}})}\tau_{\underline{k},\underline{\ell}+\underline{e}_c}(x,t)}{\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(x,t)}\Big|_{t^{(s+a)}=0},\\ W^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,z)_{2s+1,2c}=&(-1)^{|\underline{k}|+|\underline{\ell}|_c}\frac{e^{\pm 2((z^{-1})\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+2c)}})}\tau_{\underline{k},\underline{\ell}+\underline{e}_c}(x,t)}{\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(x,t)}\Big|_{t^{(s+a)}=0}.\end{aligned}\tag{4.41}$$

还定义 $(2s+1)\times 1$-矩阵 $T^{\pm}(\alpha;\ x,t)$，其中 $T^{\pm}(\alpha;\ x,t)_{2s+1,1}=1$ 其余系数均由 (4.28) 给出。于是得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{z=0}\tilde{V}^{+}(\underline{\alpha};x,t,z)J(z)\tilde{V}^{-}(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t},z)^t dz=\\ &\qquad\frac{1}{2}W^{+}(\underline{\alpha};x,t)^0W^{-}(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t})^{0t}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta_{r,2p}}{2}(-1)^{|\underline{\alpha}-\underline{\beta}|}\right)T^{+}(\alpha;x,t)T^{-}(\beta;\overline{x},\overline{t})^t,\end{aligned}\tag{4.42}$$

其中

$$J(z)=\frac{1}{2}E_{2s+1,2s+1}z^{-1}+\sum_{i=1}^{s}(E_{jj}-E_{s+j,s+j}).\tag{4.43}$$

因此得到

$$\begin{aligned}&\left(P^{+}(\underline{\alpha};x,t,\partial)R^{+}(\underline{\alpha}-\underline{\beta},\partial)J(\partial)P^{-}(\underline{\beta};x,t,\partial)^*\right)_{-}=\\ &\frac{1}{2}W^{+}(\underline{\alpha};x,t)^0\partial^{-1}W^{-}(\underline{\beta};x,t)^{0t}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta_{r,2p}}{2}(-1)^{|\underline{\alpha}-\underline{\beta}|}\right)T^{+}(\alpha;x,t)\partial^{-1}T^{-}(\beta;x,t)^t.\end{aligned}\tag{4.44}$$

现在取 $\underline{\alpha}=\underline{\beta}$，不难验证，若 $r=2p+1$，含有 $W^{\pm}$ 的部分等于零，并且 $T^{\pm}$ 等于常数系数 $P^{\pm}-I+E_{2s+1,2s+1}$。若 $r=2p$，则 $T^{\pm}$ 部分消失，且 $W^{\pm}$ 表达式中的许多项相互抵消，但两个$W^{\pm}$的最后一列（即第 $2p-1$ 列）除外。仔细检查可知，这两种情况下均有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{z=0}\tilde{V}^{+}(\underline{\alpha};x,t,z)R^{+}(\underline{\alpha};z)J(z)R^{-}(\underline{\beta};-z)\tilde{V}^{-}(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t},z)^t dz=\\ &\qquad=\mathrm{Res}_{z=0}P^{+}(\underline{\alpha};x,t)^0J(z)P^{-}(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t})^{0t}dz,\end{aligned}\tag{4.45}$$

其中 $P^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t)^0$ 是 $P^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t,z)$ 的常数项。现在取 $\underline{\alpha}=\underline{\beta}$ 并利用基本引理，可推出

$$\left(P^{+}(\underline{\alpha};x,t,\partial)J(\partial)P^{-}(\underline{\alpha};x,t,\partial)^*\right)_{-}=\frac{1}{2}P^{+}(\underline{\alpha};x,t)^0E_{2s+1,2s+1}\partial^{-1}P^{-}(\underline{\alpha};x,t)^{0t},$$

由此可得

$$P^{+}(\underline{\alpha};x,t,\partial)J(\partial)P^{-}(\underline{\alpha};x,t,\partial)^*=P^{+}(\underline{\alpha};x,t)^0J(\partial)P^{-}(\underline{\alpha};x,t)^{0t}.\tag{4.46}$$

注意，$P^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t)^0$ 是可逆的，因此重新定义波函数和 $P^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t,\partial)$是有意义的

$$\begin{aligned}\hat{V}^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,z)&=(P^{\pm}(\underline{\alpha};x,t)^0)^{-1}\tilde{V}^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,z),\\ \hat{P}^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,\partial)&=(P^{\pm}(\underline{\alpha};x,t)^0)^{-1}P^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,\partial).\end{aligned}\tag{4.47}$$

于是（4.45）变为

$$\mathrm{Res}_{z=0}\hat{V}^+(\underline{\alpha};x,t,z)R^+(\underline{\alpha};z)J(z)R^-(\underline{\alpha};-z)\hat{V}^-(\underline{\alpha};\overline{x},\overline{t},z)^t dz = \mathrm{Res}_{z=0}\,J(z)dz, \tag{4.48}$$

这意味着

$$\hat{P}^-(\underline{\alpha};x,t,\partial)^* = J(\partial)^{-1}\hat{P}^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{-1}J(\partial). \tag{4.49}$$

接下来，对 (4.48) 关于 t_j^a 求导，其中若 $a=s+r$，则 j 为奇数，于是我们得到 $\underline{\alpha}=\underline{\beta}$ 的表达式

$$\Big[\left(\frac{\partial\hat{P}^+(\underline{\alpha})}{\partial t_j^a}+\hat{P}^+(\underline{\alpha})\left((1-\delta_{a,s+r})(E_{aa}\partial^j-E_{s+a,s+a}(-\partial)^j)+2\delta_{a,s+r}E_{2s+1,2s+1}\partial^j\right)\right)\times J(\partial)\hat{P}^-(\underline{\alpha})^*\Big]_-=0. \tag{4.50}$$

利用 (4.46)，这就变为

$$\frac{\partial\hat{P}^+(\underline{\alpha})}{\partial t_j^{(a)}}\hat{P}^+(\underline{\alpha})^{-1} = -\left(\hat{P}^+(\underline{\alpha})\left((1-\delta_{a,s+r})(E_{aa}\partial^j-E_{s+a,s+a}(-\partial)^j)+ +2\delta_{a,s+r}E_{2s+1,2s+1}\partial^j\right)\hat{P}^+(\underline{\alpha})^{-1}J(\partial)\right)_- J(\partial)^{-1}. \tag{4.51}$$

最后，按照 [16], ，我们定义矩阵伪微分算子代数的一种新分解，即

$$P(\partial)_{\geq}=(P(\partial)J(\partial))_+J(\partial)^{-1},\quad P(\partial)_<=P(\partial)-P(\partial)_{\geq}, \tag{4.52}$$

于是，(4.51) 变为

$$\frac{\partial\hat{P}^+(\underline{\alpha})}{\partial t_j^{(a)}} = -\left(\hat{P}^+(\underline{\alpha})\left((1-\delta_{a,s+r})(E_{aa}\partial^j-E_{s+a,s+a}(-\partial)^j)+ +2\delta_{a,s+r}E_{2s+1,2s+1}\partial^j\right)\hat{P}^+(\underline{\alpha})^{-1}\right)_<\hat{P}^+(\underline{\alpha}). \tag{4.53}$$

定义以下 Lax 算子（$1\leq a\leq s$）：

$$\begin{aligned}
L(\underline{\alpha}) &= \hat{P}^+(\underline{\alpha})\left(E_{2s+1,2s+1}+\sum_{i=1}^{s}(E_{ii}-E_{s+i,s+i})\right)\partial\hat{P}^+(\underline{\alpha})^{-1},\\
D^{s+r}(\underline{\alpha}) &= 2\hat{P}^+(\underline{\alpha})E_{2s+1,2s+1}\hat{P}^+(\underline{\alpha})^{-1},\\
D^a(\underline{\alpha}) &= \hat{P}^+(\underline{\alpha})(E_{aa}-E_{s+a,s+a})\hat{P}^+(\underline{\alpha})^{-1}\\
E^a(\underline{\alpha}) &= D^a(\underline{\alpha})^2=\hat{P}^+(\underline{\alpha})(E_{aa}+E_{s+a,s+a})\hat{P}^+(\underline{\alpha})^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

利用（4.53），可以直接验证

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\underline{\alpha})}{\partial t_j^{(a)}} =&[\big(L(\underline{\alpha})^j D^a(\underline{\alpha})\big)_{\geq}, L(\underline{\alpha})],\\ \frac{\partial D^b(\underline{\alpha})}{\partial t_j^{(a)}} =&[\big(L(\underline{\alpha})^j D^a(\underline{\alpha})\big)_{\geq}, D^b(\underline{\alpha})],\\ \frac{\partial E^b(\underline{\alpha})}{\partial t_j^{(a)}} =&[\big(L(\underline{\alpha})^j D^a(\underline{\alpha})\big)_{\geq}, E^b(\underline{\alpha})].\end{aligned} \tag{4.55}$$

注 4.3 注意，此处可将第一种方法中的 *BKP* 波函数和 *Lax* 方程视为 $2s \times 2s$ 主子式，即删去最后一行和最后一列后得到的主子式。

由于（参见（4.36））

$$P^-(\underline{\alpha}; x, t, \partial) = (N + E_{2s+1,2s+1})P^+(\underline{\alpha}; x, t, \partial)(N + E_{2s+1,2s+1}),$$

这对 $\hat{P}^{\pm}(\underline{\alpha};\ x, t, \partial)$ 也成立，因此

$$\hat{P}^+(\underline{\alpha}; x, t, \partial)^{*-1} = K(\partial)\hat{P}^+(\underline{\alpha}; x, t, \partial)K(\partial)^{-1},$$

其中

$$K(\partial) = -J(\partial)^{*-1}(N + E_{2s+1,2s+1}) = 2\partial E_{s+1,s+1} + \sum_{a=1}^{s} E_{s+a,a} - E_{a,s+a}.$$

Then

$$D^{s+r*} = K(\partial)D^{s+r}K(\partial)^{-1}, \quad D^{a*} = -K(\partial)D^aK(\partial)^{-1}, \quad E^{a*} = K(\partial)E^aK(\partial)^{-1},$$

$a = 1, \ldots, s$，且

$$L^* = (L(D^{s+r} + \sum_{a=1}^{s} E^a))^* = K(\partial)(-D^{s+r} + \sum_{a=1}^{s} E^a)LK(\partial)^{-1}.$$

特别地，若 $s = 0$，则 $L^* = -\partial L\partial^{-1}$。注意，经典的单分量 BKP 层级对应于 $s = 0$ 和 $r = 1$。

DKP 层级（第一种方法）

我们假设，如果 $r \neq 0$ $r = 2p$ 或 $r = 2p - 1$，则取方程 (4.13)，并将所有变量 $t_{2j+1}^{(c)} = \overline{t}_{2j+1}^{(c)} = 0$ 设为 $c > s$ 和 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。接下来，将所有 $t_1^{(a)}$ 替换为$1 \leq a \leq s$，再替换成 $t_1^{(a)} + x$，并同样将 $\overline{t}_1^{(a)}$ 替换为 by $\overline{t}_1^{(a)} + \overline{x}$。定义波函数$V^{\pm}(\alpha;\ x, t, z)$，如同 BKP 情形的第一种方法中由 (4.23) 所定义的那样，但现在针对

$\underline{\alpha}=(\underline{k},\underline{\ell})$，其中我们还代入 $t_{2j+1}^{(s+c)}=0$。定义 $s\times r$-矩阵，若 $r=0$，则假设其为零，

$$W^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,z)=(W^{\pm}(\underline{\alpha};x,t)_{ij},z)_{1\le i\le 2s,1\le j\le r},=\sum_{n=0}^{\infty}W^{\pm}(\underline{\alpha};x,t)^n z^{-n},$$

系数如（4.26）所示，矩阵 $T^{\pm}$ ×娱乐主管

$$\begin{aligned}T^{\pm}(\alpha;x,t)_{i1}&=\frac{\tau_{\underline{k}\pm\underline{e}_i,\underline{\ell}+\underline{e}_p}(x,t)}{\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(x,t)}\big|_{t^{(s+a)}=0},\\ T^{\pm}(\alpha;x,t)_{s+i,1}&=\frac{\tau_{\underline{k}\mp\underline{e}_i,\underline{\ell}+\underline{e}_p}(x,t)}{\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(x,t)}\big|_{t^{(s+a)}=0}.\end{aligned}\tag{4.56}$$

因此，我们得到波函数的以下双线性恒等式：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{j=1}^{s}V^{+}(\underline{\alpha};x,t,z)\left(E_{jj}-E_{s+j,s+j}\right)V^{-}(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t},z)^t dz=\\ &\frac{1}{2}W^{+}(\underline{\alpha};x,t)^0W^{-}(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t})^{0t}+\frac{\delta_{r,2p-1}}{2}T^{+}(\alpha;x,t)T^{-}(\beta;\overline{x},\overline{t})^t.\end{aligned}\tag{4.57}$$

现在利用基本引理，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{s}\left(P^{+}(\underline{\alpha};x,t,\partial)R^{+}(\underline{\alpha}-\underline{\beta},\partial)\left(E_{jj}-E_{s+j,s+j}\right)P^{-}(\underline{\beta};x,t,\partial)^*\right)_{-}=\\ &\frac{1}{2}W^{+}(\underline{\alpha};x,t)^0\partial^{-1}W^{-}(\underline{\beta};x,t)^{0t}+\frac{\delta_{r,2p-1}}{2}T^{+}(\alpha;x,t)\partial^{-1}T^{-}(\beta;x,t)^t.\end{aligned}\tag{4.58}$$

选择 $\underline{\alpha}=\underline{\beta}$ 后，(4.58) 的右端等于 0，因此我们得到与 BKP 情形的第一种方法相同的方程。

DKP 层级（第二种方法）现在我们假设 $r\ge 1$，在这种情况下 s 可以为 0。 r 要么是 $r=2p$，要么是 $r=2p-1$。我们沿用前一种情况的方法，现在设定 $t_j^{(s+c)}=0$，但仅对于 $1\le c<r$，我们不设定 $t_j^{(s+r)}=0$。接下来，对于 $1\le a\le s$ 和 $a=s+r$，我们将 $t_1^{(a)}$ 替换为 $t_1^{(a)}+x$，并定义 $(2s+1)\times(2s+1)$-矩阵值波函数

$$\tilde{V}^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,z)=P^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,\pm z)R^{\pm}(\underline{\alpha};\pm z)S^{\pm}(t,\pm z)e^{\pm xz},\tag{4.59}$$

其中，系数 $P^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,\pm z)$ 由 (4.24) 和 (4.39) 给出，其他矩阵由 (4.25) 给出。$(2s+1)\times(r-1)$ 是 $W^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,z)$，其定义与 (4.27) 和 (4.41) 中相同，而 $T^{\pm}\underline{\alpha};x,t)$ 则与 BKP 第二种方法中的情形相同。于是我们得到以下双线性恒等式：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{z=0}\tilde{V}^{+}(\underline{\alpha};x,t,z)J(z)\tilde{V}^{-}(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t},z)^t dz=\\ &\qquad\frac{1}{2}W^{+}(\underline{\alpha};x,t)^0W^{-}(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t})^{0t}+\frac{\delta_{r,2p-1}}{2}T^{+}(\alpha;x,t)T^{-}(\beta;\overline{x},\overline{t})^t,\end{aligned}\tag{4.60}$$

其中 $J(z)$ 与式 (4.43) 中相同。现在可以像 BKP 情形中的第二种方法那样继续，结果不会有任何变化。考虑到 DKP 情形中的第一种方法以及注 4.1，这并不令人意外。

注 4.4 注意，在 *BKP* 和 *DKP* 层级中，第一种方法得到的波函数和 *Lax* 算子与 $r=0$ 情形中的相同。采用 $r>1$ 的第二种方法与 $r=1$ 情形并无不同。因此，这两种方法似乎都是多余的。不过，若考虑约化到仿射李代数的情形，情况便不再如此。$r=0$ 情形会产生一个类似于 *Gelfand-Dickey* 情形中的微分算子，而针对 $r>0$ 的第一种方法则会产生一个约束 *KP* 型的 *Lax* 算子。

CKP 层级与前面的情况一样，我们将 t_1^b 替换为 t_1^b+x，对于 $1\leq b\leq r+s$，并引入 $(2s+r)\times(2s+r)$-矩阵值波函数

$$V^{\pm}(x,t,z)=P^{\pm}(x,t,\pm z)S^{\pm}(t,\pm z)e^{\pm xz}, \tag{4.61}$$

其中

$$S^{\pm}(t,\pm z)=\sum_{a=1}^{s}\left(e^{\pm(z\cdot t^{(a)})}E_{aa}+e^{\mp((-z)\cdot t^{(a)})}E_{s+a,s+a}\right)+\sum_{c=s+1}^{r+s}e^{\pm(z\circ t^{(c)})}E_{a+c,a+c},$$

$$P^{\pm}(x,t,\pm z)=\left(P^{\pm}(x,t,\pm z)_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq r+2s},$$

以及 $(1\leq a\neq b\leq s\leq c,d\leq r+s)$

$$\begin{aligned}
\tau_0(x,t)P^{\pm}(x,t,\pm z)_{a,a}&=e^{\pm z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{t^{(a)}}}\left(\tau_0(x,t)-\sum_{k=1}^{\infty}\tau_{\xi^a_{\mp k}\cup\xi^a_{\pm 1}}(x,t)z^{-k-1}\right),\\
\tau_0(x,t)P^{\pm}(x,t,\pm z)_{a,b}&=e^{\pm z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{t^{(b)}}}\left(\mp\sum_{k=1}^{\infty}\tau_{\xi^b_{\mp k}\cup\xi^a_{\pm 1}}(x,t)z^{-k}\right),\\
\tau_0(x,t)P^{\pm}(x,t,\pm z)_{a,s+a}&=e^{\mp((-z^{-1})\cdot\tilde{\partial}_{t^{(a)}})}\left(-\sum_{k=2}^{\infty}\tau_{\xi^a_{\pm k}\cup\xi^a_{\pm 1}}(x,t)(-z)^{1-k}\right),\\
\tau_0(x,t)P^{\pm}(x,t,\pm z)_{a,s+b}&=e^{\mp((-z^{-1})\cdot\tilde{\partial}_{t^{(b)}_k})}\left(\pm\sum_{k=1}^{\infty}\tau_{\xi^b_{\pm k}\cup\xi^a_{\pm 1}}(x,t)(-z)^{-k}\right),\\
\tau_0(x,t)P^{\pm}(x,t,\pm z)_{a,s+c}&=e^{\pm 2(z^{-1}\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+c)}})}\left(-\sum_{m\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}}\tau_{\xi^a_{\pm 1}\cup\xi^c_m}(t)(\pm z)^{-m-\frac{1}{2}}\right),\\
\tau_0(x,t)P^{\pm}(x,t,\pm z)_{s+a,a}&=e^{\pm z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{t^{(a)}}}\left(-\sum_{k=2}^{\infty}\tau_{\xi^a_{\mp k}\cup\xi^a_{\mp 1}}(x,t)z^{1-k}\right),\\
\tau_0(x,t)P^{\pm}(x,t,\pm z)_{s+c,a}&=e^{\pm z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{t^{(a)}}}\left(\mp\sum_{k=1}^{\infty}\tau_{\xi^a_{\mp k}\cup\xi^c_{\frac{1}{2}}}(x,t)z^{-k}\right),\\
\tau_0(x,t)P^{\pm}(x,t,\pm z)_{s+c,s+c}&=e^{\pm 2(z^{-1}\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+c)}})}\left(\tau_0(x,t)-\sum_{m\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{>0}}\tau_{\xi^c_{\frac{1}{2}}\cup\xi^c_m}(t)(\pm z)^{-m-\frac{1}{2}}\right),\\
\tau_0(x,t)P^{\pm}(x,t,\pm z)_{s+c,s+d}&=e^{\pm 2(z^{-1}\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+r)}})}\left(-\sum_{m\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}}\tau_{\xi^c_{\frac{1}{2}}\cup\xi^d_m}(t)(\pm z)^{-m-\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

其他系数如下:

$$\begin{aligned} P^{\pm}(x,t,\partial)_{s+a,s+a} &= P^{\mp}(x,t,\partial)_{a,a},\\ P^{\pm}(x,t,,\partial)_{s+a,s+b} &= P^{\mp}(x,t,\partial)_{a,b},\\ P^{\pm}(x,t,\partial)_{s+a,b} &= P^{\mp}(x,t,\partial)_{a,s+b},\\ P^{\pm}(x,t,\partial)_{s+a,s+c} &= P^{\mp}(x,t,\partial)_{a,s+c},\\ P^{\pm}(x,t,\partial)_{s+c,s+a} &= P^{\mp}(x,t,\partial)_{s+c,a}. \end{aligned} \tag{4.63}$$

于是（4.16）给出

$$\mathrm{Res}_{z=0} V^{+}(x,t,z)V^{-}(\overline{x},\overline{t},z)^{T}dz = 0. \tag{4.64}$$

注意， $P^{\pm}(x,t,\partial) = I_{r+2s} + \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{\pm}(x,t)\partial^{-k}$， 并且

$$P^{\pm}(x,t,\partial) = (N+I)P^{\mp}(x,t,\partial)(N+I), \tag{4.65}$$

其中（参见（4.36））

$$N = \sum_{a=1}^{s} (E_{a,s+a} + E_{s+a,a}) \quad \text{and } I = \sum_{c=s+1}^{s+r} E_{s+c,s+c}.$$

因此，应用基本引理可得

$$\begin{aligned} P^{\mp}(x,t,\partial)^{-1} &= P^{\pm}(x,t,\partial)^{*}\\ &= \big((N+I)P^{\mp}(x,t,\partial)(N+I)\big)^{*}\\ &= (N+I)P^{\mp}(x,t,\partial)^{*}(N+I). \end{aligned} \tag{4.66}$$

接下来，对 t_k^a, t_ℓ^c 求（4.61）的导数，其中 $1 \le a \le s$, $s+1 \le c \le r+s$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $\ell \in \mathbb{Z}_{odd>0}$，并应用基本引理，可得以下佐藤-威尔逊方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^{+}(x,t,\partial)}{\partial t_k^{(a)}} &= -\left(P^{+}(x,t,\partial)\left(\partial^k E_{aa} - (-\partial)^k E_{s+a,s+a}\right)P^{+}(x,t,\partial)^{-1}\right)_{-} P^{+}(x,t,\partial),\\ \frac{\partial P^{+}(x,t,\partial)}{\partial t_\ell^{(c)}} &= -\left(P^{+}(x,t,\partial)\partial^{\ell} E_{s+c,s+c} P^{+}(x,t,\partial)^{-1}\right)_{-} P^{+}(x,t,\partial). \end{aligned} \tag{4.67}$$

定义以下 Lax 算子

$$\begin{aligned} &L = L(x,t,\partial) = P^{+}(x,t,\partial)\left(\sum_{a=1}^{s}(\partial E_{aa} - \partial E_{s+a,s+a}) + \sum_{c=s+1}^{s+c}\partial E_{s+c,s+c}\right)P^{+}(x,t,\partial)^{-1},\\ &C^b = C^b(x,t,\partial) = P^{+}(x,t,\partial)E_{bb}P^{+}(x,t,\partial)^{-1}, \qquad 1 \le b \le r+2s,\\ &D^a = D^a(x,t,\partial) = P^{+}(x,t,\partial)(E_{aa} - E_{s+a,s+a})P^{+}(x,t,\partial)^{-1},\\ &E^a = (D^a)^2 = E^a(x,t,\partial) = P^{+}(x,t,\partial)(E_{aa} + E_{s+a,s+a})P^{+}(x,t,\partial)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.68}$$

现在令 $a=1$、 $\dots s$、 $c=s+1$、 $\dots r+s$、 $b=1$、 $\dots r+2s$，则有以下 Lax 方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial t_j^{(a)}}=[(L^jD_+^a,L],\quad \frac{\partial C^b}{\partial t_j^{(a)}}=[(L^jD^a)_+,C^b],\\
&\frac{\partial L}{\partial t_j^{(c)}}=[(L^jC^{s+c})_+,L],\qquad \frac{\partial C^b}{\partial t_j^{(c)}}=[(L^jC_+^{s+c},C^b].
\end{aligned}\tag{4.69}$$

由（4.66）可推得

$C^{s+b*}=(N+I)C^{s+b}(N+I),\quad E^{a*}=(N+I)E^a(N+I),\quad D^{a*}=-(N+I)D^a(N+I),$

$1\le a\le s<b\le r+s$，并且

$$\begin{aligned}
L^*&=((\sum_{a=1}^{s}E^a+\sum_{b=s+1}^{r+s}C^{s+b})L)^*=(\sum_{a=1}^{s}E^a+\sum_{b=s+1}^{r+s}C^{s+b})L\\
&=(N+I)((\sum_{a=1}^{s}E^a-\sum_{b=s+1}^{r+s}C^{s+b})L)(N+I).
\end{aligned}$$

有两种特殊情形，即若 $s=0$ 或 $r=0$，则可得

$$\begin{aligned}
&s=0:\quad L(x,t,\partial)^*=-L(x,t,\partial),\qquad C^c(x,t,\partial)^*=C^c(x,t,\partial),\\
&r=0:\quad L(x,t,\partial)^*=NL(x,t,\partial)N,\qquad D^a(x,t,\partial)^*=-ND^a(x,t,\partial)N,
\end{aligned}$$

注意，经典的 1 分量 CKP 情形（参见 [26], [21]）对应于 $s=0$ 和 $r=1$，因此对应于 $L^*=-L$ 的情形。

5 经典李代数的魏尔群共轭类，以及$\hat{\mathfrak{g}}$ 和$\hat{\mathfrak{g}}^{(2)}$的生成场

5.1 魏尔群元素与$\hat{\mathfrak{g}}$的扭曲实现

设 $\mathfrak{g}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的一个经典李代数，并令 G 为相应的经典复李群。在 $\mathfrak{g}$ 中选取一个 Cartan子代数 $\mathfrak{h}$，并令 $W\in GL(\mathfrak{h})$ 为魏尔群。固定 $w\in W$，令 $\mathfrak{h}_0$ 为 w 在 $\mathfrak{h}$中的不动点集。我们可以将 w （非唯一地）提升为一个阶为 N 的元素 $\tilde{w}\in G$，使得

$$\tilde{w}=Se^{2\pi\sqrt{-1}h_w}S^{-1},\tag{5.1}$$

其中 $S\in G$ 和 $h_w\in\mathfrak{h}$ 满足

$$(h_w|\mathfrak{h}_0)=0,\tag{5.2}$$

除 so_{2n+1} 外，所有情况均如此。对于最高权为 $\Lambda_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i$ 的一级 so_{2n+1}-模，条件 (5.2) 替换为

$$(h_w-\Lambda_n|\mathfrak{h}_0)=0.\tag{5.3}$$

考虑由 $\sigma = e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{ad}\, h_w}$ 定义的 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$-分次:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\overline{j}\in\mathbb{Z}_N} \mathfrak{g}_{\overline{j}}, \quad \text{where } \mathfrak{g}_{\overline{j}} = \{g \in \mathfrak{g} \,|\, [h_w, g] = \frac{j}{N} g \ \text{ for some } j \in \mathbb{Z},\ \overline{j} \equiv j \bmod N\}. \tag{5.4}$$

De ˆ按如下方式将扭曲仿射李代数 $L(\mathfrak{g},\sigma)$ 定义为 ˆ$\mathfrak{g}$ 的子代数 :

$$\hat{L}(\mathfrak{g},\sigma) = \mathbb{C}K \oplus \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} t^j \mathfrak{g}_{j \bmod N}. \tag{5.5}$$

ˆ李代数 ˆ$\mathfrak{g}$ 和 $L(\mathfrak{g},\sigma)$ 对于 ˆ ([13],) 的任意内自同构 ˜ σ $\mathfrak{g}$ 都是同构的（见第 8 章）。明确地说，同构 ϕ_{h_w} : $L(\mathfrak{g},\sigma) \to$ ˆ$\mathfrak{g}$ 由 [19], [22] 给出

$$\tilde{\phi}_{h_w}(t^j g) = \hat{g}(j) := g(j) - \delta_{j,0}(h_w|g)K \quad \text{for } g \in \mathfrak{g}_{j \bmod N}, \tag{5.6}$$

其中

$$g(j) = t^{-\mathrm{ad}\, h_w}(t^{\frac{j}{N}} g) \in \hat{\mathfrak{g}}, \quad g \in \mathfrak{g}_{j \bmod N}. \tag{5.7}$$

每个元素 $g \in \mathfrak{g}$ 关于 $\mathbb{Z}_N$-分次（5.4）分解为 $g = \sum_{\overline{j}\in\mathbb{Z}_N} g_{\overline{j}}$，我们考虑相应的生成场

$$g(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{g}_{j \bmod N}(j) z^{-j-1}. \tag{5.8}$$

设 $d =$维数为 $\mathfrak{g}$，令 g^1、g^2、.....、g^d 为 $\mathfrak{g}$ 的标准基，即根向量连同 $\mathfrak{h}$ 的一个基。于是我们得到一个新基 $a^i = S^{-1} g^i S$，它与 g^i 具有相同的对易关系。本文的主要构造之一，就是构造 $a^i(z)$ 的顶点算子。注意，标准 Cartan子代数 $\mathfrak{h}$ 经 S^{-1} 共轭为一个非标准的 Cartan子代数 $\mathfrak{h}_\sigma$ 。因此，如果 h^1、h^2、$\ldots h^n$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一个基，则对于 $(S^{-1}h^i S)(z)$ 的顶点算子的模 $1 \le i \le n$ （见公式（ 5.8 ）），连同 K ，张成 ˆ$\mathfrak{g}$ 的一个非标准海森堡子代数。当然，当 $w = 1$ 时，我们得到标准的齐次海森堡子代数 $(\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}K$。

例5.1（李代数 $\mathfrak{g} = gl_2$）魏尔群中有两个元素，即恒等元 id 和交换 ϵ_1 与 ϵ_2的元素 w 。第一种情况与齐次实现有关，第二种情况与子代数 sl_2的主ˆ实现有关。在两种情况下，都很容易找到满足（5.2）的提升:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{respectively.}$$

那么，第一种情形为 $S = I$ ，第二种情形为 $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，由此分别得到以下 h_w 的选择:

$$I = \exp(2\pi\sqrt{-1}h_1),\ \textit{where } h_1 = 0,\ \textit{and } \tilde{w} = \exp(2\pi\sqrt{-1}h_w),\ \ \textit{where } h_w = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

ˆ第一种情形下，对于 gl_2，我们有 *4* 个生成该代数的场，即 $e_{ij}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} t^k e_{ij} z^{-k-1}$, $1 \le i,j \le 2$。对于 ˆ sl_2，我们有 *3* 个场，即 $e_{12}(z)$、 $e_{21}(z)$ 以及ˆ($e_{11} - e_{22})(z)$。第二种情形下，对于 gl_2，我们只有两个场，即

$$\left(S^{-1}e_{22}S\right)(z) = -\left(S^{-1}e_{11}S\right)(-z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{t^k}{2} \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} \\ tz^{-1} & 1 \end{pmatrix} z^{-2k-1},$$

$$\left(S^{-1}e_{12}S\right)(z) = -\left(S^{-1}e_{21}S\right)(-z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{t^k}{2} \begin{pmatrix} -1 & -z^{-1} \\ tz^{-1} & 1 \end{pmatrix} z^{-2k-1}.$$

对于 ˆ sl_2 ，我们有两个场：$(S^{-1}e_{12}S)(z)$ 以及

$$\left(S^{-1}(e_{22}-e_{11})S\right)(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} t^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} z^{-2k-2}$$

第二个场的模与 K 一起构成所谓的 sl_2 的主ˆ海森堡子代数的一组基。

5.2 gl_n

回顾一下， gl_n 的魏尔群 $W = S_n$ 的共轭类与分拆一一对应

$$\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_s > 0) \tag{5.9}$$

n 的，即

$$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s = n. \tag{5.10}$$

我们可以将每个元素 $w \in W$ 分解为长度为 λ_i 的不相交循环的乘积。于是，具有相同循环类型的两个元素共轭。令 $|\lambda|_0 = 0$ 并记 $j = 1$、 $2 \ldots s$,

$$|\lambda|_j = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j, \tag{5.11}$$

因此 $|\lambda| = |\lambda|_s$。我们可以将 λ 的分拆与 n 联系起来，其标准元素为 $w_\lambda \in W$，即在基 $\{\epsilon_i\}$（属于 $\mathfrak{h}$）中:

$$w_\lambda : \epsilon_{|\lambda|_j} \mapsto \epsilon_{|\lambda|_{j-1}+1}, \text{ and } \epsilon_{|\lambda|_{j-1}+i} \mapsto \epsilon_{|\lambda|_{j-1}+i+1},\ i = 1,2,\ldots,\lambda_j - 1, \quad 1 \le j \le s. \tag{5.12}$$

若将 Ad $\tilde{w}_\lambda$ 限制在 Cartan子代数 $\mathfrak{h}$上，我们便得到这个 w_λ ，其中

$$\tilde{w}_\lambda = \sum_{a=1}^{s} \left(e^{aa}_{1,\lambda_a} + \sum_{i=1}^{\lambda_a - 1} e^{aa}_{i+1,i} \right) \in GL_n, \tag{5.13}$$

其中，我们将基向量重新定义如下:

$$e^{ab}_{ij} = e_{|\lambda|_{a-1}+i,|\lambda|_{b-1}+j}, \quad 1 \le i \le \lambda_a,\ 1 \le j \le \lambda_b,\ 1 \le a,b \le s. \tag{5.14}$$

