arXiv:2304.05739v1 [math.CA] 12 Apr 2023

非共振双 Hopf 奇异性的超正规形补充内容

Majid Gazor[a, b]、Boumediene Hamzi[c]和 Ahmad Shoghi[a, †]

[a]伊斯法罕理工大学数学科学系，伊朗伊斯法罕 84156-83111。电子邮箱：mgazor@iut.ac.ir 和 ahmad.shoghi@alumni.iut.ac.ir。[b]基础科学研究所（IPM）数学学院，邮政信箱：19395-5746，伊朗德黑兰

[c]加州理工学院计算与数学科学系，美国加利福尼亚州帕萨迪纳。电子邮箱：boumediene.hamzi@gmail.com。

摘要

在这篇论文中，我们研究非共振双Hopf奇异性的超正规形。我们探讨具有非零径向三次部分的此类奇异性的无穷阶正规形分类。我们根据平面旋转向量场和平面径向向量场，对正规形向量场给出一种正规形分解。这些分解有助于识别和分析相应的广义同调映射。本文首次对不具有结构对称性的通用非共振双 Hopf 奇异性进行正规形分类。

关键词：双 Hopf 奇点；标准形；平面径向向量场。

2010年数学主题分类：主要分类：34C20、34A34、16W5；次要分类：68U99。

1 引言

正规形理论和中心流形理论为我们提供了两种重要的约化技术，用于分析非双曲平衡点附近非线性系统的稳定性和分岔控制。中心流形是微分（差分）系统的不变流形，在该流形上约化微分系统可降低状态空间的维数。中心流形的计算会导出一个拟线性偏微分方程（非线性泛函方程），通常不易求解。对中心流形上的约化系统作低阶近似，通常足以分析原系统的稳定性和分岔控制。正规形理论提供了一种有效工具，可简化中心流形上的约化系统；例如，参见 [20–24, 66] 及其中的参考文献。

† 通讯作者。电话：(98-31) 33913634；传真：(98-31) 33912602；电子邮件：ahmad.shoghi@alumni.iut.ac.ir。

对于具有控制分岔的非线性系统（参见 [58]），类似的方法已用于分析和稳定化连续时间与离散时间系统中的一个或两个不可控模态 [27–47, 49–51, 53, 58–60]。通过引入连续时间和离散时间的受控中心动力学 [41, 47], 以及受控中心系统 [45, 46]，这种方法被推广到具有任意数量不可控模态的系统。受控中心动力学和受控中心系统是降阶控制系统，其可稳定性决定了全阶系统的可稳定性。基于受控中心动力学和受控中心系统的方法，也可视为针对某些类别受控微分（差分）方程的约化技术。可以基于正规形下的降阶控制系统设计稳定控制器。

求取双 Hopf 奇异性正规形的经典方法，是通过调整同调映射的像，对坐标进行变换，从而将向量场的泰勒展开化简到给定阶数。此后，化简后系统中剩余的项便是共振项。然而，将这种方法应用于实际问题时存在诸多局限，其中之一是难以找出系统原始参数与展开参数之间的关系。更简单的正规形有助于我们更有效地分析动力系统。这对于退化情形和具有结构对称性的系统的分岔分析尤为重要。需要注意的是，经典方法未必会从泰勒级数展开中消去所有可能的项。换言之，经典正规形未必是最简正规形。最简正规形是近恒等状态变量变换群作用下微分系统等价类的唯一代表。这由此引出了微分系统的正规形分类。

最简单的奇异微分系统标准形已有三十多年的丰富研究文献 [7, 64, 65, 68]，也有无限层正规形或唯一正规形等别称；例如参见 [2, 16, 18, 22, 26, 69–71]。大多数成果属于二维和三维奇异性；例如参见 [1, 2, 4–10、57、62、63、69、71–73]。对于非线性控制系统， [48] 迈出了第一步，将内积标准形推广到了非线性控制系统。关于四维奇异性的已发表成果非常少，而这类奇异性并非最简单的标准形；例如参见 [3, 56, 74]。本文首次给出了不具有任何结构对称性的通用非共振双 Hopf 奇点的最简单标准形结果。就分岔控制而言，有效的时间重新标度变换以及对参数微分系统的考察是必要的；例如参见 [15, 16, 18, 20, 21, 25, 26, 70]。

令 $\mathcal{G}$ 为四维多项式向量场构成的李子代数。这里，我们将李括号定义为 $[v, w] = vw - wv$，其中向量场也被视为微分算子。我们打算对非共振双 Hopf 奇点的给定向量场 $V \in \mathcal{G}$ 进行规范化。在本文中，向量场 V 与常微分方程 $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = V(\mathbf{y})$ 相关联，并且我们交替使用向量场及其对应的微分系统。这里的李代数结构通过变换生成元空间发挥作用。每个非线性向量场，例如 $X(\mathbf{y})$，满足 $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，且其泰勒展开中不含线性项，都被视为一个变换生成元，它生成状态变量的非线性近恒等变换。

这里的近恒等是指其在原点处的线性化为恒等映射。事实上， X(y) 生成初值问题的时间一映射流 y $=$ y(1, x)

$$\dot{\mathbf{y}}(t,\mathbf{x}) = X(\mathbf{y}(t,\mathbf{x})), \quad \mathbf{y}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{x}; \tag{1.1}$$

例如，参见 [26, 57, 63, 64]。因此，变换 y $=$ y(1, x) 将向量场 V(y) 映射到 o

$$\exp \mathrm{ad}_X V = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathrm{ad}_X{}^j V = V + \mathrm{ad}_X V + \frac{1}{2}\mathrm{ad}_X(\mathrm{ad}_X V) + \cdots \tag{1.2}$$

关于新坐标 x，其中 $\mathrm{ad}_X V := [X, V]$. 由此得到一个更新后的微分系统，如下所示

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \exp \mathrm{ad}_X V|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathrm{ad}_X{}^j V = V + \mathrm{ad}_X V + \frac{1}{2}\mathrm{ad}_X(\mathrm{ad}_X V) + \cdots|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}.$$

其思路是应用一系列变换生成元（如 X），尽可能简化 V。在实际计算中，我们通常处理多项式向量场（作为光滑系统的有限泰勒展开），并将向量场 $\exp \mathrm{ad}_X V$ 截断到所需的某一阶。

令 δ 为分级函数，即空间 $\mathcal{G}$ 是一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$分次李代数。这意味着$\mathcal{G} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}_k$（齐次空间的 k阶直和），且对于所有 m、k，都有 $[\mathcal{G}_m, \mathcal{G}_k] \subseteq \mathcal{G}_{m+k}$。因此，我们可以写成 $V = \sum_{k=0}^{\infty} V_k$，其中对于每个 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$，都有 $V_k \in \mathcal{G}_k$。现在我们归纳定义广义同调算子。令

$$d^{n,1} : \mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_n \text{ be defined by } d^{n,1}(X_n) := [X_n, V_0] \text{ for any grade } n.$$

这些是经典同调映射；例如，参见 [64]。然而，我们将 $d^{n,1}$ 称为第一级（广义）同调映射。该映射的定义域对应于变换生成元，而其像称为第一级可消去空间 $\mathcal{R}^{n,1}$。换言之，广义同调映射定义域中的变换生成元可用于简化 V 中属于可消去空间 $\mathcal{R}^{n,1}$的（投影）部分。因此，正规形中唯一剩余的项属于补空间 $\mathcal{C}^{n,1}$，该补空间是可消去空间的补空间。

超正规化的思路是使用、$_1 := \{X_{n-1} \in \mathcal{G}_{n-1} | [X_{n-1}, V_0] = 0\}$ 中的变换生成元来扩大可消去空间 i m $d^{n,\ 1}$。基于这一思路，我们归纳地定义s阶广义同调映射 $d^{n,\ s} : \ker(d^{n-1,\ s-1}) \times \mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_n$，对任意 $2 \leq s \leq n$，其定义如下。

$$d^{n,s}(X_{n-s+1}, \ldots, X_{n-1}, X_n) := [X_n, V_0] + [X_{n-1}, V_1] + \cdots + [X_{n-s+1}, V_{s-1}],$$

其中$(X_{n-s+1}, X_{n-s+2}, \cdots, X_{n-1}) \in \ker(d^{n-1,s-1})$；另见 [26, 页 1015] 及 [64, 65, 67]。将 s 阶广义同调映射的像记为 $\mathcal{R}^{n,s}$，即 $\mathcal{R}^{n,s} := \mathrm{im}\, d^{n,s}$ 是一个 s 阶可消去空间。来自 $\ker d^{n,1}$ 的变换生成元不会改变阶低于n 的项，因为它们与 V_0的李乘积为零；同时它们会扩大可消去空间，$\mathrm{im}\, d^{n,1} \subseteq \mathrm{im}\ d^{n,2}$。

这对于 $\ker(d^{n-1,s-1})$ 也成立，一般而言，对于 $r \leq s.$，我们有 $\operatorname{im} d^{n,r} \subseteq \operatorname{im} d^{n,s}$。$d^{n,s}$ 的一个补像记为 $\mathcal{C}^{n,s}$，即 $\mathcal{R}^{n,s} \oplus \mathcal{C}^{n,s} = \mathcal{G}_n.$。空间 $\mathcal{C}^{n,s}$ 和 $\mathcal{R}^{n,s}$ 分别称为 s 级补空间和可消去空间。符号 $\oplus$ 表示这些空间的直和，即 $\mathcal{R}^{n,s} \cap \mathcal{C}^{n,s} = \{\mathbf{0}\}$，并且对于每个 $V_n \in \mathcal{G}_n$，都有

$$w_n \in \mathcal{R}^{n,s} \text{ and } u_n \in \mathcal{C}^{n,s} \text{ so that } V_n = w_n + u_n.$$

定义 1.1. 若所有 v_k 阶齐次向量场都属于相应的 s 阶补空间，即 $V_k \in \mathcal{C}^{k,\,s}$ 对所有 $k.$ 均成立，则称向量场 $V = \sum_{k=0}^{\infty} V_k$ 为 s 阶正规形。当 $V_k \in \mathcal{C}^{k,\,k}$ 对所有 $k \geq 1$ 均成立时，称向量场 $V = \sum_{k=0}^{\infty} V_k$ 为无穷阶正规形。

向量场 v 的 N 阶喷流定义为 v 在原点处截至 N 次的泰勒展开，记作 $J^N v$。根据 [26, 引理 4.3],，存在允许的状态变量变换，将向量场 V 化为其 N 阶喷流 s 阶正规形 $V^{(s)} = \sum_{n=0}^{N} V^{(s)}{}_n$，其中 $V^{(s)}{}_n \in \mathcal{C}^{n,s}$。这里，对于所有 $i < s.$，$V^{(s)}{}_i = V^{(i)}{}_i$。我们指出，计算 s 阶正规形通常可通过在每一阶正规化过程中更新广义同调映射来简化，即 $d^{n,s}(X_{n-s+1}, \ldots, X_{n-1}, X_n) := \sum_{i=0}^{s-1} [X_{n-i}, V^{(s-1)}{}_i\ ]$；例如，参见 [26, 67, 69]。

问题陈述 本论文关注微分系统最简单的（无限阶）正规形计算。

$$\tfrac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z} + \mathcal{H}(\mathbf{z}), \quad \mathcal{H}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \tag{1.3}$$

使得 $\mathbf{z} := (z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)^{\intercal}$，且对角矩阵 A 定义为

$$A := \operatorname{diag}\left(I\omega_1, -I\omega_1, I\omega_2, -I\omega_2\right),$$

其中 ω_1 和 ω_2 是非共振角频率，即 $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}.$。为方便起见，我们交替使用以下记法。

$$(f_1, f_2, f_3, f_4)^{\intercal} \text{ and } f_1\frac{\partial}{\partial z_1} + f_2\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} + f_3\frac{\partial}{\partial z_2} + f_4\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}.$$

这就建立了微分系统与向量场之间的一一对应关系，我们可以交替使用向量场和微分系统。向量场 $\mathcal{H}(\mathbf{z})$ 表示 $\mathbf{z}$ 中的非线性向量场，其分量是 $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ 中的多项式。这里，$\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ 表示 $\mathbb{C}.$ 上的多项式环。因此，微分系统 (1.3) 是一个非共振双 Hopf 奇点。尽管关于奇异性正规形分类的研究已有数十年历史，但据我们所知，除庞加莱正规形之外，尚无关于不具结构对称性的非共振双 Hopf 奇点的研究成果；例如，经典结果见 [3,56,74]。不过。

是状态变量的近恒等多项式变换（见定理 2.1），用于将 (1.3) 变换为一个 aN 次一级正规形，其形式为

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \sum_{m+n=0}^{N} |z_1|^{2m}|z_2|^{2n} A_{m,n}\mathbf{z}, \tag{1.4}$$

其中

$$A_{m,n} := \operatorname{diag}\left(a^1_{m,n} + Ib^1_{m,n}, a^1_{m,n} - Ib^1_{m,n}, a^2_{m,n} + Ib^2_{m,n}, a^2_{m,n} - Ib^2_{m,n}\right) \text{ and } A_{0,0} = A. \tag{1.5}$$

这里，数值 N 表示任意大的自然数。这是为了跳过从形式幂级数到任意高次多项式的表述。定义

$$\mathscr{P}^k_{0,0} := z_k\tfrac{\partial}{\partial z_k} + w_k\tfrac{\partial}{\partial w_k}, \quad \mathscr{R}^k_{0,0} := Iz_k\tfrac{\partial}{\partial z_k} - Iw_k\tfrac{\partial}{\partial w_k}, \tag{1.6}$$

以及 $w_k := \overline{z}_k$ 对于 $k = 1,\ 2$。向量场 $\mathscr{P}^k_{0,\,0}$ 和 $\mathscr{R}^k_{0,\,0}$ 分别称为平面径向（平面欧拉）向量场和旋转向量场。它们生成的李代数定义为

$$\mathcal{G} := \operatorname{span}\left\{{\rho_1}^{2m}{\rho_2}^{2n}\mathscr{P}^k_{0,0}, {\rho_1}^{2m}{\rho_2}^{2n}\mathscr{R}^k_{0,0} \,|\, m,n \in \mathbb{N}\cup\{0\},\, k\in\{1,2\}\right\} \tag{1.7}$$

对于 $\rho_k := |z_k|$, $k = 1$,2。因此，与每个非共振双Hopf奇点的正规形系统(1.4)相关的向量场都属于李代数 $\mathcal{G}$. 事实上，方程 (1.4) 中的向量场给出为

$$\tfrac{d\mathbf{z}}{dt} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{m+n=0}^{N}{\rho_1}^{2m}{\rho_2}^{2n}(a^k_{m,n}\mathscr{P}^k_{0,0} + b^k_{m,n}\mathscr{R}^k_{0,0}), \quad a^1_{0,0} = a^2_{0,0} = 0, b^1_{0,0} = \omega_1, b^2_{0,0} = \omega_2. \tag{1.8}$$

平面径向和平面旋转向量场的使用大大促进了广义同调映射的模式识别。

例 1.2（庞加莱正规形的进一步正规化）。在本例中，我们简化一个庞加莱正规形系统；另见 [7–9]。由于庞加莱正规形中只有奇数阶的共振项可能保留，因此我们假设，复坐标下一个微分系统的、最高阶为 6 的庞加莱正规形如下给出:

$$\tfrac{dz_1}{dt} = Iz_1 + z_1|z_1|^2 + z_1|z_1|^4 - 2z_1|z_1|^2|z_2|^2, \quad \tfrac{dz_2}{dt} = I\sqrt{3}z_2 + z_2|z_1|^4,\ \tfrac{dw_2}{dt} = \tfrac{d\overline{z_2}}{dt},\ \tfrac{dw_1}{dt} = \tfrac{d\overline{z_1}}{dt}, \tag{1.9}$$