因此，与 λ_j 部分相关的对角块是 gl_{λ_j} 的魏尔群中的 Coxeter元素。因此，先研究这种情况会很有帮助。

例5.2（单个循环，主海森堡代数） 假设$s=1$，即 $\lambda=(n)$ 并设

$$\tilde{w}'_{(n)}=e_{1n}+\sum_{i=1}^{n-1}e_{i+1,i}.$$

令 $\omega=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$。向量 $(\omega^j,\omega^{2j},\cdots,\omega^{nj})^T$是 $\tilde{w}$ 的特征值为 ω^{-j}的特征向量。因此令

$$S=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i,j=1}^{n}\omega^{ij}e_{ij},\qquad then\ S^{-1}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i,j=1}^{n}\omega^{-ij}e_{ij}$$

and

$$S^{-1}\tilde{w}'_{(n)}S=\sum_{j=1}^{n}\omega^{-j}e_{jj}=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{n}-\frac{j}{n}e_{jj}\right).$$

因此我们可以选择 $h'_w=\sum_{j=1}^{n}-\frac{j}{n}e_{jj}$，于是 $\mathrm{Ad}\,\tilde{w}_{(n)}=Se^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{ad}\,h_w}S^{-1}$。然而，$(h'_w|I_n)\neq 0$，但我们总可以将 I_n的一个倍数加到 h'_w上，因此选择

$$h_w=\sum_{j=1}^{n}\frac{n-2j+1}{2n}e_{jj},\quad so\ that\ (h_w|\mathfrak{h}_0)=0.$$

注意，这意味着我们令

$$\tilde{w}_{(n)}=\omega^{\frac{n+1}{2}}\tilde{w}'_{(n)}.$$

现在，令

$$a_{k\ell}=S^{-1}e_{k\ell}S=\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\omega^{j\ell-ik}e_{ij}\in gl_n,$$

then

$$a_{k\ell}(z)=\frac{1}{n}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{i,j=1}^{n}\omega^{j\ell-ik}(t^me_{ij})z^{-mn+i-j-1}.$$

利用 (2.22) 和 (3.2)，我们得到

$$r(a_{k\ell})(z)=\frac{\omega^{-k}}{n}\sum_{m,\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{i,j=1}^{n}\omega^{j\ell-ik}:\psi^+_{-\ell n-i+\frac{1}{2}}\psi^-_{(\ell+m)n+j-\frac{1}{2}}:z^{-mn+i-j-1}.$$

用带电费米场表示

$$\psi^{\pm}(z)=\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\psi^{\pm}_i z^{-i-\frac{1}{2}},\tag{5.15}$$

这变为

$$r(a_{k\ell})(z)=\frac{1}{n}:\psi^+(\omega^{-k}z)\psi^-(\omega^{-\ell}z):,$$

尤其是

$$\alpha(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\alpha_j z^{-j-1}=nr(a_{nn})(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}r((te_{n1}+\sum_{i=1}^{n-1}e_{i,i+1})^j)z^{-j-1}=:\psi^+(z)\psi^-(z):$$

将成为主海森堡代数的生成场，即】【。

$$[\alpha_j,\alpha_k]=j\delta_{jk},\quad \alpha_j|0\rangle=0,\quad for\ j\geq 0.$$

一般构造可由此例推出。考虑 n 的分拆(5.9)。引入相应的重标记 $j\equiv|\lambda|_{a-1}+1$、……、$|\lambda|_a \bmod n$，由 (5.14)、(2.22) 和 (3.2) 导出：

$$\psi^{+a}_{j\lambda_a-i+\frac{1}{2}}=\psi^+_{jn-|\lambda|_{a-1}-i+\frac{1}{2}},\quad \psi^{-a}_{j\lambda_a+i-\frac{1}{2}}=\psi^-_{jn+|\lambda|_{a-1}+i-\frac{1}{2}},\tag{5.16}$$

对于 $1\leq i\leq\lambda_a$、$j\in\mathbb{Z}$、$a=1$、……、s。令 $\omega_a=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda_a}}$。由上述例子很容易推得以下命题。

命题 5.3 *(a)* 该元素

$$\tilde{w}_\lambda=\left(\sum_{a=1}^{s}\omega_a^{\frac{\lambda_a+1}{2}}\sum_{j=1}^{\lambda_a}e^{aa}_{jj}\right)\tilde{w}'_\lambda\in GL_n$$

对于 (5.13) 中的 $\tilde{w}'_\lambda$，等于 $S^{-1}\exp(2\pi\sqrt{-1}h_w)S$，其中

$$h_w=\sum_{a=1}^{s}\sum_{i=1}^{\lambda_a}\frac{\lambda_a-2j+1}{2\lambda_a}e^{aa}_{jj}\in\mathfrak{h}$$

满足 (5.2)，并且

$$S=\sum_{a=1}^{s}\sum_{i=1}^{\lambda_a}\frac{1}{\sqrt{\lambda_a}}\sum_{i,j=1}^{\lambda_a}\omega_a^{ij}e^{aa}_{ij},\quad S^{-1}=\sum_{a=1}^{s}\sum_{i=1}^{\lambda_a}\frac{1}{\sqrt{\lambda_a}}\sum_{i,j=1}^{\lambda_a}\omega_a^{-ij}e^{aa}_{ij}.$$

(b) $N\exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{ad}\ h_w)$ 的阶等于 $N'\lambda_1$、λ_2、……、λ_s的最小公倍数，当 $N'(\frac{1}{\lambda_a}+\frac{1}{\lambda_b})\in2\mathbb{Z}$对所有 $1\leq a$、$b\leq s$都成立时；否则为……。*(c)* 这些元素

$$a^{ab}_{k,\ell}:=S^{-1}e^{ab}_{k\ell}S=\frac{1}{\sqrt{\lambda_a\lambda_b}}\sum_{i=1}^{\lambda_a}\sum_{j=1}^{\lambda_b}\omega_a^{-ik}\omega_b^{j\ell}e^{ab}_{ij}$$

$form\ \ gl_n$ 的新基以及它们在 F 中的生成场的表示 r

$$a^{ab}_{k,\ell}(z)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_a\lambda_b}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{\lambda_a}\sum_{j=1}^{\lambda_b}\left(\omega_a^{-ik}\omega_b^{j\ell}t^m e^{ab}_{ij}\right)z^{-mN+i\frac{N}{\lambda_a}-j\frac{N}{\lambda_b}-1},$$

等于

$$r(a^{ab}_{k,\ell})(z) = \frac{\omega_a^{-k}}{\sqrt{\lambda_a\lambda_b}} : \psi^{+a}(\omega_a^{-k} z^{\frac{N}{\lambda_a}})\psi^{-b}(\omega_b^{-\ell} z^{\frac{N}{\lambda_b}}) : z^{\frac{N}{\lambda_a}-1}, \tag{5.17}$$

其中

$$\psi^{\pm a}(z) = \sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \psi_i^{\pm a} z^{-i-\frac{1}{2}}$$

是克利福德代数 $C\ell$、$j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ 和 $1 \le a \le s$ 中重新标记的生成元 $\psi_j^{\pm a}$ 所对应的生成场。

(d) gl_n 的表示由顶点算子根据公式 (3.66) 给出，具体方法是代入公式 (5.17) 中给出的单位根 ω_a 和 z 的幂。特别地，自由玻色场为

$$\alpha^b(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha^b_j z^{-j-1} =: \psi^{+b}(z)\psi^{-b}(z) : \quad 1 \le b \le s,$$

因此 $\alpha^b(z) = \lambda_b z^{\frac{\lambda_a}{N}-1} r(a^{bb}_{\lambda_b\lambda_b})(z^{\frac{\lambda_a}{N}})$，它们的模满足"秩"为 s 的海森堡李代数的对易关系：

$$[\alpha^a_j, \alpha^b_k] = j\delta_{ab}\delta_{jk}, \quad j,k \in \mathbb{Z},\ a,b = 1,\dots,s, \quad \alpha^a_j|0\rangle = 0, \quad for\ j \ge 0. \qquad \square$$

令 $\hat{\mathfrak{a}}_\lambda$ 为 K 以及作为场 $a^{bb}_{\lambda_b\lambda_b}$（$1 \le b \le s$）的模出现的元素所张成的空间。它是 $\hat{}\, gl_n$ 的海森堡子代数。然后，$\hat{}\, gl_n$-模 $F^{(m)}$ 限制到子代数 $\hat{\mathfrak{a}}_\lambda$ 后，当 $\lambda = (n)$ 时仍不可约，否则不可约性不成立。文献 [19], 已证明，该表示在 $\hat{\mathfrak{a}}_\lambda$ 以及 SL_n（$\mathbb{C}[t,t^{-1}]$）中 $\hat{\mathfrak{a}}_\lambda$ 的中心化子作用下仍保持不可约。这意味着在这种情况下，我们必须加入描述以下元素群作用的算子

$$\sum_{b=1}^{s} \frac{1}{\lambda_b} a^{bb}_{\lambda_b\lambda_b}(k_b), \quad k_b \in \mathbb{Z}, \quad k_1 + \cdots + k_s = 0.$$

这些是算子 $Q_1^{k_1}\cdots Q_s^{k_s}$，它们是 $i = 1$、$\dots s-1$ 及其逆元的乘积 $Q_iQ_{i+1}^{-1}$。这给出了 sl_s 的根格的（扭曲）群代数。

q-维数公式现在与 a_∞ 模的公式 (3.39) 不同，因为分次不同，参见例如 [22]。设 N 是 λ_1、.....、λ_s 的最小公倍数，则 [22]

$$\dim_q F^{(m)} = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_s\in\mathbb{Z}\\ j_1+\cdots+j_s=m}} q^{\frac{N}{2}(\frac{j_1^2}{\lambda_1^2}+\frac{j_2^2}{\lambda_2^2}+\cdots+\frac{j_s^2}{\lambda_s^2})} \prod_{a=1}^{s}\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{\frac{iN}{\lambda_a}}}.$$

模 $F^{(m)}$ 限制到 $\hat{}\, sl_n$ 后不再是不可约的。不过，计算包含 $|m\rangle$ 的不可约分量 $F^{(m)}_{sl_n}$ 的 q 维数公式很直接。为此，只需去掉所有

$$\alpha^1_{j\lambda_1} + \alpha^2_{j\lambda_2} + \cdots + \alpha^1_{j\lambda_s} s \quad \text{for all } j \in \mathbb{Z}.$$

由于此类元素的能量为 jN，因此得到，

$$\dim_q F_{sl_n}^{(m)} = \sum_{\substack{j_1,\cdots,j_s\in\mathbb{Z}\\ j_1+\cdots+j_s=m}} q^{\frac{N}{2}(\frac{j_1^2}{\lambda_1^2}+\frac{j_2^2}{\lambda_2^2}+\cdots+\frac{j_s^2}{\lambda_s^2})}\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{jN})\prod_{a=1}^{s}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{\frac{jN}{\lambda_a}}}.$$

5.3 sp_{2n}

回顾一下，魏尔群 W of sp_{2n} 的共轭类与一对分拆一一对应

$$\lambda=(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_s>0)\quad\text{and }\mu=(\mu_1\geq\mu_2,\geq\cdots\geq\mu_r>0),\tag{5.18}$$

of n，即

$$|\lambda|+|\mu|=\lambda_1+\cdots+\lambda_s+\mu_1+\cdots+\mu_r=n.\tag{5.19}$$

也就是说，每个元素 $w\in W$ 都可分解为 s 个长度为 λ_i 的互不相交的正循环，以及 r 个长度为 μ_j 的互不相交的负循环的乘积，且满足（5.19）。具有相同循环类型的两个元素互为共轭。

对于 n 的一对分拆 (λ,μ)，我们可以关联一个标准元素 $w_{(\lambda,\mu)}\in W$，即:

$$\begin{aligned}w_{(\lambda,\mu)}:&\epsilon_{|\lambda|_i}\mapsto\epsilon_{|\lambda|_{i-1}+1},\ \epsilon_{|\lambda|+|\mu|_j}\mapsto-\epsilon_{|\lambda|+|\mu|_{j-1}+1},\\ &\epsilon_{|\lambda|_{i-1}+k}\mapsto\epsilon_{|\lambda|_{i-1}+k+1},\quad k=1,2,\ldots,\lambda_i-1,\quad 1\leq i\leq s,\\ &\epsilon_{|\lambda|+|\mu|_{j-1}+k}\mapsto\epsilon_{|\lambda|+|\mu|_{j-1}+k+1},\quad k=1,2,\ldots,\mu_j-1,\quad 1\leq j\leq r.\end{aligned}\tag{5.20}$$

这启发我们重新定义张成 sp_{2n} 的元素如下。令 $m_a=\lambda_a$,$M_a=|\lambda|_{a-1}$ 对于 $1\leq a\leq s$，并令 $m_a=\mu_{a-s}$, $M_a=|\lambda|+|\mu|_{a-s-1}$ 对于 $s<a\leq r+s$ 和 $M_{r+s+1}=|\lambda|+|\mu|$,. 令 ($1\leq a,b\leq s+r$, $1\leq i\leq m_a$, $1\leq j\leq m_b$)

$$\begin{aligned}e_{ij}^{+a,-b}=&e_{M_a+i,M_b+j}-(-1)^{M_a+M_b+i+j}e_{2n+1-M_b-j,2n+1-M_a-i}\\ e_{ij}^{+a,+b}=&(-1)^{M_a+M_b+i+j}e_{ji}^{+b,+a}=e_{M_a+i,2n+1-M_b-j}-(-1)^{M_a+M_b+i+j+1}e_{M_b+j,2n+1-M_a-i}\\ e_{ij}^{-a,-b}=&(-1)^{M_a+M_b+i+j}e_{ji}^{-b,-a}=e_{2n+1-M_a-i,M_b+j}-(-1)^{M_a+M_b+i+j+1}e_{2n+1-M_b-j,M_a+i}.\end{aligned}\tag{5.21}$$

在寻找元素(5.20) 的提升之前，我们首先研究两个特殊情形，并将其作为例子 प्रस्तुत。

例 5.4（一个正循环）

在此情况下， $s=1$ 和 $r=0$，因此

$$w_{((n),\emptyset)}:\epsilon_n\mapsto\epsilon_1,\quad \epsilon_k\mapsto\epsilon_{k+1},\quad k=1,2,\ldots,n.\tag{5.22}$$

我们令

$$\tilde{w}=\tilde{w}_{((n),\emptyset)}=e_{1,n}-(-1)^n e_{2n,n+1}+\sum_{i=1}^{n-1}(e_{i+1,i}-e_{2n-i,2n+1-i}).$$

于是可以直接验证，对于 u， $v\in\mathbb{C}^{2n}$，即 $\tilde{w}\in Sp_{2n}$，有 $(\tilde{w}_{((n),\emptyset)}u,\tilde{w}_{((n),\emptyset)}v)_{sp_{2n}}=(u,v)_{sp_{2n}}$，并且有 $\mathrm{Ad}\ \tilde{w}_{((n),\emptyset)}|_{\mathfrak{h}}=w_{((n),\emptyset)}$。

矩阵 $\tilde{w}$ 的特征向量为 $(\omega^j, \omega^{2j}, \dots \omega^{nj}, 0, \cdots, 0)^T$和$(0, \dots, 0, (-\omega^j)^n, (-\omega^j)^{n-1}, \dots, -\omega^j)^T$，其特征值为 ω^{-j}，其中如前所述， $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ 。令

$$S = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{ij} e_{ij} + (-1)^{i+j} \omega^{-ij} e_{2n+1-i,2n+1-j}),$$

then

$$S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{-ij} e_{ij} + (-1)^{i+j} \omega^{ij} e_{2n+1-i,2n+1-j}),$$

and

$$\begin{aligned}(Sv_k, Sv_{2n+1-\ell})_{sp_{2n}} &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \omega^{ki} (-1)^{i+\ell} \omega^{-j\ell} (v_i, v_{2n+1-j})_{sp_{2n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\ell} \omega^{(k-\ell)i} \\ &= (-1)^{\ell} \delta_{k\ell} = (v_k, v_{2n+1-\ell})_{sp_{2n}}.\end{aligned}$$

因此， $S \in Sp_{2n}$ 也

$$\tilde{w}_{((n),\emptyset)} = S \sum_{j=1}^{n} \omega^{-j} (e_{jj} - e_{2n+1-j,2n+1-j}) S^{-1}.$$

因此，若我们仿照 gl_n 的主情形定义，

$$h_w = \sum_{j=1}^{n} \frac{n-2j+1}{2n} (e_{jj} - e_{2n+1-j,2n+1-j}),$$

于是 $S^{-1}\mathrm{Ad}\ \tilde{w} S = \exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{ad}\, h_w)$。注意，由于$\mathfrak{h}_0 = \mathbb{C} \sum_{i=1}^{n} (e_{ii} - e_{2n+1-i,2n+1-i})$，条件 (5.2) 得到满足。

Let

$$\begin{aligned}a_{k\ell}^{+-} &= S^{-1} e_{k\ell}^{+-} S = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{-k})^i (\omega^{\ell})^j e_{ij}^{+-}, \\ a_{k\ell}^{++} &= S^{-1} e_{k\ell}^{++} S = (-1)^{\ell} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{-k})^i (-\omega^{-\ell})^j e_{ij}^{++}, \\ a_{k\ell}^{--} &= S^{-1} e_{k\ell}^{--} S = (-1)^{k} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} (-\omega^{k})^i (\omega^{\ell})^j e_{ij}^{--}.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}a_{k\ell}^{+-}(z) &= \frac{1}{n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i,j=1}^{n} \left((\omega^{-k})^i (\omega^{-\ell})^{-j} t^m e_{ij}^{+-} \right) z^{-mn+i-j-1}, \\ a_{k\ell}^{++}(z) &= (-1)^{\ell} \frac{1}{n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i,j=1}^{n} \left((\omega^{-k})^i (-\omega^{-\ell})^j t^m e_{ij}^{++} \right) z^{-(m+1)n+i+j-2}, \\ a_{k\ell}^{--}(z) &= (-1)^{k} \frac{1}{n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i,j=1}^{n} \left((-\omega^{-k})^{-i} (\omega^{-\ell})^{-j} t^m e_{ij}^{--} \right) z^{-(m-1)n-i-j}.\end{aligned}$$

利用 (2.27) 和 (3.9)，我们可以计算

$$r(a^{+-}_{k\ell})(z) = \frac{1}{n}\sum_{\ell,m\in\mathbb{Z}}\sum_{i,j=1}^{n}(\omega^{-k})^i(-\omega^{-\ell})^{-j} : b_{-2\ell n-i+\frac{1}{2}}b_{2(\ell+m)n+j-\frac{1}{2}} : z^{-mn+i-j-1},$$

$$r(a^{++}_{k\ell})(z) = (-1)^{\ell+1}\frac{1}{n}\sum_{\ell,m\in\mathbb{Z}}\sum_{i,j=1}^{n}(\omega^{-k})^i(\omega^{-\ell})^{j} : b_{-2\ell n-i+\frac{1}{2}}b_{2(\ell+m+1)n-j+\frac{1}{2}} : z^{-(m+1)n+i+j-2},$$

$$r(a^{--}_{k\ell})(z) = (-1)^{k}\frac{1}{n}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{i,j=1}^{n}(-\omega^{-k})^{-i}(-\omega^{\ell})^{-j} : b_{-2(\ell-1)n+i-\frac{1}{2}}b_{2(\ell+m)n+j-\frac{1}{2}} : z^{-(m-1)n-i-j}.$$

因此，将 b_j 重标记如下:

$$b^+_{\ell n-i+\frac{1}{2}} = b_{2\ell n-i+\frac{1}{2}}, \quad b^-_{\ell n+i-\frac{1}{2}} = (-1)^i b_{2\ell n+i-\frac{1}{2}}, \tag{5.23}$$

以及它们如(5.15) 中所示的生成级数，我们发现

$$\begin{aligned}
r(a^{+-}_{k\ell})(z) &= \frac{\omega^{-k}}{n} : b^+(\omega^{-k}z)b^-(\omega^{-\ell}z) :,\\
r(a^{++}_{k\ell})(z) &= (-1)^{\ell+1}\frac{\omega^{-k-\ell}}{n} : b^+(\omega^{-k}z)b^+(\omega^{-\ell}z) :, ,\\
r(a^{--}_{k\ell})(z) &= (-1)^{k}\frac{1}{n} : b^-(\omega^{-k}z)b^-(\omega^{-\ell}z) : .
\end{aligned}$$

注意，由(5.23) 定义的 $b^{\pm}_j$满足

$$b^{\pm}_i b^{\pm}_j - b^{\pm}_j b^{\pm}_i = 0, \quad b^+_i b^-_j - b^-_j b^+ = \delta_{i,-j} \quad i,j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z},$$

and

$$b^{\pm}_i|0\rangle = 0 \quad for\ i > 0.$$

再次令 $\alpha(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\alpha_j z^{-j-1} = nr(a^{+-}_{nn})(z)$，这便定义了 $r(\hat{}sp_{2n})$ 的海森堡子代数，其对易关系

$$[\alpha_j, \alpha_k] = -j\delta_{jk}, \quad \alpha_j|0\rangle = 0, \quad for\ j \geq 0.$$

最后，

$$[\alpha_j, b^{\pm}(z)] = \mp z^j b^{\pm}(z).$$

例 5.5（一个负循环，主海森堡子代数）在此情形下 $r = 1$ 且 $s = 0$，因此

$$w_{(\emptyset,(n))} : \epsilon_n \mapsto -\epsilon_1, \quad \epsilon_k \mapsto \epsilon_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

我们选择

$$\tilde{w} = \tilde{w}_{(\emptyset,(n))} = e_{2n,n} + (-1)^n e_{1,n+1} + \sum_{i=1}^{n-1}(e_{i+1,i} - e_{2n-i,2n+1-i}).$$

然后很容易验证$\mathrm{Ad}\,\tilde{w}|_{\mathfrak{h}} = w_{(\emptyset,(n))}$，并且该元素满足

$$(\tilde{w}u, \tilde{w}v)_{sp_{2n}} = (u,v)_{sp_{2n}} \quad u,v \in \mathbb{C}^{2n}.$$

因此 $\tilde{w} \in Sp_{2n}$。令 $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{4n}}$。矩阵 $\tilde{w}$ 的特征向量为

$$(\omega^j, \omega^{2j}, \ldots, \omega^{nj}, (-1)^n, (-1)^n(-\omega^{-j})^1, (-1)^n(-\omega^{-j})^2, \ldots, (-1)^n(-\omega^{-j})^{n-2}, (-1)^n(-\omega^{-j})^{n-1})^T,$$

对应的特征值为 ω^{-j}，其中 $j = 1, 3, 5, \ldots 4n-1$。因此，我们可以通过 $S = (S_{ij})_{1\le i,\ j\le 2n}$将 $\tilde{w}$ 对角化，其中

$$S_{i,j} = \frac{\omega^{\frac{n}{2}}(-\omega^{2j-1})^i}{\sqrt{2n}}, \quad S_{2n+1-i,j} = \frac{\omega^{\frac{n}{2}}(\omega^{1-2j})^{n-i}}{\sqrt{2n}}, \quad for\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le 2n,$$

因此 $\mathrm{Ad}\ \tilde{w} = S(\exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{ad}\,h_w)S^{-1}$，其中

$$h_w = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n-2i+1}{4n}(e_{ii} - e_{2n+1-i,2n+1-i})$$

注意，$S^{-1} = (T_{ij})_{1\le i,\ j\le 2n}$，其中

$$T_{i,j} = \frac{\omega^{-\frac{n}{2}}(-\omega^{2i-1})^{-j}}{\sqrt{2n}}, \quad T_{i,2n+1-j} = \frac{\omega^{-\frac{n}{2}}(\omega^{1-2i})^{j-n}}{\sqrt{2n}}, \quad for\ 1 \le i \le 2n,\ 1 \le j \le n.$$

此外，容易验证，对于 u，$v \in \mathbb{C}^{2n}$，有 $(Su,\ Sv)_{sp_{2n}} = (u,\ v)_{sp_{2n}}$，因此 $S \in Sp_{2n}$。
于是

$$a^{+-}_{k\ell} = S^{-1}e^{+-}_{k\ell}S = \frac{(-\omega)^{k-\ell}}{2n}\sum_{i,j=1}^{2n}(\omega^{-2k})^i(\omega^{2\ell})^j(e_{ij} - (-1)^{i+j}e_{2n+1-j,2n+1-i}),$$

$$a^{++}_{k\ell} = S^{-1}e^{++}_{k\ell}S = \frac{(-\omega)^{k}\omega^{n-\ell}}{2n}\sum_{i,j=1}^{2n}(\omega^{-2k})^i(-\omega^{2\ell})^j(e_{ij} - (-1)^{i+j}e_{2n+1-j,2n+1-i})$$

$$a^{--}_{k\ell} = S^{-1}e^{--}_{k\ell}S = \frac{(-\omega)^{-\ell}\omega^{k-n}}{2n}\sum_{i,j=1}^{2n}(-\omega^{-2k})^i(\omega^{2\ell})^j(e_{ij} - (-1)^{i+j}e_{2n+1-j,2n+1-i}),$$

相应的生成场为

$$a^{+-}_{k\ell}(z) = \frac{(-\omega)^{k-\ell}}{2n}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{i,j=1}^{2n}\left((\omega^{-2k})^i(\omega^{2\ell})^j t^m(e_{ij} - (-1)^{i+j}e_{2n+1-j,2n+1-i})\right)z^{-2mn+i-j-1},$$

$$a^{++}_{k\ell}(z) = \frac{(-\omega)^{k}\omega^{n-\ell}}{2n}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{i,j=1}^{2n}\left((\omega^{-2k})^i(-\omega^{2\ell})^j t^m(e_{ij} - (-1)^{i+j}e_{2n+1-j,2n+1-i})\right)z^{-2mn+i-j-1},$$

$$a^{--}_{k\ell}(z) = \frac{(-\omega)^{-\ell}\omega^{k-n}}{2n}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left((-\omega^{-2k})^i(\omega^{2\ell})^j t^m(e_{ij} - (-1)^{i+j}e_{2n+1-j,2n+1-i})\right)z^{-2mn+i-j-1}.$$

利用 (2.27) 和 (3.9)，我们可以用 b_j 表示它们:

$$r(a^{+-}_{k\ell})(z)=\frac{(-\omega)^{k-\ell}}{2n}\sum_{\ell,m\in\mathbb{Z}}\sum_{i,j=1}^{2n}(\omega^{-2k})^i(-\omega^{2\ell})^j:b_{-2\ell n-i+\frac{1}{2}}b_{2(\ell+m)n+j-\frac{1}{2}}:z^{-2mn+i-j-1},$$

$$r(a^{++}_{k\ell})(z)=\frac{(-\omega)^{k}\omega^{n-\ell}}{2n}\sum_{\ell,m\in\mathbb{Z}}\sum_{i,j=1}^{2n}(\omega^{-2k})^i(\omega^{2\ell})^j:b_{-2\ell n-i+\frac{1}{2}}b_{2(\ell+m)n+j-\frac{1}{2}}:z^{-2mn+i-j-1},$$

$$r(a^{--}_{k\ell})(z)=\frac{(-\omega)^{-\ell}\omega^{k-n}}{2n}\sum_{\ell,m\in\mathbb{Z}}(-\omega^{-2k})^i(-\omega^{2\ell})^j:b_{-2\ell n-i+\frac{1}{2}}b_{2(\ell+m)n+j-\frac{1}{2}}:z^{-2mn+i-j-1}.$$

将 $\tilde{\phi}_j$ 的生成场定义为 $b(z)=\sum_{j\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}b_jz^{-j-\frac{1}{2}}$，我们发现，对于$\delta$， $\epsilon=+$， $-$:

$$r(a^{\delta,\epsilon}_{k,\ell})(z)=\frac{c^{\delta,\epsilon}_{k,\ell}}{2n}:b(\delta\omega^{-2k}z)b(\epsilon\omega^{-2\ell}z):,$$

其中

$$c^{+-}_{k,\ell}=(-\omega)^{-k-\ell},\quad c^{++}_{k,\ell}=\sqrt{-1}(-\omega)^{-k}\omega^{-\ell},\quad c^{--}_{k,\ell}=\sqrt{-1}(-\omega)^{-\ell}\omega^{-k}.$$

此外，

$$\alpha(z):=nr(a^{+-}_{nn})(z)=\sum_{j\in1+2\mathbb{Z}}\alpha_jz^{-j}=\frac{1}{2}:b(z)b(-z):$$

是生成 场对应的海森堡子代数。该场的模满足 y

$$[\alpha_j,\alpha_k]=-\frac{j}{2}\delta_{jk},\quad \alpha_j|0\rangle=0\quad for\ j>0.$$

最后，

$$[\alpha_j,b(z)]=z^jb(z).$$

一般构造可由这两个例子得出。具体而言，以下命题很容易推导。

命题 5.6 令 $w_{(\lambda,\mu)}$ 由(5.20)给出。设 $\lambda_{s+a}=:\ \mu_a$，并且当$1\le a\le s$ 时 $\omega_a=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda_a}}$，当 $s+1\le a\le r+s$ 时 $\omega_a=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2\lambda_a}}$。则 ***(a)*** 元素

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{(\lambda,\mu)}=\sum_{a=1}^{s}\omega_a^{\frac{\lambda_a+1}{2}}\big(&e_{M_a+1,M_{a+1}}-(-1)^{\lambda_a}e_{2n-M_a,2n-M_{a+1}+1}+\\&+\sum_{i=1}^{\lambda_a-1}(e_{M_a+i+1,M_a+i}-E_{2n-M_a-i,2n+1-Ma-i})\big)+\\+\sum_{a=s+1}^{r+s}\big(&e_{2n-M_a,M_{a+1}}+(-1)^{\lambda_a}e_{M_a+1,N-M_{a+1}+1}+\\&+\sum_{i=1}^{\lambda_a-1}(e_{M_a+i+1,M_a+i}-e_{2n-M_a-i,2n+1-Ma-i})\big)\in Sp_{2n}\end{aligned}$$

是 $w_{(\lambda,\mu)}$ 的提升，而 $\tilde{w}_{(\lambda,\mu)} = S^{-1}\exp(2\pi\sqrt{-1}h_w)S$，其中

$$h_w = \sum_{a=1}^{s}\sum_{j=1}^{\lambda_a}\frac{\lambda_a - 2j + 1}{2\lambda_a}\epsilon_{M_a+j} + \sum_{b=s+1}^{r+s}\sum_{j=1}^{\lambda_b}\frac{\lambda_b - j + \frac{1}{2}}{2\lambda_b}\epsilon_{M_b+j} \in \mathfrak{h}$$

满足*(5.2)</style)*，并且

$$\begin{aligned}S =& \sum_{a=1}^{s}\sum_{i=1}^{\lambda_a}\frac{1}{\sqrt{\lambda_a}}\sum_{i,j=1}^{\lambda_a}(\omega_a^{ij}e_{M_a+i,M_a+j} + (-1)^{i+j}\omega^{-ij}e_{2n+1-M_a-i,2n+1-M_a-j}) + \\ &+ \sum_{a=s+1}^{r+s}\frac{1}{\sqrt{2\lambda_a}}\sum_{i,j=1}^{\lambda_a}\big((-1)^i\omega_a^{\frac{\lambda_a}{4}}(\omega_a^{-i})^{\frac{1}{2}-j}e_{M_a+i,M_a+j} + (-1)^i\omega_a^{\frac{\lambda_a}{4}}(\omega_a^{-i})^{\frac{1}{2}-\lambda_a-j}e_{M_a+i,2n-M_{a+1}+j} + \\ &+ \omega_a^{\frac{\lambda_a}{4}}(\omega^{\lambda_a-i})^{\frac{1}{2}-j}e_{2n+1-M_a-i,M_a+j} + \omega_a^{\frac{\lambda_a}{4}}(\omega^{\lambda_a-i})^{\frac{1}{2}-\lambda_a-j}e_{2n+1-M_a-i,2n-M_{a+1}+j}\big).\end{aligned}$$

(b) exp(*$2\pi\sqrt{-1}$*ad* h_w*) 的阶 N 等于 N'、λ_1、…、λ_s、$2\lambda_{s+1}$、$2\lambda_{s+2}$、$\ldots 2\lambda_{r+s}$ 的最小公倍数，如果 $N'(\frac{1}{\lambda_a}+\frac{1}{\lambda_b}) \in 2\mathbb{Z}$ 对所有 $1 \le a,\ b \le s$，$N'(\frac{1}{2\lambda_a}+\frac{1}{2\lambda_b}) \in 2\mathbb{Z}$ 对所有 $s+1 \le a,\ b \le r+s$，$N'(\frac{1}{\lambda_a}+\frac{1}{2\lambda_b}) \in 2\mathbb{Z}$ 对所有 $1 \le a \le s,\ s+1 \le b \le r+s$ $2N'$ ；否则亦然。

(c) 元素 $a^{\delta a}{}_{,k}{}^{\epsilon b}{}_{,\ell} := S^{-1}e^{\delta a}{}_{,k\ell}{}^{\epsilon b}S =$ 构成 sp_{2n} 的新基，且它们的生成场 $a^{\delta a}$ 在 F_c 中的表示 $r_{,k\ell}{}^{\epsilon b}(z)$ 等于

$$r(a^{\delta_a,\epsilon b}_{k,\ell})(z) = L_k^{\delta a}R_\ell^{\epsilon b} : B_k^{\delta a}(z)B_\ell^{\epsilon b}(z) :,$$

其中

$$L_k^{+a} = \begin{cases}\frac{(-1)^{k+M_a}}{\sqrt{\lambda_a}} & 1 \le a \le s,\\ \frac{\gamma_a^{-1}}{\sqrt{2\lambda_a}}\omega_a^{-\frac{k}{2}+\frac{\lambda_a}{4}} & s < a \le r+s,\end{cases} \qquad L_k^{-a} = \begin{cases}\frac{\omega_a^{-k}}{\sqrt{\lambda_a}} & 1 \le a \le s,\\ \frac{(-1)^k\gamma_a^{-1}}{\sqrt{2\lambda_a}}\omega_a^{-\frac{k}{2}-\frac{\lambda_a}{4}} & s < a \le r+s\end{cases}$$

$$R_k^{+a} = \begin{cases}\frac{(-1)^{k+M_a+1}}{\sqrt{\lambda_a}}\omega_a^{-k} & 1 \le a \le s,\\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{2\lambda_a}}\omega_a^{-\frac{k}{2}+\frac{3\lambda_a}{4}} & s < a \le r+s,\end{cases} \qquad R_k^{-a} = \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\lambda_a}} & 1 \le a \le s,\\ \frac{(-1)^k\gamma_a}{\sqrt{2\lambda_a}}\omega_a^{-\frac{k}{2}+\frac{\lambda_a}{4}} & s < a \le r+s,\end{cases}$$

其中，若 M_a 为偶数，则为 $\gamma_a = 1$；若 M_a 为奇数，则为 $\gamma_a = i$，并且

$$B_k^{\pm a}(z) = \begin{cases}b^{\pm a}(\omega_a^{-k}z^{\frac{N}{\lambda_a}})z^{\frac{N}{2\lambda_a}-\frac{1}{2}} & 1 \le a \le s,\\ b^a(\pm\omega_a^{-k}z^{\frac{N}{2\lambda_a}})z^{\frac{N}{4\lambda_a}-\frac{1}{2}} & s < a \le s+r,\end{cases}$$

其中的

$$b^{\pm a}(z) = \sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} b_i^{\pm a}z^{-i-\frac{1}{2}}, \quad b^{s+b}(z) = \sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} b^{s+b}z^{-i-\frac{1}{2}}, \quad 1 \le a \le s,\ 1 \le b \le r,$$

是魏尔代数 $C\ell_c$ *(*$1 \le a \le s$*,* $1 \le b \le r$*,* $1 \le i \le \lambda_a$*,* $1 \le j \le \lambda_{s+b}$*,* $\ell \in \mathbb{Z}$*)* 中重新标记的生成元所对应的生成场：

$$\begin{aligned}b^{+a}_{\ell\lambda_a-i+\frac{1}{2}} &= b_{2\ell n-M_a-i+\frac{1}{2}}, \quad b^{-a}_{\ell\lambda_a+i-\frac{1}{2}} = (-1)^{M_a+i}b_{2\ell n+M_a+i-\frac{1}{2}},\\ b^{s+b}_{2\ell\lambda_{s+b}-j+\frac{1}{2}} &= \gamma_{s+b}b_{2\ell n-M_{s+b}-j+\frac{1}{2}}, \quad b^{s+b}_{2\ell\lambda_{s+b}+j-\frac{1}{2}} = \gamma_{s+b}b_{2\ell n+M_{s+b}+j-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{5.24}$$

它们满足 $(1 \le a,\ \ c \le s,\ \ \ 1 \le b,\ \ d \le r,\ \ \ \ \ i,\ \ j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} b_i^{\pm a} b_j^{\pm c} - b_j^{\pm c} b_i^{\pm a} &= 0, \\ b_i^{+a} b_j^{-c} - b_j^{-c} b^{+a} &= \delta_{ac}\delta_{i,-j} \\ b_i^{s+b} b_j^{s+d} - b_j^{s+d} b_i^{s+b} &= (-1)^{i-\frac{1}{2}}\delta_{bd}\delta_{i,-j}, \\ b_i^{\pm a} b_j^{s+b} - b_j^{s+b} b_i^{\pm a} &= 0, \\ b_i^{\pm a}|0\rangle = b_i^{s+b}|0\rangle &= 0 \quad i > 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

(d) $\hat{}sp_n$ 的表示通过顶点算子给出，具体见公式 (3.79)、(3.80) 和(3.81) ，其中代入单位根 ω_a 和 z 的幂，正如上述公式所给出。特别地，由场 $\alpha^a(z)$ 描述的海森堡代数定义如(3.41) 所示，并满足(3.42)。

q 维数公式与（3.60）中给出的公式不同，因为分次不同。令 $x^2 = 1$ 和 N为 λ_1、.....、 λ_s、$2\mu_1$、.....、 $2\mu_r$的最小公倍数，则

$$\begin{aligned} \dim_q F^{\overline{0}} + xF^{\overline{1}} &= \prod_{a=1}^{s}\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1-xq^{\frac{(j-\frac{1}{2})N}{\lambda_a}})^2} \prod_{b=1}^{r}\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-xq^{\frac{(j-\frac{1}{2})N}{\mu_b}}} \\ &= \prod_{a=1}^{s}\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{\frac{jN}{\lambda_a}}} \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{kN}{2\lambda_a}}x^k}{(1-q^{\frac{N}{\lambda_a}})\cdots(1-q^{\frac{kN}{\lambda_a}})} q^{jk\frac{N}{\lambda_a}} \frac{q^{\frac{jN}{2\lambda_a}}x^j}{(1-q^{\frac{N}{\lambda_a}})\cdots(1-q^{\frac{jN}{\lambda_a}})} \times \\ &\quad \prod_{b=1}^{r}\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1+xq^{\frac{N(j-\frac{1}{2})}{\mu_b}}}{1-q^{\frac{(2j-1)N}{\mu_b}}}. \end{aligned}$$

5.4 so_{2n}

回想一下， so_{2n} 的魏尔群的共轭类与一对分拆一一对应。

$$\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_s > 0), \mu = (\mu_1 \ge \mu_2, \ge \cdots \ge \mu_r > 0), \tag{5.26}$$

的 n，其中有 $r \in 2\mathbb{Z}$，即

$$|\lambda| + |\mu| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s + \mu_1 + \cdots + \mu_r = n. \tag{5.27}$$

我们可以将每个元素 $w \in W$ 分解为 s 个长度为 λ_i 的互不相交的正循环，以及 r 个长度为 μ_j 的互不相交的负循环，使得（ 5.27 ）成立。显然，具有相同循环类型的两个元素在 O_{2n} 下共轭。

我们重新标记基如下。令 $m_a = \lambda_a$、 $M_a = |\lambda|_{a-1}$ 对应 $1 \le a \le s$ ， $m_a = \mu_{a-s}$、$M_a = |\lambda| + |\mu|_{a-s-1}$ 对应 $s < a \le r+s$ 和 $M_{r+s+1} = |\lambda| + |\mu|$，然后设 $(1 \le a, b \le s+r,$ $1 \le i \le m_a, 1 \le j \le m_b)$

$$\begin{aligned} e_{ij}^{+a,-b} &= e_{M_a+i,M_b+j} - e_{2n+1-M_b-j,2n+1-M_a-i} \\ e_{ij}^{+a,+b} &= - = e_{M_a+i,2n+1-M_b-j} - e_{M_b+j,2n+1-M_a-i} \\ e_{ij}^{-a,-b} &= -e_{ji}^{-b,-a} = e_{2n+1-M_a-i,M_b+j} - e_{2n+1-M_b-j,M_a+i}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

正如对 sp_{2n} 一样，我们可以将一对分拆（λ，μ）与 n 的一个标准元素$w_{(\lambda,\mu)} \in W$相关联，即由（5.20）给出的那个元素，但现在我们希望将其提升到 SO_{2n}。如在 sp_{2n} 的情形中一样，我们将首先考察两个例子。

例5.7（一个正循环）在这种情况下，$s = 1$ 和 $r = 0$，并且我们有与（5.22）中相同的元素。然而现在我们必须将其提升到 SO_{2n}。令$\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ 选择

$$\tilde{w}_{((n),\emptyset)} = \omega^{\frac{n+1}{2}} e_{1,n} + \omega^{-\frac{n+1}{2}} e_{2n,n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} (\omega^{\frac{n+1}{2}} e_{i+1,i} + \omega^{-\frac{n+1}{2}} e_{2n-i,2n+1-i}).$$

显然，$(\tilde{w}_{((n),\emptyset)}v, \tilde{w}_{((n),\emptyset)}w)^{so_{2n}} = (v,w)^{so_{2n}}$ 并且我们可以通过选择 $\tilde{w}_{((n),\emptyset)}$ 将其对角化

$$S = \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{ij} e_{ij} + \omega^{-ij} e_{2n+1-i,2n+1-j}).$$

Then

$$S^{-1} = \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{-ij} e_{ij} + \omega^{ij} e_{2n+1-i,2n+1-j})$$

和 $\tilde{w}_{((n),\emptyset)} = Se^{2\pi\sqrt{-1}h_w}S^{-1}$ 一起

$$h_w = \sum_{j=1}^{n} \frac{n-2j+1}{2n} (e_{jj} - e_{2n+1-j,2n+1-j}).$$

令 $a_{k\ell}^{\delta\epsilon} = S^{-1} e_{k\ell}^{\delta\epsilon} S$，则

$$\begin{aligned}
a_{k\ell}^{+-}(z) &= \frac{1}{n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{-k})^i (\omega^{-\ell})^{-j} t^m e_{ij}^{+-} z^{-mn+i-j-1}, \\
a_{k\ell}^{++}(z) &:= \frac{1}{n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{-k})^i (\omega^{-\ell})^{j} t^m e_{ij}^{++} z^{-(m+1)n+i+j-2}, \\
a_{k\ell}^{--}(z) &:= \frac{1}{n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{-k})^{-i} (\omega^{-\ell})^{-j} t^m e_{ij}^{--} z^{-(m-1)n-i-j}.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

利用 (2.27) 和 (2.23)，我们可以计算

$$\begin{aligned}
r(a_{k\ell}^{+-})(z) &= \frac{1}{n} \sum_{\ell,m\in\mathbb{Z}} \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{-k})^i (\omega^{-\ell})^{-j} : \phi_{-2\ell n-i+\frac{1}{2}} \phi_{2(\ell+m)+j-\frac{1}{2}} : z^{-mn+i-j-1}, \\
r(a_{k\ell}^{++})(z) &= \frac{1}{n} \sum_{\ell,m\in\mathbb{Z}} \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{-k})^i (\omega^{-\ell})^{j} : \phi_{-2\ell n-i+\frac{1}{2}} \phi_{2(\ell+m+1)-j+\frac{1}{2}} : z^{-(m+1)n+i+j-2}, \\
r(a_{k\ell}^{--})(z) &= \frac{1}{n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{-k})^{-i} (\omega^{-\ell})^{-j} : \phi_{-2(\ell-1)n+i-\frac{1}{2}} \phi_{2(\ell+m)+j-\frac{1}{2}} : z^{-(m-1)n-i-j}.
\end{aligned}$$

˜因此，将 ϕ_j 重标记如下：

$$\psi^+_{\ell n-i+\frac{1}{2}} = \phi_{2\ell n-i+\frac{1}{2}}, \quad \psi^-_{\ell n+i-\frac{1}{2}} = \phi_{2\ell n+i-\frac{1}{2}}, \tag{5.30}$$

以及如(5.15)所示的生成级数，我们发现

$$\begin{aligned} r(a^{+-}_{k\ell})(z) &= \frac{\omega^{-k}}{n} : \psi^+(\omega^{-k}z)\psi^-(\omega^{-\ell}z) :, \\ r(a^{++}_{k\ell})(z) &= \frac{\omega^{-k-\ell}}{n} : \psi^+(\omega^{-k}z)\psi^+(\omega^{-\ell}z) :, , \\ r(a^{--}_{k\ell})(z) &= \frac{1}{n} : \psi^-(\omega^{-k}z)\psi^-(\omega^{-\ell}z) : . \end{aligned} \tag{5.31}$$

注意，由(5.30) 定义的 $\psi^\pm_j$ 满足

$$\psi^\pm_i\psi^\pm_j + \psi^\pm_j\psi^\pm_i = 0, \quad \psi^+_i\psi^-_j + \psi^-_j\psi^+ = \delta_{i,-j} \quad i,j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z},$$

and

$$\psi^\pm_i|0\rangle = 0 \quad \textit{for } i > 0.$$

再次定义 $\alpha(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j z^{-j-1} = nr(a^{+-}_{nn})(z)$，这定义了海森堡代数，其对易关系为

$$[\alpha_j, \alpha_k] = j\delta_{jk}, \quad \alpha_j|0\rangle = 0, \quad \textit{for } j \geq 0.$$

最后，

$$[\alpha_j, \psi^\pm(z)] = \pm z^j\psi^\pm(z).$$

例5.8（两个负循环）在此情形下，$s = 0$ 和 $r = 2$，因此 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$，其中 $\mu_1 + \mu_2 = n$。特殊情形 $\mu = (n-1, 1)$ 对应于主实现。取 O_{2n}中$w_{(\emptyset,(\mu_1,\mu_2))}$ 的如下提升：

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{(\emptyset,(\mu_1,\mu_2))} =& e_{1,2n+1-\mu_1} + e_{2n,\mu_1} + e_{\mu_1+1,2n+1-\mu_1-\mu_2} + e_{2n-\mu_1,\mu_1+\mu_2} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\mu_1-1} e_{i+1,i} + e_{2n-i,2n+1-i} + \sum_{i=1}^{\mu_2-1} e_{\mu_1+i+1,\mu_1+i} + e_{2n-i-\mu_1,2n+1-i-\mu_1}. \end{aligned}$$

$\frac{\pi i}{}$设 $\omega_j = e^{\mu_j}$，且当 μ_i 为偶数时取 $\gamma_i = 1$，当 μ_i 为奇数时取 $\gamma_i = \sqrt{-1}$。设

$$
\begin{aligned}
S =& \frac{1}{\sqrt{4\mu_1}} \sum_{k=1}^{\mu_1} [(-1)^k (\gamma_1 e_{k1} + \gamma_1^{-1} e_{2n+1-k,1} + \gamma_1^{-1} e_{2n+1-k,2n} + \gamma_1 e_{k,2n}) + \\
&\quad + (e_{k,\mu_1+\mu_2} + e_{2n+1-k,\mu_1+\mu_2} + e_{2n+1-k,2n+1-\mu_1-\mu_2} + e_{k,2n+1-\mu_1-\mu_2})] + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{4\mu_2}} \sum_{k=1}^{\mu_2} \sqrt{-1} [(-1)^k (\gamma_2 e_{\mu_1+k,1} + \gamma_2^{-1} e_{2n+1-\mu_1-k,1} + -\gamma_2^{-1} e_{2n+1-\mu_1-k,2n} - \gamma_2 e_{\mu_1+k,2n}) + \\
&\quad + (e_{\mu_1+k,\mu_1+\mu_2} + e_{2n+1-\mu_1-k,\mu_1+\mu_2} - e_{2n+1-\mu_1-k,2n+1-\mu_1-\mu_2} - e_{\mu_1+k,2n+1-\mu_1-\mu_2})] + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\mu_1}} \sum_{i=1}^{\mu_1} \sum_{j=2}^{\mu_1} (\omega_1^{(j-\mu_1-1)i} e_{ij} + \omega_1^{(j-\mu_1-1)(\mu_1+i)} e_{2n+1-i,j} + \omega_1^{-(j-\mu_1-1)(i-\mu_1)} e_{i,2n+1-j} + \\
&\quad + \omega_1^{-(j-\mu_1-1)i} e_{2n+1-i,2n+1-j}) + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\mu_2}} \sum_{i=1}^{\mu_2} \sum_{j=1}^{\mu_2-1} (\omega_2^{(j-\mu_2)i} e_{\mu_1+i,\mu_1+j} + \omega_2^{(j-\mu_2)(\mu_2+i)} e_{2n+1-\mu_1-i,\mu_1+j} + \\
&\quad + \omega_2^{-(j-\mu_2)(i-\mu_2)} e_{\mu_1+i,2n+1-\mu_1-j} + \omega_2^{-(j-\mu_2)i} e_{2n+1-\mu_1-i,2n+1-\mu_1-j}).
\end{aligned}
$$

很容易验证，S 确实属于 O_{2n}，因此该矩阵的逆等于

$$
\begin{aligned}
S^{-1} =& \frac{1}{\sqrt{4\mu_1}} \sum_{k=1}^{\mu_1} [(-1)^k (\gamma_1 e_{1,k} + \gamma_1 e_{2n,k} + \gamma_1^{-1} e_{1,2n+1-k} + \gamma_1^{-1} e_{2n,2n+1-k}) + \\
&\quad + e_{\mu_1+\mu_2,k} + e_{2n+1-\mu_1-\mu_2,k} + e_{\mu_1+\mu_2,2n+1-k} + e_{2n+1-\mu_1-\mu_2,2n+1-k})] + \\
&- \frac{1}{\sqrt{4\mu_2}} \sum_{k=1}^{\mu_2} \sqrt{-1} [(-1)^k (-\gamma_2 e_{1,\mu_1+k} + \gamma_2 e_{2n,\mu_1+k} - \gamma_2^{-1} e_{1,2n+1-\mu_1-k} + \gamma_2^{-1} e_{2n,2n+1-\mu_1-k}) + \\
&\quad + (-e_{\mu_1+\mu_2,\mu_1+k} + e_{2n+1-\mu_1-\mu_2,\mu_1+k} - e_{\mu_1+\mu_2,2n+1-\mu_1-k} + e_{2n+1-\mu_1-\mu_2,2n+1-\mu_1-k})] + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\mu_1}} \sum_{i=1}^{\mu_1} \sum_{j=2}^{\mu_1} (\omega_1^{(j-\mu_1-1)i} e_{ji} + \omega_1^{-(j-\mu_1-1)i} e_{2n+1-j,2n+1-i} + \omega_1^{-(j-\mu_1-1)(\mu_1+i)} e_{2n+1-j,i} + \\
&\quad + \omega_1^{(j-\mu_1-1)(i-\mu_1)} e_{j,2n+1-i} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\mu_2}} \sum_{i=1}^{\mu_2} \sum_{j=1}^{\mu_2-1} (\omega_2^{(j-\mu_2)i} e_{\mu_1+j,\mu_1+i} + \omega_2^{-(j-\mu_2)i} e_{2n+1-\mu_1-j,2n+1-\mu_1-i} \\
&\quad + \omega_2^{-(j-\mu_2)(\mu_2+i)} e_{2n+1-\mu_1-j,\mu_1+i} + \omega_2^{(j-\mu_2)(i-\mu_2)} e_{\mu_1+j,2n+1-\mu_1-i}).
\end{aligned}
$$

然后 $S^{-1}\tilde{w}_{(\emptyset,(\mu_1,\mu_2))}S = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}h_w\right)$，其中

$$
h_w = \sum_{i=1}^{\mu_1} \frac{\mu_1 - i + 1}{2\mu_1} (e_{ii} - e_{2n+1-i,2n+1-i}) + \sum_{i=1}^{\mu_2} \frac{\mu_2 - i}{2\mu_2} (e_{\mu_1+i,\mu_1+i} - e_{2n+1-\mu_1-i,2n+1-\mu_1-i}).
$$

S 以及 S^{-1} 建议对 $\tilde{\phi}_j$进行如下重标记，即（$1 \le j \le \mu_1 - 1$ ，

$1 \le k \le \mu_2 - 1$) ：

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}^1_{2\ell\mu_1-j} &= \gamma_1^{-1}\phi_{2\ell n-j-\frac{1}{2}}, \qquad \tilde{\phi}^1_{2\ell\mu_1+j} = \gamma_1(-1)^j\phi_{2\ell n+j+\frac{1}{2}},\\
\tilde{\phi}^1_{2\ell\mu_1+\mu_1} &= \frac{\gamma_1^{-1}}{\sqrt{2}}(\phi_{2\ell n+\mu_1+\mu_2-\frac{1}{2}} + \phi_{2(\ell+1)-\mu_1-\mu_2+\frac{1}{2}}),\\
\tilde{\phi}^1_{2\ell\mu_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{2\ell n+\frac{1}{2}} + \phi_{2\ell n-\frac{1}{2}}),\\
\tilde{\phi}^2_{2\ell\mu_2-k} &= \gamma_2^{-1}\phi_{2\ell n-\mu_1-k+\frac{1}{2}}, \qquad \tilde{\phi}^2_{2\ell\mu_2+k} = \gamma_2(-1)^k\phi_{2\ell n+\mu_1+k-\frac{1}{2}},\\
\tilde{\phi}^2_{2\ell\mu_2} &= \sqrt{\frac{-1}{2}}(\phi_{2\ell-\frac{1}{2}} - \phi_{2\ell n+\frac{1}{2}}),\\
\tilde{\phi}^2_{2\ell\mu_2+\mu_2} &= \frac{\gamma_2^{-1}\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(\phi_{2(\ell+1)n-\mu_1-\mu_2+\frac{1}{2}} - \phi_{2\ell n+\mu_1+\mu_2-\frac{1}{2}}).
\end{aligned} \tag{5.32}$$

~我们发现，由(5.32) 定义的新 ϕ^a_j 满足

$$\tilde{\phi}^a_j\tilde{\phi}^b_k + \tilde{\phi}^b_k\tilde{\phi}^a_j = (-1)^j\delta_{ab}\delta_{j,-k} \quad a,b = 1,2,\ j,k \in \mathbb{Z},$$

and

$$\tilde{\phi}^a_j|0\rangle = 0, \qquad j > 0.$$

定义这些场

$$\tilde{\phi}^b(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\phi}^b_j z^{-j},$$

那么对于 $a^{\delta b}{}_{,k}{}^{\epsilon c}{}_{,\ell} := S^{-1}e^{\delta b}{}_{,k}{}^{\epsilon c}{}_{,\ell}\ S$，其中 $b,c = 1,2,\ \delta,\epsilon = +,-,\ 1 \le k \le \mu_b$ 以及 $1 \le \ell \le \mu_c$，我们有

$$\begin{aligned}
r(a^{\delta b,\epsilon c}_{k,\ell})(z) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} r(a^{\delta b,\epsilon c}_{k,\ell}(j)_{j \bmod N})z^{-j-1}\\
&= \frac{\gamma_b^{\delta 1}\gamma_c^{\epsilon 1}(-1)^{k+\ell}z^{-1}}{2\sqrt{\mu_b\mu_c}} : \tilde{\phi}^b(\delta\omega_b^{-k}z^{\frac{N}{2\mu_b}})\tilde{\phi}^b(\epsilon\omega_c^{-\ell}z^{\frac{N}{2\mu_c}}) : \qquad b,c = 1,2,\ \delta,\epsilon = +,-.
\end{aligned}$$

其中，$N = 2\,\mathrm{lcm}(\mu_1,\mu_2)$ 是自同构$\exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{ad}\,h_w)$ 的阶（更多详情请参见*[25]* ）。
设

$$\alpha^b(z) = \sum_{k\in 1+2\mathbb{Z}} \alpha^b_k z^{-k} = -\lambda_b z^{\frac{2\lambda_b}{N}} r(a^{+b,-b}_{\lambda_b,\lambda_b})(z^{\frac{2\lambda_b}{N}}) =: \frac{1}{2} : \tilde{\phi}^b(z)\tilde{\phi}^b(-z) : .$$

为海森堡代数的生成场。该场的模满足

$$[\alpha_j,\alpha_k] = \frac{j}{2}\delta_{jk}, \quad \alpha_j|0\rangle = 0, \quad for\ j \ge 0.$$

最后，

$$[\alpha_j,\tilde{\phi}(z)] = z^j\tilde{\phi}(z).$$

一般性描述可由上述两个例子得出。很容易推导出以下命题。

命题 5.9 设 $w_{(\lambda,\mu)}$ 由 (5.20)给出，此处 r 为偶数。令 $\lambda_{s+a} =: \mu_a$，并在 $1 \le a \le s$且 $\omega_a = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2\lambda_a}}$为 $s+1 \le a \le r+s$时令 $\omega_a = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda_a}}$。则 ***(a)*** 元素

$$\tilde{w}_{(\lambda,\mu)} = \sum_{a=1}^{s} \big(\omega_a^{\frac{\lambda_a+1}{2}} e_{M_a+1,M_{a+1}} + \omega_a^{-\frac{\lambda_a+1}{2}} e_{2n-M_a,2n-M_{a+1}+1} + \sum_{i=1}^{\lambda_a-1} (\omega_a^{\frac{\lambda_a+1}{2}} e_{M_a+i+1,M_a+i} +$$
$$+ \omega^{-\frac{\lambda_a+1}{2}} e_{2n-M_a-i,2n+1-M_a-i})\big) + \sum_{a=1}^{\frac{r}{2}} \big(e_{M_{s+2a-1}+1,2n+1-M_{s+2a}} +$$
$$+ e_{2n-M_{s+2a},M_{s+2a}} + e_{M_{s+2a}+1,2n+1-M_{s+2a+1}} + e_{2n-M_{s+2a},M_{s+2a+1}}$$
$$+ \sum_{i=1}^{\lambda_{s+2a-1}-1} e_{M_{s+2a-1}+i+1,M_{s+2a-1}+i} + e_{2n-M_{s+2a-1}-i,2n+1-M_{s+2a-1}-i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\lambda_{s+2a}-1} e_{M_s+2a+i+1,M_{s+2a}+i} + e_{2n-M_{s+2a}-i,2n+1-M_{s+2a}-i}.\big) \in O_{2n}$$

是 $w_{(\lambda,\mu)}$ 和 $\tilde{w}_{(\lambda,\mu)} = S^{-1}\exp(2\pi\sqrt{-1}h_w)S$ 的提升，其中

$$h_w = \sum_{a=1}^{s}\sum_{i=1}^{\lambda_a} \frac{\lambda_a - 2j + 1}{2\lambda_a}\epsilon_{M_a+j} + \sum_{a=1}^{\frac{r}{2}}\sum_{i=1}^{\mu_{2a-1}} \frac{\mu_{2a-1} - i + 1}{2\mu_{2a-1}}\epsilon_{M_{s+2a-1}+i} + \sum_{i=1}^{\mu_{2a}} \frac{\mu_{2a} - i}{2\mu_{2a}}\epsilon_{M_{s+2a}+i} \in \mathfrak{h}$$

满足 (5.2)，并且

$$
\begin{aligned}
S=&\sum_{a=1}^{s}\sum_{i=1}^{\lambda_a}\sum_{i,j=1}^{\lambda_a}(\omega_a^{ij}e_{M_a+i,M_a+j}+\omega_a^{-ij}e_{2n+1-M_a-i,2n+1-M_a-j})\\
&+\sum_{a=1}^{\frac{r}{2}}\frac{1}{\sqrt{4\mu_{2a-1}}}\sum_{k=1}^{\mu_{2a-1}}[(-1)^k(\gamma_{s+2a-1}e_{M_{s+2a-1}+k,M_{s+2a-1}+1}+\gamma_{s+2a-1}^{-1}e_{2n+1-M_{s+2a-1}-k,M_{s+2a-1}+1}+\\
&\qquad+\gamma_{s+2a-1}^{-1}e_{2n+1-M_{s+2a-1}-k,2n-M_{s+2a-1}}+\gamma_{s+2a-1}e_{M_{s+2a-1}+k,2n-M_{s+2a-1}})+\\
&\qquad+(e_{M_{s+2a-1}+k,M_{s+2a+1}}+e_{2n+1-M_{s-2a-1}-k,M_{s+2a+1}}+\\
&\qquad+e_{2n+1-M_{s+2a-1}k,2n+1-M_{s+2a+1}}+e_{M_{s+2a-1}+k,2n+1-M_{s+2a+1}})]+\\
&+\frac{1}{\sqrt{4\mu_{2a}}}\sum_{k=1}^{\mu_{2a}}\sqrt{-1}[(-1)^k(-\gamma_{s+2a}e_{M_{s+2a}+k,M_{s+2a-1}+1}+\gamma_{s+2a}^{-1}e_{2n+1-M_{s+2a}-k,M_{s+2a-1}+1}\\
&\qquad-\gamma_{s+2a}^{-1}e_{2n+1-M_{s+2a}-k,2n-M_{s+2a-1}}+\gamma_{s+2a}e_{M_{s+2a}+k,2n-M_{s-2a-1}})+\\
&\qquad+(e_{M_{s+2a}+k,M_{s+2a+1}}+e_{2n+1-M_{s+2a}-k,M_{s+2a+1}}\\
&\qquad-e_{2n+1-M_{s+2a}-k,2n+1-M_{s+2a+1}}-e_{M_{s+2a}+k,2n+1-M_{s+2a+1}})]+\\
&+\frac{1}{\sqrt{2\mu_{2a-1}}}\sum_{i=1}^{\mu_{2a-1}}\sum_{j=2}^{\mu_{2a-1}}(\omega_{s+2a-1}^{(j-\mu_{2a-1}-1)i}e_{M_{s+2a-1}+i,M_{s+2a-1}+j}+\\
&\qquad+\omega_{s+2a-1}^{(j-\mu_{2a-1}-1)(\mu_{2a-1}+i)}e_{2n+1-M_{s+2a-1}-i,M_{s+2a-1}+j}+\\
&\qquad+\omega_{s+2a-1}^{-(j-\mu_{2a-1}-1)(i-\mu_{2a-1})}e_{M_{s+2a-1}+i,2n+1-M_{s+2a-1}-j}+\\
&\qquad+\omega_{s+2a-1}^{-(j-\mu_{2a-1}-1)i}e_{2n+1-M_{s+2a-1}+i,2n+1-M_{s+2a-1}-j})+\\
&+\frac{1}{\sqrt{2\mu_{2a}}}\sum_{i=1}^{\mu_{2a}}\sum_{j=1}^{\mu_{2a}-1}(\omega_{s+2a}^{(j-\mu_{2a})i}e_{M_{s+2a}+i,M_{s+2a}+j}+\omega_{s+2a}^{(j-\mu_{2a})(\mu_{2a}+i)}e_{2n+1-M_{s+2a}-i,M_{s+2a}+j}+\\
&\qquad+\omega_{s+2a}^{-(j-\mu_{2a})(i-\mu_{2a})}e_{M_{s+2a}+i,2n+1-M_{s+2a}-j}+\omega_{s+2a}^{-(j-\mu_{2a})i}e_{2n+1-M_{s+2a}-i,2n+1-M_{s+2a}-j}),
\end{aligned}
$$

其中，当 M_a 为偶数时为 $\gamma_a=1$，当 M_a 为奇数时为 $\gamma_a=i$。

(b) exp$(2\pi\sqrt{-1}ad\ h_w)$ 的阶 N 等于 λ_1、λ_2、.....、λ_s、$2\lambda_{s+1}$、$2\lambda_{s+2}$、$\ldots 2\lambda_{r+s}$ 的最小公倍数 N'，如果 $N'(\frac{1}{\lambda_a}+\frac{1}{\lambda_b})\in 2\mathbb{Z}$ 对所有 $1\le a,\ b\le s$，$N'(\frac{1}{2\lambda_a}+\frac{1}{2\lambda_b})\in 2\mathbb{Z}$ 对所有 $s+1\le a,\ b\le r+s$，$N'(\frac{1}{\lambda_a}+\frac{1}{2\lambda_b})\in 2\mathbb{Z}$ 对所有 $1\le a\le s$, $s+1\le b\le r+s$ $2N'$ ，否则。

(c) 元素 $a^{\delta a}{}_{,k\,\ell}{}^{\epsilon b}:=S^{-1}e^{\delta a}{}_{,k\ell}{}^{\epsilon b}S=$ 构成 so_{2n} 的新基，且它们的生成场 $a^{\delta a}{}_{,k\ell}{}^{\epsilon b}(z)$ 在 F_d 中的表示 r 等于

$$r(a_{k,\ell}^{\delta_a,\epsilon b})(z)=C_k^{\delta a}C_\ell^{\epsilon b}:\Psi_k^{\delta a}(z)\Psi_\ell^{\epsilon b}(z):,$$

其中

$$C_k^{+a}=\begin{cases}\frac{\omega_a^{-k}}{\sqrt{\lambda_a}} & 1\le a\le s,\\ \frac{\gamma_a(-1)^k}{\sqrt{2\lambda_a}} & s<a\le r+s,\end{cases}\qquad C_k^{-a}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\lambda_a}} & 1\le a\le s,\\ \frac{\gamma_a^{-1}(-1)^k}{\sqrt{2\lambda_a}} & s<a\le r+s,\end{cases}$$

and

$$\Psi_k^{\pm a}(z)=\begin{cases}\psi^{\pm a}(\omega_a^{-k}z^{\frac{N}{\lambda_a}})z^{\frac{N}{2\lambda_a}-\frac{1}{2}} & 1\le a\le s,\\ \tilde{\phi}^a(\pm\omega_a^{-k}z^{\frac{N}{2\lambda_a}})z^{-\frac{1}{2}} & s<a\le s+r,\end{cases}$$

其中的

$$\psi^{\pm a}(z)=\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\psi_i^{\pm a}z^{-i-\frac{1}{2}},\quad \tilde{\phi}^{s+b}(z)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\tilde{\phi}^{s+b}z^{-i},\quad 1\le a\le s,\ 1\le b\le r,$$