其中 $w_k := \overline{z}_k$ 对于 $k = 1$,2, $\omega_1 := 1$, 且 $\omega_2 := \sqrt{3}$. 。由于正规形的层级与分级结构相对应，我们将每个齐次多项式向量场的阶定义为其标准次数的一半减一。令 $V_0 := \left(Iz_1, -Iw_1, I\sqrt{3}z_2, -I\sqrt{3}w_2\right)^\intercal$, $V_1 := (z_1|z_1|^2, w_1|z_1|^2, 0, 0)^\intercal$,$V_2 := (z_1|z_1|^4 - 2z_1|z_1|^2|z_2|^2, w_1|z_1|^4 - 2w_1|z_1|^2|z_2|^2, z_2|z_1|^4, w_2|z_1|^4)^\intercal$. 因此， $V = V_0 + V_1 + V_2$. 我们的目标是通过正规形系统的三次部分 V_1，尽可能简化五次多项式 V_2。令

$$X(\mathbf{z}) := -\left(z_1|z_2|^2, w_1|z_2|^2, \frac{z_2|z_1|^2}{2}, \frac{w_2|z_1|^2}{2}\right)^\intercal.$$

于是，我们有

$$\mathrm{ad}_X V_0 = 0, \quad i.e., \; X \in \ker d^{3,1} \tag{1.10}$$

and

$$\mathrm{ad}_X V_1 = -\left(-2z_1|z_1|^2|z_2|^2, -2w_1|z_1|^2|z_2|^2, z_2|z_1|^4, w_2|z_1|^4\right)^{\mathsf{T}}; \tag{1.11}$$

关于如何选择 X(z)，请参见第2节。方程 (1.10) 保证变换生成元X 不会产生此前在庞加莱正规化步骤中利用系统的线性部分 V_0 已简化的项。结合方程 (1.11)，这证明了方程 (1.11) 右端所出现项的简化是成立的。设 z(*t*, u) 是初值问题 $^{d}_{\mathbf{z}(t,\ \mathbf{u})\ dt} = X(\mathsf{z}(t, \mathsf{u})), \mathsf{z}(0, \mathsf{u}) = \mathsf{u}$ 的解。近恒等状态变量变换 $\mathsf{z} = \mathsf{z}(1, \mathsf{u})$（流 z(*t*, u) 的时间一映射）将微分方程 (1.9) 化至 6 次，得到以下方程

$$\begin{aligned}\tfrac{d\mathbf{u}}{dt} &= \exp \mathrm{ad}_{X(\mathbf{u})}\left(V_0(\mathbf{u}) + V_1(\mathbf{u}) + V_2(\mathbf{u})\right) = V_0(\mathbf{u}) + V_1(\mathbf{u}) + V_2(\mathbf{u}) + \mathrm{ad}_{X(\mathbf{u})}V_1(\mathbf{u}) + h.o.t. \\ &= V_0(\mathbf{u}) + V_1(\mathbf{u}) + (u_1|u_1|^4, v_1|u_1|^4, 0, 0)^{\mathsf{T}} + h.o.t.. \end{aligned} \tag{1.12}$$

这里，$\mathsf{u} := (u_1, v_1, u_2, v_2)$ 表示新的状态变量。我们忽略高阶项。于是，方程 (1.12) 展示了方程 (1.9) 的第二层形式，即 $s = 2$。由于系统中没有四次项，因此其五次项中不存在可通过任何状态变量变换消去的项。因此，方程 (1.12) 是最简的五次多项式正规形。

本文始终假设一级正规形(1.8)中存在非零三次项，表示为

$$\left|a^1_{0,1}\right| + \left|a^2_{0,1}\right| + \left|a^1_{1,0}\right| + \left|a^2_{1,0}\right| \neq 0. \tag{1.13}$$

这四个数表示庞加莱正规形的三次系数。若这些系数全为零，则四次正规形系统仅包含径向分量为零的旋转向量场。人们通常认为，这类高度退化的情形在实际应用中很少发生，除非系统具有结构对称性，导致这些特定的退化情形出现。本文不讨论这些退化情形。

2 标准形与李结构常数

本节专门讨论一级正规形以及一种用于推导三次正规形系数的算法方法；另见 [3, 56, 74]。

定理 2.1. 对于任意微分系统 (1.3)，存在状态变量的近恒等变换，可将系统 (1.3) 变换为一个 $2N+1$ 阶截断的一级正规形，其复坐标表示为

$$\dot{z}_1 = \textstyle\sum_{m+n=0}^{N}(a^1_{m,n} + Ib^1_{m,n}) z_1^{m+1} w_1^m z_2^n w_2^n, \quad \dot{z}_2 = \sum_{m+n=0}^{N}(a^2_{m,n} + Ib^2_{m,n}) z_1^m w_1^m z_2^{n+1} w_2^n, \tag{2.1}$$

其中 $w_k=\overline{z_k}$, $b^k_{m,n}$,$a^k_{m,n}\in\mathbb{R}$, $b^k_{0,0}=\omega_k$ 和 $a^k_{0,0}=0$，当 $k=1$ 时，2。

证明。证明众所周知。例如，参见 [3, 56, 62, 64]。 □

从现在起，我们讨论类型为 (2.1) 的向量场。(2.1) 给出的向量场族构成了所有双 Hopf 奇异性族的一个李子代数。由于向量场的线性部分属于该李子代数的中心化子，因此除第一级步骤外，它不会对正规化产生进一步影响。因此，本文其余结果显然适用于 (2.1) 给出的共振和非共振双 Hopf 奇异性。对于每个$m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}:=\mathbb{N}\cup\{0\}$，定义

$$\mathscr{P}^k_{m,n}:=|z_1|^{2m}|z_2|^{2n}\mathscr{P}^k_{0,0},\ \text{and}\quad \mathscr{R}^k_{m,n}:=|z_1|^{2m}|z_2|^{2n}\mathscr{R}^k_{0,0},\ \text{for } k=1,2, \tag{2.2}$$

并令

$$\mathcal{G}:=\operatorname{span}\left\{\Theta+\sum(a^k_{i,j}\mathscr{P}^k_{i,j}+b^k_{i,j}\mathscr{R}^k_{i,j})\,\middle|\, a^k_{i,j},b^k_{i,j}\in\mathbb{R},k=1,2,\ i,j\in\mathbb{Z}_{\geq 0},i+j\geq 1\right\}. \tag{2.3}$$

命题 2.2。由 (2.3) 定义的实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 $\mathcal{G}$ 构成一个无限维实李代数，其结构常数如下（对所有 $k,l,m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$）

$$\begin{gathered}
\left[\mathscr{P}^1_{m,n},\mathscr{P}^1_{i,j}\right]=2(i-m)\mathscr{P}^1_{m+i,n+j},\qquad \left[\mathscr{P}^2_{m,n},\mathscr{P}^2_{i,j}\right]=2(j-n)\mathscr{P}^2_{m+i,n+j},\\
\left[\mathscr{P}^1_{i,j},\mathscr{P}^2_{m,n}\right]=2m\mathscr{P}^2_{m+i,n+j}-2j\mathscr{P}^1_{m+i,n+j},\qquad \left[\mathscr{P}^1_{i,j},\mathscr{R}^k_{m,n}\right]=2m\mathscr{R}^k_{m+i,n+j},\\
\left[\mathscr{P}^2_{i,j},\mathscr{R}^k_{m,n}\right]=2n\mathscr{R}^k_{m+i,n+j},\qquad \left[\mathscr{R}^k_{m,n},\mathscr{R}^l_{i,j}\right]=0,\quad \textit{for } k,l=1,2.
\end{gathered} \tag{2.4}$$

证明。根据李括号 $[v,w]:=vw-wv$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\left[f(\mathbf{z})\mathscr{P}^k_{0,0},g(\mathbf{z})\mathscr{P}^l_{0,0}\right] &= \langle\nabla g,\mathscr{P}^k_{0,0}\rangle f(\mathbf{z})\,\mathscr{P}^l_{0,0}-\langle\nabla f,\mathscr{P}^l_{0,0}\rangle g(\mathbf{z})\,\mathscr{P}^k_{0,0},\\
\left[f(\mathbf{z})\mathscr{R}^k_{0,0},g(\mathbf{z})\mathscr{R}^l_{0,0}\right] &= \langle\nabla g,\mathscr{R}^k_{0,0}\rangle f(\mathbf{z})\,\mathscr{R}^l_{0,0}-\langle\nabla f,\mathscr{R}^l_{0,0}\rangle g(\mathbf{z})\,\mathscr{R}^k_{0,0},\\
\left[g(\mathbf{z})\mathscr{P}^k_{0,0},f(\mathbf{z})\mathscr{R}^l_{0,0}\right] &= \langle\nabla f,\mathscr{P}^k_{0,0}\rangle g(\mathbf{z})\,\mathscr{R}^l_{0,0}-\langle\nabla g,\mathscr{R}^l_{0,0}\rangle f(\mathbf{z})\,\mathscr{P}^k_{0,0},\ k,l=1,2.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

然后，证明直接沿用记号 (2.2)。 □

在第二层规范化步骤中，我们打算归纳地简化阶为 n、来自$v^{(1)}$的项。首先，我们推导第二层广义同调映射的约化代表平方矩阵，由此可以得出广义同调映射的补空间像。回顾一下，每个微分系统（2.1）都对应李代数 $\mathcal{G}$ 中的一个向量场 $v^{(1)}$，并写作

$$v^{(1)}:=\textstyle\sum_{k=1}^2\sum_{m+n=0}^N b^k_{m,n}\mathscr{R}^k_{m,n}+\sum_{k=1}^2\sum_{m+n=1}^N a^k_{m,n}\mathscr{P}^k_{m,n}, \tag{2.6}$$

对于某些系数 $a^k_{m,\ n}$、$b^k_{m,\ n}\in\mathbb{R}$ 以及充分大的自然数 $N.$，现定义分级函数 δ 如下

$$\delta\left(\mathscr{P}^k_{m,n}\right)=m+n,\ \delta\left(\mathscr{R}^k_{m,n}\right)=m+n,\ k=1,2. \tag{2.7}$$

引理 2.3. 关于（2.2）中的向量空间基，第二层广义齐次映射 $d^{n,\,2}$的约化表示矩阵如下

$$\mathcal{A}_{n,1} := -\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{n,1}^{0,0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathcal{A}_{n,1}^{0,1} & \mathcal{A}_{n,1}^{1,0} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathcal{A}_{n,1}^{1,1} & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathcal{A}_{n,1}^{n-1,0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathcal{A}_{n,1}^{n-1,1} \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

其中， $\mathcal{A}^{j,n^{0}}{}_{,1}$ 和 $\mathcal{A}^{j,n^{1}}{}_{,1}$ 关于 $0 \le j \le n-1$ 的分块矩阵定义为

$$\mathcal{A}_{n,1}^{j,0} := 2\begin{bmatrix} ja_{0,1}^1+(n-j-1)a_{0,1}^2 & -a_{0,1}^1 & 0 & 0 \\ 0 & ja_{0,1}^1+(n-j-2)a_{0,1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{0,1}^1 & ja_{0,1}^1+(n-j-1)a_{0,1}^2 & 0 \\ 0 & -b_{0,1}^2 & 0 & ja_{0,1}^1+(n-j-1)a_{0,1}^2 \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{A}_{n,1}^{j,1} := 2\begin{bmatrix} (j-1)a_{1,0}^1+(n-j-1)a_{1,0}^2 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{1,0}^2 & ja_{1,0}^1+(n-j-1)a_{1,0}^2 & 0 & 0 \\ -b_{1,0}^1 & 0 & ja_{1,0}^1+(n-j-1)a_{1,0}^2 & 0 \\ -b_{1,0}^2 & 0 & 0 & ja_{1,0}^1+(n-j-1)a_{1,0}^2 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

证明。第二层正规形中通常被化简的项数等于 $\operatorname{rank} d^{n,\,2}$，即 $\operatorname{im}\ d^{n,\,1} = \{0\}$. 更确切地说，我们有

$$\ker d^{n-1,1} = \{x \in \mathcal{G}_{n-1} \mid [x,\Theta] = 0\} = \operatorname{span}\{\mathscr{P}_{j,n-1-j}^k, \mathscr{R}_{j,n-1-j}^k, k = 1,2, 0 \le j \le n-1\} = \mathcal{G}_{n-1}.$$

此外， $d^{n,\,2}(X_{n-1}, X_n) = [X_{n-1}, v_1^{(1)}] + [X_n, v_0^{(1)}] = [X_{n-1}, v_1^{(1)}]$ 其中$(X_{n-1}, X_n) \in \mathcal{G}_{n-1} \times \mathcal{G}_n$. 这里我们使用待定系数法求解广义同调方程。让

$$X_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1}(\alpha_j^1 \mathscr{P}_{j,n-1-j}^1 + \alpha_j^2 \mathscr{P}_{j,n-1-j}^2 + \beta_j^1 \mathscr{R}_{j,n-1-j}^1 + \beta_j^2 \mathscr{R}_{j,n-1-j}^2) \tag{2.11}$$

是一个 $n-1$ 阶变换生成元，用于在第二层规范化步骤中规范化 $v_n^{(1)}$ 的更新后的 n 阶项：$=\sum_{j=0}^{n}(\hat{}a_j^1 \mathscr{P}_{j,n-j}^1 + \hat{}a_j^2 \mathscr{P}_{j,n-j}^2 + \hat{}b_j^1 \mathscr{R}_{j,n-j}^1 + \hat{}b_j^2 \mathscr{R}_{j,n-j}^2)$。这里假设低阶项 $v_d^{(1)}$ $(d < n)$ 已经简化为 $v_d^{(2)}$ for $d < n$。换言之，第二层正规形已经部分执行至 $n-1.$ 阶。为简化本文中的记号，更新后系数 $\hat{}a_j^1$、$\hat{}a_j^2$、$\hat{}b_j^1$ 和 $\hat{}\,b_j^2$ 的记号分别替换为 a_j^1、 a_j^2、 b_j^1、 b_j^2。这里， α_j^1、 α_j^2、 β_j^1 和 β_j^2 for $0 \le j \le n-1$ 是待确定的实未知常数。因此， $\left[X_{n-1}、\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{1}\left(a_j^k、{}_{1-j}\mathscr{P}_j^k、{}_{1-j} + b_j^k、{}_{1-j}\mathscr{R}_j^k、{}_{1-j}\right)\right]$ 由下式给出

$$\begin{aligned} &\sum_{l,k=1}^{2}\Big(\left[\alpha_0^l \mathscr{P}_{0,n-1}^l + \beta_0^l \mathscr{R}_{0,n-1}^l, a_{0,1}^k \mathscr{P}_{0,1}^k + b_{0,1}^k \mathscr{R}_{0,1}^k\right] + \left[\alpha_{n-1}^l \mathscr{P}_{n-1,0}^l + \beta_{n-1}^l \mathscr{R}_{n-1,0}^l, a_{1,0}^k \mathscr{P}_{1,0}^k + b_{1,0}^k \mathscr{R}_{1,0}^k\right] \\ &\quad + \left(\left[\alpha_0^l \mathscr{P}_{0,n-1}^l + \beta_0^l \mathscr{R}_{0,n-1}^l, a_{1,0}^k \mathscr{P}_{1,0}^k + b_{1,0}^k \mathscr{R}_{1,0}^k\right] + \left[\alpha_1^l \mathscr{P}_{1,n-2}^l + \beta_1^l \mathscr{R}_{1,n-2}^l, a_{0,1}^k \mathscr{P}_{0,1}^k + b_{0,1}^k \mathscr{R}_{0,1}^k\right]\right) \\ &+ \left(\left[\alpha_1^l \mathscr{P}_{1,n-2}^l + \beta_1^l \mathscr{R}_{1,n-2}^l, a_{1,0}^k \mathscr{P}_{1,0}^k + b_{1,0}^k \mathscr{R}_{1,0}^k\right] + \left[\alpha_2^l \mathscr{P}_{2,n-3}^l + \beta_2^l \mathscr{R}_{2,n-3}^l, a_{0,1}^k \mathscr{P}_{0,1}^k + b_{0,1}^k \mathscr{R}_{0,1}^k\right]\right) + \cdots \\ &+ \left(\left[\alpha_{n-2}^l \mathscr{P}_{n-2,1}^l + \beta_{n-2}^l \mathscr{R}_{n-2,1}^l, a_{1,0}^k \mathscr{P}_{1,0}^k + b_{1,0}^k \mathscr{R}_{1,0}^k\right] + \left[\alpha_{n-1}^l \mathscr{P}_{n-1,0}^l + \beta_{n-1}^l \mathscr{R}_{n-1,0}^l, a_{0,1}^k \mathscr{P}_{0,1}^k + b_{0,1}^k \mathscr{R}_{0,1}^k\right]\right)\Big). \end{aligned} \tag{2.12}$$