是克利福德代数 $C\ell_d$ ($1\le a\le s$、 $1\le b\le \frac{r}{2}$、 $1\le i\le\lambda_a$、 $1\le j<\lambda_{s+2b-1}$ 或 λ_{s+2b}) 中重新标记的生成元的生成场：

$$\begin{aligned}
\psi^{+a}_{\ell\lambda_a-i+\frac{1}{2}}&=\phi_{2\ell n-M_a-i+\frac{1}{2}}, & \psi^{-a}_{\ell\lambda_a+i-\frac{1}{2}}&=\phi_{2\ell n+M_a+i-\frac{1}{2}},\\
\tilde{\phi}^{s+2b-1}_{2\ell\mu_{2b-1}-j}&=\gamma^{-1}_{s+2b-1}\phi_{2\ell n-M_{s+2b-1}-j-\frac{1}{2}}, & \tilde{\phi}^{s+2b-1}_{2\ell\mu_{2b-1}+j}&=\gamma_{s+2b-1}(-1)^j\phi_{2\ell n+M_{s+2b-1}+j+\frac{1}{2}},\\
\tilde{\phi}^{s+2b-1}_{2\ell\mu_{2b-1}+\mu_{2b-1}}&=\frac{\gamma^{-1}_{s+2b-1}}{\sqrt{2}}(\phi_{2\ell n+M_{s+2b+1}-\frac{1}{2}}+\phi_{2(\ell+1)n-M_{s+2b+1}+\frac{1}{2}}),\\
\tilde{\phi}^{s+2b-1}_{2\ell\mu_{2b}}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{2\ell n+M_{s+2b-1}+\frac{1}{2}}+\phi_{2\ell n-M_{s+2b-1}-\frac{1}{2}}),\\
\tilde{\phi}^{s+2b}_{2\ell\mu_{2b}-j}&=\gamma^{-1}_{s+2b}\phi_{2\ell n-M_{s+2b}-j+\frac{1}{2}}, & \tilde{\phi}^{s+2b}_{2\ell\mu_{2b}+j}&=\gamma_{s+2b}(-1)^j\phi_{2\ell n+M_{s+2b}+j-\frac{1}{2}},\\
\tilde{\phi}^{s+2b}_{2\ell\mu_{2b}}&=\sqrt{\frac{-1}{2}}(\phi_{2\ell n-M_{s+2b-1}-\frac{1}{2}}-\phi_{2\ell n+M_{s+2b-1}+\frac{1}{2}}),\\
\tilde{\phi}^{s+2b}_{2\ell\mu_{s+2b}+\mu_{s+2b}}&=\frac{\gamma^{-1}_{s+2b}\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(\phi_{2(\ell+1)n-M_{s+2b+1}+\frac{1}{2}}-\phi_{2\ell n+M_{s+2b+1}-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}\tag{5.33}$$

它们满足 ($1\le a,c\le s,\ 1\le b,d\le r,\quad i,j\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned}
\psi_i^{\pm a}\psi_j^{\pm c}+\psi_j^{\pm c}\psi_i^{\pm a}&=0,\\
\psi_i^{+a}\psi_j^{-c}+\psi_j^{-c}\psi^{+a}&=\delta_{ac}\delta_{i,-j}\\
\tilde{\phi}_i^{s+b}\tilde{\phi}_j^{s+d}+\tilde{\phi}_j^{s+d}\tilde{\phi}_i^{s+b}&=(-1)^i\delta_{bd}\delta_{i,-j},\\
\psi_i^{\pm a}\tilde{\phi}_j^{s+b}+\tilde{\phi}_j^{s+b}\psi_i^{\pm a}&=0,\\
\psi_i^{\pm a}|0\rangle=\tilde{\phi}_i^{s+b}|0\rangle&=0\quad i>0.
\end{aligned}\tag{5.34}$$

(d) $\hat{}so_{2n}$ 的表示可由顶点算子通过公式(3.66) 和 (3.73) 给出，方法是在上述公式中代入单位根 ω_a 和 z 的幂。特别地，我们有海森堡代数(3.30)，它们分别等于 $\lambda_a z^{\frac{\lambda_a}{N}-1}r(a^{+a}{}_{,\lambda_a\lambda_a}{}^{-a})(z^{\frac{\lambda_a}{N}})$、 $\lambda_{s+b}z^{\frac{2\lambda_{s+b}}{N}}r(a^{+(s+b)\ -(s+b)}_{\lambda_{s+b}\lambda_{s+b}},)(z^{\frac{2\lambda_{s+b}}{N}})$，且它们的模满足 (3.31)。

F分解为两个不可约的 $\hat{}so_{2n}$模 $F^{\overline{0}}$和 $F^{\overline{1}}$，这与公式 (3.40) 不同，因为此处的分次不同。令 N 为 λ_1、…、 λ_s、$2\mu_1$、…、 $2\mu_r$的最小公倍数，那么在此情况下的 q维公式由 s 个雅可比三重积恒等式副本（即 (1.20) 与 (1.21) 之间的等式）组合而成，其中在每个副本中将 q 替换为 $q^{\frac{N}{\lambda_a}}$；再加上 r 个$\underline{N}$(1.41) 的副本，其中在每个副本中将 q 替换为 q^{μ_b}；并将其乘以某个因子

（见 [23]）：

$$\dim_q F^{\overline{\epsilon}}=\begin{cases}2^{[\frac{r-1}{2}]}\sum_{\substack{j_1,\dots,j_s\in\mathbb{Z}\\ j_1+\cdots+j_s\in\mathbb{Z}}} q^{\frac{N}{2}(\frac{j_1^2}{\lambda_1^2}+\frac{j_2^2}{\lambda_2^2}+\cdots+\frac{j_s^2}{\lambda_s^2})}\prod_{a=1}^{s}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{\frac{iN}{\lambda_a}}}\prod_{b=1}^{r}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{\frac{(2j-1)N}{\mu_b}}} & \\ & \text{for } r\neq 0,\\ \sum_{\substack{j_1,\dots j_s\in\mathbb{Z}\\ j_1+\cdots+j_s\in\epsilon+\mathbb{Z}}} q^{\frac{N}{2}(\frac{j_1^2}{\lambda_1^2}+\frac{j_2^2}{\lambda_2^2}+\cdots+\frac{j_s^2}{\lambda_s^2})}\prod_{a=1}^{s}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{\frac{iN}{\lambda_a}}}, & \text{when } r=0.\end{cases} \tag{5.35}$$

5.5 so_{2n+1}

回顾一下， so_{2n+1} 的魏尔群的共轭类与一对分拆一一对应。

$$\lambda=(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_s>0),\mu=(\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_r>0), \tag{5.36}$$

关于 n，即(5.27)成立。我们可以将每个元素 $w\in W$ （位于 s 中）分解为长度为 λ_i的互不相交的正循环，以及长度为 μ_j 的 r 互不相交的负循环，使得(5.19)成立。显然，具有相同循环类型的两个元素在 O_{2n}下共轭。

我们如下重新标记基。令 $m_a=\lambda_a$, $M_a=|\lambda|_{a-1}$ 为 $1\leq a\leq s$,$m_a=\mu_{a-s}$, $M_a=|\lambda|+|\mu|_{a-s-1}$ 为 $s<a\leq r+s$，以及 $M_{r+s+1}=|\lambda|+|\mu|$，然后设 $(1\leq a,b\leq s+r$, $1\leq i\leq m_a, 1\leq j\leq m_b)$

$$\begin{aligned}e_{ij}^{+a,-b}=&e_{M_a+i,M_b+j}-e_{2n+2-M_b-j,2n+2-M_a-i},\\ e_{ij}^{+a,+b}=&-e_{M_a+i,2n+2-M_b-j}-e_{M_b+j,2n+2-M_a-i},\\ e_{ij}^{-a,-b}=&-e_{ji}^{-b,-a}=e_{2n+2-M_a-i,M_b+j}-e_{2n+2-M_b-j,M_a+i},\\ e_i^{+a}=&e_{M_a+i,n+1}-e_{n+1,2n+2-Ma-i},\\ e_i^{-a}=&e_{2n+2-M_a-i,n+1}-e_{n+1,M_a+i}.\end{aligned} \tag{5.37}$$

我们将把这个仿射代数嵌入到 d_∞ 和 b_∞ 中。第一种情况下，这将得到 so_{2n+1} 的仿射李代数的表示，其最高权为 Λ_0 和 Λ_1；这里我们假设 h_w 满足(5.2)。对于嵌入到 b_∞ 的情形，我们得到最高权为 Λ_n 的最高权表示。在这种情况下，我们假设 h_w 满足(5.3)。为区分这两种情况，我们令 x 为 d 或 b。

我们将再次首先考察两个例子。

例 5.10（一个正循环）在这种情况下， $s=1$ 和 $r=0$，我们得到的元素与(5.22)中的相同。不过现在我们必须将其提升到 O_{2n+1}。令$\omega=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ 选择

$$\tilde{w}_{((n),\emptyset)}=e_{n+1,n+1}+(-1)^{\delta_{xb}}(\omega^{\frac{n+1}{2}}e_{1,n}+\omega^{-\frac{n+1}{2}}e_{2n+1,n+2}+\sum_{i=1}^{n-1}(\omega^{\frac{n+1}{2}}e_{i+1,i}+\omega^{-\frac{n+1}{2}}e_{2n+1-i,2n+2-i})).$$

显然，我们所处的情况与 so_{2n}的一个正循环情形相同，构造也完全相同。在这种情况下，

$$S = e_{n+1,n+1} + \sum_{i,j=1}^{n} (\omega^{ij} e_{ij} + \omega^{-ij} e_{2n+2-i,2n+2-j}),$$

以及 $\tilde{w}_{((n),\emptyset)} = S e^{2\pi\sqrt{-1}h_w} S^{-1}$ 与

$$h_w = \sum_{j=1}^{n} \frac{(1+\delta_{xb})n - 2j + 1 + \delta_{xb} n}{2n} (e_{jj} - e_{2n+2-j,2n+2-j}).$$

嵌入于 d_∞*: </style>*这种情况类似于˜中的一个正循环的情形，即 so_{2n}情形。现在我们将元素 ϕ_j 重新标记如下

$$\psi^+_{\ell n - i + \frac{1}{2}} = \phi_{\ell(2n+1)-i+\frac{1}{2}}, \quad \psi^-_{\ell n + i - \frac{1}{2}} = \phi_{\ell(2n+1)+i-\frac{1}{2}}, \quad \sigma_{\ell+\frac{1}{2}} = \phi_{\ell(2n+1)+n+\frac{1}{2}},$$

并按照(5.15) 定义它们的场，以及

$$\sigma(z) = \sum_{j \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \sigma_j z^{-j-\frac{1}{2}}.$$

这里 *(*$i, j \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$*)*

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = \delta_{i,-j}. \tag{5.38}$$

设 $a^{\delta\epsilon}_{k\ell} = S^{-1} e^{\delta\epsilon}_{k\ell} S$，且 $a^{\delta}_{k} = S^{-1} e^{\delta}_{k} S$。那么我们有 (5.31)，并且

$$a^{\pm}_k(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{n} \omega^{\mp ki} r(t^m e^{\pm}_i) z^{-mn \mp \frac{1}{2}(n-2i+1)-1} \tag{5.39}$$

and

$$r(a^+_k)(z) = \frac{\omega^k z^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} : \psi^+(\omega^{-k}z)\sigma(z^n) :, \quad r(a^-_k)(z) = \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} : \psi^-(\omega^{-k}z)\sigma(z^n) : .$$

注意，我们得到 z 的半整数次幂，这是因为自同构的阶为 $2n$ ，而不是 n。

在 b_∞**中的嵌入：** 我们再次得到 (5.29) 和 (5.39)，但现在的嵌入 (2.25)表明需要进行重标记

$$\psi^{\pm}_{\ell n \pm (n+1-i-\frac{1}{2})} = \tilde{\phi}_{\ell(2n+1)\pm(n+1-i)}, \quad \sigma_\ell = \tilde{\phi}_{\ell(2n+1)}.$$

按(5.15)定义它们的生成场，并且

$$\sigma(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sigma_i z^{-i}.$$

由于 h_w 与通常情况略有不同，因此我们有

$$\begin{aligned}
a^{+-}_{k\ell}(z) &= \frac{1}{n}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{i,j=1}^{n}(\omega^{-k})^i(\omega^{-\ell})^{-j}t^m e^{+-}_{ij}z^{-mn+i-j-1},\\
a^{++}_{k\ell}(z) &:= \frac{1}{n}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{i,j=1}^{n}(\omega^{-k})^i(\omega^{-\ell})^{j}t^m e^{++}_{ij}z^{-(m+2)n+i+j-2},\\
a^{--}_{k\ell}(z) &:= \frac{1}{n}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{i,j=1}^{n}(\omega^{-k})^{-i}(\omega^{-\ell})^{-j}t^m e^{--}_{ij}z^{-(m-2)n-i-j},\\
a^{\pm}_{k}(z) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{n}\omega^{\mp ki}r(t^m e^{\pm}_i)z^{-mn\mp\frac{1}{2}(2n-2i+1)-1}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

因此很容易验证:

$$\begin{aligned}
r(a^{+-}_{k\ell})(z) &= \frac{(-\omega)^k(-1)^\ell}{n}:\psi^+(\omega^{-k}z)\psi^-(\omega^{-\ell}z):,\\
r(a^{++}_{k\ell})(z) &= \frac{(-\omega)^{k+\ell}}{n}:\psi^+(\omega^{-k}z)\psi^+(\omega^{-\ell}z):,\\
r(a^{--}_{k\ell})(z) &= \frac{(-1)^{k+\ell}}{n}:\psi^-(\omega^{-k}z)\psi^-(\omega^{-\ell}z):,\\
r(a^{+}_{k})(z) &= \frac{(-\omega)^k z^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}:\psi^+(\omega^{-k}z)\sigma(z^n):,\\
r(a^{-}_{k})(z) &= \frac{(-1)^k z^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}:\psi^-(\omega^{-k}z)\sigma(z^n):.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

例 5.11（一个负循环，主海森堡代数）在此情形下 $r=1$ 且 $s=0$，因此

$$w_{(\emptyset,(n))}:\epsilon_n\mapsto-\epsilon_1,\quad \epsilon_k\mapsto\epsilon_{k+1},\quad k=1,2,\dots,n.$$

这个情形类似于 sp_{2n}的主情形。我们选择

$$\tilde{w}=\tilde{w}_{(\emptyset,(n))}=-e_{n+1,n+1}+e_{2n+1,n}+e_{1,n+2}+\sum_{i=1}^{n-1}(e_{i+1,i}+e_{2n+1-i,2n+2-i})\in SO_{2n+1}.$$

若 n 为偶数，则令 $\omega=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2n}}$ 和 $\gamma=1$；若 n 为奇数，则令$\gamma=\sqrt{-1}$。令

$$\begin{aligned}
S=\sum_{i=1}^{n}\big(&\frac{(-1)^i}{\sqrt{4n}}(e_{i1}+(-1)^n e_{i,2n+1}+(-1)^n e_{2n+2-i,1}+e_{2n+2-i,2n+1})+\\
&+\frac{1}{\sqrt{2n}}(e_{i,n+1}+e_{2n+1-i,n+1})+\frac{1}{\sqrt{2n}}\sum_{j=2}^{n}(\omega^{(j-n-1)i}e_{ij}+\omega^{(n-j+1)(n+i)}e_{i,2n+2-j}+\\
&+\omega^{(j-n-1)(n+i)}e_{2n+2-i,j}+\omega^{(n-j+1)i}e_{2n+2-i,2n+2-j})\big)+\sqrt{\frac{-1}{2}}(\gamma^{-1}e_{n+1,1}-\gamma e_{n+1,2n+1}),
\end{aligned}$$

使得 $\tilde{w}_{(\emptyset,(n))} = S\exp(2\pi\sqrt{-1}h_w)S^{-1}$，对于

$$h_w = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{2n}(e_{ii} - e_{2n+2-i,2n+2-i}).$$

直接检验可得 $(Sv, Sw)^{so_{2n+1}} = (v,w)^{so_{2n+1}}$，因此 $S \in O_{2n}$ 以及

$$\begin{aligned} S^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \big(& \frac{(-1)^i}{\sqrt{4n}}(e_{1i} + (-1)^n e_{2n+1,i} + (-1)^n e_{1,2n+2-i} + e_{2n+1,2n+2-i}) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2n}}(e_{n+1,i} + e_{n+1,2n+1-i}) + \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{j=2}^{n} (\omega^{(n-j+1)i} e_{ji} + \omega^{(j-n-1)(i+n)} e_{2n+2-j,i} + \\ & + \omega^{(n-j+1)(n+i)} e_{j,2n+2-i} + \omega^{(j-n-1)i} e_{2n+2-j,2n+2-i}\big) + \sqrt{\frac{-1}{2}}(\gamma^{-1} e_{2n+1,n+1} - \gamma e_{1,n+1}). \end{aligned}$$

S 和 S^{-1} 建议对 $\tilde{\phi}_i$进行如下重新标记。

在 d_∞ 中嵌入： *($\ell \in \mathbb{Z}$)*

$$\begin{aligned} \sigma_\ell &= \sqrt{\frac{-1}{2}}(\gamma^{-1}\tilde{\phi}_{(2n+1)\ell-\frac{1}{2}} - \gamma\tilde{\phi}_{(2n+1)\ell+\frac{1}{2}}) \\ \tilde{\phi}^1_{2n\ell} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^{-1}\phi_{(2n+1)\ell-\frac{1}{2}} + \gamma\phi_{(2n+1)\ell+\frac{1}{2}}), \quad \tilde{\phi}^1_{2n\ell+n} = \gamma^{-1}\phi_{(2n+1)\ell+n+\frac{1}{2}} \\ \tilde{\phi}^1_{2n\ell-k} &= \gamma^{-1}\phi_{(2n+1)\ell-k-\frac{1}{2}}, \quad \phi^1_{2n\ell+k} = \gamma(-1)^k\phi_{(2n+1)\ell+k+\frac{1}{2}} \quad k = 1,\dots,n-1. \end{aligned} \tag{5.42}$$

将相应的生成场定义为

$$\sigma(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sigma_i z^{-i}, \quad \tilde{\phi}^1(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{\phi}^1_i z^{-i}.$$

对于 $\delta, \epsilon = +,-$ 和 $1 \le k, \ell \le n$,

$$\begin{aligned} r(a^{\delta,\epsilon}_{k,\ell})(z) &= \frac{(-1)^{k+\ell}\gamma^{\delta 1+\epsilon 1} z^{-1}}{2n} : \tilde{\phi}(\delta\omega^{-k}z)\tilde{\phi}(-\epsilon\omega^{-\ell}z) :, \\ r(a^{\delta}_{k})(z) &= \frac{(-1)^{k}\gamma^{\delta 1} z^{-1}}{\sqrt{2n}} : \tilde{\phi}(\delta\omega^{-k}z)\sigma(z^{2n}) : . \end{aligned}$$

在 b_∞ 中嵌入： *($\ell \in \mathbb{Z}$)*

$$\begin{aligned} \sigma_{\ell+\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{-1}{2}}(\gamma^{-1}\tilde{\phi}_{(2n+1)\ell+n+1} - \gamma\tilde{\phi}_{(2n+1)\ell+n}), \\ \tilde{\phi}^1_{2n\ell+n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\phi}_{(2n+1)\ell+n} + (-1)^n\tilde{\phi}_{(2n+1)\ell+n+1}), \quad \tilde{\phi}^1_{2n\ell} = \tilde{\phi}_{(2n+1)\ell} \\ \tilde{\phi}^1_{2n\ell+k} &= \tilde{\phi}_{(2n+1)\ell+k}, \qquad \tilde{\phi}^1_{2n\ell-k} = (-1)^k\tilde{\phi}_{(2n+1)\ell-k} \quad k = 1,\dots,n-1, \end{aligned} \tag{5.43}$$

并将相应的生成场定义为

$$\sigma(z) = \sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \sigma_i z^{-i-\frac{1}{2}}, \quad \tilde{\phi}^1(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{\phi}^1_i z^{-i},$$

那么对于 δ，$\epsilon = +$，$-$和 $1 \le k$，$\ell \le n$

$$r(a^{\delta,\epsilon}_{k,\ell})(z) = \frac{z^{-1}}{2n} : \tilde{\phi}(\delta\omega^{-k}z)\tilde{\phi}(\epsilon\omega^{-\ell}z) :,$$
$$r(a^{\delta}_{k})(z) = \frac{z^{-1}}{\sqrt{2n}} : \tilde{\phi}(\delta\omega^{-k}z)\sigma(z^{2n}) : .$$

在两种情况下，由 (5.42) 和(5.43) 定义的 $\tilde{\phi}^1_j$ 和 σ_j满足

$$\tilde{\phi}^1_i\tilde{\phi}^1_j + \tilde{\phi}^1_j\tilde{\phi}^1_i = (-1)^i\delta_{i,-j}, \quad \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = \delta_{i,-j}, \quad \tilde{\phi}^1_i\sigma_j + \sigma_j\tilde{\phi}^1_i = 0,$$

and

$$\sigma_i|0\rangle = \tilde{\phi}^1_i|0\rangle = 0, \qquad i > 0.$$

一般情形可由这两个例子和例5.8推出。一般来说，同时存在中性费米子场和带电费米场。然而，我们还有一个额外的场 $\sigma(z)$。因此，我们必须将福克空间 $B_{(\lambda,\mu)}$ 扩展为包含额外的变量 ξ，即：对于 $x = b$ 或 d，令：

$$\sigma(F_x) = B_{(\lambda,\mu)}(\xi) = \mathbb{C}[\theta_i, \xi_k, q_j, q_j^{-1}, t^\ell; 1 \le j \le s,\ 1 \le i \le p,\ 1 \le \ell \le s+r, k \in \delta+\mathbb{Z}_{>0}], \tag{5.44}$$

其中 ξ_i 再次是与 θ_j 反对易的格拉斯曼变量。**我们有 4 种情形**

1. d_∞、 r为偶数，则 $p = \frac{r}{2}$和 $\delta = -\frac{1}{2}$;
2. d_∞、 r 为奇数，则 $p = \frac{r+1}{2}$ 和 $\delta = 0$;
3. b_∞、 r为奇数，则 $p = \frac{r-1}{2}$和 $\delta = -\frac{1}{2}$;
4. b_∞、 r 为偶数，则$p = \frac{r}{2}$ 和 $\delta = 0$。

以下命题可直接推得。

命题5.12令 $w_{(\lambda,\mu)}$ 由(5.20)给出。令 $\lambda_{s+a} =: \mu_a$，且当$1 \le a \le s$ 时 $\omega_a = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda_a}}$，并且 $\omega_a = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2\lambda_a}}$为 $s+1 \le a \le r+s$。令 $[a]$ 为大于或等于 a 的最大整数，并在 r 为奇数时令 $\eta = 1$，在 r 为偶数时令 $\eta = 0$。那么

(a) 该元素

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{(\lambda,\mu)} = &\sum_{a=1}^{s}(1-2\eta)e_{n+1,n+1} + (-1)^{\delta_{xb}}\big(\omega_a^{\frac{\lambda_a+1}{2}}e_{M_a+1,M_{a+1}} + \omega_a^{-\frac{\lambda_a+1}{2}}e_{2n+1-M_a,2n+1-M_{a+1}+1}+\\
&+\sum_{i=1}^{\lambda_a-1}\big(\omega_a^{\frac{\lambda_a+1}{2}}e_{M_a+i+1,M_a+i}+\omega^{-\frac{\lambda_a+1}{2}}e_{2n+1-M_a-i,2n+2-M_a-i}\big)\big)+\\
&+\sum_{a=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]}\big(e_{M_{s+2a-1}+1,2n+2-M_{s+2a}}+e_{2n+1-M_{s+2a},M_{s+2a}}+e_{M_{s+2a}+1,2n+2-M_{s+2a+1}}+\\
&+e_{2n+1-M_{s+2a},M_{s+2a+1}}+\sum_{i=1}^{\lambda_{s+2a-1}-1}e_{M_{s+2a-1}+i+1,M_{s+2a-1}+i}+e_{2n+1-M_{s+2a-1}-i,2n+2-M_{s+2a-1}-i}+\\
&+\sum_{i=1}^{\lambda_{s+2a}-1}e_{M_s+2a+i+1,M_{s+2a}+i}+e_{2n+1-M_{s+2a}-i,2n+2-M_{s+2a}-i}.\big)\\
&+\eta\big(e_{2n+1-M_{s+r},n}+e_{M_{s+r}+1,n+2}+\sum_{i=1}^{\mu_r-1}\big(e_{M_{s+r}+i+1,M_{s+r}+i}+e_{2n+1-M_{s+r}-i,2n+2-M_{s+r}-i}\big)\big)\\
&\in O_{2n+1}\end{aligned}$$

是$w_{(\lambda,\mu)}$ 和 $\tilde{w}_{(\lambda,\mu)} = S^{-1}\exp(2\pi\sqrt{-1}h_w)S$的提升，其中

$$\begin{aligned}h_w = &\sum_{a=1}^{s}\sum_{i=1}^{\lambda_a}\frac{(1+\delta_{x,b})\lambda_a-2j+1}{2\lambda_a}\epsilon_{M_a+j}+\sum_{a=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]}\sum_{i=1}^{\mu_{2a-1}}\frac{\mu_{2a-1}-i+1}{2\mu_{2a-1}}\epsilon_{M_{s+2a-1}+i}+\\
&+\sum_{i=1}^{\mu_{2a}}\frac{\mu_{2a}-i}{2\mu_{2a}}\epsilon_{M_{s+2a}+i}+\eta\sum_{i=1}^{\mu_r}\frac{\mu_r-i+1}{2\mu_r}\epsilon_{M_{s+r}+i}\in\mathfrak{h}\end{aligned}$$

若 $x=d$ 满足 (5.2)，且若 $x=b$ 满足 (5.3)，并且

$$
\begin{aligned}
S =&(1-\eta)e_{n+1,n+1}+\sum_{a=1}^{s}\sum_{i=1}^{\lambda_a}\sum_{i,j=1}^{\lambda_a}(\omega_a^{ij}e_{M_a+i,M_a+j}+\omega_a^{-ij}e_{2n+2-M_a-i,2n+2-M_a-j})\\
&+\sum_{a=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]}\frac{1}{\sqrt{4\mu_{2a-1}}}\sum_{k=1}^{\mu_{2a-1}}[(-1)^k(\gamma_{s+2a-1}e_{M_{s+2a-1}+k,M_{s+2a-1}+1}+\gamma_{s+2a-1}^{-1}e_{2n+2-M_{s+2a-1}-k,M_{s+2a-1}+1}+\\
&\qquad+\gamma_{s+2a-1}^{-1}e_{2n+2-M_{s+2a-1}-k,2n+1-M_{s+2a-1}}+\gamma_{s+2a-1}e_{M_{s+2a-1}+k,2n+1-M_{s+2a-1}})+\\
&\qquad+(e_{M_{s+2a-1}+k,M_{s+2a+1}}+e_{2n+2-M_{s-2a-1}-k,M_{s+2a+1}}+\\
&\qquad+e_{2n+2-M_{s+2a-1}k,2n+2-M_{s+2a+1}}+e_{M_{s+2a-1}+k,2n+2-M_{s+2a+1}})]+\\
&+\frac{1}{\sqrt{4\mu_{2a}}}\sum_{k=1}^{\mu_{2a}}\sqrt{-1}[(-1)^k(-\gamma_{s+2a}e_{M_{s+2a}+k,M_{s+2a-1}+1}+\gamma_{s+2a}^{-1}e_{2n+2-M_{s+2a}-k,M_{s+2a-1}+1}\\
&\qquad-\gamma_{s+2a}^{-1}e_{2n+2-M_{s+2a}-k,2n+1-M_{s+2a-1}}+\gamma_{s+2a}e_{M_{s+2a}+k,2n+1-M_{s-2a-1}})+\\
&\qquad+(e_{M_{s+2a}+k,M_{s+2a+1}}+e_{2n+2-M_{s+2a}-k,M_{s+2a+1}}\\
&\qquad-e_{2n+2-M_{s+2a}-k,2n+2-M_{s+2a+1}}-e_{M_{s+2a}+k,2n+2-M_{s+2a+1}})]+\\
&+\frac{1}{\sqrt{2\mu_{2a-1}}}\sum_{i=1}^{\mu_{2a-1}}\sum_{j=2}^{\mu_{2a-1}}(\omega_{s+2a-1}^{(j-\mu_{2a-1}-1)i}e_{M_{s+2a-1}+i,M_{s+2a-1}+j}+\\
&\qquad+\omega_{s+2a-1}^{(j-\mu_{2a-1}-1)(\mu_{2a-1}+i)}e_{2n+2-M_{s+2a-1}-i,M_{s+2a-1}+j}+\\
&\qquad+\omega_{s+2a-1}^{-(j-\mu_{2a-1}-1)(i-\mu_{2a-1})}e_{M_{s+2a-1}+i,2n+2-M_{s+2a-1}-j}+\\
&\qquad+\omega_{s+2a-1}^{-(j-\mu_{2a-1}-1)i}e_{2n+2-M_{s+2a-1}+i,2n+2-M_{s+2a-1}-j})+\\
&+\frac{1}{\sqrt{2\mu_{2a}}}\sum_{i=1}^{\mu_{2a}}\sum_{j=1}^{\mu_{2a}-1}(\omega_{s+2a}^{(j-\mu_{2a})i}e_{M_{s+2a}+i,M_{s+2a}+j}+\omega_{s+2a}^{(j-\mu_{2a})(\mu_{2a}+i)}e_{2n+2-M_{s+2a}-i,M_{s+2a}+j}+\\
&\qquad+\omega_{s+2a}^{-(j-\mu_{2a})(i-\mu_{2a})}e_{M_{s+2a}+i,2n+2-M_{s+2a}-j}+\omega_{s+2a}^{-(j-\mu_{2a})i}e_{2n+2-M_{s+2a}-i,2n+2-M_{s+2a}-j})+\\
&\quad+\eta\Big\{\sum_{i=1}^{\mu_r}\Big(\frac{(-1)^i}{\sqrt{4\mu_r}}(e_{M_{s+r}+i1}+(-1)^{\mu_r}e_{M_{s+r}+i,2n+1-M_{s+r}}+(-1)^{\mu_r}e_{2n+2-M_{s+r}-i,M_{s+r}+1}+\\
&\qquad+e_{2n+2-M_{s+r}-i,2n+1-M_{s+r}})+\frac{1}{\sqrt{2\mu_r}}(e_{i,n+1}+e_{2n+1-M_{s+r}-i,n+1})+\\
&\qquad+\frac{1}{\sqrt{2\mu_r}}\sum_{j=2}^{\mu_r}(\omega^{(j-\mu_r-1)i}e_{M_{s+r}+i,M_{s+r}+j}+\omega^{(\mu_r-j+1)(\mu_r+i)}e_{M_{s+r}+i,2n+2-M_{s+r}-j}+\\
&\qquad+\omega^{(j-\mu_r-1)(\mu_r+i)}e_{2n+2-M_{s+r}-i,M_{s+r}+j}+\omega^{(\mu_r-j+1)i}e_{2n+2-M_{s+r}-i,2n+2-M_{s+r}-j})\Big)+\\
&\qquad\sqrt{\frac{-1}{2}}(\gamma_{s+r}^{-1}e_{n+1,M_{s+r}+1}-\gamma_{s+r}e_{n+1,2n+1-M_{s+r}})\Big\},
\end{aligned}
$$

where $\gamma^a=1$ *if* M^a *is even and* $\gamma^a=i$ *if* M^a *is odd*

(b) $\exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{ad}\ h_w)$ 的阶 N 等于$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s,2\lambda_{s+1},2\lambda_{s+2},\dots 2\lambda_{r+s}$的最小公倍数 N'，若 $s=0$或对于所有 $1\le a\le$s都有 $N'^{\frac{2\lambda_a}{(1-\frac{\delta_{x\ b}}{2})\lambda_a}}+1\in 2\mathbb{Z}$；否则。

*(c)*元素 $a^{\delta a}{}_{,k\,\ell}{}^{\epsilon b}{}_{,} := S^{-1}e^{\delta a}{}_{,k\ell}{}^{\epsilon b}S$ 和 $a_k^{\delta a} := S^{-1}e^{\delta a}{}_{,k\ell}{}^{\epsilon b}S$ 构成so_{2n+1} 的新基，并且 r 在 F_d 和 F_b 中其生成场 $a^{\delta a}{}_{,k\ell}{}^{\epsilon b}\,(z)$ 和$a_k^{\delta a}(z)$ 的表示等于

$$r(a_{k,\ell}^{\delta_a,\epsilon b})(z) = C_k^{\delta a}C_\ell^{\epsilon b} : \Psi_k^{\delta a}(z)\Psi_\ell^{\epsilon b}(z) :, \qquad r(a_k^{\delta_a})(z) = C_k^{\delta a} z^{-\frac{1}{2}} : \Psi_k^{\delta a}(z)\sigma(z^N) :,$$

其中 $C_k^{\delta a} \in \mathbb{C}$，场 $\Psi_k^{\delta a}(z)$ 和 $\sigma(z)$ 将在下文中描述。*(1)* 对于 d_∞ 中的嵌入，

$$C_k^{+a} = \begin{cases} \frac{\omega_a^{-k}}{\sqrt{\lambda_a}} & 1 \le a \le s, \\ \frac{\gamma_a(-1)^k}{\sqrt{2\lambda_a}} & s < a \le r+s, \end{cases} \qquad C_k^{-a} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_a}} & 1 \le a \le s, \\ \frac{\gamma_a^{-1}(-1)^k}{\sqrt{2\lambda_a}} & s < a \le r+s, \end{cases}$$

and

$$\Psi_k^{\pm a}(z) = \begin{cases} \psi^{\pm a}(\omega_a^{-k} z^{\frac{N}{\lambda_a}}) z^{\frac{N}{2\lambda_a}-\frac{1}{2}} & 1 \le a \le s, \\ \tilde{\phi}^a(\pm\omega_a^{-k} z^{\frac{N}{2\lambda_a}}) z^{-\frac{1}{2}} & s < a \le s+r, \end{cases}$$

其中

$$\psi^{\pm a}(z) = \sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \psi_i^{\pm a} z^{-i-\frac{1}{2}}, \quad \tilde{\phi}^{s+b}(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{\phi}_i^{s+b} z^{-i}, \quad 1 \le a \le s,\ 1 \le b \le r, \tag{5.45}$$

and

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sigma_i z^{-i} & r \ \textit{odd}, \\ \sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \sigma_i z^{-i-\frac{1}{2}} & r \ \textit{even}, \end{cases}$$

是克利福德代数$C\ell_d$*(*$1 \le a \le s$*,* $1 \le b \le \left[\frac{r+1}{2}\right]$ 中重新标记的生成元的生成场，其中 $2b \ne r+1$ 和 $1 \le i \le \lambda_a$、$1 \le j < \lambda_{s+2b-1}$ 或λ_{s+2b}*)* ：

$$\begin{aligned}
\sigma_{\ell+\frac{1-\eta}{2}} &= \begin{cases} \phi_{(\ell+\frac{1}{2})(2n+1)} & r \ \textit{even}, \\ \sqrt{\frac{-1}{2}}(\gamma_r^{-1}\phi_{(2n+1)\ell-\frac{1}{2}} - \gamma_r\phi_{(2n+1)\ell+\frac{1}{2}}) & r \ \textit{odd}, \end{cases} \\
\psi^{+a}_{\ell\lambda_a-i+\frac{1}{2}} &= \phi_{\ell(2n+1)-M_a-i+\frac{1}{2}}, \qquad \psi^{-a}_{\ell\lambda_a+i-\frac{1}{2}} = \phi_{\ell(2n+1)+M_a+i-\frac{1}{2}}, \\
\tilde{\phi}^{s+2b-1}_{2\ell\mu_{2b-1}-j} &= \gamma^{-1}_{s+2b-1}\phi_{\ell(2n+1)-M_{s+2b-1}-j-\frac{1}{2}}, \quad \tilde{\phi}^{s+2b-1}_{2\ell\mu 2b-1+j} = \gamma_{s+2b-1}(-1)^j\phi_{\ell(2n+1)+M_{s+2b-1}+j+\frac{1}{2}}, \\
\tilde{\phi}^{s+2b-1}_{2\ell\mu_{2b-1}+\mu_{2b-1}} &= \begin{cases} \frac{\gamma^{-1}_{s+2b-1}}{\sqrt{2}}(\phi_{\ell(2n+1)+M_{s+2b+1}-\frac{1}{2}} + \phi_{(\ell+1)(2n+1)-M_{s+2b+1}+\frac{1}{2}}) & 2b-1 \ne r, \\ \gamma_r^{-1}\phi_{(2n+1)\ell+n+\frac{1}{2}} & 2b-1 = r, \end{cases} \\
\tilde{\phi}^{s+2b-1}_{2\ell\mu_{2b}} &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{\ell(2n+1)+M_{s+2b-1}+\frac{1}{2}} + \phi_{\ell(2n+1)-M_{s+2b-1}-\frac{1}{2}}) & 2b-1 \ne r, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_r^{-1}\phi_{(2n+1)\ell-\frac{1}{2}} + \gamma_r\phi_{(2n+1)\ell+\frac{1}{2}}) & 2b-1 = r, \end{cases} \\
\tilde{\phi}^{s+2b}_{2\ell\mu_{2b}-k} &= \gamma^{-1}_{s+2b}\phi_{\ell(2n+1)-M_{s+2b}-k+\frac{1}{2}}, \quad \tilde{\phi}^{s+2b}_{2\ell\mu_{2b}+k} = \gamma_{s+2b}(-1)^k\phi_{\ell(2n+1)+M_{s+2b}+k-\frac{1}{2}}, \\
\tilde{\phi}^{s+2b}_{2\ell\mu_{2b}} &= \sqrt{\frac{-1}{2}}(\phi_{\ell(2n+1)-M_{s+2b-1}-\frac{1}{2}} - \phi_{\ell(2n+1)+M_{s+2b-1}+\frac{1}{2}}), \\
\tilde{\phi}^{s+2b}_{2\ell\mu_{s+2b}+\mu_{s+2b}} &= \frac{\gamma^{-1}_{s+2b}\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(\phi_{(\ell+1)(2n+1)-M_{s+2b+1}+\frac{1}{2}} - \phi_{\ell(2n+1)+M_{s+2b+1}-\frac{1}{2}}).
\end{aligned} \tag{5.46}$$

(2) 对于在 b_∞ 中的嵌入，

$$C_k^{+a}=\begin{cases}\frac{(-\omega_a)^{-k}}{\sqrt{\lambda_a}} & 1\le a\le s,\\ \frac{1}{\sqrt{2\lambda_a}} & s<a\le r+s,\end{cases}\qquad C_k^{-a}=\begin{cases}\frac{(-1)^k}{\sqrt{\lambda_a}} & 1\le a\le s,\\ \frac{1}{\sqrt{2\lambda_a}} & s<a\le r+s,\end{cases}$$

and

$$\Psi_k^{\pm a}(z)=\begin{cases}\psi^{\pm a}(\omega_a^{-k}z^{\frac{N}{\lambda_a}})z^{\frac{N}{2\lambda_a}-\frac12} & 1\le a\le s,\\ \tilde\phi^a(\pm\omega_a^{-k}z^{\frac{N}{2\lambda_a}})z^{-\frac12} & s<a\le s+r,\end{cases}$$

其中

$$\psi^{\pm a}(z)=\sum_{i\in\frac12+\mathbb{Z}}\psi_i^{\pm a}z^{-i-\frac12},\quad \tilde\phi^{s+b}(z)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\tilde\phi^{s+b}z^{-i},\quad 1\le a\le s,\ 1\le b\le r,\ (5.47)$$

and

$$\sigma(z)=\begin{cases}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sigma_i z^{-i} & r\ even,\\ \sum_{i\in\frac12+\mathbb{Z}}\sigma_i z^{-i-\frac12} & r\ odd\end{cases}$$

是克利福德代数 $C\ell_b$ (1 ≤$a\le s$, $1\le b\le\left[\frac{r+1}{2}\right]$ 中重新标记的生成元所对应的生成场，其中 $2b\ne r+1$ 和 $1\le i\le\lambda_a$、$1\le j\le\lambda_{s+2b-1}$ 或 λ_{s+2b}:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\ell+\frac{n}{2}}&=\begin{cases}\tilde\phi_{\ell(2n+1)} & r\ even,\\ \sqrt{\frac{-1}{2}}(\gamma_r^{-1}\tilde\phi_{(2n+1)\ell+n+1}-\gamma_r\tilde\phi_{(2n+1)\ell+n}) & r\ odd,\end{cases}\\
\psi^{\pm}_{\ell\lambda_a\pm(\lambda_a+1-i-\frac12)}&=\tilde\phi_{\ell(2n+1)\pm(n+1-M_a-i)},\\
\tilde\phi^{s+2b-1}_{2\ell\mu_{2b-1}+\mu_{2b-1}-j}&\tilde\phi_{\ell(2n+1)+n-M_{s+2b-1}-j},\quad \tilde\phi^{s+2b-1}_{2\ell\mu_{2b-1}+j-\mu_{2b-1}}=(-1)^{\mu_{2b-1}-j}\tilde\phi_{\ell(2n+1)+M_{s+2b-1}+j-n},\\
\tilde\phi^{s+2b-1}_{2\ell\mu_{2b-1}+\mu_{2b-1}}&=\begin{cases}\frac{\gamma_{s+2b-1}}{\sqrt2}(\tilde\phi_{\ell(2n+1)+n-M_{s+2b-1}}+\tilde\phi_{(\ell+1)(2n+1)+n+1+M_{s+2b-1}}) & 2b-1\ne r,\\ \frac{1}{\sqrt2}(\tilde\phi_{(2n+1)\ell+n}+(-1)^{\mu_r}\tilde\phi_{(2n+1)\ell+n+1}) & 2b-1=r,\end{cases}\\
\tilde\phi^{s+2b-1}_{2\ell\mu_{2b}}&=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt2}(\tilde\phi_{\ell(2n+1)+n+1-M_{s+2b+1}}+\tilde\phi_{\ell(2n+1)-n-1+M_{s+2b+1}}) & 2b-1\ne r,\\ \tilde\phi_{\ell(2n+1)} & 2b-1=r,\end{cases}\\
\tilde\phi^{s+2b}_{2\ell\mu_{2b}+\mu_{2b}-j}&=\tilde\phi_{\ell(2n+1)+n+1-M_{s+2b}-j},\quad \tilde\phi^{s+2b}_{2\ell\mu_{2b}-\mu_{2b}+k}=(-1)^{j-\mu_{2b}}\tilde\phi_{\ell(2n+1)+M_{s+2b}+j-n-1},\\
\tilde\phi^{s+2b}_{2\ell\mu_{2b}}&=\sqrt{\frac{-1}{2}}(\tilde\phi_{\ell(2n+1)-M_{s+2b+1}}-\tilde\phi_{\ell(2n+1)-n+M_{s+2b+1}}),\\
\tilde\phi^{s+2b}_{2\ell\mu_{s+2b}+\mu_{s+2b}}&=\frac{\gamma_{s+2b}\sqrt{-1}}{\sqrt2}(\tilde\phi_{\ell(2n+1)+n-M_{s+2b-1}}-\tilde\phi_{\ell(2n+1)+n+1+M_{s+2b-1}}).
\end{aligned}\qquad (5.48)$$

在两种情况下，重新标记后的费米子满足 (5.34) 以及

$$\begin{aligned}\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=\delta_{i,-j},\quad \psi_i^{\pm a}\sigma_j+\sigma_j\psi_i^{\pm a}=0,\\ \tilde\phi_i^{s+b}\sigma_j+\sigma_j\tilde\phi_i^{s+b}=0,\qquad \sigma_i|0\rangle=0\quad i>0.\end{aligned}\qquad (5.49)$$

以及 (5.34)，对于 $1\le a,c\le s$, $1\le b,d\le r$, $i,j\in\frac12+\mathbb{Z}$，表示 $\mathcal{W}^{Th}_{s+r+1}$ 可用顶点算子通过公式给出 *(d) Th* s

(3.66) 和(3.73)，通过代入上述公式中给出的单位根 ω_a 和 z 的幂，并通过

$$\sigma :\psi^{\pm a}(\omega_a^{-k}z^{\frac{N}{\lambda_a}}) : \sigma(z^N) : \sigma^{-1} = (-1)^{\sum_{k=a}^{s} q_k \frac{\partial}{\partial q_k}} q_a^{\pm 1}(\omega_a^{-k}z^{\frac{N}{\lambda_a}})^{\pm q_a \frac{\partial}{\partial q_a}} \times$$
$$\exp\left(\pm\sum_{j>0} t_j^a(\omega_a^{-k}z^{\frac{N}{\lambda_a}})^j\right)\exp\left(\mp\sum_{j>0}\frac{\partial}{\partial t_j^a}\frac{(\omega_a^{-k}z^{\frac{N}{\lambda_a}})^{-j}}{j}\right)\Xi(z^N), \tag{5.50}$$

$$\sigma : \tilde{\phi}^{s+b}(\omega_{s+b}^{-k}z^{\frac{N}{2\mu_b}})\sigma(z^N) : \sigma^{-1} = (-1)^{\sum_{k=1}^{s} q_k \frac{\partial}{\partial q_k}} R_b(\theta)\exp\left(\sum_{j>0,\ \text{odd}} t_j^{s+b}(\omega_{s+b}^{-k}z^{\frac{N}{2\mu_b}})^j\right)\times$$
$$\exp\left(-2\sum_{j>0,\ \text{odd}}\frac{\partial}{\partial t_j^{s+b}}\frac{(\omega_{s+b}^{-k}z^{\frac{N}{2\mu_b}})^{-j}}{j}\right)\Xi(z^N), \tag{5.51}$$

其中

$$\Xi[z] = (1+2\delta)R_{r+1}(\theta) + \sum_{j\in\delta+\mathbb{Z}_{>0}}\left(\xi_j z^{\delta+j} + \frac{\partial}{\partial\xi_j}z^{\delta-j}\right). \tag{5.52}$$

特别地，海森堡代数 (3.30) 由 $\alpha_a(z) = \lambda_a z^{\frac{\lambda_a}{N}-1} r(a^{+a}_{,\lambda_a\lambda_a^{-a}})(z^{\frac{\lambda_a}{N}})$分别给出，其中 $1 \le a \le s$；而 $\alpha_{s+b} = \lambda_{s+b}z^{\frac{2\lambda_{s+b}}{N}} r(a^{+(s+b)\ -(s+b)}_{\lambda_{s+b}\lambda_{s+b}\ ,})(z^{\frac{2\lambda_{s+b}}{N}})$ 对应 $1 \le b \le r$，它们的模满足 (3.31)。

在此情形下，q-维公式与 (5.35) 中给出的公式相似。显式公式见 [25],。

5.6 魏尔群元素与 $\hat{\mathfrak{g}}($ 的扭曲实现 2)

设 $\mathfrak{g}$ 是经典李代数 gl_n 或 so_{2n} 之一。我们沿用第 5.1 小节的构造，但将魏尔群元素 $\tilde{w}$ 的提升替换为 $\tilde{\sigma} := \tilde{w}\sigma$，其中 σ 是作用如 (2.14) 的外自同构，即对于 $\mathfrak{g} = gl_n$，$\tilde{\sigma}(g) = -\text{Ad}\ \tilde{w}(\text{Ad}\, J_n(g^t))$；而对于 $\mathfrak{g} = so_{2n}$，$\tilde{\sigma}(g) = \text{Ad}\ \tilde{w}(\text{Ad}\ O(g))$。

在 gl_n 的情况下，这个 $\tilde{\sigma}$ 不仅会对元素 ϵ_i 进行置换，还会将其与 -1 相乘。因此我们得到正循环和负循环，即 $\tilde{\sigma}$ 的作用为

$$\epsilon_{i_1} \to -\epsilon_{i_2} \to \epsilon_{i_3} \to \cdots \to (-1)^m\epsilon_{i_{m-1}} \to (-1)^{m+1}\epsilon_{i_m} \to (-1)^m\epsilon_{i_1}.$$

我们注意到，如果 m 为偶数，我们会得到一个正循环；但如果 m 为奇数，我们会得到一个负循环。因此，如前所述，$\tilde{\sigma}$ 与一个分拆对 $(\lambda,\mu) = ((\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s),(\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_r))$ 相关，其中 λ 的所有部分都是偶数，而 μ 的所有部分都是奇数，且 $|\lambda|+|\mu| = n$。这意味着，如果 n 为偶数（分别为奇数），则 r 也必须为偶数（分别为奇数）。如前所述，更多细节请参见 [24]；部分 λ_i 与一对带电自由费米子场 $\psi^{\pm i}(z)$ 相关，而部分 μ_j 与一个扭曲中性自由费米子场 $\tilde{\phi}^j(z)$ 相关。这意味着我们得到了 $\hat{gl}^{(2)}_{2m+1} \subset b_\infty$ 的一个实现

（分别为 $\hat{gl}_{2m}^{(2)} \subset d_\infty$）含有奇数（分别为偶数）个扭曲中性自由费米子场。在此情形下， q 维数公式在 $\hat{gl}_{2m}^{(2)} \subset d_\infty$ 的情况下由（5.35）给出；在 $\hat{gl}_{2m+1}^{(2)} \subset b_\infty$ 的情况下，则由以下公式给出。更多信息请参见 [24] 。

$$2^{[\frac{r}{2}]} \sum_{j_1,\dots,j_s \in \mathbb{Z}} q^{\frac{N}{2}(\frac{j_1^2}{\lambda_1^2}+\frac{j_2^2}{\lambda_2^2}+\cdots+\frac{j_s^2}{\lambda_s^2})} \prod_{a=1}^{s}\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{\frac{jN}{\lambda_a}}} \prod_{b=1}^{r}\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{\frac{(2j-1)N}{\mu_b}}}$$

在 so_{2n}的情况下，这 $\tilde{\sigma}$ 给出了所有 ϵ_i、 $1 \le i \le n$的一个置换，并伴随符号变化。但由于 $\mathrm{Ad}\, O(\epsilon_i) = (-)^{\delta_{in}}\epsilon_i$，包含$\epsilon_n$ 的 $\mathrm{Ad}\,\tilde{w}$ 的循环发生符号变化，即如果该循环对于 $\mathrm{Ad}\,\tilde{w}$ 是正的（分别为负的），它就变为负的（分别为正的）。例如，如果 $\mathrm{Ad}\ \tilde{w}$ 在一个正循环上作用，如

$$\epsilon_n \to \epsilon_{i_2} \to \epsilon_{i_3} \to \cdots \to \epsilon_{i_m} \to \epsilon_n,$$

然后， $\tilde{\sigma}$ 以如下方式作用于这些元素

$$\epsilon_n \to -\epsilon_{i_2} \to -\epsilon_{i_3} \to \cdots \to -\epsilon_{i_m} \to -\epsilon_n \to \epsilon_{i_2} \to \epsilon_{i_3} \to \cdots \to \epsilon_{i_m} \to \epsilon_n.$$

因此，我们得到负循环的数量为奇数，而不是像 so_{2n} 的魏尔群共轭类那样为偶数。因此，我们再次得到 $\hat{so}_{2n}^{(2)} \subset b_\infty$ 的一个实现，它与两个分拆 $(\lambda,\mu) = ((\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s),(\mu_1,\mu_2,\dots\mu_r))$ 相关，其中部分 λ_i 与一对带电自由费米子场 $\psi^{\pm i}(z)$ 相关，部分 μ_j 与一个扭曲中性自由费米子场 $\tilde{\phi}^j(z)$ 相关；但在这种情况下，各部分是任意的，满足 $|\lambda|+|\mu| = n$，且 r 为奇数。在这种情况下，q 维公式仍由 (5.35) 给出（见 [24]）。

命题 5.13 这些扭曲代数在福克空间$B_{(\lambda,\mu)}$ 上的表示由以下（扭曲）费米子场给出。设 $\omega_a = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda_a}}$,$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{}$ $\frac{\pi\sqrt{-1}}{}$ $\frac{\pi\sqrt{-1}}{}\omega_b = e^{\ \lambda_b}$, $\omega_c = e^{\mu_{c-s}}$ 和 $\omega_d = e^{\mu_{d-s}}$，以及 $1 \le a,\ b \le s < c,\ d \le r+s$，则 ***(a)*** 对于 $\hat{gl}_n^{(2)}$ ：

$$\begin{aligned}
&\sigma : \psi^{(-)^j a}(\omega_a^j z^{\lambda_b})\psi^{(-)^{k+1}b}(\omega_b^k z^{\lambda_a}) : \sigma^{-1}, && 1 \le j \le \lambda_a,\ 1 \le k \le \lambda_b,\\
&\sigma : \psi^{(-)^j a}(\omega_a^j z^{2\mu_{c-s}})\tilde{\phi}^c((-1)^{k+1}\omega_c^k z^{\lambda_a}) : \sigma^{-1}, && 1 \le j \le \lambda_a,\ 1 \le k \le \mu_{c-s},\\
&\sigma : \tilde{\phi}^c((-1)^k\omega_c^k z^{\lambda_a})\psi^{(-)^{j+1}a}(\omega_a^j z^{2\mu_{c-s}}) : \sigma^{-1}, && 1 \le j \le \lambda_a,\ 1 \le k \le \mu_{c-s}, \quad and\\
&\sigma : \tilde{\phi}^c((-1)^j\omega_c^j z^{2\mu_{d-s}})\tilde{\phi}^d((-1)^{k+1}\omega_d^k z^{2\mu_{c-s}}) : \sigma^{-1}, && 1 \le j \le \mu_{c-s},\ 1 \le k \le \mu_{d-s}.
\end{aligned}$$

(b) 对于 $\hat{so}_{2n}^{(2)}$: ***(***δ， $\epsilon = +$或 $-$, j， $k \in \mathbb{Z}$***)***

$$\sigma : \psi^{\epsilon a}(\omega_a^j z^{\lambda_b})\psi^{\delta b}(\omega_b^k z^{\lambda_a}) : \sigma^{-1}, \quad \sigma : \psi^{\epsilon a}(\omega_a^j z^{2\mu_{c-s}})\tilde{\phi}^c(\omega_c^k z^{\lambda_a}) : \sigma^{-1} \quad and$$
$$\sigma : \tilde{\phi}^c(\omega_c^j z^{2\mu_{d-s}})\tilde{\phi}^d(\omega_d^k z^{2\mu_{c-s}}) : \sigma^{-1},$$

这里使用公式(3.66) 和(3.73) 将它们表示为顶点算子。特别地，我们有海森堡代数(

$$3\ 30 \qquad\qquad \sigma\alpha^a\ z\ \sigma^{-1} = .),$$

它们 $\sigma \quad \psi^{+a}\ z\ \psi^{-a}\ z \quad \sigma^{-1} \qquad\qquad \sigma\alpha^c\ z\ \sigma^{-1} = \frac{1}{2}\sigma \quad \tilde{\phi}^c\ z\ \tilde{\phi}^c\ -z \quad \sigma^{-1}$
分别等于$():()():$和$():()():$，其模满足(3.31)。

这里我们在带电费米子场中使用记号 $(-)^j a$ 作为上标，表示当 j 为偶数（分别为奇数）时，$(-)^j a = +a$ （分别为 $= -a$）。关于这些扭仿射李代数的顶点算子的更多详细信息，请参阅 [24]。

6 从魏尔群的共轭类到 $\mathfrak{g}$ 中幂零元素的映射

6.1 基于第 5 节的构造

在上一章中，对于经典李代数 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群的每个共轭类（等价地，对于 gl_n 的一个分拆 λ，以及对于其他经典李代数的一对分拆 (λ, μ)），我们在 $\hat{\mathfrak{g}}$ 中构造了相应的海森堡子代数。这个海森堡子代数由 K 以及在 gl_n 的场的模中出现的、对应于 $1 \le b \le s$ 的元素 $a^{bb}_{\lambda_b \lambda_b}$ 张成（见命题 5.3）；对于其他经典代数，则由 $a^{+b}_{,\lambda_b \lambda_b}{}^{-b}$ 和 $a^{+(s+c)\,-(s+c)}_{\mu_c \mu_c,}$（对应于 $1 \le b \le s$, $1 \le c \le r$）张成（见第 5.3–5.5 小节）。这个海森堡代数是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 中循环元素的中心化子

$$
\begin{aligned}
c_w(t) = c_{(\lambda,\mu)}(t) :&= r^{-1}\left(\sum_{b=1}^{s} \frac{1}{\lambda_a}\alpha_1^b \pm \sum_{c=1}^{r} \frac{1}{\mu_c}\alpha_1^{s+c}\right) \\
&= \sum_{b=1}^{s} a^{+b,-b}_{\lambda_b \lambda_b}(\frac{N}{\lambda_b}) + \sum_{c=1}^{r} a^{+(s+c),-(s+c)}_{\mu_c \mu_c}(\frac{N}{2\mu_c}) \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}[t]).
\end{aligned}
$$

注意，这个循环元素 $c_w(t)$ 是分解 $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s + \mu_1 + \cdots + \mu_r$ 的每个分量 $a = 1$、2、.....、$s + r$ 中次数最小的正次数海森堡元素 α_1^a 的线性组合。

元素 $c_w(0) = c_{(\lambda,\mu)}(0)$ 是经典李代数 $\mathfrak{g}$ 中的幂零元。因此，我们构造了一个从魏尔群 W 的共轭类到 $\mathfrak{g}$ 中幂零元的映射，即 $w \mapsto c_w(0)$。下面我们将明确描述所有情形下的这个映射。

设 gl_n 的 $w_\lambda \in W$ 由式 (5.12) 给出，则魏尔群中与该元素对应的幂零元为

$$
\begin{aligned}
gl_n: \qquad f_\lambda &= \sum_{b=1}^{s} \frac{1}{\lambda_b} \sum_{i=1}^{\lambda_b - 1} e^{bb}_{i,i+1} \\
&= \sum_{b=1}^{s} \frac{1}{\lambda_b}\left(t e^{bb}_{\lambda_b,1} + \sum_{i=1}^{\lambda_b - 1} e^{bb}_{i,i+1}\right)\Big|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

这意味着 f_λ 的若尔当标准形分解包含 s 个大小分别为 λ_1、λ_2、.....、λ_s 的若尔当块。

Let $w_{(\lambda,\mu)}$ 由(5.20)给出，其中在 so_{2n} r 为偶数的情况下，幂零 t

在魏尔群中与该元素对应的元素是

$$so_{2n+1}:\qquad f_{(\lambda,\mu)}=\sum_{b=1}^{s}\frac{1}{\lambda_b}\sum_{i=1}^{\lambda_b-1}e_{i,i+1}^{+b,-b}-\sum_{c=1}^{\frac{r}{2}}\Big(\frac{1}{\mu_{2c-1}}\Big(\frac{\gamma_r^{-1}}{\sqrt{2}}e_{12}^{+(s+2c-1),-(s+2c-1)}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}e_{\mu_{2c-1}\mu_{2c}}^{+(s+2c-1),-(s+2c)}+\frac{1}{\sqrt{2}}e_{\mu_{2c-1}\mu_{2c}}^{+(s+2c-1),+(s+2c)}+\sum_{j=2}^{\mu_{2c-1}-1}e_{j,j+1}^{+(s+2c-1),-(s+2c-1)}\Big)+$$

$$+\frac{1}{\mu_{2c-1}}\Big(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}e_{\mu_{2c}-1,\mu_{2c}}^{+(s+2c),-(s+2c)}-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}e_{\mu_{2c}-1,\mu_{2c}}^{+(s+2c),+(s+2c)}+\sum_{j=1}^{\mu_{2c-1}-2}e_{j,j+1}^{+(s+2c),-(s+2c)}\Big)\Big)-$$

$$-\frac{\eta}{\mu_r}\Big(e_{\mu_r}^{+(s+r)}+\sum_{j=1}^{\mu_r-1}e_{j,j+1}^{+(s+r),-(s+r)}\Big);$$

$$sp_{2n}:\qquad f_{(\lambda,\mu)}=\sum_{b=1}^{s}\frac{1}{\lambda_b}\sum_{i=1}^{\lambda_b-1}e_{i,i+1}^{+b,-b}+\sum_{c=1}^{r}\frac{1}{\mu_c}(e_{\mu_c\mu_c}^{+(s+c),+(s+c)}+\sum_{i=1}^{\mu_c-1}e_{i,i+1}^{+(s+c),-(s+c)});$$

$$so_{2n}:\qquad f_{(\lambda,\mu)}=\sum_{b=1}^{s}\frac{1}{\lambda_b}\sum_{i=1}^{\lambda_b-1}e_{i,i+1}^{+b,-b}-\sum_{c=1}^{\frac{r}{2}}\Big(\frac{1}{\mu_{2c-1}}\Big(\frac{\gamma_r^{-1}}{\sqrt{2}}e_{12}^{+(s+2c-1),-(s+2c-1)}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}e_{\mu_{2c-1}\mu_{2c}}^{+(s+2c-1),-(s+2c)}+\frac{1}{\sqrt{2}}e_{\mu_{2c-1}\mu_{2c}}^{+(s+2c-1),+(s+2c)}+\sum_{j=2}^{\mu_{2c-1}-1}e_{j,j+1}^{+(s+2c-1),-(s+2c-1)}\Big)+$$

$$+\frac{1}{\mu_{2c-1}}\Big(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}e_{\mu_{2c}-1,\mu_{2c}}^{+(s+2c),-(s+2c)}-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}e_{\mu_{2c}-1,\mu_{2c}}^{+(s+2c),+(s+2c)}+\sum_{j=2}^{\mu_{2c-1}-2}e_{j,j+1}^{+(s+2c),-(s+2c)}\Big)\Big).$$

对于 sp_n，幂零元 $f_{(\lambda,\mu)}$ 有 $2s+r$ 个大小为λ_1、λ_1、λ_2、λ_2、……、λ_s、λ_s、$2\mu_1$、$2\mu_2$、……、$2\mu_r$的若尔当块。对于 so_{2n}，同样有 $2s+r$ 个若尔当块，但大小为 λ_1、λ_1、λ_2、λ_2、……、λ_s、λ_s、$2\mu_1+1$、$2\mu_2-1$、$2\mu_3+1$、$2\mu_4-1$、……、$2\mu_r-1$。对于 so_{2n+1}，若 r为偶数，则有 $2s+r+1$ 个大小为 λ_1、λ_1、λ_2、λ_2、……、λ_s、λ_s、$2\mu_1+1$、$2\mu_2-1$、$2\mu_3+1$、$2\mu_4-1$、……、$2\mu_r-1$、1 的若尔当块；若 r为奇数，则有 $2s+r$ 个大小为 λ_1、λ_1、λ_2、λ_2、……、λ_s、λ_s、$2\mu_1+1$、$2\mu_2-1$、$2\mu_3+1$、$2\mu_4-1$、……、$2\mu_r+1$的若尔当块。

6.2 一个略有不同的映射

遗憾的是，如果将上一小节中为 so_n 定义的映射限制到所有椭圆共轭类的集合上，也就是所有满足$\lambda=\emptyset$的共轭类上，该映射并非单射。例如，在 so_{28}中，$\mu=$(5, 5, 3, 1)和 $\mu=$(5, 4, 4, 1)都映射到一个若尔当块大小为 11、9、7、1 的幂零元。不过，我们可以利用以下观察来修正 so_{2n} 这一问题:

注记 6.1 第 *5* 节中针对 so_n 的构造在置换 μ 的各部分后也成立。原因如下。回想一下，为了得到 $\tilde{w}_{(\lambda,\mu)}$ 的构造，我们每次将大小为 $2\mu_{2a-1}$ 和 $2\mu_{2a}$ 的两个块（即 μ 中相邻的两部分）组合起来。原则上，可以组合 μ 中任意两部分。因此，我们可以打乱 μ 的各部分。这可以通过一个置换 π

实现，该置换作用于 $1, 2, \ldots r$，使得 $\pi(\mu) = (\mu_{\pi(1)}, \mu_{\pi(2)}, \ldots, \mu_{\pi(r)})$。这样，我们便可以考虑 $f_{(\lambda,\pi(\mu))}$，而不是 $f_{(\lambda,\mu)}$。注意，魏尔群中 so_n 的共轭类对应的元素不变，但幂零元会改变。现在它的 *Jordan* 块大小为 $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \lambda_s, 2\mu_{\pi(1)} + 1, 2\mu_{\pi(2)} - 1, 2\mu_{\pi(3)} + 1, 2\mu_{\pi(4)} - 1, \ldots, 2\mu_{\pi(r)} - 1$，其中 so_{2n}（在这种情况下，r 总是偶数）。对于 so_{2n+1}，因此得到 $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \lambda_s, 2\mu_{\pi(1)} + 1, 2\mu_{\pi(2)} - 1, 2\mu_{\pi(3)} + 1, 2\mu_{\pi(4)} - 1, \ldots, 2\mu_{\pi(r)} - 1, 1$（若 r 为偶数）；若 r 为奇数，则得到 $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \lambda_s, 2\mu_{\pi(1)} + 1, 2\mu_{\pi(2)} - 1, 2\mu_{\pi(3)} + 1, 2\mu_{\pi(4)} - 1, \ldots, 2\mu_{\pi(r)} + 1$。

现在我们利用上述说明，并按如下方式选取置换 π：

$$\pi(2i-1) = i, \text{ for } i = 1, \ldots, \left[\frac{r+1}{2}\right] \text{ and } \pi(2i) = \left[\frac{r+1}{2}\right] + i, \text{ for } i = \left[\frac{r+3}{2}\right], \ldots, r.$$

于是，数对 (λ, μ) 被映射为

$$\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \lambda_s, 2\mu_1+1, 2\mu_2+1, \ldots 2\mu_{\left[\frac{r+1}{2}\right]}+1, 2\mu_{\left[\frac{r+3}{2}\right]}-1, 2\mu_{\left[\frac{r+5}{2}\right]}-1, \ldots 2\mu_r-1, \tag{6.1}$$

当 so_{2n} 且 so_{2n+1} 为奇数时，映射为；而

$$\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \lambda_s, 2\mu_1+1, 2\mu_2+1, \ldots 2\mu_{\left[\frac{r+1}{2}\right]}+1, 2\mu_{\left[\frac{r+3}{2}\right]}-1, 2\mu_{\left[\frac{r+5}{2}\right]}-1, \ldots 2\mu_r-1, 1,$$