对于每个 i、j、l 和 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，结构常数 (2.4) 导出

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{2}a_{l,m}^{k}\mathscr{P}_{l,m}^{k}+b_{l,m}^{k}\mathscr{R}_{l,m}^{k},\sum_{k=1}^{2}a_{i,j}^{k}\mathscr{P}_{i,j}^{k}+b_{i,j}^{k}\mathscr{R}_{i,j}^{k}\right]=$$
$$\sum_{k=1}^{2}\Big(\big((ia_{l,m}^{1}+ja_{l,m}^{2})a_{i,j}^{k}-(la_{i,j}^{1}+ma_{i,j}^{2})a_{l,m}^{k}\big)\mathscr{P}_{i+l,j+m}^{k}+\big((ia_{l,m}^{1}+ja_{l,m}^{2})b_{i,j}^{k}-(la_{i,j}^{1}+ma_{i,j}^{2})b_{l,m}^{k}\big)\mathscr{R}_{i+l,j+m}^{k}\Big).$$

因此，对 $v_n^{(1)}$ 中各项进行正规化的解可得线性系统

$$\mathcal{A}_{n,\ 1}(\alpha_0^1,\alpha_0^2,\beta_0^1,\beta_0^2,\cdots,\alpha_{n-1}^1,\alpha_{n-1}^2,\beta_{n-1}^1,\beta_{n-1}^2)^{\intercal}+(a_{0,n}^1,a_{0,n}^2,b_{0,n}^1,b_{0,n}^2,\cdots,a_{n,0}^1,a_{n,0}^2,b_{n,0}^1,b_{n,0}^2)^{\intercal}=0, \tag{2.13}$$

对于常数 α_j^k,β_j^k，其中 $k=1,2,0\leq j\leq n-1$，分块矩阵 $\mathcal{A}_{n,\ 1}$ 由 (2.8) 定义。 □

由于 $\mathcal{A}_{n,\ 1}$ 是一个 $4(n+1)\times 4n$ 矩阵，秩为 $\mathcal{A}_{n,\ 1}\leq 4n.$。回顾一下，$\mathcal{G}_n$ 中的 n 阶齐次项属于由 $\left\{\mathscr{P}_{j,n-j}^1,\mathscr{P}_{j,n-j}^2,\mathscr{R}_{j,n-j}^1,\mathscr{R}_{j,n-j}^2|0\leq j\leq n\right\}$. 张成的 $4(n+1)$ 维线性空间。因此，对于每个 $n\geq 2$，$v^{(1)}$ 的 n 阶项在第二层超正规化步骤中不一定能够消除。根据方程 (2.8)、(2.9) 和 (2.10)，矩阵 $\mathcal{A}_{n,\ 1}$ 的秩取决于 $a_{1,\ 0}^1$、$a_{1,\ 0}^2$、$a_{0,\ 1}^1$ 和 $a_{0,\ 1}^2$ 的取值。这要求考虑以下三种不同情形:

I . $\frac{a_{0,1}^1}{a_{0,1}^2},\frac{a_{1,0}^1}{a_{1,0}^2}\in\mathbb{Q}$, $a_{0,1}^1a_{0,1}^2<0$ and $a_{1,0}^1a_{1,0}^2<0$;

II . either $\frac{a_{1,0}^1}{a_{1,0}^2}\in\mathbb{Q}^c$, or $\left(a_{0,1}^1a_{0,1}^2>0,a_{1,0}^1a_{1,0}^2>0,\frac{a_{0,1}^1}{a_{0,1}^2}\in\mathbb{Q}^c\right)$;

III . $a_{0,1}^1a_{0,1}^2a_{1,0}^1a_{1,0}^2=0$.

在这里，我们根据方程 (2.13) 中计算的简便性，为广义同调算子的像$d^{n,\ 2}$ 选取一个补空间（风格选择）。在这方面，我们可以通过删除一些线性相关的行和列，将矩阵 $\mathcal{A}_{n,\ 1}$ 化为可逆的（秩$\mathcal{A}_{n,\ 1}$×秩 $\mathcal{A}_{n,\ 1}$）矩阵，记为 $\mathcal{A}_{n,\ 1}$。需要指出的是，我们无需显式计算$\mathcal{A}_{n,\ 1}$的逆矩阵。方程 (2.13) 的所有约化方程变量均可递归计算。下面将讨论 I、II 和 III 三种情形。

2.1 情形 I: 当 $a_{0,\ 1}^1\frac{1}{a_{0\ 1}^2},$、$a_{1,\ 0}^1\frac{0}{a_{1}^2,\ 0}\in\mathbb{Q}$、$a_{0,\ 1}^1a_{0,\ 1}^2<0$ 且 $a_{1,\ 0}^1a_{1,\ 0}^2<0$ 时。

引理 2.4。设 $r+s=p+q$,

$$\frac{a_{0,1}^1}{a_{0,1}^2}=-\frac{q}{p},\frac{a_{1,0}^1}{a_{1,0}^2}=-\frac{s}{r}\in\mathbb{Q},\quad where\quad p,q,r,s\in\mathbb{N}\ and\ \gcd(p,q)=\gcd(r,s)=1. \tag{2.14}$$

于是，存在近恒等变换，使一级正规形 $v^{(1)}$ 可转化为以下 $2N+1$ 次截断的第二层正规形向量场:

$$\begin{aligned}\Theta&+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\sum_{i+j=1}(a_{i,j}^k\mathscr{P}_{i,j}^k+a_{ij}^k\mathscr{R}_{i,j}^k)+\sum_{m\in\mathbb{N}_2}\sum_{j\in H_1}\big(\delta_1\mathscr{P}_{j,m(p+q)+1-j}^1+a_{j,m(p+q)+1-j}^2\mathscr{P}_{j,m(p+q)+1-j}^2+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}b_{j,m(p+q)+1-j}^k\mathscr{R}_{j,m(p+q)+1-j}^k\big)\\&+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}(a_{2,0}^k\mathscr{P}_{2,0}^k+b_{2,0}^k\mathscr{R}_{2,0}^k)+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{j\in H_2}(\delta_2\mathscr{P}_{mp,mq+2}^2+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}(a_{j,m(p+q)+2-j}^k\mathscr{P}_{j,m(p+q)+2-j}^k+b_{j,m(p+q)+2-j}^k\mathscr{R}_{j,m(p+q)+2-j}^k))\\&+a_{0,2}^2\mathscr{P}_{0,2}^2+\sum_{j\in H_3}(\delta_3\mathscr{P}_{p,q+2}^2+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}(a_{j,p+q+2-j}^k\mathscr{P}_{j,p+q+2-j}^k+b_{j,p+q+2-j}^k\mathscr{R}_{j,p+q+2-j}^k))+\sum_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\sum_{j\in H_4}\big(a_{j,0}^k\mathscr{P}_{j,0}^k+b_{j,0}^k\mathscr{R}_{j,0}^k\big)\end{aligned} \tag{2.15}$$

其中 $H_4 := \{n|m(p+q)+3 \le n \le (m+1)(p+q)\}$. 由于我们处理的是截断正规形，所有无穷级数中非零项的次数都不超过 $2N+1$。此外，

$$H_1 := \{mp, mr+1\}, \quad H_2 := \{m(p+q)+2\}, \quad (\delta_1, \delta_2) := (0, a^2_{mp,mq+2}) \quad for\ p \le r,$$

且 $H_1 := H_2 := \{mp\}$，$(\delta_1, \delta_2) := (a^1_{j,\ m(p+q)+1-j}, 0)$，当 $p > r$ 时。对于 $p \le r+1$, $\delta_3 := a^2_{mp,\ mq+2}$, $H_3 := \{m(p+q)+2\}$，若 $p > r+1$，则有 $\delta_3 := 0$ 且 $H_3 := \{mp\}$.

证明。令 $n = 2$. $\mathcal{A}_{2,1}$ 的第二行和第九行是零向量。因此，项 $\mathscr{P}^2_{0,2}$ 和 $\mathscr{P}^1_{2,0}$ 不一定能得到简化。因此，矩阵 $\mathcal{A}_{2,1}$ 的这些零行可以直接省略。剩余矩阵的前七行线性无关。然后可忽略最后三行，从而得到可逆矩阵 $\mathcal{A}_{2,1}$；事实上，秩 $\mathcal{A}_{2,1}$ = 秩$\mathcal{A}_{2,1} = 7$. 后面的各行分别对应于项 $a^2_{2,0}\mathscr{P}^2_{0,2}$、$b^1_{2,0}\mathscr{R}^1_{2,0}$ 和 $b^2_{2,0}\mathscr{R}^2_{2,0}$。因此，在第二层规范化步骤中不对这些项进行简化。接下来，令 $\alpha^1_{0,1} := 0$ 并且

$$\alpha^2_{0,1} = -\frac{a^1_{0,2}}{2a^1_{0,1}},\ \beta^1_{0,1} = \frac{a^1_{0,1}b^1_{0,2} - a^1_{0,2}b^1_{0,1}}{2a^1_{0,1}a^2_{0,1}},\ \beta^2_{0,1} = \frac{a^1_{0,1}b^2_{0,2} - a^1_{0,2}b^2_{0,1}}{2a^1_{0,1}a^2_{0,1}}, \tag{2.16}$$

$$(\alpha^1_{1,0}, \alpha^2_{1,0}, \beta^1_{1,0}, \beta^2_{1,0})^\intercal = (\mathcal{A}^{1,0}_{2,1})^{-1}\left((a^1_{1,1}, a^2_{1,1}, b^1_{1,1}, b^2_{1,1})^\intercal - \mathcal{A}^{0,1}_{2,1}(\alpha^1_{0,1}, \alpha^2_{0,1}, \beta^1_{0,1}, \beta^2_{0,1})^\intercal\right). \tag{2.17}$$

注意，矩阵 $\mathcal{A}^1_{,0\ 21\ ,}$在此由于 $a^1_{0,1}a^2_{0,1} < 0$. 根据假设，我们有

$$a^1_{0,1}p + a^2_{0,1}q = a^1_{1,0}r + a^2_{1,0}s = 0.$$

令 $n = m(p+q)+1 = m(r+s)+1$ 对于一个 $m \in \mathbb{N}$ 且 $n > 2$. 因此，我们有

$$mra^1_{1,0} + (n-1-mr)a^2_{1,0} = mpa^1_{0,1} + (n-1-mp)a^2_{0,1} = 0. \tag{2.18}$$

将这些值代入矩阵 $\mathcal{A}_{n,1}$后，$\mathcal{A}^{mp}{}_{,n\ 1}{}^{0}{}_{,}$的第一、第三和第四列，以及 $\mathcal{A}^{mr}{}_{,n\ 1}{}^{1}{}_{,}$的第二、第三和第四列均为零向量。在此，我们可以考虑两种情况：

$$\text{(i) } p \le r \qquad \text{and} \qquad \text{(ii) } p > r.$$

情况 (i)：$\mathcal{A}_{n,1}$ 的列简化阶梯形可得 $\mathcal{A}_{n,1} = 4n-2$ 的秩。因此，一级正规形中阶为 n 的项数 $4n-2$ 可以简化。这里，$k = 1, 2$ 的项 $\mathscr{P}^1_{mp,n-mp}, \mathscr{P}^1_{mr+1,n-mr-1}, \mathscr{P}^k_{j,n-j}$ 和 $\mathscr{R}^k_{j,n-j}$、$0 \le j \le n$, $j \ne mp, mr+1$ 可以规范化，而 $j = mp, mr+1$ 的项 $\mathscr{P}^2_{j,n-j}, \mathscr{R}^1_{j,n-j}, \mathscr{R}^2_{j,n-j}$ 可能保留在第二层正规形中。矩阵 $\mathcal{A}^i{}_{,n}{}^{0}{}_{,1}$ 和 $\mathcal{A}^j{}_{,n}{}^{1}{}_{,1}$ 对于 $i \ne mp$ 和 $j \ne mr$. 是可逆的。然后，对于 $0 \le i \le mp-1$，取一个递增的递归关系。

$$(\alpha^1_i, \alpha^2_i, \beta^1_i, \beta^2_i)^\intercal = (\mathcal{A}^{i,0}_{n,1})^{-1}\left((a^1_{i,n-i}, a^2_{i,n-i}, b^1_{i,n-i}, b^2_{i,n-i})^\intercal - \mathcal{A}^{i-1,1}_{n,1}(\alpha^1_{i-1}, \alpha^2_{i-1}, \beta^1_{i-1}, \beta^2_{i-1})^\intercal\right), \tag{2.19}$$

其中 $(\alpha^1_{-1}, \alpha^2_{-1}, \beta^1_{-1}, \beta^2_{-1}) = \mathbf{0}$. 对于 $mr+2 \le i \le n$，降阶递推关系

$$(\alpha^1_{i-1}, \alpha^2_{i-1}, \beta^1_{i-1}, \beta^2_{i-1})^\intercal = (\mathcal{A}^{i-1,1}_{n,1})^{-1}\left((a^1_{i,n-i}, a^2_{i,n-i}, b^1_{i,n-i}, b^2_{i,n-i})^\intercal - \mathcal{A}^{i,0}_{n,0}(\alpha^1_i, \alpha^2_i, \beta^1_i, \beta^2_i)^\intercal\right) \tag{2.20}$$

已实现，且 $(\alpha_n^1, \alpha_n^2, \beta_n^1, \beta_n^2) = 0.$ 现在我们取

$$\alpha_{mp}^2 := -\frac{1}{2a_{0,1}^1}\left(a_{mp,mq+1}^1 - 2\alpha_{mp-1}^1(a_{1,0}^1(mp-2) + a_{1,0}^2(mq+1))\right), \tag{2.21}$$

$$\alpha_{mr}^1 := -\frac{1}{2a_{1,0}^1}\left(a_{mr+1,ms}^1 - 2\alpha_{mr+1}^1((mr+1)a_{0,1}^1 + (ms-1)a_{0,1}^2 + \alpha_{mr+1}^2 a_{0,1}^1)\right). \tag{2.22}$$

此外，我们断言关系

$$\begin{aligned}(\alpha_{mp}^1, \alpha_{mp}^2, \beta_{mp}^1, \beta_{mp}^2)^\intercal &= (-1)^{m(r-p)}\left(\prod_{i=mp}^{mr-1}(\mathcal{A}_{n,1}^{i,1})^{-1}\mathcal{A}_{n,1}^{i+1,0}\right)(\alpha_{mr}^1, \alpha_{mr}^2, \beta_{mr}^1, \beta_{mr}^2)^\intercal \\ &+(\mathcal{A}_{n,1}^{mp,1})^{-1}\Big(\sum_{j=mp+1}^{mr}(-1)^{j-mp}\Big(\prod_{i=mp+1}^{j-1}\mathcal{A}_{n,1}^{i,0}(\mathcal{A}_{n,1}^{i,1})^{-1}\Big)(a_{j,n-j}^1, a_{j,n-j}^2, b_{j,n-j}^1, b_{j,n-j}^2)^\intercal\Big)\end{aligned} \tag{2.23}$$

可导出 α_{mp}^1 和 α_{mr}^2的唯一解。论证如下。给定方程 (2.21)-(2.22) 中的值 α_{mp}^2 和α_{mr}^1，系数 α_{mp}^1 和 α_{mr}^2 可由方程 (2.23) 的第一行和第二行得出，而系数 β_{mp}^1 和 β_{mp}^2 则通过取 $\beta_{mr}^1 = \beta_{mr}^2 := 0.$，由方程 (2.23) 的第三行和第四行得出。最后，通过递归关系 (2.19) 计算出 $mp+1 \le j \le mr-1$ 对应的系数 $(\alpha_j^1, \alpha_j^2, \beta_j^1, \beta_j^2)$。令

$$\mathcal{A}_{n,1}(x_0, x_1, \cdots, x_{4n-1})^\intercal = 0. \tag{2.24}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}x_0 = x_1 = \cdots = x_{4mp-1} = x_{4mp+1} = 0, \quad x_{4n-1} = x_{4n-2} = \cdots = x_{4mr+4} = x_{4mr} = 0,\\ \mathcal{A}_n^{i,1}(x_{4i}, x_{4i+1}, x_{4i+2}, x_{4i+3})^\intercal + \mathcal{A}_n^{i+1,0}(x_{4(i+1)}, x_{4(i+1)+1}, x_{4(i+1)+2}, x_{4(i+1)+3})^\intercal = 0\end{aligned}$$