当 so_{2n+1} 且 r 为偶数时，映射为。此映射是满射，并且当 so_{2n} 时，其在椭圆共轭类上的限制是单射。下面说明满射性。设李代数 $\mathfrak{g}$ 的若尔当块分解为 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots, \geq n_k$。偶数大小的若尔当块总是以偶重数出现。我们构造数对 (λ, μ)，使得 λ 的部分数最多，并且该数对映射到此若尔当标准形；这样，相应的 w 在 Cartan子代数上作用时，$\mathfrak{h}$ 具有最大的 不动点 子空间 $\mathfrak{h}^w$。为此，我们先将大小相同的若尔当块配成对，例如 n_j 和 n_{j+1}。这一对随后给出 λ 的一个部分 λ_i，使得 $\lambda_i = n_j$。因此，假设我们已从此若尔当标准形中移除了所有这样的块对，那么剩下的若尔当块大小均为奇数且互不相同。设这些块的大小为 $m_1 > m_2 > \cdots > m_\ell$。当 n 为偶数（分别为奇数）时，ℓ 为偶数（分别为奇数）。我们据此构造 μ:

$$\mu_j = \frac{m_j - 1}{2} \text{ for } j = 1, \ldots, \left[\frac{\ell+1}{2}\right], \text{ and } \mu_j = \frac{m_j + 1}{2} \text{ for } j = \left[\frac{\ell+3}{2}\right], \ldots, \ell. \tag{6.2}$$

那么，这一对（λ，μ）被映射为若尔当标准形，其若尔当块为$n_1 \geq n_2 \geq \cdots$、$\geq n_k$。

为证明 so_{2n} 在椭圆共轭类上的单射性，也就是对所有共轭类（$\lambda = \emptyset$，μ），我们进行如下论证。设 $\mu^1 \neq \mu^2$ 是 n 的两个分拆，那么显然，当两个分拆的部分数不同时，我们也会得到不同的若尔当标准形。因此，假设两个 μ 的部分数相同；由于我们有 so_{2n}，部分数必为偶数，记作 $r = 2k$。式 (6.1) 中给出的、用于确定若尔当块的映射会产生如下大小的若尔当块

$$2\mu_1 + 1 \geq 2\mu_2 + 1 \geq \ldots \geq 2\mu_k + 1 > 2\mu_{k+1} - 1 \geq 2\mu_{k+2} - 1 \geq \cdots \geq 2\mu_r - 1. \tag{6.3}$$

No显然，当 μ^1 和 μ^2 不同时，它们会产生不同的若尔当块 (6.3)。

遗憾的是，对于 so_{2n+1}，当 $n>3$ 时，这个新映射不是单射。例如，在 so_9 中， $\mu=$ (2, 2) 和 $\mu=$ (2, 1, 1) 都给出块大小为 5、3、1 的若尔当标准形。

注意，在 so_{2n} 的情形下，上述构造还表明，对于映射 (6.1) 的每个纤维，都存在唯一的共轭类 $[w]$.，其不动子空间 $\mathfrak{h}^w$ 最小。按照满射性的证明中的类似方法，可以构造与 $[w]$ 对应的配对 (λ,μ)。不同之处在于，现在我们希望得到子空间 $\mathfrak{h}^w$ 最小的元素 w 。这意味着我们希望 λ 的部分数尽可能少。因此，我们只用偶数大小的若尔当块构造 λ 。移除这些块后，剩下偶数个奇数大小的若尔当块，记为 $m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_\ell$。由此，我们按照 (6.2) 构造 μ。由于该映射在 $so_{m_1+\cdots+m_\ell}$的椭圆共轭类上是单射，以这种方式构造的配对 (λ,μ) 是唯一的，并且具有所需的性质。

遗憾的是，我们不知道如何修改第6.1 小节的构造，使其在限制于 W 对于 so_{2n+1}、 $n>3$ 的椭圆共轭类集合时变为单射。

Lusztig 构造了一个从 W 的共轭类集合到幂零轨道集合的满射，对于任意单李代数 $\mathfrak{g}$，该映射在椭圆共轭类集合上是单射，见 [31]。当 $\mathfrak{g}=sp_n$ 时，它与我们的映射一致，但对于 $\mathfrak{g}=so_n$ 则不一致。

7与 x_∞ 和$\hat{}\mathfrak{g}$ 约化相关的KP型层级

$\hat{}$7.1 gl_n 以及 λ-KdV 层次

$\hat{}$ 我们不再考察 GL_∞ 的群轨道，而是要描述 SL_n 的轨道； SL_n 是 SL_n 型环群的中心扩张，是 A_∞ 的子群，并保持空间 $F^{(m)}$ 不变。我们发现，$\hat{}$ SL_n τ 函数除了满足 (1.34) 外，还满足更多 Hirota 双线性方程。利用 [16], 的引理 2.4，可得一个元素 $g\in A_\infty$，它对克利福德代数 $C\ell$ 中生成元的作用如下：

$$g\psi_j^+g^{-1}=\sum_i a_{ij}\psi_i^+,\ g\psi_k^-g^{-1}=\sum_i b_{ik}\psi_i^-,\ \text{with}\ \sum_i a_{ij}b_{-ik}=\delta_{j,-k}.$$

ˆ如果 $g \in GL_n$，那么 a_{ij} 和 b_{ij} 满足 $a_{i+n,\ j+n} = a_{ij}$ 以及 $b_{i+n,\ j+n} = b_{ij}$。利用这一点，我们可以证明对于 $p = 0$，1，2，.....，$g \otimes g$ 与 $\sum_i \psi_i^+ \otimes \psi_{pn-i}^-$ 对易：

$$\begin{aligned}\sum_i g\psi_i^+ \otimes g\psi_{pn-i}^- &= \sum_i g\psi_i^+ g^{-1} g \otimes g\psi_{pn-i}^- g^{-1} g \\ &= \sum_{i,j,k} a_{ij}\psi_j^+ g \otimes b_{pn-i,k}\psi_k g \\ &= \sum_{i,j,k} a_{ij} b_{-i,k-pn}\psi_j^+ g \otimes \psi_k g \\ &= \sum_j \psi_j^+ g \otimes \psi_{pn-j} g.\end{aligned}$$

由于 $\sum_i \psi_i^+|0\rangle \otimes \psi_{pn-i}^-|0\rangle = 0$，对于所有 $p = 0$，1, 2,...（$p = 0$ 是s分量 KP 层级 (1.34)）：

$$\sum_{i \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \psi_i^+ g|0\rangle \otimes \psi_{pn-i}^- g|0\rangle = 0,$$

在 λ-约化中，它转化为以下方程

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \psi_i^{+j}\tau \otimes \psi_{p\lambda_j - i}^{-j}\tau = 0, \quad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

利用同构 σ 后，可得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{z=0} \sum_{j=1}^{s} (-1)^{|\underline{k}+\underline{\ell}|_{j-1}} z^{p\lambda_j + k_j - \ell_j - 2 + 2\delta_{js}} e^{z\cdot(t^{(j)} - \overline{t}^{(j)})} e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(j)}} - t^{(j)} - \tilde{\partial}_{t^{(j)}})} \tau_{\underline{k}+\underline{e}_s - \underline{e}_j}(t) \times \\ &\qquad \tau_{\underline{\ell}+\underline{e}_j - \underline{e}_s}(\overline{t}) dz = 0.\end{aligned} \tag{7.1}$$

这是 λ-KdV 的 Hirota 双线性方程。特殊情形为 $s = 1$且 $\lambda_1 = n$ 是 n-Gelfand-Dickey 层级，而 $n = 2$ 是 Korteweg-de Vries (KdV) 层级。

命题 7.1 $p = 0$的方程(7.1)，1,... 等价于方程(1.34)，它等于 $p = 0$的(7.1)，并且

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{z=0} \sum_{j=1}^{s} (-1)^{|\underline{k}+\underline{\ell}|_{j-1}} z^{k_j - \ell_j - 2 + 2\delta_{js}} e^{z\cdot(t^{(j)} - \overline{t}^{(j)})} e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(j)}} - t^{(j)} - \tilde{\partial}_{t^{(j)}})} \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \tau_{\underline{k}+\underline{e}_s - \underline{e}_j}(t)}{\partial t_{p\lambda_i}^{(i)}} \right) \times \\ &\qquad \tau_{\underline{\ell}+\underline{e}_j - \underline{e}_s}(\overline{t}) dz = 0.\end{aligned} \tag{7.2}$$

证明 对 $p = 0$ 关于 $\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial t_{q\lambda_j}^{(j)}}$ 求导，其中 $q > 0$。因此可知，(7.1) 左端对 $p = q$ 的导数与 (7.2) 左端对 $p = q$ 的导数之和等于零。因此，对于所有 $p > 0$，(7.1) 蕴含 (7.2)，反之亦然。 □

注意，如果方程 (7.1) 对 $p=0$ 成立，那么以下方程

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\tau_m(t)}{\partial t_{p\lambda_i}^{(i)}}=C_p\tau_m(t),\ \text{with } C_p\in\mathbb{C},\qquad p=1,2,\dots. \tag{7.3}$$

推出了关于 $p>1$ 的 (7.2)，从而也推出了 (7.1)。事实上，可以证明

命题 7.2 方程 (7.1) 等价于关于 $p=0$ 的方程 (7.1) 与方程 (7.3)。

方程 (7.1) 转化为 ($p=0, 1, \dots$):

$$\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{j=1}^{s}V^{+}(\underline{\alpha};x,t,z)z^{p\lambda_j}E_{jj}V^{-}(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t},z)^{t}dz=0. \tag{7.4}$$

利用基本引理（参见 [15], 引理 4.1），我们推导出矩阵伪微分算子的如下表达式。

$$\sum_{j=1}^{s}(P^{+}(\underline{\alpha};x,t,\partial)R^{+}(\underline{\alpha};\partial)\partial^{p\lambda_j}E_{jj}R^{-}(\underline{\beta};x,t,\partial)^{*}P^{-}(\underline{\beta};x,t,\partial)^{*})_{-}=0. \tag{7.5}$$

这表明

$$\sum_{j=1}^{s}(P^{+}(\underline{\beta};x,t,\partial)\partial^{p\lambda_j}E_{jj}P^{+}(\underline{\beta};x,t,\partial)^{-1})_{-}=0, \tag{7.6}$$

从而使得

$$\sum_{j=1}^{s}(L^{p\lambda_j}C^{j})_{-}=0. \tag{7.7}$$

由此显然可知，$\mathcal{L}=\sum_{j=1}^{s}L^{\lambda_j}C^{j}$ 是一个微分算子，并且还满足

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t_i^j}=[(L^iC^j)_{+},\mathcal{L}]. \tag{7.8}$$

设 $D_p=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial}{\partial t_{p\lambda_j}^{(j)}}$，则

$$D_p(P^{+})=D_p(L)=D_p(C^j)=D_p(\mathcal{L})=0. \tag{7.9}$$

现在我们已经具备证明命题 7.2 所需的一切条件。

命题 7.2的证明 我们只需证明 (7.2)蕴含 (7.3)。因此，假设(7.2)成立。我们首先取 $\underline{k}=\underline{\ell}$ 和 $t=\overline{t}$，由此得到，见 (7.9),

$$\frac{\partial}{\partial t_1^{(j)}}\left(\frac{D_p(\tau_{\underline{\alpha}}(x,t))}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)}\right)=0. \tag{7.10}$$

接下来将 $j=s$、 $\underline{\ell}=\underline{k}+\underline{e}_i-\underline{e}_j$ 和 $t=\overline{t}$ 代入 (7.2)，得到

$$\frac{D_p(\tau_{\underline{\alpha}}(x,t))}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)}=\frac{D_p(\tau_{\underline{\alpha}+\underline{e}_i-\underline{e}_j}(x,t))}{\tau_{\underline{\alpha}+\underline{e}_i-\underline{e}_j}(x,t)},$$

这意味着

$$\frac{D_p(\tau_{\underline{\alpha}}(x,t))}{\tau_{\underline{\alpha}}(x,t)}=\frac{D_p(\tau_{\underline{\beta}}(x,t))}{\tau_{\underline{\beta}}(x,t)}\quad \text{for all } \underline{\alpha} \text{ and } \underline{\beta}. \tag{7.11}$$

现在对 $\underline{k}=\underline{\alpha}-\underline{e}_s+\underline{e}_i$ 和 $\underline{\ell}=\underline{\alpha}+\underline{e}_s-\underline{e}_m$ 取 (7.2)，再除以 $\tau(\underline{\alpha};\ x,t)\tau(\underline{\alpha};\ \overline{x},\overline{t})$，并使用 (7.11)，得到

$$\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{j=1}^{s}\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\overline{t}_i^{(j)}}\frac{z^{-j}}{j}\right)\left(\frac{D_p(\tau_{\underline{\beta}}(x,t))}{\tau_{\underline{\beta}}(x,t)}\right)V^+(\underline{\alpha};x,t)E_{jj}V^-(\underline{\alpha};\overline{x},\overline{t})^t dz=0. \tag{7.12}$$

将针对 $p=0$ 和 $\underline{\beta}=\underline{\alpha}$ 的(7.4)式的一个倍数相减，得到

$$\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{j=1}^{s}\left\{\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\overline{t}_i^{(j)}}\frac{z^{-j}}{j}\right)-1\right\}\left(\frac{D_p(\tau_{\underline{\beta}}(x,t))}{\tau_{\underline{\beta}}(x,t)}\right)V^+(\underline{\alpha};x,t)E_{jj}V^-(\underline{\alpha};\overline{x},\overline{t})^t dz=0. \tag{7.13}$$

引入伪微分算子 $S(\underline{\beta};\ x,t,\partial)$，定义为

$$S(\underline{\beta};x,t,z)=\sum_{j=1}^{s}\left\{\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\overline{t}_i^{(j)}}\frac{z^{-j}}{j}\right)-1\right\}\left(\frac{D_p(\tau_{\underline{\beta}}(x,t))}{\tau_{\underline{\beta}}(x,t)}\right)E_{jj}.$$

由于（7.10）成立 $\partial S(\underline{\beta};\ x,t,\partial)\ =\ S(\underline{\beta};\ x,t,\partial)\partial$。因此，利用基本引理，即 [15], 的引理 4.1，我们推得

$$\begin{aligned}0&=(P^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)R^+(\underline{\alpha};\partial)S(\underline{\beta};x,t,\partial)R^+(\underline{\alpha};\partial)^{-1}P^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{-1})_-\\&=(P^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)S(\underline{\beta};x,t,\partial)P^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{-1})_-\\&=P^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)S(\underline{\beta};x,t,\partial)P^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{-1}.\end{aligned}$$

因此 $S(\underline{\beta};\ x,t,\partial)\ =0$，由此可得

$$\frac{\partial}{\partial t_i^{(j)}}\left(\frac{D_p(\tau_{\underline{\beta}}(x,t))}{\tau_{\underline{\beta}}(x,t)}\right)=0,\quad 1\le j\le s,\quad i=1,2,\dots.$$

因此，

$$\frac{D_p(\tau_{\underline{\beta}}(x,t))}{\tau_{\underline{\beta}}(x,t)}=C_p\in\mathbb{C}$$

并且由于（7.11），C_p 对所有 $\underline{\beta}$都必须相同。因此（7.3）成立。 □

7.2 $\hat{}so_{2n}$ 和 (λ,μ)约化 DKP 层级

$\hat{}$群 SO_{2n} 使模 $F_d^{\overline{a}}$保持不变。它由所有满足 $g\phi_i g^{-1}=\sum_i a_{ji}\phi_j$ 的元素 $g\in D_\infty$ 组成，其中 $\sum_k a_{ki}a_{-k+1,\ j}=\delta_i$，因此 $\sum_k a_{ik}a_{j,\ -k+1}=\delta_{i+j,\ 1}$，且 $a_{i+2n,\ j+2n}=a_{ij}$。由于对于 $p=0$，1，2，.....

$$\begin{aligned}(g\otimes g)\sum_{i\in\mathbb{Z}}\phi_i\otimes\phi_{2pn-i+1}&=\sum_{i\in\mathbb{Z}}g\phi_i g^{-1}g\otimes g\phi_{2pn-i+1}g^{-1}g\\&=\sum_{i,j,k\in\mathbb{Z}}a_{ji}a_{k,2pn-i+1}\phi_j g\otimes\phi_k g\\&=\sum_{i,j,k\in\mathbb{Z}}a_{ji}a_{k-2pn,-i+1}\phi_j g\otimes\phi_k g\\&=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\phi_j g\otimes\phi_{2pn-j+1}g\\&=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\phi_j\otimes\phi_{2pn-j+1}(g\otimes g),\end{aligned}$$

and

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\phi_i|\overline{a}\rangle\otimes\phi_{2pn-i+1}|\overline{a}\rangle=0,$$

$\hat{}$我们有元素 $\tau_a\in F_d^{\overline{a}}$，它们属于 SO_{2n}-群轨道的 $|\overline{a}\rangle$ 满足

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\phi_i\tau_a\otimes\phi_{2pn-i+1}\tau_a=0,\quad\text{for } p=0,1,2,\dots.$$

这个方程可以按照相对于（λ，μ）的重标记改写为:

$$\left(\sum_{b=1}^{s}\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\left(\psi_i^{+b}\otimes\psi_{p\lambda_b-i}^{-b}+\psi_i^{-b}\otimes\psi_{p\lambda_b-i}^{+b}\right)+\sum_{c=s+1}^{r+s}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\tilde{\phi}_i^c\otimes\tilde{\phi}_{2p\mu_c-i}^c\right)(\tau_a\otimes\tau_a)=0,\tag{7.14}$$

请注意，在这种情况下， r **是偶数**。用场表示，我们得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0}\Bigg(&\sum_{b=1}^{s}z^{p\lambda_b}\left(\psi^{+b}(z)\otimes\psi^{-b}(z)+\psi^{-b}(z)\otimes\psi^{+b}(z)\right)+\\&+\sum_{c=s+1}^{r+s}z^{2p\mu_c-1}\tilde{\phi}^c(z)\otimes\tilde{\phi}^c(-z)\Bigg)(\tau_a\otimes\tau_a)dz=0,\quad\text{for } p=0,1,2,\dots.\end{aligned}\tag{7.15}$$

现在利用 σ 并代入顶点算子 (1.32) 和 (3.71)，我们得到以下微分方程层级。我们写作

$$\sigma(\tau_a)=\tau^a(q,t,\theta)=\sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^s,\underline{\ell}\in\mathbb{Z}_2^{\frac{r}{2}},\,|\underline{k}|+|\underline{\ell}|=a\bmod 2}\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(t)q^{\underline{k}}\theta^{\underline{\ell}},$$

其中 $q^{\underline{k}}=q_1^{k_1}q_2^{k_2}\cdots q_s^{k_s}$和 $\theta^{\underline{\ell}}=\theta_1^{\ell_1}\theta_2^{\ell_2}\cdots\theta_{\frac{r}{2}}^{\ell_{\frac{r}{2}}}$。然后，(7.15)变为如下r组方程，适用于所有 $\underline{k}$、$\overline{k}\in\mathbb{Z}^s$、$\underline{\ell}$、$\overline{\ell}\in\mathbb{Z}_2^{\overline{s}}$，使得 $|\underline{k}|+|\underline{\ell}|+1=|\overline{k}|+|\overline{\ell}|+1=a$模 2 且 $p=0$、1、2、.....

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0}\Big(\sum_{b=1}^{s}\big((-1)^{|\underline{k}+\overline{k}|_{b-1}}z^{p\lambda_b+k_b-\overline{k}_b-2+2\delta_{bs}}e^{z\cdot t^{(b)}-z\cdot\overline{t}^{(b)}}e^{z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(b)}}-z^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{t^{(b)}}}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s-\underline{e}_b,\underline{\ell}}(t)\tau_{\overline{k}+\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\ell}}(\overline{t})+\\ -(-1)^{|\underline{k}+\overline{k}|_{b-1}}(-z)^{p\lambda_b-k_b+\overline{k}_b-2-2\delta_{bs}}e^{(-z)\cdot\overline{t}^{(b)}-(-z)\cdot t^{(b)}}\times\\ e^{(-z)^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{t^{(b)}}-(-z)^{-1}\cdot\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(b)}}}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s+\underline{e}_b,\underline{\ell}}(t)\tau_{\overline{k}-\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\ell}}(\overline{t})\big)+\\ +\frac{1}{2}\sum_{c=1}^{r}(-1)^{|\underline{k}+\overline{k}|+|\underline{\ell}+\overline{\ell}|\left[\frac{c-1}{2}\right]+(c-1)(\ell_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}+\overline{\ell}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}+1)}z^{2p\mu_c-1}e^{z\circ t^{(s+c)}-z\circ\overline{t}^{(s+c)}}\times\\ e^{2(z^{-1}\circ(\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(s+c)}}-\circ\tilde{\partial}_{t^{(s+c)}})}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}+\underline{e}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}}(t)\tau_{\overline{k}-\underline{e}_s,\overline{\ell}+\underline{e}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}}(\overline{t})\big)dz=0.\end{aligned}\tag{7.16}$$

注意， $p=0$ 的所有方程构成 DKP 层级。

情形 $r=0$
假设 $\mu=0$ 因此 $r=0$。波算子 $V^{\pm}(\underline{\alpha}:\ x,t,z)$ 也满足 $(p=0,1,\ldots)$:

$$\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{j=1}^{s}V^{+}(\underline{\alpha};x,t,z)\left(z^{p\lambda_j}E_{jj}-(-z)^{p\lambda_j}E_{s+j,s+j}\right)V^{-}(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t},z)^{t}dz=0.\tag{7.17}$$

利用基本引理（见 [15], 引理 4.1），我们推导出矩阵伪微分算子的如下表达式

$$\sum_{j=1}^{s}(P^{+}(\underline{\alpha};x,t,\partial)R^{+}(\underline{\alpha};\partial)\left(\partial^{p\lambda_j}E_{jj}+(-\partial)^{p\lambda_j}E_{s+j,s+j}\right)R^{-}(\underline{\beta};x,t,\partial)^{*}P^{+}(\underline{\beta};x,t,\partial)^{-1})_{-}=0.\tag{7.18}$$

由此显然可知， $\mathcal{L}=\sum_{j=1}^{s}L^{\lambda_j}E^{j}$ 是一个满足以下条件的微分算子。

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t_i^j}=[(L^iD^j)_{+},\mathcal{L}].$$

如果我们定义 $\mathcal{M}=\sum_{j=1}^{s}L^{\lambda_j}D^j$，那么 $\mathcal{L}^2=\mathcal{M}^2$。

情形 $r>0$ **（第一种方法）**回想一下， r 总是偶数。按照第 4.4 节的构造，我们在方程 (7.16) 中令所有 $1\le c\le r$ 对应的 $t_j^{s+c}=\overline{t}_j^{s+c}=0$均为零，并将其余所有 t_1^a（分别为 $\overline{t}_1^a$）替换为 t_1^a+x（分别为 $\overline{t}_1^a=\overline{x}$）。设 $V^{\pm}(\alpha;\ x,t,z)$ 如前所述（当然，此处需进行替换 $t_j^{s+c}=0$），并设 $W^{\pm}(\alpha;\ x,t,z)$

如 (4.26) 所示，则 (7.16) 化为

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{j=1}^{s} V^+(\underline{\alpha};x,t,z)\left(z^{p\lambda_j}E_{jj}-(-z)^{p\lambda_j}E_{s+j,s+j}\right)V^-(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t},z)^t dz=\\ \mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} W^+(\underline{\alpha};x,t,z)z^{2p\mu_i-1}E_{ii}W^-(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t},z)^t dz.\end{aligned} \tag{7.19}$$

应用基本引理可得

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{s}(P^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)R^+(\underline{\alpha};\partial)\left(\partial^{p\lambda_j}E_{jj}-(-\partial)^{p\lambda_j}E_{s+j,s+j}\right)R^-(\underline{\beta};x,t,\partial)^*P^-(\underline{\beta};x,t,\partial)^*)_-=\\ &(P^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)R^+(\underline{\alpha};\partial)\left(\partial^{p\lambda_j}E_{jj}+(-\partial)^{p\lambda_j}E_{s+j,s+j}\right)R^-(\underline{\beta};x,t,\partial)^*P^+(\underline{\beta};x,t,\partial)^{-1}J)_-=\\ &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{n=0}^{2p\mu_i}W^+(\underline{\alpha};x,t)^nE_{ii}\partial^{-1}\left(W^-(\underline{\beta};x,t)^{2p\mu_i-n}\right)^t.\end{aligned} \tag{7.20}$$

注意，如果 $p=0$ 和 $\underline{\alpha}=\underline{\beta}$，则 (7.20) 的右端等于 0。令 (7.20) 中的 $\underline{\alpha}=\underline{\beta}$，并像之前一样定义 L 和 D^j，则 $\mathcal{L}=\sum_{j=1}^{s}L^{\lambda_j}E^j$ 满足 Lax 方程 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t^a_j}=[(L^jD^a)_+,\mathcal{L}]$，且等于

$$\mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t)=\mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t)_+ +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{n=0}^{2\mu_i}W^+(\underline{\alpha};x,t)^nE_{ii}\partial^{-1}\left(JW^-(\underline{\alpha};x,t)^{2\mu_i-n}\right)^t.$$

The 情形 $r>0$ **(第二种方法)** 我们从以下观察开始。

注 7.3 注意，原则上我们可以以这样的方式置换 μ 的元素，使得 μ_r 不再是 μ 中最小的部分。我们将这样做，并允许 μ_r 取任何大于零的值。我们将假设其他所有 μ_i 仍按递减顺序排列，因此 $(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{r-1})$ 是一个真正的分拆。从现在起，每当我们使用第二种方法时，我们总是假设这一点，即 μ_r 不再是 μ 中最小的部分。

与前面一样，我们假设 $r\geq 1$，在这种情况下 s 可以为 0，且 $r=2p$。我们遵循 **DKP 层级（第二种方法）**中的方法，并通过 (4.38) 定义 $(2s+1)\times(2s+1)$-矩阵值波函数，其中系数 $P^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,\pm z)$ 由 (4.24) 和 (4.39) 给出，其他矩阵则由 (4.25) 给出。$(2s+1)\times(r-1)$ is $W^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,z)$ 再次按照 (4.27) 和 (4.41) 中的方式定义，而 $T^{\pm}\underline{\alpha};x,t)$ 在这种情况下 $=0$，因为 $r=2p$。方程 (7.16) 现在转化为：于是我们得到以下双线性恒等式：

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0}\tilde{V}^+(\underline{\alpha};x,t,z)J_k(z)\tilde{V}^-(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t},z)^t dz=\\ \mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{2}W^+(\underline{\alpha};x,t,,z)M_k(z)W^-(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t},z)^t dz,\quad k=0,1,2,\ldots,\end{aligned} \tag{7.21}$$

其中

$$J_k(z)=z^{2\mu_r k-1}E_{2s+1,2s+1}+\sum_{j=1}^{s}z^{\lambda_j k}E_{jj}-(-z)^{\lambda_j k}E_{s+j,s+j},\quad M_k(z)=\sum_{j=1}^{r-1}z^{2\mu_j k-1}E_{j,j}. \tag{7.22}$$

注意， $J(\partial)=J_0(\partial)$。利用基本引理，我们得到

$$\begin{aligned}&\left(P^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)J_k(\partial)P^-(\underline{\alpha};x,t,\partial)^*\right)_-\\&=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{r-1}\sum_{j=0}^{2k\mu_a}W^+(\underline{\alpha};x,t)^jE_{aa}\partial^{-1}\left(W^-(\underline{\alpha};x,t)^{2k\mu_a-j}\right)^t,\end{aligned} \tag{7.23}$$

于是，对于 $k=0$，我们再次得到 (4.46)，因此按 (4.47) 定义 $\hat{V}^{\pm}$ 和 $\hat{P}^{\pm}$，进而得到 (4.49)、(4.51) 和 (4.53)。因此，我们可以按 (4.54) 定义 Lax 算子，它们显然满足 (4.55)。现在定义 $\hat{W}^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,z)=(P^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,z)^0)^{-1}W^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,z)$，则 (7.23) 给出

$$\begin{aligned}&\left(\hat{P}^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)J_k(\partial)J(\partial)^{-1}\hat{P}^-(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{-1}J(\partial)\right)_-J(\partial)^{-1}=\\&=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{r-1}\sum_{j=0}^{2k\mu_a}\hat{W}^+(\underline{\alpha};x,t)^jE_{aa}\partial^{-1}\left(\hat{W}^-(\underline{\alpha};x,t)^{2k\mu_a-j}\right)^tJ(\partial)^{-1}\end{aligned} \tag{7.24}$$

and

$$\mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t,\partial)=L(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{2\mu_r}D^{s+r}(\underline{\alpha};x,t,\partial)+\sum_{a=1}^{s}L(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{\lambda_a}E^a(\underline{\alpha};x,t,\partial).$$

那么显然， $\mathcal{L}$ 满足相同的 Lax 方程，并且

$$\mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t,\partial)=\mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t,\partial)_{\geq}+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{r-1}\sum_{j=0}^{2\mu_a}\hat{W}^+(\underline{\alpha};x,t)^jE_{aa}\partial^{-1}\left(\hat{W}^-(\underline{\alpha};x,t)^{2\mu_a-j}\right)^tJ(\partial)^{-1}.$$

7.3 $\hat{so}_{2n+1}$ 与 $(\lambda,\ \mu)$-约化 DKP 层级

群 SO_{2n+1} 同时作用于 F_b 和 F_d，并保持模 $F_d^{\overline{a}}$ 不变 [16]。它由满足 $g\phi_jg^{-1}=\sum_i a_{ji}\phi_i$ 的所有元素 $g\in B_\infty$（分别为 D_∞）组成（注意：在 D_∞ 情形下须去掉波浪号，因为此时它是一个真正的场），其中 $\sum_k a_{ik}a_{j,-k}=\delta_{i,-j}$ 和 $a_{i+2n+1,j+2n+1}=a_{ij}$。令 $\epsilon=0$，其中 F_b，而 1 2 表示

F_d。由于对于 $p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$

$$\begin{aligned}(g\otimes g)\sum_{i\in\epsilon+\mathbb{Z}}\tilde{\phi}_i\otimes\tilde{\phi}_{p(2n+1)-i} &= \sum_{i\in\epsilon+\mathbb{Z}} g\tilde{\phi}_i g^{-1}g\otimes g\tilde{\phi}_{p(2n+1)-i}g^{-1}g\\ &= \sum_{i,j,k\in\epsilon+\mathbb{Z}} a_{ji}a_{k,p(2n+1)-i}\tilde{\phi}_j g\otimes\tilde{\phi}_k g\\ &= \sum_{i,j,k\in\epsilon+\mathbb{Z}} a_{ji}a_{k-p(2n+1)-i}\tilde{\phi}_j g\otimes\tilde{\phi}_k g\\ &= \sum_{j\in\epsilon+\mathbb{Z}}\tilde{\phi}_j g\otimes\tilde{\phi}_{p(2n+1)-j}g\\ &= \sum_{i\in\epsilon+\mathbb{Z}}\tilde{\phi}_i\otimes\tilde{\phi}_{p(2n+1)-i}(g\otimes g)\end{aligned}$$

and

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\tilde{\phi}_i|0\rangle\otimes\tilde{\phi}_{p(2n+1)-i}|0\rangle=\frac{\delta_{p0}}{2}|0\rangle\otimes|0\rangle,\quad \sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\phi_i|\overline{a}\rangle\otimes\phi_{p(2n+1)-i}|\overline{a}\rangle=0,$$

ˆ 我们有：属于 $|0\rangle$（分别为 $|\overline{a}\rangle$）的 SO_{2n+1}-群轨道的元素 $\tau\in F_b$（分别为 $\tau_a\in F_d^{\overline{a}}$）满足

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\phi_i T\otimes\phi_{p(2n+1)-i}\tau=\frac{\delta_{p0}}{2}\tau\otimes\tau\quad(\text{resp.}\ \sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\tilde{\phi}_i\tau_a\otimes\tilde{\phi}_{p(2n+1)-i}\tau_a=0),\quad \text{for } p=0,1,\ldots. \tag{7.25}$$

本节将此结果作为 DKP 层级的一种约化来获得，因此假设 (7.25) 的第二个方程成立。用与 (λ,μ) 相关的费米子表示，即为

$$\begin{aligned}&\sum_{b=1}^{s}\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\left(\psi_i^{+b}\tau_a\otimes\psi_{p\lambda_b-i}^{-b}\tau_a+\psi_i^{-b}\tau_a\otimes\psi_{p\lambda_b-i}^{+b}\tau_a\right)+\\ &+\sum_{c=s+1}^{r+s}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\tilde{\phi}_i^c\tau_a\otimes\tilde{\phi}_{2p\mu_c-i}^c\tau_a+\sum_{j\in\delta+\mathbb{Z}}\sigma_j\tau_a\otimes\sigma_{p-j}\tau_a=0.\end{aligned} \tag{7.26}$$

关于 δ 的取值，见下文的两种情况（5.44）。若 $r=2r'-1$ 为奇数，则为 $\delta=0$；若 $r=2r'$ 为偶数，则为 $\delta=-\frac{1}{2}$。关于 $p=0$ 的这个方程实际上是当 $r=2r'-1$ 和 $R=r+1=2r'$ 时的（s，R）分量 DKP 方程（4.7），以及当 $r=2r'$ 和 $R=r+1=2r'+1$ 时将 p 替换为 $r'+1$ 后的方程（4.8）。在这种情况下，对于 $R=r+1$，我们有如下关系：

$$\begin{aligned}r=2r'-1:\quad \sigma_j&=\begin{cases}\tilde{\phi}_j^R & \text{if } j \text{ is even},\\ \sqrt{-1}\tilde{\phi}_j^R & \text{if } j \text{ is odd},\end{cases}\\ r=2r':\quad \sigma_{j+\frac{1}{2}}&=\begin{cases}\frac{\tilde{\phi}_0^R-\sqrt{-1}\sigma_0}{\sqrt{2}} & \text{if } j=-1,\\ \frac{\tilde{\phi}_0^R+\sqrt{-1}\sigma_0}{\sqrt{2}} & \text{if } j=0,\\ \tilde{\phi}_j^R & \text{if } 0<j \text{ is even or } j<-1 \text{ odd},\\ \sqrt{-1}\tilde{\phi}_j^R & \text{if } 0<j \text{ is odd or } j<-1 \text{ even}.\end{cases}\end{aligned} \tag{7.27}$$

我们不使用顶点算子将场 $\sigma(z)=\tilde{\phi}^R(z)=\tilde{\phi}^{r+1}(z)$ 玻色化，因为相应的海森堡代数，即$_{1\ 2}$： $\tilde{\phi}^{r+1}(z)\tilde{\phi}^{r+1}(-z)$：，不属于 $\hat{}so^-_{2n+1\circ}$ 相反，我们定义 $\sigma\sigma(z)\sigma^{-1}=\Xi(z)$，见（5.52）。我们首先使用费米子场改写方程（7.26）

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{z=0}\Big\{\sum_{b=1}^{s}z^{\lambda_b}\left(\psi^{+b}(z)\tau_a\otimes\psi^{-b}(z)\tau_a+\psi^{-b}(z)\tau_a\otimes\psi^{+b}(z)\tau_a\right)+\\&+\sum_{c=s+1}^{r+s}z^{2p\mu_c-1}\tilde{\phi}^c(z)\tau_a\otimes\tilde{\phi}^c(-z)\tau_a+z^{p-1-2\delta}\sigma(z)\tau_a\otimes\sigma(z)\tau_a\Big\}dz=0,\end{aligned}\tag{7.28}$$

然后应用玻色化 $\sigma_\circ$ 注意

$$\sigma(\tau_a)=\sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^s,\underline{\ell}\in\mathbb{Z}_2^{r'},\alpha\in\mathbb{Z}_2;\,\underline{k}+\underline{\ell}+\alpha=a\bmod 2}q^{\underline{k}}\theta^{\underline{\ell}}\tau_{\underline{k},\underline{\ell},\alpha}(t,\xi).$$

其中 $q^{\underline{k}}=q_1^{k_1}q_2^{k_2}\cdots q_s^{k_s}$、$\theta^{\underline{\ell}}=\theta_1^{\ell_1}\theta_2^{\ell_2}\cdots\theta_{r'}^{\ell_{r'}}$。令 $N_\xi(f(t)\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_p})=p$，则 $(-1)^{N_\xi}(\tau_{\underline{k},\underline{\ell},\alpha}(t、\xi)=(-1)^\alpha(\tau_{\underline{k},\underline{\ell},\alpha}(t、\xi)$。由此，对于（7.28）有：$(p=0,1,2,\ldots)$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{z=0}\Big(\sum_{b=1}^{s}\Big((-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|_{b-1}}z^{p\lambda_b+k_b-\overline{k}_b-2+2\delta_{bs}}e^{z(\cdot t^{(b)}-\overline{t}^{(b)})}e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(b)}}-\tilde{\partial}_{t^{(b)}})}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s-\underline{e}_b,\underline{\ell},\alpha}(t,\xi)\tau_{\overline{\underline{k}}+\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}},\overline{\alpha}}(\overline{t},\overline{\xi})\\&+(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|_{b-1}}z^{p\lambda_b-k_b+\overline{k}_b-2-2\delta_{bs}}e^{(-z)\cdot(t^{(b)}-\overline{t}^{(b)}}e^{(-z)^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{t^{(b)}}-\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(b)}})}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s+\underline{e}_b,\underline{\ell},\alpha}(t,\xi)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}},\overline{\alpha}}(\overline{t},\overline{\xi})\\&+\frac{1}{2}\sum_{c=1}^{r}(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|+|\underline{\ell}+\overline{\underline{\ell}}|\left[\frac{c-1}{2}\right]+(c-1)(\ell_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}+\overline{\ell}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}+1)}z^{2p\mu_c-1}e^{z^{\circ}(t^{(s+c)}-\overline{t}^{(s+c)})}\times\\&\qquad e^{2(z^{-1}\circ(\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(s+c)}}-\tilde{\partial}_{t^{(s+c)}}))}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}+\underline{e}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]},\alpha}(t,\xi)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}+\underline{e}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]},\overline{\alpha}}(\overline{t},\overline{\xi})\Big)dz\\&+(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|+|\underline{\ell}+\overline{\underline{\ell}}|}\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\xi_{j+\delta}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell},\alpha+1}(t,\xi)\frac{\partial\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}},\overline{\alpha}+1}(\overline{t},\overline{\xi})}{\partial\overline{\xi}_{j+p+\delta}}\\&+\frac{\partial\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell},\alpha+1}(t,\xi)}{\partial\xi_{j+\delta}}\overline{\xi}_{j+p+\delta}\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}},\overline{\alpha}+1}(\overline{t},\overline{\xi})+\sum_{j=1}^{p-1-2\delta}\frac{\partial\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell},\alpha+1}(t,\xi)}{\partial\xi_{j+\delta}}\frac{\partial\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}},\overline{\alpha}+1}(\overline{t},\overline{\xi})}{\partial\overline{\xi}_{p-j-\delta}}\\&+(1+2\delta)(\delta_{p0}-1)\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Big((-1)^{\ell_{\frac{r+1}{2}}}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}+\underline{e}_{\frac{r+1}{2}},\alpha}(t,\xi)\frac{\partial\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}},\overline{\alpha}+1}(\overline{t},\overline{\xi})}{\partial\overline{\xi}_p}\\&\qquad+(-1)^{\overline{\ell}_{\frac{r+1}{2}}}\frac{\partial\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell},\alpha+1}(t,\xi)}{\partial\xi_p}\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}+\underline{e}_{\frac{r+1}{2}},\overline{\alpha}}(\overline{t},\overline{\xi})\Big)\\&-\frac{\delta_{p0}}{2}(1+2\delta)(-1)^{\ell_{\frac{r+1}{2}}+\overline{\ell}_{\frac{r+1}{2}}}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}+\underline{e}_{\frac{r+1}{2}},\alpha}(t,\xi)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}+\underline{e}_{\frac{r+1}{2}},\overline{\alpha}}(\overline{t},\overline{\xi})\Big\}=0.\end{aligned}\tag{7.29}$$

至于 $\hat{}so_{2n}$，我们将考虑几种情况。

情形1，假设 $\mu=\emptyset$，因此 $r=0$。在这种情形下$\delta=-\frac{1}{2}$并且

$$\sigma(\tau_a)=\sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^s,\nu\in\mathbb{Z}_2;\,\underline{k}+\nu=a\bmod 2}q^{\underline{k}}\tau_{\underline{k},\nu}(t,\xi),\quad\text{with }(-1)^{N_\xi}(\tau_{\underline{k},\nu}(t,\xi))=(-1)^\nu(\tau_{\underline{k},\nu}(t,\xi)),$$

代入 $\xi=\overline{\xi}=0$ 时，我们发现 $\nu=\overline{\nu}=\overline{0}$: $(p=0,1,2,\ldots)$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{z=0}\Big(\sum_{b=1}^{s}\big((-1)^{|\underline{k}+\overline{k}|_{b-1}}z^{p\lambda_b+k_b-\overline{k}_b-2+2\delta_{bs}}e^{z\cdot(t^{(b)}-\overline{t}^{(b)})}\times\\
&\quad e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\delta}_{\overline{t}^{(b)}}-\tilde{\delta}_{t^{(b)}})}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s-\underline{e}_b,\underline{\ell},\alpha}(t,0)\tau_{\overline{k}+\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\ell},\overline{\alpha}}(\overline{t},0)+(-1)^{|\underline{k}+\overline{k}|_{b-1}}z^{p\lambda_b-k_b+\overline{k}_b-2-2\delta_{bs}}\times\\
&\quad e^{(-z)\cdot(t^{(b)}-\overline{t}^{(b)})}e^{(-z)^{-1}\cdot\tilde{\delta}_{t^{(b)}}-(-z)^{-1}\cdot\tilde{\delta}_{\overline{t}^{(b)}}}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s+\underline{e}_b,\overline{0}}(t,0)\tau_{\overline{k}-\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{0}}(\overline{t},0)\big\}\Big)dz\\
&\quad=-(-1)^{|\underline{k}+\overline{k}|}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\overline{1}}(t,\xi)}{\partial\xi_{j-\frac{1}{2}}}\Big|_{\xi=0}\frac{\partial\tau_{\overline{k}-\underline{e}_s,\overline{1}}(\overline{t},\overline{\xi})}{\partial\overline{\xi}_{p-j+\frac{1}{2}}}\Big|_{\overline{\xi}=0}.
\end{aligned}\tag{7.30}$$

注 7.4 注意，对于 $p=0$，右端等于 *0*。在 *DKP* 情形下，当 $r=1$ 且对所有 $j=1$、3、.....，在方程 (4.13) 中代入 $t_j^{s+1}=0$ 时，可得到一个类似的方程。特别地，对于 J，我们有 $P^{-*}=JP^{+-1}$，其中 J 如 (4.32) 所示。

现在，对 $j=\frac{1}{2}$、$3\,2$、$5\,2$、.....，定义

$$\begin{aligned}
T^{\pm j}(\underline{\alpha};x,t)_i=&\sqrt{-1}\frac{(-1)^{|\underline{\alpha}|}}{\tau_{\underline{\alpha},\overline{0}}(x,t,0)}\frac{\partial\tau_{\underline{\alpha}\pm\underline{e}_i,\overline{1}}(x,t,\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi=0},\\
T^{\pm j}(\underline{\alpha};x,t)_{s+i}=&\sqrt{-1}\frac{(-1)^{|\underline{\alpha}|}}{\tau_{\underline{\alpha},\overline{0}}(x,t,0)}\frac{\partial\tau_{\underline{\alpha}\mp\underline{e}_i,\overline{1}}(x,t,\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi=0}
\end{aligned}\tag{7.31}$$

并像之前一样定义 $V^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t,z)$。由此可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{j=1}^{s}V^{+}(\underline{\alpha};x,t,z)\left(z^{p\lambda_j}E_{jj}-(-z)^{p\lambda_j}E_{s+j,s+j}\right)V^{-}(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t},z)^t dz=\\
&=\sum_{j=\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}}T^{+j}(\underline{\alpha};x,t)T^{-(p-j)}(\underline{\beta};\overline{x},\overline{t})^t.
\end{aligned}\tag{7.32}$$

注意

$$T^{\pm j}(\underline{\alpha};x,t)_i=T^{\mp j}(\underline{\alpha};x,t)_{s+i}.$$

Thus

$$P^{\pm}(\underline{\alpha};x,t,\partial)=NP^{\mp}(\underline{\alpha};x,t,\partial)N,\quad NT^{\pm j}(\underline{\alpha};x,t)=T^{\mp j}(\underline{\alpha};x,t)\tag{7.33}$$

其中 N 定义于（4.36）中。令 $\partial=\partial_x$ 并利用基本引理（见 [15],引理 4.1），我们可得矩阵伪微分算子的如下表达式

$$\sum_{j=1}^{s}(P^{+}(\underline{\alpha};x,t,\partial)R^{+}(\underline{\alpha};\partial)\left(\partial^{p\lambda_j}E_{jj}-(-\partial)^{p\lambda_j}E_{s+j,s+j}\right)R^{-}(\underline{\beta};x,t,\partial)^{*}P^{-}(\underline{\beta};x,t,\partial)^{*})_{-}$$
$$=\sum_{j=\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}}T^{+j}(\underline{\alpha};x,t)\partial^{-1}T^{-(p-j)}(\underline{\beta};x,t)^{t}. \tag{7.34}$$

取 $p=0$ 和 $\underline{\alpha}=\underline{\beta}$ 以及 $J=\sum_{j=1}^{s}E_{jj}-E_{s+j,\ s+j}=J^{-1}$，如（4.32）中所示，我们再次得到（4.33）。然而，取 $p\neq 0$，我们得到

$$\sum_{j=1}^{s}(P^{+}(\underline{\alpha};x,t,\partial)\left(\partial^{p\lambda_j}E_{jj}+(-\partial)^{p\lambda_j}E_{s+j,s+j}\right)P^{+}(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{-1})_{-}=$$
$$\sum_{k=\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}}T^{+k}(\underline{\alpha};x,t)\partial^{-1}(JT^{-(p-k)}(\underline{\alpha};x,t))^{t}. \tag{7.35}$$

那么，$P^{\pm}(\alpha;\ x,t,\partial)$、$L(\alpha;\ x,t,\partial)$、$D^{j}(\alpha;\ x,t,\partial)$、$E^{j}(\alpha;\ x,t,\partial)$ 和 $\mathcal{L}(\alpha;\ x,t,\partial)$ 均保持不变，它们的关系也保持不变，唯一的例外是 $\mathcal{L}(\alpha;\ x,t,\partial)_{-}$ 不再等于零。更一般地，我们有

$$\sum_{j=1}^{s}(L^{p\lambda_j}E^{j})_{-}=\sum_{k=\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}}T^{+k}(\underline{\alpha};x,t)\partial^{-1}(JT^{-(p-k)}(\underline{\alpha};x,t))^{t}$$

特别是

$$\mathcal{L}_{-}=T^{+\frac{1}{2}}(\underline{\alpha};x,t)\partial^{-1}(JT^{-\frac{1}{2}}(\underline{\alpha};x,t))^{t}.$$

$\mathcal{L}$ 的伴随算子为

$$\mathcal{L}^{*}=K\mathcal{L}K^{-1},$$

对于 (4.37) 中的 K。

在此情况下，若对 $\underline{\alpha}=\underline{\beta}$ 和 $p=1$ 关于 t_i^j 求导，并使用 [15], 的基本引理 (7.32)，则可得到

$$\left(\frac{\partial P^{+}}{\partial t_i^j}(P^{+})^{-1}\mathcal{L}+L^{i}D^{j}\mathcal{L}\right)_{-}=\frac{\partial T^{+\frac{1}{2}}}{\partial t_i^j}\partial^{-1}T^{-\frac{1}{2}t}J.$$

现在代入方程 (4.33) 的第二个方程，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial T^{+\frac{1}{2}}}{\partial t_i^j}\partial^{-1}T^{-\frac{1}{2}T}J&=\left(\left(L^{i}D^{j}\right)_{+}\mathcal{L}\right)_{-}\\&=\left(\left(L^{i}D^{j}\right)_{+}\mathcal{L}_{-}\right)_{-}\\&=\left(\left(L^{i}D^{j}\right)_{+}T^{+\frac{1}{2}}\partial^{-1}T^{-\frac{1}{2}t}J\right)_{-}\\&=\left(L^{i}D^{j}\right)_{+}\left(T^{+\frac{1}{2}}\right)\partial^{-1}T^{-\frac{1}{2}t}J.\end{aligned}$$

Thus

$$\frac{\partial T^{+\frac{1}{2}}}{\partial t_i^j} = \left(L^i D^j\right)_+ \left(T^{+\frac{1}{2}}\right).$$

如果我们分别对 $\underline{\alpha} = \underline{\beta}$ 和 $p = 1$ 关于 $\overline{t}_i^j$ 求导，同样可以得到

$$\frac{\partial T^{-\frac{1}{2}} J}{\partial t_i^j} = -\left(L^i D^j\right)_+^* \left(T^{-\frac{1}{2}} J\right).$$

因此， $T^{+\frac{1}{2}}$分别是算子 L and D^j, $j = 1, 2, \ldots, s$ 的特征函数和伴随特征函数。

第二种情况， $\mu \neq \emptyset$ **（第一种方法）**。在这种情况下，

$$\sigma(\tau_a) = \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^s, \underline{\ell}\in\mathbb{Z}_2^r, \nu\in\mathbb{Z}_2;\, \underline{k}+\underline{\ell}+\nu = a \bmod 2} q^{\underline{k}}\theta^{\underline{\ell}}\tau_{\underline{k},\nu}(t,\xi), \quad \text{with } (-1)^{N_\xi}(\tau_{\underline{k},\nu}(t,\xi)) = (-1)^\nu(\tau_{\underline{k},\nu}(t,\xi)).$$

在 (7.29) 中，我们将 $c > s$ 替换为 $\xi = \overline{\xi} = t_j^c = \overline{t}_j^c = 0$。与之前一样，将所有 t_1^a 替换为 $t_1^a + x$，并按通常方式定义 $2s \times 2s$-矩阵和 $V^{\pm}(\underline{\alpha};\, x, t, z)$，但显然仅对 $\nu = 0$ 而言。在这种情况下，我们还有一个 $2s \times r$-矩阵 $W^{\pm}(\underline{\alpha}, x, t, z)$，其定义见 (4.26) 和 (4.27)，以及 $2s \times 1$-矩阵

$$\begin{aligned} T^{\pm(j+\delta)}(\underline{\alpha}; x, t)_i &= \sqrt{-1}\frac{(-1)^{|\underline{\alpha}|}}{\tau_{\underline{\alpha},\overline{0}}(x,t,0)}\frac{\partial \tau_{\underline{\alpha}\pm\underline{e}_i,\overline{1}}(x,t,\xi)}{\partial \xi_{j+\delta}}\Big|_{\xi,t^{>s}=0}, \\ T^{\pm(j+\delta)}(\underline{\alpha}; x, t)_{s+i} &= \sqrt{-1}\frac{(-1)^{|\underline{\alpha}|}}{\tau_{\underline{\alpha},\overline{0}}(x,t,0)}\frac{\partial \tau_{\underline{\alpha}\mp\underline{e}_i,\overline{1}}(x,t,\xi)}{\partial \xi_{j+\delta}}\Big|_{\xi,t^{>s}=0} \quad \text{for } j+\delta > 0, \end{aligned} \tag{7.36}$$

并且如果 $\delta = 0$，我们还有

$$T^{\pm 0}(\underline{\alpha}; x, t)_i = \frac{(-1)^{|\underline{\alpha}|}\tau_{\underline{\alpha}\pm\underline{e}_i,\overline{0}}(x,t,0)}{\sqrt{2}\tau_{\underline{\alpha},\overline{0}}(x,t,0)}\Big|_{t^{>s}=0}, \quad T^{\pm 0}(\underline{\alpha}; x, t)_{s+i} = \frac{(-1)^{|\underline{\alpha}|}\tau_{\underline{\alpha}\mp\underline{e}_i,\overline{0}}(x,t,0)}{\sqrt{2}\tau_{\underline{\alpha},\overline{0}}(x,t,0)}\Big|_{t^{>s}=0}. \tag{7.37}$$

对于 $p = 0$，因此我们得到

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{j=1}^{s} V^+(\underline{\alpha}; x, t, z)\left(E_{jj} - E_{s+j,s+j}\right) V^-(\underline{\beta}; \overline{x}, \overline{t}, z)^t dz = \\ &\qquad \frac{1}{2}W^+(\underline{\alpha}; x, t)^0 W^-(\underline{\beta}; \overline{x}, \overline{t})^{0t} + (1+2\delta)T^{+0}(\alpha; x, t)T^{-0}(\beta; \overline{x}, \overline{t})^t, \end{aligned} \tag{7.38}$$

这与（4.29）类似。现在代入 $\alpha = \beta$，可得（7.38）的右端等于 0。于是我们恰好处于小节 4.4 中 BKP 层级第一种方法的情形，可以按照该节的做法继续，并以同样的方式定义 Lax 算子。对于 $p > 0$，我们有

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{j=1}^{s} V^+(\underline{\alpha}; x, t, z)\left(z^{p\lambda_j}E_{jj} - (-z)^{p\lambda_j}E_{s+j,s+j}\right) V^-(\underline{\alpha}; \overline{x}, \overline{t}, z)^t dz = \\ &\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{r}\sum_{j=0}^{2p\mu_a} \hat{W}^+(\underline{\alpha}; x, t)^j E_{aa}\left(\hat{W}^-(\underline{\alpha}; \overline{x}, \overline{t})^{2p\mu_a - j}\right)^t + \sum_{j=-\delta}^{p+\delta} T^{+j}(\underline{\alpha}; x, t)T^{-(p-j)}(\underline{\alpha}; \overline{x}, \overline{t})^t. \end{aligned} \tag{7.39}$$

这表明 Lax 算子 $\mathcal{L}=\sum_{j=1}^{s}L^{\lambda_j}E^j$ 的积分部分等于

$$\mathcal{L}_-=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{r}\sum_{j=0}^{2\mu_a}\hat{W}^+(x,t)^jE_{aa}\partial^{-1}\left(\hat{W}^-(x,t)^{2\mu_a-j}\right)^tJ+\sum_{j=-\delta}^{1+\delta}T^{+j}(x,t)\partial^{-1}T^{-(1-j)}(x,t)^tJ.$$

第三种情况， $\mu\neq\emptyset$ **（第二种方法）**。和以前一样，我们将 $\xi=\overline{\xi}=t_j^c=\overline{t}_j^c=0$代入（7.48）中的 $s<c<s+r$。这里注 7.3 同样成立。将所有的 t_1^a替换为t_1^a+x，其中 $a=1$、2、...、s、$s+r$，并按照（4.38）、（4.24）和（4.39）定义（$2s+1$）×（$2s+1$）-矩阵 $V^{\pm}(\underline{\alpha};\ x、\ t、\ z)$，但现在将$\tau_{\underline{\alpha}}$替换为$\tau_{\underline{\alpha},\ 0}$。在这种情况下，我们还具有一个（$2s+1$）×（$r-1$）-矩阵 $W^{\pm}(\underline{\alpha}、\ x、\ t、\ z)$，其定义如（4.26）所示，以及（$2s+1$）×1-矩阵 $T^{\pm(j+\delta)}(\underline{\alpha}、\ x、\ t、\ z)$，其定义如（7.36）、（7.37）所示，只是不取$t_j^{s+r}=0$，并且

$$\begin{aligned}T^{\pm(j+\delta)}(\underline{\alpha};x,t)_{2s+1}=&\sqrt{-1}\frac{(-1)^{|\underline{\alpha}|}}{\tau_{\underline{\alpha},\overline{0}}(x,t,0)}\frac{\partial\tau_{\underline{\alpha},\overline{1}}(x,t,\xi)}{\partial\xi_{j+\delta}}\Big|_{\xi,t^{(s<a<s+r)}=0},\\T^{\pm0}(\underline{\alpha};x,t)_{2s+1}=&\frac{(-1)^{|\underline{\alpha}|}\tau_{\underline{\alpha},\overline{0}}(x,t,0)}{\sqrt{2}\tau_{\underline{\alpha},\overline{0}}(x,t,0)}\Big|_{t^{(s<a<s+r)}=0},\quad\text{only for }\delta=0.\end{aligned}\tag{7.40}$$

这与 BKP 层级约化的第二种方法相似（参见小节 4.4）。我们得到关于 $p=0$的以下方程，它类似于方程 (4.44)：

$$\begin{aligned}&\left(P^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)R^+(\underline{\alpha}-\underline{\beta},\partial)J(\partial)P^-(\underline{\beta};x,t,\partial)^*\right)_-=\\&\frac{1}{2}W^+(\underline{\alpha};x,t)^0\partial^{-1}W^-(\underline{\beta};x,t)^{0t}+(1+2\delta)T^{+0}(\alpha;x,t)\partial^{-1}T^{-0}(\beta;x,t)^t.\end{aligned}\tag{7.41}$$

现在取$\underline{\alpha}=\underline{\beta}$。同样，右侧等于

$$\frac{1}{2}P^+(\underline{\alpha};x,t)^0E_{2s+1,2s+1}\partial^{-1}P^-(\underline{\alpha};x,t)^{0t},$$

这就得到方程 (4.46)。因此，我们可以完全按照小节 4.4 中 BKP 层级第二种方法的处理方式继续推导，详情请参阅该小节。

对于 $p=1$ 和 $\underline{\alpha}=\underline{\beta}$，我们得到

$$\begin{aligned}\left(P^+(\underline{\alpha};x,t,\partial)J_1(\partial)P^-(\underline{\alpha};x,t,\partial)^*\right)_-=&\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{r-1}\sum_{j=0}^{2\mu_a}W^+(\underline{\alpha};x,t)^jE_{aa}\partial^{-1}\left(W^-(\underline{\alpha};x,t)^{2\mu_a-j}\right)^t\\&+(1+2\delta)(T^{+0}(\alpha;x,t)\partial^{-1}T^{-1}(\alpha;x,t)^t+T^{+1}(\alpha;x,t)\partial^{-1}T^0(\alpha;x,t)^t)\\&-2\delta T^{+\frac{1}{2}}(\alpha;x,t)\partial^{-1}T^{-\frac{1}{2}}(\alpha;x,t)^t,\end{aligned}\tag{7.42}$$

其中，$J_1(\partial)$ 由（7.22）给出。注意，$J(\partial)=J_0(\partial)$。

像之前一样定义 $\hat{W}^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t,z)\ =(P^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t,z)^0)^{-1}W^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t,z)$，并定义 $\hat{T}^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t,z)\ =(P^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t,z)^0)^{-1}T^{\pm}(\underline{\alpha};\ x,t,z)$，则（ 7.42 ）给出

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{P}^{+}(\underline{\alpha};x,t,\partial)J_k(\partial)J(\partial)^{-1}\hat{P}^{-}(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{-1}\right)_{<}= \\
&\quad\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{r-1}\sum_{j=0}^{2\mu_a}\hat{W}^{+}(\underline{\alpha};x,t)^j E_{aa}\partial^{-1}\left(\hat{W}^{-}(\underline{\alpha};x,t)^{2\mu_a-j}\right)^t J(\partial)^{-1} \\
&\quad+(1+2\delta)(\hat{T}^{+0}(\alpha;x,t)\partial^{-1}\hat{T}^{-1}(\alpha;x,t)^t+\hat{T}^{+1}(\alpha;x,t)\partial^{-1}\hat{T}^{0}(\alpha;x,t)^t)J(\partial)^{-1} \\
&\qquad-2\delta\hat{T}^{+\frac{1}{2}}(\alpha;x,t)\partial^{-1}\hat{T}^{-\frac{1}{2}}(\alpha;x,t)^t J(\partial)^{-1}.
\end{aligned}\tag{7.43}$$

定义

$$\mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t,\partial)=L(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{2\mu_r}D^{s+r}(\underline{\alpha};x,t,\partial)+\sum_{a=1}^{s}L(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{\lambda_a}E^a(\underline{\alpha};x,t,\partial),\tag{7.44}$$

那么显然， $\mathcal{L}$ 满足与 L 相同的 Lax 方程，即 (4.55) 和

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t,\partial)=\mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t,\partial)_{\geq}&+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{r-1}\sum_{j=0}^{2\mu_a}\hat{W}^{+}(\underline{\alpha};x,t)^j E_{aa}\partial^{-1}\left(\hat{W}^{-}(\underline{\alpha};\overline{x},\overline{t})^{2\mu_a-j}\right)^t J(\partial)^{-1} \\
&+(1+2\delta)(\hat{T}^{+0}(\alpha;x,t)\partial^{-1}\hat{T}^{-1}(\alpha;x,t)^t+\hat{T}^{+1}(\alpha;x,t)\partial^{-1}\hat{T}^{0}(\alpha;x,t)^t)J(\partial)^{-1} \\
&-2\delta\hat{T}^{+\frac{1}{2}}(\alpha;x,t)\partial^{-1}\hat{T}^{-\frac{1}{2}}(\alpha;x,t)^t J(\partial)^{-1}.
\end{aligned}\tag{7.45}$$

7.4 $\hat{so}_{2n+1}$ 与 (λ,μ)-约化 BKP 层级

$\hat{}$群 SO_{2n+1} 使模 F_b 保持不变。在这种情况下，可得 τ满足 (7.25) 的第一个方程，参见第 7.3 节。用与 (λ,μ) 相关的费米子表示，即为

$$\begin{aligned}
&\sum_{b=1}^{s}\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\left(\psi_i^{+b}\tau\otimes\psi_{p\lambda_b-i}^{-b}\tau+\psi_i^{-b}\tau\otimes\psi_{p\lambda_b-i}^{+b}\tau\right)+\sum_{c=s+1}^{r+s}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\tilde{\phi}_i^c\tau\otimes\tilde{\phi}_{2p\mu_c-i}^c\tau+ \\
&\qquad+\sum_{j\in\delta+\mathbb{Z}}\sigma_j\tau\otimes\sigma_{p-j}\tau=\frac{\delta_{p0}}{2}\tau\otimes\tau.
\end{aligned}\tag{7.46}$$

关于 δ 的取值，参见 (5.44) 下方的两种可能情况。同样，我们有与 (7.27) 中类似的 ψ、$\tilde{\phi}_j^R$ 和 σ_k 之间的关系，其中 R 仍等于 $R=r+1$，但现在第一种情况对应 $r=2r'$，后一种情况对应 $r=2r'-1$。因此，对于 $p=0$，这个方程与 BKP 方程 (4.4) 或 (4.5) 相同。我们可以改写为

利用费米子场得到（7.46）：

$$\mathrm{Res}_{z=0}\Big\{\sum_{b=1}^{s} z^{p\lambda_b}\left(\psi^{+b}(z)\tau\otimes\psi^{-b}(z)\tau+\psi^{-b}(z)\tau\otimes\psi^{+b}(z)\tau\right)+$$
$$+\sum_{c=s+1}^{r+s} z^{2p\mu_c-1}\tilde{\phi}^{c}(z)\tau\otimes\tilde{\phi}^{c}(-z)\tau+z^{p-1-2\delta}\sigma(z)\tau\otimes\sigma(z)\tau\Big\}dz=\frac{\delta_{p0}}{2}\tau\otimes\tau. \tag{7.47}$$

我们写作

$$\sigma(T)=\sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^s,\underline{\ell}\in\mathbb{Z}_2^{r'}} q^{\underline{k}}\theta^{\underline{\ell}}\tau_{\underline{k},\underline{\ell}}(t,\xi),$$

其中 $q^{\underline{k}}=q_1^{k_1}q_2^{k_2}\cdots q_s^{k_s}$，$\theta^{\underline{\ell}}=\theta_1^{\ell_1}\theta_2^{\ell_2}\cdots\theta_{r'}^{\ell_{r'}}$。令 $N_\xi(f(t)\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_p})=p$，则（7.47）在 b_∞ 中的嵌入——它是权为 Λ_n 的最高权模——转化为以下方程（$p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$）

$$\mathrm{Res}_{z=0}\Big(\sum_{b=1}^{s}\big((-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|_{b-1}}z^{p\lambda_b+k_b-\overline{k}_b-2+2\delta_{bs}}e^{z\cdot(t^{(b)}-\overline{t}^{(b)})}e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(b)}}-\tilde{\partial}_{t^{(b)}})}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s-\underline{e}_b,\underline{\ell},\alpha}(t,\xi)\tau_{\overline{\underline{k}}+\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}},\overline{\alpha}}(\overline{t},\overline{\xi})+$$
$$+(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|_{b-1}}z^{p\lambda_b-k_b+\overline{k}_b-2-2\delta_{bs}}e^{(-z)\cdot(t^{(b)}-\overline{t}^{(b)})}e^{(-z)^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{t^{(b)}}-\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(b)}})}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s+\underline{e}_b,\underline{\ell},\alpha}(t,\xi)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}},\overline{\alpha}}(\overline{t},\overline{\xi})+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{c=1}^{r'}(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|+|\underline{\ell}+\overline{\underline{\ell}}|\left[\frac{c-1}{2}\right]+(c-1)(\ell_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}+\overline{\ell}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]}+1)}z^{2p\mu_c-1}e^{z\circ(t^{(s+c)}-\overline{t}^{(s+c)})}\times$$
$$e^{2(z^{-1}\circ(\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(s+c)}}-\tilde{\partial}_{t^{(s+c)}}))}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}+\underline{e}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]},\alpha}(t,\xi)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}+\underline{e}_{\left[\frac{c+1}{2}\right]},\overline{\alpha}}(\overline{t},\overline{\xi})$$
$$-\delta(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|+|\underline{\ell}+\overline{\underline{\ell}}|+N_\xi+N_{\overline{\xi}}}z^{2p\mu_r-1}e^{z\circ(t^{(s+r)}-\overline{t}^{(s+r)})}\times$$
$$e^{2(z^{-1}\circ(\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(s+c)}}-\tilde{\partial}_{t^{(s+c)}}))}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}}(t,\xi)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t},\overline{\xi})\big)dz$$
$$+(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|+|\underline{\ell}+\overline{\underline{\ell}}|}\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\xi_{j+\delta}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}}(t,\xi)\frac{\partial\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t},\overline{\xi})}{\partial\overline{\xi}_{j+p+\delta}}+\frac{\partial\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}}(t,\xi)}{\partial\xi_{j+\delta}}\overline{\xi}_{j+p+\delta}\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t},\overline{\xi})$$
$$+\sum_{j=1}^{p-1-2\delta}\frac{\partial\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}}(t,\xi)}{\partial\xi_{j+\delta}}\frac{\partial\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t},\overline{\xi})}{\partial\overline{\xi}_{p-j-\delta}}$$
$$+(1-\delta_{p0})\frac{1+2\delta}{\sqrt{2}}\big((-1)^{N_\xi}\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}}(t,\xi)\frac{\partial\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t},\overline{\xi})}{\partial\overline{\xi}_p}$$
$$+(-1)^{N_{\overline{\xi}}}\frac{\partial\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}}(t,\xi)}{\partial\xi_p}\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t},\overline{\xi})\big)\Big\}=$$
$$=\delta_{p0}[\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}+\delta)(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|+|\underline{\ell}+\overline{\underline{\ell}}|+N_\xi+N_{\overline{\xi}}}]\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s,\underline{\ell}}(t,\xi)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}}}(\overline{t},\overline{\xi}). \tag{7.48}$$