对于 $mp \le i \le mr-1.$，因此,

$$(x_{4mp}, x_{4mp+1}, x_{4mp+2}, x_{4mp+3})^\intercal = (-1)^{m(r-p)}\left(\prod_{i=mp}^{mr-1}(\mathcal{A}_{n,1}^{i,1})^{-1}\mathcal{A}_{n,1}^{i+1,0}\right)(x_{4mr}, x_{4mr+1}, x_{4mr+2}, x_{4mr+3})^\intercal. \tag{2.25}$$

根据方程 (2.10) 和 (2.9)，对于 $0 \le i \le n-1, i \ne mp, mr$，矩阵 $\mathcal{A}^{i,}{}_{n}{}^{1}$,1 和 $\mathcal{A}^{i,}{}_{n}{}^{0}$,1 均具有如下形式：$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & cI_2 \end{pmatrix}$，其中 $c \ne 0$ 为常数，A 为可逆矩阵。因此，它们的乘积 $\prod_{i=mp}^{mr-1}(\mathcal{A}^{i,}{}_{n}{}^{1},)^{-1}\mathcal{A}^{i+1,}{}_{n}{}^{0}$, 具有相同的结构，即形式为 $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & cI_2 \end{pmatrix}$，其中 c 为非零常数，A 为 2×2 可逆矩阵。现在我们断言，A的 (2, 2) 项非零。反设乘积矩阵$\prod_{i=mp}^{mr-1}(\mathcal{A}^{i,}{}_{n}{}^{1},)^{-1}\mathcal{A}^{i+1,}{}_{n}{}^{0}$, 的 (2, 2) 项为零。方程 (2.25) 的第二行推出 $x_{4mp+1} = x_{4mr} = 0$，而第一行则推出，对于某个非零的 $\gamma_1.$，有 $x_{4mp} = \gamma_1 x_{4mr+1} + \gamma_2$。方程 (2.25) 的第三行和第四行可推出 $(x_{4mp+2}, x_{4mp+3}) = (\gamma_3 x_{4mr+3} + \gamma_4, \gamma_3 x_{4mr+3} + \gamma_5)$，其中 $\gamma_3.$ 非零。因此，零空间 (2.24) 取决于变量 x_{4mr+1}, x_{4mr+2}和 $x_{4mr+3}.$。这意味着，零度$(\mathcal{A}_n$,1) $= 3.$。因此，秩$\mathcal{A}_n$,$_1 = 4n-3$，这与假设矛盾。

现在考虑矩阵 $\mathcal{A}_{n+1,\ 1}$ 对于 $n = m(p+q)+1 = m(r+s)+1.$ 根据 (2.18)，矩阵 $\mathcal{A}^{mp,\ }{}_{n+1}{}^{0}$, $_1$的 (2, 2) 元素以及 $\mathcal{A}^{mr+1,\ }{}_{n+1\ 1}{}^{1}$ 的 (1, 1) 元素均为零。由于 $p \le r, mp < mr+1$ 对于每个

$m \geq 1$. 这会导致秩$\mathcal{A}_{n+1,\ 1} = 4n+3$. 因此，$4n+3$个 $n+1$ 阶项的 $v^{(1)}$ 在第二层规范化步骤中得到简化。对于 $0 \leq j \leq mp-1$ 和 $mp+1 \leq j \leq n$，我们使用关系 (2.19)。此外，设 $\alpha^2_{mp} := 0$,

$$\alpha^1_{mp} = \frac{a^1_{mp,mq+2} - 2\alpha^1_{mp-1}((mp-2)a^1_{1,0} + (n-mp+1)a^2_{1,0})}{2a^2_{0,1}},$$
$$(\beta^1_{mp}, \beta^2_{mp}) = \frac{(b^1_{mp,mq+2}, b^2_{mp,mq+2})}{2a^2_{0,1}} + \frac{((1-mp)a^1_{1,0} + (mp-1-n)a^2_{1,0})(\beta^1_{mp-1}, \beta^2_{mp-1}) + \alpha^1_{mp-1}(b^1_{1,0}, b^2_{1,0})}{a^2_{0,1}}. \quad (2.26)$$

这里，为简洁起见，我们用向量 V 除以实数（例如 $a^2_{0,1}$）来表示 $\frac{1}{a^2_{0\ ,1}} V$。本文中将频繁使用这种记法。因此，$\mathscr{P}^k_{n+1,0}$、$\mathscr{R}^k_{n+1,0}$ 关于 $k=1$、2 和 $\mathscr{P}^2_{mp,n+1-mp}$ 的项在此阶不一定要化简。

情形（ii）：我们有 $p > r$. 由于 $\ker \mathcal{A}_{n,1} = \{0\}$，$4n$-数目的 n-阶项已化简。随后对 $0 \leq i \leq mp-1$ 应用关系（2.19），而对$n \geq i \geq mp+2$应用关系（2.20）。因此，关于 $k=1$、2、$0 \leq j \leq n$、$j \neq mp$的项 $\mathscr{P}^k_{j,n-j}$和 $\mathscr{R}^k_{j,n-j}$已化简。

对于矩阵 $\mathcal{A}_{n+1,1}$，$\mathcal{A}^{mp}{}^{0}_{,n+1\ ,1}$ 的第二行和 $\mathcal{A}^{mr+1}{}^{1}_{,n+1\ 1\ ,}$的第一行均为零。现在，不等式 $p > r$ 意味着 $mp \geq mr+1.$。因此，我们考虑两个子情形：（1） $mp = mr+1$和（2） $mp > mr+1.$

子情形 (1) 推断出 $m=1$ 和 $p = r+1$。此处，$\operatorname{rank}(\mathcal{A}_{n+1,\ 1}) = 4n+2$，且系数的赋值方式与情形 $p \leq r$ （ii）类似。因此，$\mathscr{P}^2_{p,\ q+2}$、$\mathscr{P}^1_{p+1,\ q+1}$ 以及 $\mathscr{R}^k_{p+1,\ q+1}$ （$k=1$，2）的项不一定能被化简。

当 $m \geq 2$或 $p > r+1$时，子情形 (2) 成立。由于 $\operatorname{nullity}(\mathcal{A}_{n+1,\ 1}) = 0$，$4n+4$ 个数的项会从一级正规形中特别消去。此处系数的赋值方式类似。具体而言，对于 $0 \leq i \leq mp-1$，我们赋予关系式 (2.19)；对于 $mp+2 \leq i \leq n+2$，则使用关系式 (2.20)，其中 $(\alpha^1_{n+1}, \alpha^2_{n+1}, \beta^1_{n+1}, \beta^2_{n+1}) = (0, 0, 0, 0)$。因此，$\mathscr{P}^k_{mq+2}$ 和 $\mathscr{R}^k_{mp,\ mq+2}$ （$k=1$，2）的项可能会保留在第二层正规形中。

现在假设对于一个 $j = 3, \cdots, p+q$和 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$，$p+q > 2$，$n = m(p+q)+j$。由于矩阵 $\mathcal{A}^{j}{}^{0}_{,n\ ,1}$ 对于 $0 \leq j \leq n-1$具有可逆性，$\mathcal{A}_{n,\ 1}$ 的所有列均线性无关。因此，秩为 $\mathcal{A}_{n,\ 2} = 4n$，且对于 $k=1$、2、$0 \leq j \leq n-1$，项 $\mathscr{P}^k_{j,\ n-j}$和 $\mathscr{R}^k_{j,\ n-j}$得以简化。因此，系数满足递归关系（2.19），$v^{(1)}$ 的第二层正规形由（2.15）给出。

□

现在我们引入一个自然数的划分如下：

$P_1 := \{m\operatorname{lcm}(p+q, r+s)+1 \mid m \in \mathbb{N}\}$、$P_3 := \{m\operatorname{lcm}(p+q, r+s)+2 \mid m \in \mathbb{N}\}$、$P_2 := \{m'(r+s)+1 \mid \exists m,\ m' \in \mathbb{N},\ m(p+q)-m'(r+s)=1\}$、$P_4 := \{m'(r+s)+1 \mid \exists m,\ m' \in \mathbb{N},\ m'(r+s)-m(p+q)=1\}$、

$P_5 := \{m(p+q)+1 \mid m \in \mathbb{N}\} \setminus P_1 \cup P_3$, $P_6 := \{m(p+q)+2 \mid m \in \mathbb{N}\} \setminus P_2 \cup P_4$,以及 $P_7 := \mathbb{N} \setminus \cup_{i=1}^6 P_i$.此外定义 $\mathbb{N}_m := \{1, 2, \cdots, m\}$. 为了只处理某个充分大的 N下的 $2N+1$次截断标准形，以下为方便起见，我们假设所有求和式截至 $2N+1$ 次都只有有限个非零项。

引理 2.5. 设条件 (2.14) 成立，$r+s \neq p+q$ 且 $\gcd(r+s, p+q) = 1$。因此，$v^{(1)}$ 的第二层正规形为

$$\Theta + \sum_{k\in\mathbb{N}_2}(a_{0,1}^k \mathscr{P}_{0,1}^k + b_{0,1}^k \mathscr{R}_{1,0}^k) + a_{0,2}^2 \mathscr{P}_{0,2}^2 + \sum_{n\in P_7, i\in\mathbb{N}_2}\left(a_{n,0}^k \mathscr{P}_{n,0}^k + b_{n,0}^k \mathscr{R}_{n,0}^k\right),$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}_6, i\in\mathbb{N}_2}\sum_{n\in P_k, j\in Q_k}(a_{j,n-j}^k \mathscr{P}_{j,n-j}^k + b_{j,n-j}^k \mathscr{R}_{j,n-j}^k) \tag{2.27}$$

其中 $Q_5 := \left\{ {}_{\ p+q}^{(n-1\ p}\right\})$ 且 $Q_6 := \left\{\frac{(n-2)p}{p+q}\right\}$,

- $Q_1 := \left\{\frac{(n-1)p}{p+q}, \frac{(n-1)r}{r+s}+1\right\}$ *for* $\frac{p}{p+q} \leq \frac{r}{r+s}$, *and* $Q_1 := \left\{\frac{(n-1)p}{p+q}\right\}$ *when* $\frac{p}{p+q} > \frac{r}{r+s}$.
- $Q_2 = \{m, n\}$，$a_{m,\ n-k}^1 = b_{m,\ n-m}^k = 0$ 对于 $k = 1$，2、$m = {}_{\ p+q}^{(n-2)\ p}$ 当 $m \leq {}_{\ r+s}^{(n-2)\ r} + 1$. 否则，$Q_2 := \{k\}$.
- $Q_3 := \{0, m+1\}$，$a_{m,\ n-m}^2 = b_{m,\ n-m}^k = 0$ 对于 $k = 1$，2、$m = {}_{\ r+s}^{(n-2)\ r} + 1$ 若 ${}_{\ p+q}^{(n-1)\ p} \leq m$. 对于其余情况，令 $Q_3 := \left\{ {}_{\ p+q}^{(n-1\ p}\right\})$.
- $Q_4 := \{m, n\}$，$a_{m,\ n-m}^1 = b_{m,\ n-m}^k = 0$ 对于 $k = 1$，2、$m = {}_{\ p+q}^{(n-2)\ p}$ 若 $m \leq {}_{\ r+s}^{(n-1)\ r}$. 否则，我们定义 $Q_4 := \{k\}$.

证明。由于 $p+q$ 和 $r+s$ 互素，$p+q$、$r+s$ 的最小公倍数为 $=(p+q)(r+s)$。令 $n \in P_1$.，则 $n = m(r+s)(p+q)+1$，其中 $m \in \mathbb{N}$. 为一个 ..... 此外，矩阵 $\mathcal{A}^{m(r+s)p,\ n\ 1\ \ 0}$，的第一、第三和第四列，以及矩阵 $\mathcal{A}^{m(p+q)r,\ n\ 1\ \ 1}$，的第二、第三和第四列均为零向量。因此，我们采用与引理 2.4 的证明类似的方法。具体而言，考虑两种情形：

$$(I)\quad \frac{p}{p+q} \leq \frac{r}{r+s} \qquad \text{and} \qquad (II)\quad \frac{p}{p+q} > \frac{r}{r+s}.$$

对于情形（I），项 $\mathscr{P}_{j,\ n-j}^2$、$\mathscr{R}_{j,\ n-j}^1$、$\mathscr{R}_{j,\ n-j}^2$（其中 $j \in \{m(r+s)p$、$m(p+q)r+1\}$）仍可能保留在第二层正规形中。对于情形（II），多项式向量场 $\mathscr{P}_{j,\ n-j}^k$ 和 $\mathscr{R}_{j,\ n-j}^k$（其中 $k = 1$、2、$0 \leq j \leq n$、$j \neq m(r+s)p$）可以从一级正规形中消去。$0 \leq i \leq m(r+s)p-1$ 的系数赋值遵循 (2.19)；对于 $m(r+s)p+2 \leq i \leq n+1$，则应用 (2.20)。

令 $n \in P_2$. 因此，矩阵 $\mathcal{A}^{m(r+s)p}$ 的 (2, 2) 元素、$_{n\ 1\ \ 0}$ 和 $\mathcal{A}^{m(p+q)r+1}$ 的 (1, 1) 元素、$_{n\ 1\ \ 1}$ 均为零。当 $m(r+s)p \leq m(p+q)r+1$ 时，对于 $k = 1$、2、$0 \leq j \leq n-1$，所有 n 阶齐次项 $\mathscr{P}_{j,\ n-j}^k$ 和 $\mathscr{R}_{j,\ n-j}^k$（仅有一个例外）都得到了简化。这里的例外是多项式向量场 $\mathscr{P}_{m(r+s)p,\ m(r+s)q+2}^2$，它仍可能保留在规范化系统中。若 $m(r+s)p > m(p+q)r+1$，则对于 $k = 1$、2、$j = m(r+s)p$，欧拉向量场 $\mathscr{P}_{j,\ n-j}^k$ 和旋转向量场 $\mathscr{R}_{j,\ n-j}^k$ 在第二层正规形步骤中不一定能够消去。

现在我们首先断言 $P_3 \neq \emptyset$。根据假设，$p+q$ 和 $r+s$ 互质。根据贝祖引理，存在非零整数 n_1 和 n_2，使得 $n_1(p+q) + n_2(r+s) = 1$. 贝祖

系数表示为 $(n_1-\ell(r+s)\ n_2+\ell(p+q))$，其中 $\ell\in\mathbb{Z}$。由于 $p+q$和 $r+s$为正数，$n_1n_2<0$.当 $n_1>0$ 和 $n_2<0$时，$n_1(p+q)+1\in P_3$.否则，对所有 $k'\le$，$\min\left\{\left\lfloor\frac{n_1}{r+s}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{-n_2}{p+q}\right\rfloor\right\}$，$(n_1-\ell'(r+s))(p+q)+1\in P_3$. 因此，对于 $n\in P_3$，存在正整数 m,m'，使得$n=m(p+q)+1=m'(r+s)+2$. 回顾一下，$\mathcal{A}^{mp}{}_{,n\,1}{}^{0}$的第一、第三和第四列均为零向量。矩阵 $\mathcal{A}^{m'r+1}{}_{,n\,1}{}^{1}$ 的 (1, 1) 元素也为零。当 $mp\le m'r+1$时，零度$(\mathcal{A}_n,1)=1$.因此，$4n-1$-个 n-阶项的数量可以简化。系数满足 $m'r+3\le i\le n$ 和 $1\le i\le m'r+1$. 时的方程 (2.20)。因此，我们令 $\alpha^1_{m'r+1}:=0$，并得到

$$\alpha^2_{m'r+1}=\frac{a^2_{m'r+2}-(a^1_{0,1}(m'r+2)+a^2_{0,1}(m's-2))\alpha^2_{m'r+2}}{a^1_{1,0}(m'r+1)+a^2_{1,0}m's},$$
$$\beta^1_{m'r+1}=\frac{b^1_{m'r+2}-(a^1_{0,1}(m'r+2)+a^2_{0,1}(m's-1))\beta^1_{m'r+2}+b^1_{0,1}\alpha^2_{m'r+2}}{a^1_{1,0}(m'r+1)+a^2_{1,0}m's},$$
$$\beta^2_{m'r+1}=\frac{b^2_{m'r+2}-(a^1_{0,1}(m'r+2)+a^2_{0,1}(m's-1))\beta^2_{m'r+2}+b^2_{0,1}\alpha^2_{m'r+2}}{a^1_{1,0}(m'r+1)+a^2_{1,0}m's}.$$

因此，对于 $k=1$，2，项$\mathscr{P}^k_0$、$_n$、$\mathscr{R}^k_0$、$_n$ 以及$\mathscr{P}^1_{m'r+2}$、$_{m's-1}$ 不一定能化简。当$mp>m'r+1$时，根据零度$(\mathcal{A}_n,1)=0$ 以及矩阵 $\mathcal{A}^j{}_n{}^{0}$,1和 $\mathcal{A}^i{}_n{}^{1}$,1对于 $0\le j\le mp-1$ 和 $mp\le i\le n-1$的可逆性，系数由$0\le i\le mp-1$时的递归关系(2.19)和 $mp+1\le i\le n$时的关系(2.20)确定。因此，项$\mathscr{P}^k_j$、$_{n-j}$、$\mathscr{R}^k_j$、$_{n-j}$对于 $k=1$，2以及 $0\le j\le n$、$j\ne mp$，从第二层正规形系统中移除。与上述情况类似，P_4 非空。设 $n\in P_4.$，$\mathcal{A}^{m'r}{}_{n\,1}{}^{1}$ 的第二、第三和第四列为零向量。此外，$\mathcal{A}^{mp}{}_{n\,1}{}^{0}$ 的 (2, 2) 元素为零。当 $mp\le m'r$时，$\mathcal{A}_n$,1的转置矩阵的行最简阶梯形具有一维零空间。因此，$\mathcal{A}_n$,1的秩为 $4n-1$。由于矩阵 $\mathcal{A}^i{}_{n\,1}{}^{0}$对于 $0\le i\le n-1\,i\ne mp$可逆，系数由 $\alpha^2_{mp}:=0$ 时的关系(2.19)赋值，而系数 α^1_{mp}、β^1_{mp}、β^2_{mp} 由方程(2.26)定义。因此，在第二层步骤中，对于 $k=1$，2，项$\mathscr{P}^k_n$,0和$\mathscr{R}^k_n$,0以及$\mathscr{P}^2_{mp}$、$_{n-mp}$ 不一定能化简。若 $mp>m'r$，秩$(\mathcal{A}_n,1)=4n.$，系数赋值与 $n\in P_3.$ 的情形相同。因此，对于$k=1$，2，$0\le j\le n$、$j\ne mp$，项$\mathscr{P}^k_j$、$_{n-j}$和$\mathscr{R}^k_j$、$_{n-j}$可以消去。

若 $n\in P_5$，矩阵 $\mathcal{A}^{mp}{}_{,n\,1}{}^{0}$,的第一、第三和第四列是零向量。由于$\mathcal{A}_n$ 的列空间,1具有线性无关性，该矩阵的秩为 $4n.$对于 $0\le i\le mp-1$，系数由递归关系 (2.19) 确定，而对于 $mp+2\le j\le n$，则应用关系 (2.20)。因此，对于 $k=1$、2 和 $0\le j\le n$、$j\ne mp$，所有项 $\mathscr{P}^k_{j,n-j}$,$\mathscr{R}^k_{j,n-j}$均可规范化。

取 $n\in P_6.$，则 $\mathcal{A}^{mp}$ 的 (2, 2) 元素$_{,n\,1}{}^{0}$,为零，且 $\mathcal{A}_{n,1}$ 的秩为 $4n$。系数的确定方式与 P_3-情形类似。因此，对于 $k=1$，2，项 $\mathscr{P}^k_{mp,n-mp}$ 和 $\mathscr{R}^k_{mp,n-mp}$ 可能保留在第二层步骤中。对于 $n\in P_7$，我们有

$$P_7=\{m(p+q)+j|j\in\mathbb{N},3\le j\le p+q\}.$$

由于所有矩阵 $\mathcal{A}^i{}_{,n}{}^{0}{}_{,1}$和 $\mathcal{A}^i{}_{,n}{}^{1}{}_{,1}$对于 $0\le i\le n-1$ 都是可逆的，秩$(\mathcal{A}_{n,1})=4n.$因此所有 n-阶

齐次项 $\mathscr{P}^k_{j,n-j}$ 和 $\mathscr{R}^k_{j,n-j}$ 对于 $k=1$、2、 $0\le j\le n-1$，将从第二层正规形中移除。

□

引理 2.6. 假设条件 (2.14) 成立。若 $r+s\neq p+q$ 且最大公约数$(r+s,p+q)>1$，则 $v^{(1)}$ 的第二层正规形为

$$\begin{aligned}\Theta+\textstyle\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\left(a^k_{0,1}\mathscr{P}^k_{0,1}+b^k_{0,1}\mathscr{R}^k_{1,0}\right)+a^2_{0,2}\mathscr{P}^2_{0,2}+\sum_{n\in P_7,i\in\mathbb{N}_2}\left(a^k_{n,0}\mathscr{P}^k_{n,0}+b^k_{n,0}\mathscr{R}^k_{n,0}\right)\\ +\textstyle\sum_{m\in\{1,2,5,6\},k\in\mathbb{N}_2}\sum_{n\in P_m,j\in Q_m}\left(a^k_{j,n-j}\mathscr{P}^k_{j,n-j}+b^k_{j,n-j}\mathscr{R}^k_{j,n-j}\right),\end{aligned}\tag{2.28}$$

其中， Q_i 对于 $i=1$，2，5，6，7 在引理 2.5 中定义，且 $Q_3=Q_4=P_3=P_4=\emptyset.$

证明. 由于最大公约数$(p+q,r+s)\neq 1$， P_3 和 P_4 为空。关于 $n\in P_5$、 $n\in P_6$ 和 $n\in P_7$ 情形的论证与引理 2.5 中相同。因此，只需研究 $n\in P_1$ 和 $n\in P_2$ 的情形。令 $d:=$ 最小公倍数$(p+q,r+s)$，且对于一个 $m\in\mathbb{N}$， $n:=md+1\in P_1$。由于 $\frac{dmp}{p+q}\in\mathbb{N}$，我们有

$$\tfrac{dmp}{p+q}a^1_{0,1}+\left(n-1-\tfrac{dmp}{p+q}\right)a^2_{0,1}=\tfrac{dmp}{p+q}a^1_{0,1}+\tfrac{dmq}{p+q}a^2_{0,1}=0.$$

$\frac{dmp}{}$因此，矩阵 $\mathcal{A}^{p+q}_{n\,1}$ ，的第一、第三和第四列均为零向量。通过类似的$\frac{dmr}{}$论证，矩阵 $\mathcal{A}^{r+s}_{n\,1,}$ 的第二、第三和第四列为零。对于情形 $\frac{p}{p+q}\le\frac{r}{r+s}$，按照引理 2.5 中 P_1-情形的论证，当 $k=1$、2、 $0\le j\le n$ 时，对于 $j\neq\frac{dmp}{p+q}$和 $j\neq\frac{dmr}{r+s}+1.$，我们可以消去 $\mathscr{P}^k_{j,\ n-j}$、 $\mathscr{R}^k_{j,\ n-j}$。此外，当 $j=\frac{dmp}{p+q}$和 $j=\frac{dmr}{r+s}+1.$时， $\mathscr{P}^1_{j,\ n-j}$可以被规范化。如果 $\frac{p}{p+q}>\frac{r}{r+s}$，则对于 $k=1$、2，向量场 $\mathscr{P}^k_{\frac{dmp}{p+q},\ n-\frac{dmp}{p+q}}$， $\mathscr{R}^k_{\frac{dmp}{p+q},\ n-\frac{dmp}{p+q}}$可能保留在正规形系统中。

现在假设 $n=md+2\in P_2$ 对于一个 $m\in\mathbb{N}.$ 当 $\frac{dmp}{p+q}\le\frac{dmr}{r+s}+1$ 时，项 $\mathscr{P}^k_{n,0}$,$\mathscr{R}^k_{n,0}$ 对于$k=1$、2 和 $\mathscr{P}^2_{\frac{dmp}{p+q},n-\frac{dmp}{p+q}}$可以保留在正规形系统中。对于 $\frac{dmp}{p+q}>\frac{dmr}{r+s}+1$，所有向量场$\mathscr{P}^k_{j,n-j}$, $\mathscr{R}^k_{j,n-j}$对于 $k=1$、2 和 $0\le j\le n,j\neq\frac{dmp}{p+q}$，都得到了化简。因此，第二层正规形表示为向量场(

2 27 $P_3=P_4=\emptyset$ $\sum_{n\in P_3}\ \sum_{j\in Q_3}.$)。 $\sum_{n\in P_4}\ \sum_{j\in Q_4}$ $\frac{dmp}{p+q}\le\frac{dmr}{r+s}+1$ $\frac{dmp}{p+q}>\frac{dmr}{r+s}+1$ 由于，求和式、 和 在 和 的两种情形下均为零。这就得出了我们的断言。

□

推论 2.7. *[11,* 推论 3.*5]* 设条件 (2.14) 成立且 $\frac{s}{r}=\frac{q}{p}$。那么，方程 (1.3) 中 $v^{(1)}$ 的第二层正规形表示为

$$\begin{aligned}\Theta+a^1_{0,1}\mathscr{P}^1_{0,1}+a^1_{1,0}\mathscr{P}^1_{1,0}+\sum_{m\in\mathbb{Z}_{\ge0},j\in\{0,1\}}\left(a^2_{mp+j,mq+1-j}\mathscr{P}^2_{mp+j,mq+1-j}+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}b^k_{mp+j,mq+1-j}\mathscr{R}^k_{mp+j,mq+1-j}\right)\\ +\sum_{m\in\mathbb{Z}_{\ge0}}\left(a^2_{mp,mq+2}\mathscr{P}^2_{mp,mq+2}+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\left(a^k_{mp+2,mq}\mathscr{P}^k_{mp+2,mq}+b^k_{mp+2,mq}\mathscr{R}^k_{mp+2,mq}\right)\right)\\ +\sum_{m\in\mathbb{Z}_{\ge0}}\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\sum_{j=3}^{p+q}\left(a^k_{m(p+q)+j,0}\mathscr{P}^k_{m(p+q)+j,0}+b^k_{m(p+q)+j,0}\mathscr{R}^k_{m(p+q)+j,0}\right).\end{aligned}$$

2.2 情形 II：或者 $a^1_{0,\ 1}a^2_{0,\ 1}>0$，$a^1_{1,\ 0}a^2_{1,\ 0}>0$，$a^1_{0,}{}_{,\ 1}\overline{a^2_0}^{\ 1}\in\mathbb{Q}^c$，或者 $a^1_{1,}{}_{,\ 0}\overline{a^2_1}^{\ 0}\in\mathbb{Q}^c$.

引理 2.8. *[11,* 引理 3.*6]* 假设 $a^1_{0,\ 1}a^2_{0,\ 1}>0$, $a^2_{0,}{}_{,\ 1}\overline{a^1_0}^{\ 1}\notin\mathbb{N}$，并考虑向量场

$$v^{(2)}=\Theta+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\left(a^k_{0,1}\mathscr{P}^k_{0,1}+b^k_{0,1}\mathscr{R}^k_{0,1}\right)+a^2_{0,2}\mathscr{P}^2_{0,2}+a^2_{1,1}\mathscr{P}^2_{1,1}+\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\left(a^k_{j,0}\mathscr{P}^k_{j,0}+b^k_{j,0}\mathscr{R}^k_{j,0}\right),\quad(2.29)$$

$v^{(1)}$ 的第二层正规形由 (2.29) 给出，其中 $a^2_{1,\ 1}=0$。

引理 2.9. 令 $a^2_{0,}{}_{,1}\overline{a^1_0}^{\ 1}\in\mathbb{N}$ 和 $a^2_{0,1}\neq a^1_{0,1}$。$v^{(1)}$ 的第二层正规形由 (2.29) 给出，其中 $a^2_{1,1}=0$ 以及对应的含有 $a^2_{n-1,1}$ 的项不一定已化简。当 $a^2_{0,1}=a^1_{0,1}$时，第二层由 (2.29) 表示，其中

1. $a^2_{2,0}=0$, 若 $a^1_{1,0}\neq a^2_{1,0}$。 2. $b^1_{2,0}=0$，当 $a^1_{1,0}=a^2_{1,0}$ 且 $|b^1_{1,0}|+|a^1_{1,0}|\neq 0$. 3. $b^2_{2,0}=0$，对于 $a^1_{1,0}=a^2_{1,0}$, $b^1_{1,}$ $_0=a^1_{1,0}=0$ 且 $b^2_{1,0}\neq 0$.

证明。假设 $a^2_{0,}{}_{,1}\overline{a^1_0}^{\ 1}\in\mathbb{N}$ 和 $a^2_{0,1}\neq a^1_{0,1}$。由于矩阵 $\mathcal{A}^{n-1,}{}_{n\ 1}{}^{\ 0}$, 的第二行是零向量，项 $\mathscr{P}^2_{n-1,1}$ 不一定能化简。对于 $a^1_{1,0}\neq 0$, 的情形，与 $a^2_{n,0}$ 相关的项可以改为规范化。证明的其余部分可通过类似于引理 2.8 的证明的方法得到。现在令 $a^2_{0,1}=a^1_{0,1}$。对于断言 1，矩阵 $\mathcal{A}_{2,1}$ 的第一行和第六行线性相关，而 $\mathcal{A}^{1,}{}_{0\ 2\ 1}$ 的第二行是零向量。因此，在第二层步骤中，项 $\mathscr{P}^2_{1,1}$ 不一定能消去。由于 $a^1_{1,0}\neq a^2_{1,0}$，我们交换第五行

与第二行，并通过修改后的矩阵 $\widehat{\mathcal{A}}^{1,}{}_{0\ 2\ 1}$, 重新计算系数 $(\alpha^1_0,\alpha^2_0,\beta^1_0,\beta^2_0)$，并根据方程 (2.17) 计算系数 $(\alpha^1_1,\alpha^2_1,\beta^1_1,\beta^2_1)$。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，其中矩阵 $\mathcal{A}^{1,}{}_{0\ 2\ 1}$, 和 $\mathcal{A}^{0,}{}_{1\ 2\ 1}$, 分别替换为 $\mathcal{A}^{1,}{}_{0\ 2\ 1}$, 和 $\mathcal{A}^{0,}{}_{1\ 2\ 1}$, 。我们还需要将 $a^2_{1,1}$ 替换为 $a^2_{2,0}$。因此，在第二层标准形步骤中，$j=0,1$ 的项 $\mathscr{P}^1_{j,2-j},\mathscr{R}^1_{j,}$ $_{2-j},\mathscr{R}^2_{j,2-j}$ 和 $\mathscr{P}^2_{2,0}$ 得以简化。

在权利要求2中，我们有 $a^1_{0,1}=a^2_{0,1}$ 和 $a^1_{1,0}=a^2_{1,0}$。在这种情况下，$\mathcal{A}_{2,1}$ 的第八行和第五行线性相关。因此，在第二层步骤中，项 $\mathscr{P}^2_{2,0}$ 可能无法消去。由于 $|b^1_{1,0}|+|a^1_{1,0}|\neq 0$，$\mathcal{A}_{2,1}$ 的第十一行不是零向量，若将其与第六行互换，$\widehat{\ }$ $\mathcal{A}^{1,}{}_{0\ 2\ 1}$, 修改后的矩阵将变为可逆矩阵。当然，我们需要将 $b^1_{2,0}$ 替换为 $a^2_{1,1}$。项 $\mathscr{P}^2_{0,2}$、$\mathscr{P}^2_{1,1}$、$\mathscr{P}^1_{2,0}$、$\mathscr{P}^2_{2,0}$ 和 $\mathscr{R}^2_{2,0}$ 可能无法从一级正规形中规范化。