现在我们将（λ,μ）-约化 BKP 层级转化为伪微分算子层级。同样，我们将考虑若干种情形。

情形1, $\mu=\emptyset$. 因此 $r=0$。我们将所有 Grass 代入方程 (7.48) 中 -

曼宁变量 $\xi_j = 0$。于是，(7.48) 的第一个方程，其中 $\delta = 0$ 和 $r = r' = 0$ 等于 ($p = 0, 1, 2, \ldots$)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{z=0} \sum_{b=1}^{s} \big((-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|_{b-1}} z^{p\lambda_b + k_b - \overline{k}_b - 2 + 2\delta_{bs}} e^{z\cdot(t^{(b)} - \overline{t}^{(b)})} e^{z^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(b)}} - \tilde{\partial}_{t^{(b)}})} \tau_{\underline{k}+\underline{e}_s-\underline{e}_b,\underline{\ell},\alpha}(t,0)\tau_{\overline{\underline{k}}+\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}},\overline{\alpha}}(\overline{t},0) + \\
&+ (-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|_{b-1}} z^{p\lambda_b - k_b + \overline{k}_b - 2 - 2\delta_{bs}} e^{(-z)\cdot(t^{(b)} - \overline{t}^{(b)})} e^{(-z)^{-1}\cdot(\tilde{\partial}_{t^{(b)}} - t\tilde{\partial}_{\overline{t}^{(b)}})} \tau_{\underline{k}+\underline{e}_s+\underline{e}_b,\underline{\ell},\alpha}(t,0)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_b-\underline{e}_s,\overline{\underline{\ell}},\overline{\alpha}}(\overline{t},0)\big) dz \\
&= -(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|} \Big\{ \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial \tau_{\underline{k}+\underline{e}_s}(t,\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi=0} \frac{\partial \tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s}(\overline{t},\overline{\xi})}{\partial \overline{\xi}_{p-j}}\Big|_{\overline{\xi}=0} \\
&\quad + (1-\delta_{p0})\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s}(t,0)\frac{\partial \tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s}(\overline{t},\overline{\xi})}{\partial \overline{\xi}_p}\Big|_{\overline{\xi}=0} + \frac{\partial \tau_{\underline{k}+\underline{e}_s}(t,\xi)}{\partial \xi_p}\Big|_{\xi=0} \tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s}(\overline{t},0)\Big)\Big\} \\
&\quad + \delta_{p0}[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^{|\underline{k}+\overline{\underline{k}}|}]\tau_{\underline{k}+\underline{e}_s}(t,0)\tau_{\overline{\underline{k}}-\underline{e}_s}(\overline{t},0).
\end{aligned}
\tag{7.49}
$$

和之前一样，将所有 t_1^a 替换为 $t_1^a + x$，并像之前一样定义 $V^{\pm}(\underline{\alpha};\, x, t, z)$，再将列向量 $T^{\pm j}(\underline{\alpha};\, x, t) = (W^{\pm j}(\underline{\alpha};\, x, t)_i)_{1\le i\le 2s}$ 再次定义为 (7.36) 和 (7.37)。注意，(7.33) 仍然成立。于是

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{z=0} \sum_{j=1}^{s} V^{+}(\underline{\alpha}; x, t, z)\left(z^{p\lambda_j} E_{jj} - (-z)^{p\lambda_j} E_{s+j,s+j}\right) V^{-}(\underline{\beta}; \overline{x}, \overline{t}, z)^t dz = \\
&\qquad = -T^{+0}(\underline{\alpha}; x, t) T^{-0}(\underline{\beta}; \overline{x}, \overline{t})^t + \sum_{j=0}^{p} T^{+j}(\underline{\alpha}; x, t) T^{-(p-j)}(\underline{\beta}; \overline{x}, \overline{t})^t.
\end{aligned}
\tag{7.50}
$$

令 $\partial = \partial_x$，并利用基本引理（见 [15], 引理 4.1），我们可推出矩阵伪微分算子的以下表达式

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{s} (P^{+}(\underline{\alpha}; x, t, \partial) R^{+}(\underline{\alpha}; \partial)\left(\partial^{p\lambda_j} E_{jj} - (-\partial)^{p\lambda_j} E_{s+j,s+j}\right) R^{-}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^* P^{-}(\underline{\beta}; x, t, \partial)^*)_{-} = \\
&\quad - T^{+0}(\underline{\alpha}; x, t)\partial T^{-0}(\underline{\beta}; x, t)^t J \; + \sum_{j=0}^{p} T^{+j}(\underline{\alpha}; x, t)\partial T^{-(p-j)}(\underline{\beta}; x, t)^t J.
\end{aligned}
\tag{7.51}
$$

与上一节一样，若我们取 $p = 0$ 和 $\underline{\alpha} = \underline{\beta}$ 以及 $J = \sum_{j=1}^{s} E_{jj} - E_{s+j,s+j} = J^{-1}$，便再次得到 (4.33)。然而，取 $p \neq 0$，则有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{s} (P^{+}(\underline{\alpha}; x, t, \partial)\left(\partial^{p\lambda_j} E_{jj} + (-\partial)^{p\lambda_j} E_{s+j,s+j}\right) P^{+}(\underline{\alpha}; x, t, \partial)^{-1})_{-} = \\
&\qquad \sum_{k=0}^{p} T^{+k}(\underline{\alpha}; x, t)\partial^{-1} T^{-(p-k)}(\underline{\alpha}; x, t)^t J.
\end{aligned}
\tag{7.52}
$$

由（7.35）可得

$$
\sum_{j=1}^{s} (L^{p\lambda_j} E^j)_{-} = \sum_{k=0}^{p} T^{+k}(\underline{\alpha}; x, t)\partial^{-1} T^{-(p-k)}(\underline{\alpha}; x, t)^t J. \tag{7.53}
$$

Fr由此显然， $\mathcal{L}=\sum_{j=1}^{s}L^{\lambda_j}E^j$ 的积分部分等于 to

$$\mathcal{L}_-=T^{+0}(\underline{\alpha};x,t)\partial^{-1}T^{-1}(\underline{\alpha};x,t)^tJ+T^{+1}(\underline{\alpha};x,t)\partial^{-1}T^{-0}(\underline{\alpha};x,t)^tJ. \tag{7.54}$$

如前所述，

$$\mathcal{L}^*=K\mathcal{L}K^{-1}.$$

再次得到

$$\frac{\partial T^{+k}}{\partial t_i^j}=\left(L^iD^j\right)_+\left(T^{+k}\right),\quad \frac{\partial T^{-k}J}{\partial t_i^j}=-\left(L^iD^j\right)_+^*\left(T^{-k}J\right),\quad \text{for } k=0,1. \tag{7.55}$$

因此，对于 $k=0$， W^{+k}（分别为 $W^{-k}J$）是算子 L 和 D^j、 $j=1$、2、...、 s 的特征函数（分别为伴随算子特征函数）。这是由下式得到的

$$\frac{\partial W^{+0}}{\partial t_i^j}\partial^{-1}W^{-1t}+\frac{\partial W^{+1}}{\partial t_i^j}\partial^{-1}W^{-0t}=\left(L^iD^j\right)_+(W^{+0})\partial^{-1}W^{-1t}+\left(L^iD^j\right)_+(W^{+1})\partial^{-1}W^{-0t}.$$

也就是说，我们可以令该方程的矩阵作用于变量 t 的某个特定函数向量，从而消去两个项中的一个。这样便得到（7.55）的第一个方程。（7.55）的第二个公式以类似方式得到。

情形 2， $\mu\neq\emptyset$ **（第一种方法）**。此情形类似于将 $\mu\neq\emptyset$（第一种方法）嵌入 d_∞ 的情形。唯一的区别在于 δ 的取值。如果 r 为偶数（分别为奇数），那么在 DKP 层级的约化中， $\delta=-\frac{1}{2}$ （分别为 $\delta=0$）；而在此情形下，对于 BKP 层级的约化，当 r 为偶数（分别为奇数）时，则为 $\delta=0$（分别为 $\delta=-\frac{1}{2}$）。

情形 3， $\mu\neq\emptyset$ **（第二种方法）**。这里注 7.3 同样成立。此情形类似于在 d_∞ 中嵌入的 $\mu\neq\emptyset$（第二种方法）情形。然而在此情形中，当 r 为偶数（分别为奇数）时， $\delta=0$（分别为 $\delta=-\frac{1}{2}$）。同样，由（7.44）给出的 $\mathcal{L}$ 等于（7.45），并满足与 L 相同的 Lax 方程，即（4.55）。

7.5 ˆsp_{2n} 及 （λ， μ）-约化 CKP 层级

ˆ群 SP_{2n}作用于 F_c，并保持模 $F_c^{\overline{a}}$不变。它由所有满足 $gb_jg^{-1}=\sum_i a_{ij}b_i$ 的元素 $g\in C_\infty$构成，其中 $\sum_k(-1)^{k-\frac{1}{2}}a_{ki}a_{-k,\ j}=$

$(-1)^{i-\frac{1}{2}}\delta_{i,-j}$,hence $\sum_k(-1)^{k+\frac{1}{2}}a_{ik}a_{j,-k}=(-1)^{i+\frac{1}{2}}\delta_{i,-j}$, and $a_{i+2n,j+2n}=a_{ij}$. Then

$$\begin{aligned}(g\otimes g)\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}(-1)^{i+\frac{1}{2}}b_i\otimes b_{p(2n)-i} &= \sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}(-1)^{i+\frac{1}{2}}gb_ig^{-1}g\otimes gb_{p(2n+1)-i}g^{-1}g\\ &= \sum_{i,j,k\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}(-1)^{i+\frac{1}{2}}a_{ji}a_{k,p(2n+1)-i}b_jg\otimes b_kg\\ &= \sum_{i,j,k\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}(-1)^{i+\frac{1}{2}}a_{ji}a_{k-p(2n+1),-i}b_jg\otimes b_kg\\ &= \sum_{j\in\delta+\mathbb{Z}}(-1)^{j+\frac{1}{2}}b_jg\otimes b_{p(2n+1)-j}g\\ &= \sum_{j\in\delta+\mathbb{Z}}(-1)^{j+\frac{1}{2}}b_j\otimes b_{p(2n+1)-j}(g\otimes g).\end{aligned}$$

由于 $\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}(-1)^{i+\frac{1}{2}}b_i|0\rangle\otimes b_{p(2n)-i}|0\rangle=0$，我们得到

$$\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}(-1)^{i+\frac{1}{2}}b_i\tau_0\otimes b_{p(2n)-i}\tau_0=0,\quad p=0,1,2,\dots \tag{7.56}$$

以类似的方式，我们推导出

$$\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}(-1)^{i+\frac{1}{2}}b_i\tau_1\otimes b_{p(2n)-i}\tau_1=0,\quad p=1,2,\dots,\quad \text{and } S_c^2(\tau_1\otimes\tau_1)=-4T_1\otimes T_1.$$

用 (λ,μ) 表示时，方程 (7.56) 变为

$$\sum_{a=1}^{s}\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}\left(b_i^{-a}\tau_0\otimes b_{p\lambda_a-i}^{+a}\tau_0-b_i^{+a}\tau_0\otimes b_{p\lambda_a-i}^{-a}\tau_0\right)+\sum_{c=s+1}^{r+s}\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}(-1)^{i+\frac{1}{2}}b_i^c\tau_0\otimes b_{2p\mu_{c-s}-i}^c\tau_0=0. \tag{7.57}$$

用玻色子场表示，这是

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0}\Big\{\sum_{a=1}^{s}z^{p\lambda_a}&\left(b^{-a}(z)\tau_0\otimes b^{+a}(z)\tau_0-b^{+a}(z)\tau_0\otimes b^{-a}(z)\tau_0\right)+\\ &+\sum_{c=s+1}^{r+s}z^{2p\mu_{c-s}}b^c(z)\tau_0\otimes b^c(-z)\tau_0\Big\}dz=0.\end{aligned} \tag{7.58}$$

我们可以将 (7.57) 改写为针对在 (4.61) ($p=0,1,\dots$) 中引入的波函数

$$\mathrm{Res}_{z=0}V(x,t,z)\left(\sum_{a=1}^{s}\left(z^{p\lambda_a}E_{aa}+(-z)^{p\lambda_a}E_{s+a,s+a}\right)+\sum_{i=1}^{r}z^{2p\mu_i}E_{2s+i,2s+i}\right)V(\overline{x},\overline{t},-z)^tdz=0. \tag{7.59}$$

关于 $p=1$ 的这个方程等价于这样一个事实:

$$\mathcal{L}:=\sum_{a=1}^{s}L^{\lambda^a}E^a+\sum_{i=1}^{r}L^{2\mu_i}C^{2s+i}=(\mathcal{L})_+. \tag{7.60}$$

此 $\mathcal{L}$也满足 Lax 方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_k^a} = [(L^k D^a)_+, \mathcal{L}], \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_k^c} = [(L^k C^{s+c})_+, \mathcal{L}], \quad a = 1, \dots s,\ c = s+1, \dots, s+r.$$

利用 (7.60)、(4.63)、(4.66) 和 (4.68)，我们得到

$$\mathcal{L}^* = (N+I)\mathcal{L}(N+I).$$

8 与 x_∞ 和 $\hat{\mathfrak{g}}^{(2)}$ 约化相关的 KP 型层级体系

对应于 $\hat{gl}_n^{(2)}$ （分别为$\hat{so}_{2n}^{(2)}$）的李群是保持 $\mathbb{C}[t,t^{-1}]^n$ （分别为 $\mathbb{C}[t,t^{-1}]^{2n}$）上的双线性形式的扭曲环群 $\hat{GL}_n^{(2)}$ （分别为 $\hat{SO}_{2n}^{(2)}$）：

$$(\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t)) = \operatorname{Res} \mathbf{v}(-t)^t J_n \mathbf{w}(t) \frac{dt}{t}, \quad (\text{resp. } (\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t)) = \operatorname{Res} \mathbf{v}(-t)^t J_{2n} O \mathbf{w}(t) \frac{dt}{t}).$$

因此，元素 $G(t) \in \hat{GL}_n^{(2)}$ （分别地， $G(t) \in \hat{SO}_{2n}^{(2)}$ ）满足

$$J_n G(-t)^t J_n G(t) = I_n, \quad (\text{resp. } O J_{2n} G(-t)^t J_{2n} O G(t) = I_{2n}).$$

Date、Jimbo、Kashiwara 和 Miwa 在 [5], 中通过嵌入 $\hat{\mathfrak{g}}^{(2)} \subset d_\infty$ 或 b_∞ 得到了所谓的约化 DKP（在 [5] 中，该层级对应于 2 分量 BKP）和 BKP 层级。这意味着，在单分量情形下，还会得到额外的方程。

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \sigma^k(\tilde{\phi}_i)\tau \otimes \tilde{\phi}_{kP-i}\tau = 0, \quad (\text{resp. } \sum_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{\phi}_i\tau \otimes \tilde{\phi}_{kP-i}\tau = 0), \quad k = 1, 2, \dots \tag{8.1}$$

在BKP 情形下，对于$\hat{gl}_{2m+1}^{(2)}$（分别为 $\hat{so}_{2m}^{(2)}$），取 $P = 2m+1$ （分别为 $P = 2m$），以及

$$\sum_{i\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \sigma^k(\phi_i)\tau_a \otimes \phi_{2km-i}\tau_a = 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{8.2}$$

在$\hat{gl}_{2m}^{(2)}$ 的DKP情形下。对于$\hat{so}_{2n}^{(2)}$ 的情形，这一点是显然的。由于与 $\hat{so}_{2n}^{(2)}$ 对应的b_∞ 中的矩阵是 $2n$ 周期性的，因此可以使用与非扭曲情形相同的证明。对于 $\hat{gl}_n^{(2)}$ ，可以使用以下观察。

我们考虑 $\hat{GL}_{2m}^{(2)}$。该群保持模 $F_d^{\overline{a}}$不变。它由所有满足 $g\phi_i g^{-1} = \sum_i a_{ji}\phi_j$ 的元素 $g \in D_\infty$ 组成，其中 $\sum_k a_{ki}a_{-k,\ j} = \delta_{i,\ -j}$，因此$\sum_k a_{ik}a_{j,\ -k} = \delta_{i,\ -j}$，且 $a_{i+2pm,\ j+2pm} = J^p a_{ij} J^p = \sigma_i^p \sigma_j^p a_{ij}$。回顾备注 3.2

其中 $\sigma_i = \sigma_{-i}$。因此，对于 $p = 1$、2、.....，我们得到

$$\begin{aligned}(g\otimes g)\sum_{i\in\frac12+\mathbb{Z}} J^p\phi_i\otimes\phi_{2pm-i} &= \sum_{i\in\frac12+\mathbb{Z}}\sigma_i^p g\phi_i g^{-1}g\otimes g\phi_{2pm-i}g^{-1}g\\ &= \sum_{i,j,k\in\frac12+\mathbb{Z}}\sigma_i^p a_{ji}a_{k,2pm-i}\phi_j g\otimes\phi_k g\\ &= \sum_{i,j,k\in\frac12+\mathbb{Z}}\sigma_i^p\sigma_{k-2pm}^p\sigma_{-i}^p a_{ji}a_{k-2pm,-i}\phi_j g\otimes\phi_k g\\ &= \sum_{i,j,k\in\frac12+\mathbb{Z}}\sigma_{k-2pm}^p a_{ji}a_{k-2pm,-i}\phi_j g\otimes\phi_k g\\ &= \sum_{j\in\frac12+\mathbb{Z}}\sigma_j^p\phi_j g\otimes\phi_{2pm-j}g\\ &= \sum_{j\in\frac12+\mathbb{Z}} J^p\phi_j\otimes\phi_{2pm-j}(g\otimes g).\end{aligned}$$

由于也

$$\sum_{i\in\frac12+\mathbb{Z}} J^p\phi_i|\overline{a}\rangle\otimes\phi_{2pm-i}|\overline{a}\rangle = 0,$$

我们有，属于 $GL_{2m}^{(2)}$ 群轨道 $|\overline{a}\rangle$ 的元素 $\tau_a\in F_d^{\overline{a}}$ 满足

$$\sum_{i\in\frac12+\mathbb{Z}} J^p\phi_i\tau_a\otimes\phi_{2pm-i}\tau_a = 0,\quad \text{for } p = 0,1,2,\dots.$$

最后，让 $J^p\otimes 1$ 作用于此方程，得到 (8.1)。以类似的方式，我们发现，属于 $|0\rangle$ 的 $\tau\in F_b$，其位于 $GL_{2m+1}^{(2)}$ 群轨道（分别为 $SO_{2n}^{(2)}$ 群轨道）中，满足 (4.3) 和 (8.1) 的第一条方程（分别为第二条方程）。

8.1 $\hat{}gl_{2m}^{(2)}$ 与 (λ,μ)-约化 DKP 层级

在这种情况下，我们假设 $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s)$，其中所有部分 $\lambda_i = 2\ell_i$ 均为偶数；并且 $\mu = (\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_r)$，其中所有部分 $\mu_i = 2m_i+1$ 均为奇数，从而 $|\lambda|+|\mu| = 2m$。这意味着 r 只能是偶数。将方程 (4.6) 和 (8.2) 转换为 (r,s) 多分量描述，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0}\Big\{\sum_{b=1}^{s} z^{k\ell_b}\left(\psi^{+b}(z)\tau_a\otimes\psi^{-b}(z)\tau_a+\psi^{-b}(z)\tau_a\otimes\psi^{+b}(z)\tau_a\right)+\\ +\frac{1}{z}\sum_{c=s+1}^{2R+s} z^{(2m_{c-s}+1)k}\tilde{\phi}^c(z)\tau_a\otimes\tilde{\phi}^c(-z)\tau_a\Big\}dz = 0,\quad k = 0,1,\dots.\end{aligned}\tag{8.3}$$

这类似于 DKP层级的 $\hat{}so_{2n}$ 约化（7.15）。然而，在这种情况下，中性扭曲场前面的因子 $z^{(2m_{c-s}+1)k}$ 含有 z 的奇数次幂，

而在$\hat{}so_{2n}$-情形下，这个幂总是偶数。这意味着可以采用与第7.2小节相同的方法，不过此时将所有的 λ_b 和 μ_i 分别替换为 ℓ_b 和 $\frac{2m_{c-s}+1}{2}$。关于波函数和 Lax 算子的构造，请参阅该小节。

在 **DKP 层级的第一种方法**中，我们发现算子

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t) &= \sum_{b=1}^{s} L(\underline{\alpha};x,t)^{\ell_b} E^b(\underline{\alpha};x,t) \\ &= \mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t)_+ + \frac{1}{2}\sum_{c=s+1}^{s+r}\sum_{n=0}^{2m_{c-s}+1} W^+(\underline{\alpha};x,t)^n E_{c-s,c-s}\partial^{-1}\left(JW^-(\underline{\alpha};x,t)^{2m_{c-s}-n+1}\right)^t,\end{aligned}$$

满足 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t^a_j} = [(L^jD^a)_+,\mathcal{L}]$。

在**DKP 层级的第二种方法**中，同样有注 7.3 成立，我们发现

$$\mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t,\partial) = L(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{m_r} D^{s+r}(\underline{\alpha};x,t,\partial) + \sum_{b=1}^{s} L(\underline{\alpha};x,t,\partial)^{\ell_b} E^b(\underline{\alpha};x,t,\partial),$$

满足与 L 相同的 Lax 方程，即 (4.55)，并且

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t,\partial) &= \mathcal{L}(\underline{\alpha};x,t,\partial)_{\geq} + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{c=s+1}^{s+r-1}\sum_{j=0}^{2m_{c-s}+1} \hat{W}^+(\underline{\alpha};x,t)^j E_{c-s,c-s}\partial^{-1}\left(\hat{W}^-(\underline{\alpha};x,t)^{2m_{c-s}-j+1}\right)^t J(\partial)^{-1}.\end{aligned}$$

8.2 $\hat{}gl^{(2)}_{2m+1}$ 和 $\hat{}so^{(2)}_{2n}$ 以及(λ,μ)-约化 BKP 层级

对于 $\hat{}gl^{(2)}_{2m+1}$（分别对于 $\hat{}so^{(2)}_{2n}$），我们假设 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s)$，其中所有部分 $\lambda_i=2\ell_i$ 均为偶数，并且 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_r)$，其中所有部分 $\mu_i=2m_i+1$ 均为奇数（分别为偶数），使得 $|\lambda|+|\mu|=2m+1$（分别为 $|\lambda|+|\mu|=n$ 且 $r=2R+1$ 为奇数）。这意味着在 $\hat{}gl^{(2)}_{2m+1}$ 中，r 只能是 $r=2R+1$ 奇数。

将方程 (4.3) 和 (8.1) 转换为 (r,s) 多分量描述后，我们得到 $\hat{}gl^{(2)}_{2m+1}$ 和 $\hat{}so^{(2)}_{2n}$：

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0}\Big\{&\sum_{b=1}^{s} z^{pn_b}\left(\psi^{+b}(z)\tau\otimes\psi^{-b}(z)\tau+\psi^{-b}(z)\tau\otimes\psi^{+b}(z)\tau\right)+ \\ &+\frac{1}{z}\sum_{c=s+1}^{2R+s+1} z^{pn_c}\tilde{\phi}^c(z)\tau\otimes\tilde{\phi}^c(-z)\tau\Big\}dz=\frac{\delta_{p,0}}{2}\tau\otimes\tau,\quad p=0,1,\dots,\end{aligned} \tag{8.4}$$

其中，对于$\hat{}gl^{(2)}_{2m+1}$，有 $n_b=\ell_b$ 和 $n_c=2m_{c-s}+1$；对于$\hat{}so^{(2)}_{2n}$，有 $n_b=\lambda_b$ 和 $n_c=2\mu_{c-s}$，且有 $1\leq b\leq s<c\leq r+s$。这个方程类似于（7.47），即BKP层级的 $\hat{}so_{2n+1}$约化，然而在此情况下，我们有 z的奇次幂，而在

在中性扭曲场前面，即我们有 $z^{(2m_{c-s}+1)k}$，对于$\hat{}gl^{(2)}_{2m+1}$，而在$\hat{}so_{2n+1}$ 情况下，这些幂是偶数。在 $\hat{}so^{(2)}_{2n}$ 情况下，这也类似于 BKP层级的 $\hat{}so_{2n+1}$约化。然而，在这种情况下，中性扭曲场只能有奇数个。

注 8.1 自同构 $\mathrm{Ad}\, O$ 定义了扭曲李代数 $\hat{}so^{(2)}_{2n}$，其不动点为李代数 so_{2n-1}。因此，$\hat{}so_{2n-1}$ 作为子代数包含在$\hat{}so^{(2)}_{2n}$ 中，即

$$\mathbb{C}K \oplus \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} t^{2j} so_{2n-1}.$$

事实上，方程 *(8.4)* 与约化 *BKP* 方程的描述相同，只不过这里约化到 $\hat{}so_{2n-1}$，其中有 s 对带电费米子场和 $2R$ 个中性扭曲费米子场。在这种情况下还需要额外的场 $\sigma(z)$，它与 $\tilde{\phi}^{2R+1}(z)$成正比。然而，对于 $\hat{}so_{2n-1}$，对应于 $\sigma(z)$ 的海森堡代数并不包含在 $\hat{}so_{2n-1}$ 中。现在这并无妨碍，因为 $\alpha^{2R+1}(z) = \frac{1}{2} :\tilde{\phi}^{2R+1}(z)\tilde{\phi}^{2R+1}(-z):$ 的模属于 $\hat{}so^{(2)}_{2n}$，它们对应于元素 $t^{2k+1}(e_{nn} - e_{nn})$。

我们再次得到小节4.4中BKP 层级的两种情形。然而，由于r 在两种情形中都是奇数，情形 $\mu = \emptyset$ 不成立。

在 **BKP层级的第一种方法中**，我们发现算子 $\mathcal{L} = \sum_{b=1}^{s} L^{n_b} E^b$满足 Lax 方程 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t^b_j} = [(L^j D^b)_+, \mathcal{L}]$并且等于

$$\mathcal{L}(\underline{\alpha}; x, t) = \mathcal{L}(\underline{\alpha}; x, t)_+ + \frac{1}{2} \sum_{c=s+1}^{s+2R+1} \sum_{j=0}^{n_c} W^+(\underline{\alpha}; x, t)^j E_{c-s,c-s} \partial^{-1} \left(J W^-(\underline{\alpha}; x, t)^{n_c - j} \right)^t .$$

在**BKP 层级的第二种方法**中，此处注 7.3 再次成立，我们发现算子等于

$$\mathcal{L}(\underline{\alpha}; x, t, \partial) = L(\underline{\alpha}; x, t, \partial)^{n_{s+2R+1}} D^{s+2R+1}(\underline{\alpha}; x, t, \partial) + \sum_{b=1}^{s} L(\underline{\alpha}; x, t, \partial)^{n_b} E^b(\underline{\alpha}; x, t, \partial),$$

那么显然，$\mathcal{L}$ 满足与 L相同的 Lax 方程，即（4.55），并且

$$\mathcal{L}(\underline{\alpha}; x, t, \partial) = \mathcal{L}(\underline{\alpha}; x, t, \partial)_{\geq} + \frac{1}{2} \sum_{c=s+1}^{s+2R} \sum_{j=0}^{n_c} \hat{W}^+(\underline{\alpha}; x, t)^j E_{c-s,c-s} \partial^{-1} \left(\hat{W}^-(\underline{\alpha}; x, t)^{n_c - j} \right)^t J(\partial)^{-1}.$$

参考文献

[1] Anguelova, I.I. CKP 层级的两种玻色化：综述与特征标恒等式，载于《李代数表示、量子群及相关主题》，《当代数学》713（2018年），第 1–34 页。[2] Arthamonov, S.；Harnad, J.；Hurtubise, J. 拉格朗日格拉斯曼流形、CKP 层级与超行列式关系，《数学物理通讯》（2023年）。https://doi.org/10.1007/s00220-023-04670-4。[3] Arthamonov, S.；Harnad, J.；Hurtubise, J. τ函数、无限维格拉斯曼流形与格点递推关系，《数学物理杂志》64，023502（2023年），DOI：https://doi.org/10.1063/5.0110404。[4] Carpentier, S.；De Sole, A.；Kac, V.G.；Valeri, D.；van de Leur, J. p-约化多分量 KP 层级与经典 W代数 $W（gl_N, p）$，《数学物理通讯》380（2020年），655–722。[5] Date, E.；Jimbo, M.；Kashiwara, M.；Miwa, T. 孤子方程的变换群。欧几里得李代数与 KP 层级的约化，《数学科学研究所刊物》18 （1982年），1077–1110。[6] Date, E.；Jimbo, M.；Kashiwara, M.；Miwa, T. 孤子方程的变换群，载于《非线性可积系统——经典理论与量子理论》，M. Jimbo 和 T. Miwa 编，World Scientific，（1983年），39–120。[7] Date, E.；Jimbo, M.；Kashiwara, M.；Miwa, T. 孤子方程的变换群 IV：新型KP类孤子方程层级，《物理学D辑》（1982年），343–365。[8] Date, E.；Jimbo, M.；Kashiwara, M.；Miwa, T. 正交型与辛型KP层级：孤子方程的变换群 VI，《日本物理学会杂志》50（1981年），3813–3818。[9] De Sole, A.；Kac, V.G.；Valeri，D. 经典仿射 W-代数及其相关的经典李代数可积哈密顿层级。《数学物理通讯》360（2018年），851–918。[10] Friedan, D.；Martinec, E.；Shenker, S. 共形不变性、超对称与弦理论。《核物理B辑》271，第 3–4 期（1986年），93–165。[11] Gaiotto, D.；Rapkac, M. 角点处的顶点代数。《高能物理学杂志》2019(1), DOI：10.1007/JHEP01(2019)160。[12] Jimbo, M.；Miwa, T. 孤子与无限维李代数。《数学科学研究所刊物》19（1983年），第 3 期，943–1001。[13] Kac, V.G. 《无限维李代数》，剑桥大学出版社（1990年），DOI：https://doi.org/10.1017/CBO9780511626234。

[14] Kac, V.G.；van de Leur, J.W. B 型超玻色子-费米子对应。在《无限维李代数与群》（1988年7月4日至8日于 CIRM、Luminy 举行的会议论文集）中，V.G. Kac 编，Advanced Series in Mat. Phys. 第7卷，World Scientific，新加坡，第369–406页。[15]Kac, V.G.；van de Leur, J.W. n分量 KP 层级与表示理论，《数学物理学杂志》44，3245–3293（2003）；https://doi.org/10.1063/1.1590055 早期版本见《孤子理论的重要发展》，AS Fokas 和 VE Zakharov 编，Springer，（1993），203–243。[16] Kac, V.；van de Leur, J. 旋量的几何与多分量 BKP 和 DKP 层级。《双谱问题》（加拿大魁北克省蒙特利尔，1997），159–202，CRM Proc. Lecture Notes，14，Amer. Math. Soc.，Providence，RI，1998。[17] Kac, V.；van de Leur, J. 广义 Giambelli 公式与多项式 CKP τ 函数。arXiv:1102.0087。[18] Kac, V.G；Peterson, D.H. 关于无限楔表示与 MKP 层级的讲义，Seminaire de Math. Superieures，Les Presses de L’Université de Montréal 102（1986），141–186。[19] Kac, V.G；Peterson, D.H. E8 环群基本表示的112种构造，《“反常、几何、拓扑”会议论文集》，阿贡，1985。World Scientific，1985，276–298。[20] Kostant, B. 主三维子群与复单李群的贝蒂数，《美国数学杂志》第81卷，第4期（1959年10月），973-1032。[21] Krichever, I；Zabrodin, A. Kadomtsev–Petviashvili 转向点与 CKP 层级，《数学物理通信》386，（2021），1643—1683。[22] ten Kroode, F；van de Leur, J. 仿射 ˆ代数 gl_n的玻色子与费米子实现。《数学物理通信》137（1991），第1期，67–107。[23] ten Kroode, F；van de Leur, J. 仿射代数 ˆso_{2n} 的玻色子与费米子实现，《代数通信》20（11），（1992），3119–3162。[24] ten Kroode, F；van de Leur, J. 扭曲仿射代数 $A_n^{(2)}$和 $D_n^{(2)}$的一级表示，《应用数学学报》27，（1992），153–224。[25] ten Kroode, F；van de Leur, J. 仿射李代数$B_n^{(1)}$的一级表示，《应用数学学报》31，（1993），1—73。[26] van de Leur, J.W.；Orlov, A. Yu.；Shiota, T. CKP 层级、玻色子 τ 函数与玻色化公式，《对称性、可积性与几何：方法与应用》（SIGMA），第8卷（2012）036/1 – 036/28。

[27]Sato, M. 无限维格拉斯曼流形上的动力系统中的孤子方程，RIMS Kokyuroku 439(1981)，30-46。[28] Shiota, S. Prym簇与孤子方程。载于《无限维李代数与群》（1988年7月4日至8日在CIRM、Luminy举行的会议论文集），V.G. Kac编，Advanced Series in Mat. Phys. 第7卷，World Scientific，新加坡，407–448。[29] You, Y. BKP层级的多项式解与对称群的射影表示，载于无限维李代数与群（Luminy-马赛，1988），Adv. Ser. Math. Phys. 7，1989，第449–464页，World Sci。[30] You, Y. 孤子方程的DKP和MDKP层级，Physica D 50 （1991），429–462。[31] Yun, Z. 极小约化类型与Kazhdan-Lusztig映射，Indag. Math. 32（2021），第6期，1240–1274。