对于权利要求3，我们有 $b^1_{1,\ 0}=a^1_{1,\ 0}=0$，因此，$\mathcal{A}_{2,\ 1}$ 的第十一行是零向量。由于 $b^2_{1,\ 0}\neq 0$，$\mathcal{A}_{2,\ 1}$ 的第十二行非零。系数的赋值方式与权利要求2类似，但将第十二行替换为 $\mathcal{A}_{2,\ 1}$ 的第五行，并将 $a^1_{1,\ 1}$ 与 $b^2_{2,\ 0}$ 互换。因此，在权利要求1、2和3中，$j=0$的项 $\mathscr{P}^1_{j,\ 2-j},\mathscr{R}^1_{j,\ 2-j},\mathscr{R}^2_{j,\ 2-j}$ 和 $\mathscr{R}^2_{2,}$ $_0$ 在第二层标准形步骤中被规范化。

□

引理 2.10. 当 $a^1_{1,\ 0}a^2_{1,\ 0}>0$ 且 $a^1_{1,}\overline{a^2_1}^{0}_{,\ 0}\notin\mathbb{N}$时，存在状态变量的近恒等多项式变换，使其将 $v^{(1)}$ 变换为其第二层正规形，具体如下

$$v^{(2)}=\Theta+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\left(a^k_{1,0}\mathscr{P}^k_{1,0}+b^k_{1,0}\mathscr{R}^k_{1,0}\right)+a^1_{2,0}\mathscr{P}^1_{2,0}+a^1_{1,1}\mathscr{P}^1_{1,1}+\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\left(a^k_{0,j}\mathscr{P}^k_{0,j}+b^k_{0,j}\mathscr{R}^k_{0,j}\right)\quad(2.30)$$

其中 $a^2_{1,\ 1}=0.$

证明。当 $n=2$和 $a^1_{1,0}\neq a^2_{1,0}$ 时，系数定义为 $\alpha^1_1=0,\alpha^2_1=\ {}^{a^2_2\overline{2a^1_1}^{0}}_{,\ 0},\beta^1_1=\ {}^{b^1_2\overline{2a^1_1}^{0}}_{,\ 0},\beta^2_1=\ {}^{b^2_2\overline{2a^1_1}^{0}}_{,\ 0}$，以及

$$(\alpha^1_0,\alpha^2_0,\beta^1_0,\beta^2_0)^{\intercal}=(\mathcal{A}^{0,1}_{2,1})^{-1}\left((a^1_{1,1},a^2_{1,1},b^1_{1,1},b^2_{1,1})^{\intercal}-\mathcal{A}^{1,0}_{2,1}(\alpha^1_1,\alpha^2_1,\beta^1_1,\beta^2_1)^{\intercal}\right).$$

这些简化了 $\mathscr{P}^k_{j,2-j}$和 $\mathscr{R}^k_{j,2-j}$ 中 $j=1$、2、$k=1$、2 的所有项，但有一个例外，即 $\mathscr{P}^1_{2,0}$。当 $n=2$ 时，其他断言的证明与引理 2.8 类似，为简洁起见，这里省略。

对于 $n>2$，矩阵 $\mathcal{A}^{k,\ 1}_{\ n}$，对于 (2.10)中的 $n\geq k\geq 1$ 是可逆的。然后，递归关系 (2.20) 被应用于将项 $\mathscr{P}^1_{0,\ n},\mathscr{P}^2_{0,\ n},\mathscr{R}^1_{0,\ n}$ 和 $\mathscr{R}^2_{0,\ n}$ 规范化。 □

引理 2.11. 1. 设 $a^1_{0,}\overline{a^2_0}^{1}_{,\ 1}\in\mathbb{Q}^c.$ 那么， $v^{(1)}$ 的第二层正规形满足方程 (2.29)，其中 $a^2_{1,\ 1}=0.$ (1.3)

2. 当 $a^1_{1,}\overline{a^2_1}^{0}_{,\ 0}\in\mathbb{Q}^c$时， $v^{(1)}$ 的第二层正规形可表示为 (2.30)，其中 $a^1_{1,\ 1}=0.$

证明. 假设 $n=2.$ 由于 $a^1_{0,}\overline{a^2_0}^{1}_{,\ 1}\neq 1$ 且 $a^1_{1,}\overline{a^2_1}^{0}_{,\ 0}\neq 1$，根据引理 2.8 和 2.10， $a^1_{1,\ 1}=a^2_{1,\ 1}=0.$ 对于 $n>2$，论证与引理 2.10 的证明类似，此处为简洁起见略去。

□

例 2.12. 考虑一级正规形

$$\begin{aligned}v^{(1)}:=&\mathscr{R}^1_{0,0}+\sqrt{2}\mathscr{R}^2_{0,0}+\alpha\mathscr{P}^1_{0,1}+\beta\mathscr{P}^2_{0,1}+\mathscr{P}^1_{1,0}-\mathscr{P}^2_{1,0}+\mathscr{P}^1_{1,1}+\mathscr{P}^2_{1,1}+\mathscr{P}^2_{2,0}+\mathscr{R}^1_{2,0}+\tfrac{1}{6}\mathscr{P}^1_{2,1}\\&+\tfrac{2}{3}\mathscr{P}^2_{2,1}+\mathscr{P}^2_{3,0}+\mathscr{P}^1_{3,1}+\mathscr{P}^2_{3,1}+\mathscr{P}^2_{4,0}+\mathscr{R}^2_{4,0}+\mathscr{P}^1_{4,1}+\mathscr{P}^2_{4,1}+\mathscr{P}^1_{5,0}+\mathscr{P}^2_{5,0}.\end{aligned}\quad(2.31)$$

并假设 $\alpha=1,\beta=2.$ 因此， $a^1_{0,\ 1}=1,a^2_{0,\ 1}=2$ 且 $a^1_{0,\ 1}a^2_{0,\ 1}>0.$ 这些条件与引理 2.9 相符，其中 $a^1_{0,}\overline{a^2_0}^{1}_{,\ 1}=\frac{1}{2}$。按照引理 2.8 的证明，我们考虑三种情况：

1. 规范化2阶项：对于系数的计算，我们有$\alpha^k_{1,\ 0}=\beta^k_{1,\ 0}=0$ 对于 $k=1$、2和

$$(\alpha^1_{1,0},\alpha^2_{1,0},\beta^1_{1,0},\beta^2_{1,0})^{\intercal}=\begin{bmatrix}2&-2&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}.$$

因此，用于简化2阶向量场的变换生成元为$X_1:=-\frac{1}{2}\mathscr{P}^2_{1,\ 0}$。随后，规范化至3阶的正规形向量场为

$$\Theta+2\mathscr{P}^2_{0,1}+\mathscr{P}^1_{0,1}+2\mathscr{P}^1_{1,0}-\mathscr{P}^2_{1,0}+3\mathscr{P}^2_{2,0}+\mathscr{R}^1_{2,0}-\tfrac{1}{3}\mathscr{P}^1_{2,1}+\tfrac{2}{3}\mathscr{P}^2_{2,1}+\mathscr{R}^1_{3,0}+\tfrac{7}{6}\mathscr{P}^1_{3,1}+\tfrac{1}{6}\mathscr{P}^2_{3,1}+\mathscr{P}^2_{4,0}+\mathscr{R}^2_{4,0}. \tag{2.32}$$

2. 三阶项：矩阵 $\mathcal{A}^2_{,\ 0\ 31}$，的第二行是零向量，系数满足

$$(\alpha_i^1,\alpha_i^2,\beta_i^1,\beta_i^2)=(0,0,0,0)\text{ when }i=0,1,$$

$$(\alpha_2^1,\alpha_2^2,\beta_2^1,\beta_2^2)^\intercal=\left(\widehat{\mathcal{A}^{2,0}_{3,1}}\right)^{-1}\left(a^1_{2,1},a^2_{3,0},b^1_{2,1},b^2_{2,1}\right)^\intercal=\begin{bmatrix}4&-2&0&0\\2&5&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{54}\\\frac{7}{54}\\0\\0\end{bmatrix}.$$

于是，得到了变换生成元 $X_2:=-\frac{1}{54}\mathscr{P}^1_{2,\ 0}+\frac{7}{54}\mathscr{P}^2_{2,\ 0}$。因此，向量场 (2.32) 转化为

$$\Theta+2\mathscr{P}^2_{0,1}+\mathscr{P}^1_{0,1}+2\mathscr{P}^1_{1,0}-\mathscr{P}^2_{1,0}+3\mathscr{P}^2_{2,0}+\mathscr{R}^1_{2,0}+\tfrac{2}{3}\mathscr{P}^2_{2,1}+\tfrac{2}{27}\mathscr{P}^1_{3,0}+\tfrac{7}{6}\mathscr{P}^1_{3,1}+\tfrac{1}{6}\mathscr{P}^2_{3,1}+\tfrac{7}{9}\mathscr{P}^2_{4,0}-\tfrac{2}{27}\mathscr{R}^1_{4,0}+\mathscr{R}^2_{4,0}. \tag{2.33}$$

3. $n\geq 4$ 阶项：对于所有整数值 $n\geq 4$ 和 $0\leq j\leq n-1$，矩阵 $\mathcal{A}^{j,\ 0}_{,\ n\ ,\ 1}$均可逆。因此，用于化简四阶项的变换生成元系数可表示为

$$(\alpha_i^1,\alpha_i^2,\beta_i^1,\beta_i^2)=(0,0,0,0)\text{ when }i=0,1,2,$$

$$(\alpha_2^1,\alpha_2^2,\beta_2^1,\beta_2^2)^\intercal=\left(\mathcal{A}^{3,0}_{4,1}\right)^{-1}\left(a^1_{3,1},a^2_{3,0},b^1_{3,1},b^2_{3,1}\right)^\intercal=\begin{bmatrix}6&-2&0&0\\0&2&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{7}{6}\\\frac{1}{6}\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{9}\\\frac{1}{12}\\0\\0\end{bmatrix}.$$

由此得到 $X_3:=\frac{2}{9}\mathscr{P}^1_{3,\ 0}+\frac{1}{12}\mathscr{P}^2_{3,\ 0}$。后者将向量场 (2.33) 转化为截断的（即模去五阶及更高阶项后的）第二层正规形

$$v^{(2)}:=\Theta+2\mathscr{P}^2_{0,1}+\mathscr{P}^1_{0,1}+2\mathscr{P}^1_{1,0}-\mathscr{P}^2_{1,0}+3\mathscr{P}^2_{2,0}+\mathscr{R}^1_{2,0}+\tfrac{2}{3}\mathscr{P}^2_{2,1}+\tfrac{2}{27}\mathscr{P}^1_{3,0}-\tfrac{16}{9}\mathscr{P}^1_{4,0}-\tfrac{2}{3}\mathscr{P}^2_{4,0}-\tfrac{2}{27}\mathscr{R}^1_{4,0}+\mathscr{R}^2_{4,0}.$$

2.3 情形 III：$a^1_{0,1}a^2_{0,1}a^1_{1,0}a^2_{1,0}=0.$

当 $a^1_{1,\ 0}a^2_{1,\ 0}=0$ 和 $a^1_{0,\ 1}a^2_{0,\ 1}>0$ 时，引理 2.8 的假设仍然成立，因此在这些情况下，第二层正规形遵循引理 2.8。对于 $a^1_{0,\ 1}a^2_{0,\ 1}=0$ 和 $a^1_{1,\ 0}a^2_{1,\ 0}>0$ 的情形，引理 2.10 也同样成立。当 $a^1_{0,\ \overline{a^2_{0\ 1}}}$ 或 $a^1_{1,\ \overline{a^2_1}}$，$_0\in\mathbb{Q}^c$ 时，结论遵循引理 2.11。因此，本节不再讨论这些情形。当 $pa^1_{0,\ 1}+qa^2_{0,\ 1}=0$，且 p 和 q 为互素正整数时，a^1_1 为零或 a^2_1 为零，会使 $\mathcal{A}_{m(p+q)+i,\ 1}$ 对 $i=1,2$ 和 $m\in\mathbb{N}$ 的矩阵维数降低。这会影响正规形过程中的第二层步骤。

引理 2.13. 设 $a^1_{0,}{}^{\frac{1}{a^2_0}}{}_{,1} = \frac{-q}{p}$，其中 gcd$(p,q) = 1$，且 p、$q \in \mathbb{N}.$。考虑 (2.1) 中的 $v^{(1)}$。则，

1. 若 $a^2_{1,0} = 0$ 且 $a^1_{1,0} \neq 0$，第二层正规形为

$$\Theta + \sum_{k\in\mathbb{N}_2}\sum_{i+j=1}\left(b^k_{i,j}\mathscr{R}^k_{i,j}+a^k_{i,j}\mathscr{P}^k_{i,j}\right)+a^1_{0,2}\mathscr{P}^1_{0,2}+a^1_{0,2}\mathscr{P}^1_{0,2}+a^2_{2,0}\mathscr{P}^2_{2,0}+b^1_{2,0}\mathscr{R}^1_{2,0}+b^2_{2,0}\mathscr{R}^2_{2,0}+ \tag{2.34}$$
$$\sum_{m\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}_2}\Big(\sum_{j=3}^{p+q}(a^k_{m(p+q)+j,0}\mathscr{P}^k_{m(p+q)+j,0}+b^k_{m(p+q)+j,0}\mathscr{R}^k_{m(p+q)+j,0})+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\left(a^k_{mp,mq+k}\mathscr{P}^k_{mp,mq+k}+b^k_{mp,mq+k}\mathscr{R}^k_{mp,mq+k}\right)\Big).$$

2. 若 $a^1_{1,0} = 0$ 且 $a^2_{1,0} \neq 0$，$v^{(1)}$ 的第二层正规形为

$$\Theta+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\left(b^k_{0,1}\mathscr{R}^k_{0,1}+a^k_{0,1}\mathscr{P}^k_{0,1}\right)+\sum_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\sum_{k\in\mathbb{N}_2,j\in\mathbb{N}_{p+q}}(a^k_{m(p+q)+j,0}\mathscr{P}^k_{m(p+q)+j,0}+b^k_{m(p+q)+j,0}\mathscr{R}^k_{m(p+q)+j,0}) \tag{2.35}$$
$$+\sum_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\sum_{j\in Q,k\in\mathbb{N}_2}(a^k_{j,m(p+q)+1-j}\mathscr{P}^k_{j,m(p+q)+1-j}+b^k_{j,m(p+q)+1-j}\mathscr{R}^k_{j,m(p+q)+1-j})+\sum_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}a^2_{mp,mq+2}\mathscr{P}^2_{mp,mq+2},$$

其中 $Q := \{mp, m(p+q)+1\}$ 且 $a^1_{mp,mq+1} = a^1_{m(p+q)+1,0} = 0.$

证明。第 1 项。由于 $a^2_{1,0} = 0$，$\mathcal{A}^0{}_{,n\,1}^{\,1}$ 的矩阵以及 $\mathcal{A}^1{}_{,n\,1}^{\,1}$，对于每个整数 $n \geq 2$，矩阵都是奇异的，而当 $2 \leq i \leq n-1$ 时，矩阵 $\mathcal{A}^i{}_{,n}^{\,1}$,1 可逆。回忆一下，$n$ 是正规化目标项的阶。若对于 $m \in \mathbb{N}, k = 1, 2$，$n = m(p+q)+k$，由于引理 2.5 证明中的类似论证，矩阵 $\mathcal{A}^{mp}{}_{,n\,1}^{\,0}$ 以及 $\mathcal{A}^{mp}{}_{,n+1}^{\,0}$,1 是奇异的。此外，对于 $0 \leq i \leq n+k-1, i \neq mp$ 和 $k = 1, 2$，矩阵 $\mathcal{A}^i{}_{,n+k}^{\,0}$,1 可逆。这些与引理 2.5 中 $k = 1, 2$ 时的 $n \in P_5$ 和 $n \in P_6$相关。当 $3 \leq k \leq p+q$时，$0 \leq i \leq n-1$ 对应的矩阵 $\mathcal{A}^i{}_{,n}^{\,0}$,1 可逆，由此得到 $n \in P_7$. 因此，第二层正规形满足方程 (2.34)。

项目2。令 $n = m(p+q)+1$。因此，对于每个整数 $n \geq 2$，$\mathcal{A}^{n-1,}{}_{,n\,1}^{\,1}$, 的对角元素均为零。然而，当 $0 \leq k \leq n-1$、$k \neq mp$ 时，矩阵 $\mathcal{A}^{k,}{}_{,n\,1}^{\,0}$, 是可逆的。由于矩阵 $\mathcal{A}^{mp,}{}_{,n\,1}^{\,0}$, 和 $\mathcal{A}^{n-1,}{}_{,n\,1}^{\,1}$, 的退化，零度$(\mathcal{A}_{n,1}) = 2$. $0 \leq i \leq mp-1$ 和 $mp+1 \leq i \leq n-2$ 的系数由（2.19）推导得到，

$$\alpha^1_{n-1} = \frac{-a^2_{n,0}}{2a^2_{1,0}}, \quad \alpha^2_{n-1} = \frac{a^1_{n-1,1}-\alpha^1_{n-1}(n-1)a^1_{0,1}-\alpha^1_{n-2}a^2_{1,0}}{2a^1_{0,1}}, \quad \beta^1_{n-1} = \beta^2_{n-1} = 0,$$

由方程 (2.23) 得到 $(\alpha^1_{mp}, \alpha^2_{mp}, \beta^1_{mp}, \beta^2_{mp})$ 的值。然而，mr 必须替换为 $n-1.$。因此，当 $j = mp, n$ 时，欧拉项和旋转项 $\mathscr{P}^2_{mp,mq+1}, \mathscr{P}^1_{n,0}, \mathscr{R}^1_{j,n-j}, \mathscr{R}^2_{j,n-j}$ 不一定能在第二层步骤中从 $v^{(1)}$ 中消去。假设 $n = m(p+q)+2$。由于 $\mathcal{A}^{mp}{}_{,n\,1}^{\,0}$ 和 $\mathcal{A}^{n-1}{}_{,n\,1}^{\,1}$ 的奇异性，秩$(\mathcal{A}_n,1) = 4n-1.$。由于对于 $0 \leq i \leq n-1$和 $i \neq mp$，$\mathcal{A}^i{}_{,n}^{\,0}$,1 可逆，当 $0 \leq i \leq n-1$ 和 $i \neq mp$ 时，关系 (2.19) 和 (2.26) 导致消去所有项 $\mathscr{P}^k_{j,n-j}, \mathscr{R}^k_{j,n-j}$，其中 $k = 1, 2, 0 \leq j \leq n-1$，仅有一个例外，即 $\mathscr{P}^2_{mp,mq+1}$。因此，第二层正规形如方程 (2.35) 所示。 □

引理 2.14. 设 $a^1_{0,1} = 0$ 和 $a^2_{0,1} \neq 0.$

1. 当 $a^1_{1,0}=0$ 和 $a^2_{1,0}\neq 0$ 时，第二层正规形表示为

$$\Theta+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\sum_{i+j=1}\left(a^k_{i,j}\mathscr{P}^k_{i,j}+b^k_{i,j}\mathscr{R}^k_{i,j}\right)+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=0}^{2}(a^k_{n-j,j}\mathscr{P}^k_{n-j,j}+b^k_{n-j,j}\mathscr{R}^k_{n-j,j}), \tag{2.36}$$

其中 $a^1_{n-2,\ 2}=b^1_{n-2,\ 2}=b^2_{n-2,\ 2}=a^2_{n-1,\ 1}=a^2_{n,\ 0}=0$ 对每个整数 $n\geq 2$.

2. 假设 满足 $a^2_{1,\ 0}=0$ 且 $a^1_{1,\ 0}\neq 0$. 。因此，第二层正规形满足 s

$$\begin{aligned}\Theta+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\sum_{i+j=1}\left(a^k_{i,j}\mathscr{P}^k_{i,j}+b^k_{i,j}\mathscr{R}^k_{i,j}\right)+a^2_{0,2}\mathscr{P}^2_{0,2}+a^2_{2,0}\mathscr{P}^1_{2,0}+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}(a^k_{1,1}\mathscr{P}^k_{1,1}+b^k_{1,1}\mathscr{R}^k_{1,1})+a^1_{2,1}\mathscr{P}^1_{2,1} \quad (2.37)\\ +\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\sum_{n=3}^{\infty}(a^k_{n-2,2}\mathscr{P}^k_{n-2,2}+b^k_{n-2,2}\mathscr{R}^k_{n-2,2}),\quad where\quad a^1_{1,2}=0.\end{aligned}$$

证明。条目 1。由于 $a^1_{0,\ 1}=0$ 且 $a^2_{0,\ 1}\neq 0$，矩阵 $\mathcal{A}^{n-2,\ 0}_{n\ 1}$，的第二行以及 $\mathcal{A}^{n-1,\ 0}_{n\ 1}$，的第一、第三和第四列均为零向量。由 $a^1_{1,\ 0}=0$ 和 $a^2_{1,\ 0}\neq 0$，可推得 $\mathcal{A}^{n-1,\ 1}_{n\ 1}$，的所有对角元素均为零。因此，$\ker(\mathcal{A}_{n,\ 1})=4n-3$. 当 $n\geq 3$ 时，由于矩阵 $\mathcal{A}^{i,\ 0}_{n\ ,\ 1}$ 对 $0\leq i\leq n-3$ 具有非退化性，系数可通过 (2.19) 确定。其余系数由 $\alpha^2_{n-2}=\beta^1_{n-1}=\beta^2_{n-1}:=0$ 确定，

$$\begin{aligned}\alpha^1_{n-2}=\tfrac{a^1_{n-2,2}-4a^2_{1,0}\alpha^1_{n-3}}{2a^2_{0,1}},\quad (\beta^1_{n-2},\beta^2_{n-2})=\tfrac{(b^1_{n-2,1},b^2_{n-2,1})-4a^2_{1,0}(\beta^1_{n-3},\beta^2_{n-3})+2(b^1_{1,0},b^2_{1,0})\alpha^1_{n-3}}{2a^2_{0,1}},\\ \alpha^1_{n-1}=-\tfrac{a^2_{n,0}}{2a^2_{0,1}},\quad \alpha^2_{n-1}=-\tfrac{a^2_{n-1,1}-2a^2_{1,0}\alpha^2_{n-2}+2b^2_{1,0}\alpha^1_{n-2}}{2a^2_{0,1}}.\end{aligned}$$

对于 $n=2$，系数的推导方式与上述关系类似，其中 $\alpha^1_{n-3}=0$. 因此，项 $\mathscr{P}^2_{n-2,\ 2}$、$\mathscr{P}^1_{n-j,\ j}$、$\mathscr{R}^k_{n-j,\ j}$ 对于 $j=0$、1 和 $k=0$、1，不一定能够化简。

项目2。 $\mathcal{A}^{0,\ 1}_{n\ 1}$，的第二、第三和第四列是零向量。此外， $\mathcal{A}^{1,\ 1}_{n\ 1}$ 中的 (1, 1) 元素为零。令 除，1的第二列和第五列外，其他列均线性无关。因此，阶为 2的六项可以简化。为此，只需将系数指定为 $\alpha^2_0=\alpha^1_1:=0$,

$$(\alpha^1_0,\beta^1_0,\beta^2_0)=\tfrac{\left(a^1_{0,2},b^1_{0,2},b^1_{0,2}\right)}{2a^2_{0,1}},\quad \text{and}\quad (\alpha^2_1,\beta^1_1,\beta^2_1)=\tfrac{\left(a^2_{2,0},b^1_{2,0},b^1_{2,0}\right)}{2a^2_{1,0}}.$$

因此，对于 $k=1$,2，项 $\mathscr{P}^1_{0,2}$, $\mathscr{P}^2_{2,0}$, $\mathscr{R}^k_{2,0}$ 和 $\mathscr{R}^k_{0,2}$ 均可化简。假设 $n\geq 3$. 此处，秩$(\mathcal{A}_{n,1})=4n$ 由于 $\ker(\mathcal{A}_{n,1})=\{0\}$. 当 $n=3$时，系数由以下关系计算

$$\begin{aligned}(\alpha^1_0,\alpha^2_0,\beta^1_0,\beta^2_0)^\intercal=(\mathcal{A}^{0,0}_{n,1})^{-1}(a^1_{0,3},a^2_{0,3},b^1_{0,3},b^2_{0,3})^\intercal,\ (\alpha^2_1,\alpha^2_2,\beta^2_1,\beta^2_2)^\intercal=(\mathcal{A}^{2,1}_{n,1})^{-1}(a^1_{3,0},a^2_{3,0},b^1_{3,0},b^2_{3,0})^\intercal,\\ \alpha^1_1=\tfrac{a^1_{1,2}+2a^1_{1,0}\alpha^1_0}{2a^2_{0,1}},\quad (\alpha^2_1,\beta^1_1,\beta^2_1)=\tfrac{(a^2_{2,1},b^1_{2,1},b^2_{2,1})+2(a^2_{0,1},b^1_{0,1},b^2_{0,1})}{2a^2_{1,0}}.\end{aligned}$$

因此，$\mathscr{P}^2_{1,2}$,$\mathscr{P}^1_{2,1}$,$\mathscr{R}^k_{1,2}$ 对于 $k=1$, 2 的项无法化简。设 $n>3$. 对于 $0\leq i\leq n-3$，我们使用关系 (2.19)；而当 $n\geq i\geq n-1$ 时，则应用关系 (2.20)。因此，$\mathscr{P}^k_{n-2,2}$ 和 $\mathscr{R}^k_{n-2,2}$ 对于 $k=1$, 2 的项可以保留在正规形系统中。 □

引理 2.15. 假设 $a_{0,1}^2=0$ 和 $a_{0,1}^1\neq 0$.

1. 若 $a_{1,0}^1=0$ 且 $a_{1,0}^2\neq 0$，则第二层正规形为

$$\Theta+a_{0,1}^1\mathscr{P}_{0,1}^1+a_{1,0}^2\mathscr{P}_{1,0}^2+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}b_{k-1,2-k}^k\mathscr{R}_{k-1,2-k}^k+\sum_{n=2}^{\infty}(a_{0,n}^2\mathscr{P}_{0,,0}^2+a_{n,0}^1\mathscr{P}_{n,,0}^1+\sum_{j\in\{0,n\}}\sum_{k\in\mathbb{N}_2}b_{n-j,j}^k\mathscr{R}_{n-j,j}^k).\quad(2.38)$$

2. 当 $a_{1,0}^2=0$ 且 $a_{1,0}^1\neq 0$ 时，第二层正规形如下

$$\Theta+a_{0,1}^1\mathscr{P}_{0,1}^1+a_{1,0}^1\mathscr{P}_{1,0}^1+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}b_{k-1,2-k}^k\mathscr{R}_{k-1,2-k}^k+\sum_{n=2}^{\infty}\big(a_{0,n}^2\mathscr{P}_{0,n}^2+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}(b_{2,n-2}^k\mathscr{R}_{2,n-2}^k+a_{2,n-2}^k\mathscr{P}_{2,n-2}^k+b_{0,n}^k\mathscr{R}_{0,n}^k)\big).(2.39)$$

证明。断言 1. 由 $a_{0,1}^2=0$ 和 $a_{0,1}^1\neq 0$ 可知，矩阵 $\mathcal{A}^{0}{}_{,n\ 1}^{\ 0}{}_{,}$ 的第一、第三和第四列均为零向量。此外，$a_{1,0}^1=0$ 和 $a_{1,0}^2\neq 0$ 意味着 $\mathcal{A}^{n-1}{}_{,n\ 1}^{\ \ 1}{}_{,}$ 的所有对角元素均为零。由 nullity($\mathcal{A}_{n,1}$) $=2$，可得对于每个 $n\geq 2.$，秩($\mathcal{A}_{n,1}$) $=4n-2$。于是，系数可导出为

$$\alpha_0^2=\tfrac{a_{0,n}^1}{2a_{0,1}^1},\quad \alpha_{n-1}^1=\tfrac{a_{n,0}^2}{2a_{1,0}^2},\quad \beta_{n-1}^1=\beta_{n-1}^2=0.$$

系数 α_0^1 和 α_{n-1}^2 可由方程 (2.23) 的前两行导出，其中将 mp 和 mr 的值分别替换为 0 和 $n-1$。$1\leq i\leq n-2$ 和 $n\geq 3$ 的其他系数由关系 (2.19) 确定。因此，$k=1,2,j=0,n$ 的第二层正规形中可能保留项 $\mathscr{P}_{0,n}^2$, $\mathscr{P}_{n,0}^1$ 和 $\mathscr{R}_{n-j,j}^k$。

权利要求2。对于每个 $n\geq 2$，我们有零度($\mathcal{A}_{n,\ 1}$) $=4n-3$. 我们取 $\alpha_0^1=\beta_0^1=\beta_0^2:=0$ 以获得

$$\alpha_1^1=\tfrac{a_{0,n}^1}{2a_{0,1}^1},\quad \text{and}\quad (\alpha_1^1,\alpha_1^2,\beta_1^1,\beta_1^2)^{\intercal}=(\mathcal{A}_{n,1}^{1,0})^{-1}(a_{1,n-1}^1,a_{1,n-1}^2,b_{1,n-1}^1,b_{1,n-1}^2)^{\intercal}.$$

因此，对于 $k=1$、2、$0\leq j\leq n$、$j\neq 0$、2，向量场 $\mathscr{P}_{0,\ n}^1$、$\mathscr{P}_{j,\ n-j}^k$ 和 $\mathscr{R}_{j,\ n-j}^k$ 在 $3\leq i\leq n.$ 时利用递归关系 (2.20) 进行了简化。 □

引理 2.16.设 $a_{0,1}^1=a_{0,1}^2=0$，并考虑微分系统 (1. 3).

I.如果$a_{1,0}^1=0$ 且$a_{1,0}^2\neq 0$，则第二层正规形推导如下

$$\Theta+a_{1,0}^2\mathscr{P}_{1,0}^2+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\sum_{j\in\{0,1\}}b_{j,1-j}^k\mathscr{R}_{j,1-j}^k+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\sum_{j\in\{0,n\}}\sum_{n=2}^{\infty}(a_{j,n-j}^k\mathscr{P}_{j,n-j}^k+b_{n-j,j}^k\mathscr{R}_{n-j,j}^k),\ where\ a_{n,0}^2=0.$$

II. 当 $a_{1,0}^2=0$ 和 $a_{1,0}^1\neq 0$ 时，第二层正规形如下所示。

$$\Theta+a_{1,0}^1\mathscr{P}_{1,0}^1+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\sum_{j\in\{0,1\}}b_{j,1-j}^k\mathscr{R}_{j,1-j}^k+\sum_{k\in\mathbb{N}_2}\sum_{j\in\{0,1\}}\sum_{n=2}^{\infty}(a_{j,n-j}^k\mathscr{P}_{j,n-j}^k+b_{n-j,j}^k\mathscr{R}_{n-j,j}^k)+\sum_{n=2}^{\infty}a_{2,n-2}^1\mathscr{P}_{2,n-2}^1,$$

其中 $a_{1,\ n-1}^1=0.$ 对于 $b_{0,\ 1}^1\neq 0$、$b_{0,\ n}^1=0$、$b_{0,\ 1}^1=0$，并且若 $b_{0,\ 1}^2\neq 0$，则有 $b_{0,\ n}^2=0.$

证明。断言 I。根据假设 $a^1_{0,1}=a^2_{0,1}=0$，除 $\mathcal{A}^{i}_{,n\,1}{}^{0}$ 中的元素 (3, 2) 和 (4, 2) 外，对于 $0\le i\le n-1.$，其他元素均为零。由于 $a^1_{1,0}=0$ 和 $a^2_{1,0}\neq 0$，$\mathcal{A}^{n-1}{}_{,n\,1}{}^{1}$ 的对角元素均为零。因此，秩($\mathcal{A}_n$,1) $=4n-3.$。于是，我们取 $\alpha^1_{n-1}=-\frac{a^2_{n}}{2a^2_{1\,0}}{}^{0}$，$\alpha^2_{n-1}=\beta^1_{n-1}=\beta^2_{n-1}=0$，而其他系数由关系 (2.20) 得到，适用于 $1\le i\le n-1.$。因此，项 $\mathscr{P}^k_{0,n}$, $\mathscr{R}^k_{0,n}$, $\mathscr{R}^k_{n}$,0 对于 $k=1$，2，以及 $\mathscr{P}^1_{n}$,0 不一定能从一级正规形中消去。

断言 II。条件 $a^2_{1、\,0}=0$ 以及 $a^1_{1、\,0}\neq 0$ 意味着 $\mathcal{A}^{0}{}_{、\,n\,1}{}^{1}$ 的第二、第三和第四列，以及矩阵 $\mathcal{A}^{1}{}_{、\,n\,1}{}^{1}$ 的元素 (1, 1) 均为零。当 $|b^1_{0、\,1}|+|b^2_{0、\,1}|\neq 0$ 时，零度($\mathcal{A}_n$,1) $=3.$。因此，当 $|b^1_{0、\,1}|+|b^2_{0、\,1}|\neq 0.$ 时，可将一级正规形中阶为 n 的项数 $4n-3$ 简化。若后一条件不成立，即 $b^1_{0、\,1}=b^2_{0、\,1}=0$，则零度($\mathcal{A}_n$,1) $=3.$。这意味着秩($\mathcal{A}_n$,1) $=4n-4.$。这里，系数满足 (2.20)，其中 $3\le i\le n.$。此外，令 $\alpha^1_1=\beta^1_0=\beta^2_0=0$,

$$\alpha^1_0=-\tfrac{a^1_{1,n-1}}{2a^1_{1,0}},\quad \alpha^2_1=\tfrac{a^2_{2,n-2}}{2a^1_{1,0}},\quad (\beta^1_1,\beta^2_1)=\tfrac{\left(b^1_{2,n-2},b^2_{2,n-2}\right)+2\alpha^2_2\left(b^1_{0,1},b^2_{0,1}\right)}{2a^1_{1,0}}.$$

对于$b^1_{0,1}\neq 0$，我们取 $\alpha^2_0=-\frac{b^1_0}{2b^1_0}{}^{n}$,1。如果 $b^1_{0,1}=0$ 且 $b^2_{0,1}\neq 0$，令 $\alpha^2_0=-\frac{b^2_0}{2b^2_0}{}^{n}$,1。最后，对于$b^1_{0,1}=b^2_{0,1}=0.$，我们取 $\alpha^2_0=0$。因此，$\mathscr{P}^1_{1,n-1}$, $\mathscr{P}^k_{j,n-j}$ 以及对于 $k=1,2,2\le j\le n$ 的$\mathscr{R}^k_{j,\,n-j}$（除 $\mathscr{P}^1_{2,n-2}$外）都得到了简化。此外，如果 $b^1_{0,1}\neq 0$，则从正规形系统中移除 $\mathscr{R}^1_{0,n}$；而当 $b^1_{0,\,1}=0$ 且 $b^2_{0,1}\neq 0$时，我们可以将 $\mathscr{R}^2_{0,n}$ 正规化。 □

注 **2 17** $a^1_{1\,0}a^1_{1\,0}\neq 0$ $a^1_{0\,1}a^2_{0\,1}=0$ $a^1_{1\,0}=a^2_{1\,0}=0$ $|a^1_{0\,1}|+|a^2_{0\,1}|\neq .$. 剩余 $\mathcal{A}^{j\,k}_{n\,1}{}_{0}$ 的情况（$_{,,}$ 和 $_{,,}$）以及（$_{,,}$ 和 $_{,,}$）的处理方式与前述情况类似。该论证应用了 $_{,,}$ 对于$k=0$、1、$0\le j\le n-1$ 的性质，以及关于 $\mathcal{A}_{n,1}$ 的秩的讨论。不过，为简洁起见，此处略去这些内容；参见例 2.18。

例 2.18。考虑由 (2.31) 给出的一级正规形，其中 $a^1_{0,1}=a^2_{0,1}=0$ 和$a^1_{1,0}=2$,$a^2_{1,0}=1$。因此，对于所有 $j\in\mathbb{N}$，矩阵 $\mathcal{A}^{j}{}_{,n\,1}{}^{0}$,均为零矩阵，而当$0\le j\le n-1$ 和 $n\ge 3$ 时，$\mathcal{A}^{j}{}_{,n\,1}{}^{1}$,可逆（$\mathcal{A}^{0}{}_{,\,1\,31,}$除外）。截至三阶的项的正规化如下:

i. 二阶齐次项：系数推导如下。

$$(\alpha^1_0,\alpha^2_0,\beta^1_0,\beta^2_0)^{\intercal}=\left(\mathcal{A}^{0,1}_{2,1}\right)^{-1}(1,1,0,0)^{\intercal}=\left(-\tfrac{1}{2},0,0,0\right)^{\intercal},\quad (\alpha^1_1,\alpha^2_1,\beta^1_1,\beta^2_1)=\left(0,\tfrac{1}{4},0,0\right).$$

因此，变换生成元是 X_2:= $-\frac{1}{2}\mathscr{P}^1_{0,1}-\frac{1}{4}\mathscr{P}^2_{1,0}$且 $v^{(1)}$被变换为

$$v^{(2,2)}:=\Theta+\mathscr{P}^1_{1,0}+2\mathscr{P}^2_{1,0}-\mathscr{P}^2_{1,2}+\tfrac{5}{3}\mathscr{P}^1_{2,1}-\tfrac{4}{3}\mathscr{P}^2_{2,1}-\tfrac{5}{2}\mathscr{R}^1_{2,1}+\mathscr{P}^2_{3,0}.$$

ii. 三阶项：矩阵 $\mathcal{A}^{0}{}_{,\,0\,31\,,}$ 的第一行是零向量，所有其他矩阵均可逆。因此，系数设为 (α^1_0, α^2_0, β^1_0, β^2_0)$^{\intercal}$ =(0, $-\frac{1}{4}$, 0, 0),

$$(\alpha^1_1,\alpha^2_1,\beta^1_1,\beta^2_1)^{\intercal}=\left(\mathcal{A}^{1,1}_{3,1}\right)^{-1}(\tfrac{5}{3},-\tfrac{4}{3},-\tfrac{5}{2},0)^{\intercal}=\left(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{18},-\tfrac{5}{12},0\right)^{\intercal},$$
$$\text{and}\quad (\alpha^1_2,\alpha^2_2,\beta^1_2,\beta^2_2)^{\intercal}=\left(\mathcal{A}^{2,1}_{3,1}\right)^{-1}(0,1,0,0)^{\intercal}=\left(0,\tfrac{1}{8},0,0\right)^{\intercal}.$$

由此，得到变换生成元 $X_2 := -\frac{1}{4}\mathscr{P}^2_{0,\ 2} + \frac{5}{6}\mathscr{P}^1_{1,\ 1} + \frac{1}{18}\mathscr{P}^2_{1,\ 1} - \frac{5}{12}\mathscr{R}^1_{1,\ 1} + \frac{1}{8}\mathscr{P}^2_{2,\ 0}$。因此， $v^{(1)}$ 的第二层正规形为

$$v^{(2)} := \Theta + \mathscr{P}^1_{1,0} + 2\mathscr{P}^2_{1,0} + h.o.t., \tag{2.40}$$

其中，高阶项指九次（4阶）及更高阶的项。

3 无限阶标准形

在本节中， 我们处理微分系统（1）的无限层正规形。 3).

定理 3.1。 *[11,* 定理 4.*1]*假设引理 2.8 的条件成立。此外，令 $a^1_{1,0} = a^2_{1,0} = b^1_{1,0} = b^2_{1,0} = 0, \frac{a^2_{0,}}{a^1_0}{}^{\frac{1}{}}{}_{,1} \notin \mathbb{N}.$ 那么，存在一列无限的近恒等状态变量多项式变换，可将微分系统 (1.3) 变换为其无限阶正规形，具体如下。

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}z_1 &= I\omega_1 z_1 + (a^1_{0,1} + Ib^1_{0,1})z_1|z_2|^2 + a^1_{0,2}z_1|z_1|^4 + \sum_{j\geq 3}(a^1_{0,j} + Ib^1_{0,j})z_1|z_2|^{2j},\\
\tfrac{d}{dt}z_2 &= I\omega_2 z_2 + (a^2_{0,1} + Ib^2_{0,1})z_2|z_2|^2 + \sum_{j\geq 2}(a^2_{0,j} + Ib^2_{0,j})z_2|z_2|^{2j},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

以及 $\frac{d}{dt}(w_1, w_2) = \frac{d}{dt}(\overline{z_1}, \overline{z_2})$。此外，(3.1) 中的正规形系数 $a_{i,j}$和 $b_{i,j}$由 (1.3) 中的系数所确定的多项式函数唯一确定。

定理 3.2. *[11,* 定理 4.*2]* 假设引理 2.8 的假设成立，并考虑微分系统。

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\rho_1 &= \rho_1\Big(a^1_{1,0}{\rho_1}^2 + a^1_{0,1}{\rho_2}^2 + a^1_{2,0}{\rho_1}^4 + \sum_{j=2}^{\infty} a^1_{j,0}{\rho_1}^{2j}\Big),\ \tfrac{d}{dt}\rho_2 = \rho_2\Big(a^2_{1,0}{\rho_1}^2 + a^2_{0,1}{\rho_2}^2 + \sum_{j=2}^{\infty} a^2_{j,0}{\rho_1}^{2j}\Big),\\
\tfrac{d\vartheta_k}{dt} &= \omega_k + b^k_{1,0}{\rho_1}^2 + b^k_{0,1}{\rho_2}^2 + \sum_{j=2}^{\infty} b^{\ell}_{j,0}\rho_1^{2j}, \quad for \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

系统（3.2）构成 是微分系统 (1.3) 的一个无限阶正规形，使得

1. $a^1_{j,0} = 0$ 若 $a^1_{1,0}a^1_{j-1,0} \neq 0$ 对于每个 $j \geq 3.$
2. $a^{\ 2}_{j,0} = 0$ 当 $a^1_{j-m,0} = 0, a^1_{m,0}a^2_{j-1,0} \neq 0$ 对于 $m = 1, j-1$ 以及每个 $j \geq 3$
. 3. 若 $a^1_{j-m,0} = a^2_{j-m,0} = 0, a^1_{m,0}b^1_{j-m,0} \neq 0$ 对于 $m = 1, j-1$. 那么, 对于每个 $j \geq 3$, $b^1_{j,0} = 0$ 成立。4. 每当 $a^1_{j-m,0} = b^1_{j-m,0} = 0, a^1_{m,0}b^2_{j-m,0} \neq 0$ 对于 $m = 1, j-1$, $b^1_{j,0} = 0$ 对每个 $j \geq 3.$ 均成立。

当定理 3.1 和 3.2 中的假设不成立时，所得正规形不一定是无限层正规形。下面的反例对此作了说明。

例 3.3（第三层正规形）。考虑由下式给出的第二层正规形向量场

$$v^{(2)} := \Theta + \mathscr{P}^1_{0,1} + \mathscr{P}^1_{1,0} - 4\mathscr{P}^2_{0,1} - 4\mathscr{P}^2_{1,0} + \mathscr{P}^1_{2,0} + \mathscr{P}^1_{3,0} + 2\mathscr{P}^2_{3,0} + \mathscr{R}^1_{3,0} + \mathscr{R}^2_{3,0} + h.o.t..$$

于是,

$$\ker(d^{2,2}) = \left\{u \in \mathcal{G}_2 | \left[u, \mathscr{P}^1_{0,1} + \mathscr{P}^1_{1,0} - 4\mathscr{P}^2_{0,1} - 4\mathscr{P}^2_{1,0}\right] = 0\right\} = \mathbb{R}\left\{\mathscr{P}^1_{0,1} + \mathscr{P}^1_{1,0} - 4\mathscr{P}^2_{0,1} - 4\mathscr{P}^2_{1,0}\right\}.$$

令 $X := \gamma(\mathscr{P}^1_{0,1} + \mathscr{P}^1_{1,0} - 4\mathscr{P}^2_{0,1} - 4\mathscr{P}^2_{1,0}) + \sum_{j=0}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\alpha_j^k \mathscr{P}^k_{j,2-j} + \beta_j^k \mathscr{R}^k_{j,2-j}\right)$ 为通过第三层正规形过程规范化三阶项所需的变换生成元。因此， X 将向量场 $v^{(2)}$ 变换为

$$\begin{aligned} v^{(3)} := \Theta + \mathscr{P}^1_{0,1} + \mathscr{P}^1_{1,0} - 4\mathscr{P}^2_{0,1} - 4\mathscr{P}^2_{1,0} + \mathscr{P}^1_{2,0} + \mathscr{P}^1_{3,0} + 2\mathscr{P}^2_{3,0} + \mathscr{R}^1_{3,0} + \mathscr{R}^2_{3,0} + \\ d^{3,3}\Big(\gamma(\mathscr{P}^1_{0,1} + \mathscr{P}^1_{1,0} - 4\mathscr{P}^2_{0,1} - 4\mathscr{P}^2_{1,0}), \sum_{j=0}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\alpha_j^k \mathscr{P}^k_{j,2-j} + \beta_j^k \mathscr{R}^k_{j,2-j}\right)\Big) + h.o.t.. \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} d^{3,3}\Big(\gamma(\mathscr{P}^1_{0,1} + \mathscr{P}^1_{1,0} - 4\mathscr{P}^2_{0,1} - 4\mathscr{P}^2_{1,0}), \sum_{j=0}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\alpha_j^k \mathscr{P}^k_{j,2-j} + \beta_j^k \mathscr{R}^k_{j,2-j}\right)\Big) = \\ \gamma\Big[\mathscr{P}^1_{0,1} + \mathscr{P}^1_{1,0} - 4\mathscr{P}^2_{0,1} - 4\mathscr{P}^2_{1,0}, \mathscr{P}^1_{2,0}\Big] + \sum_{j=0}^{2}\sum_{k=1}^{2}\Big[\alpha_j^k \mathscr{P}^k_{j,2-j} + \beta_j^k \mathscr{R}^k_{j,2-j}, \mathscr{P}^1_{0,1} + \mathscr{P}^1_{1,0} - 4\mathscr{P}^2_{0,1} - 4\mathscr{P}^2_{1,0}\Big]. \end{aligned}$$

我们有 $\mathrm{rank}(d^{3,3}) = 10$ 且 $\mathrm{rank}(d^{3,2}) = 9$。我们取 $\alpha_j^k = \beta_j^k = 0$ 作为 $k = 1,2, 0 \le j \le 1$ ，并且 $(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \beta_2^1, \beta_2^2, \gamma) = (-\frac{1}{4}, 0, 0, 0, 38)$。因此，第三层正规形写作

$$v^{(3)} = \Theta + \mathscr{P}^1_{0,1} + \mathscr{P}^1_{1,0} - 4\mathscr{P}^2_{0,1} - 4\mathscr{P}^2_{1,0} + \mathscr{P}^1_{2,0} + 6\mathscr{P}^2_{3,0} + \mathscr{R}^1_{3,0} + \mathscr{R}^2_{3,0} + h.o.t.$$

此处，项 $\mathscr{P}^1_{3,0}$ 在第三层步骤中进行了简化。

例 3.4（例 2.18 的无限层正规形）。考虑例 2.18 中规范化的向量场。此处， $a^k_{0,1} = b^k_{0,1} = 0$ 当 $k = 1$、2 和 $a^1_{1,0} a^2_{1,0} = 2 > 0$时。根据定理 3.1，方程 (2.40) 中的第二层正规形向量场 $v^{(2)}$ 是 $v^{(1)}$ 的无限层正规形。我们指出，最简正规形 (2.40) 可能含有无穷多个非零高阶项。此处，我们已将系统规范化至九次。因此，我们已经知道，庞加莱正规形中有七个次数低于九次的项必须经过规范化，才能从庞加莱正规形 (2.31) 得到最简正规形 (2.40)。

注 3.5. 在我们的方法中，形式正规形计算在滤过拓扑下总是收敛到其无穷正规形；关于滤过拓扑和形式正规形理论的讨论，参见 [26] 及其中的参考文献。然而，所涉及的幂级数可能收敛，也可能发散。正规形理论中的收敛性问题一直是

一项艰巨的任务，在超正规化文献中尚未得到研究。要对这个问题进行数值研究，需要编写高效的 Maple 程序，以便将正规形数值计算到非常高的次数；参见 [18]。由于正规形在分岔分析和控制中的应用通常会截断到有限次数，因此现阶段进行繁琐的收敛性数值分析似乎并无必要。

参考文献

[1] A. Algaba, E. Freire, E. Gamero, 《Hopf-零分岔的超正规形》, 《国际分岔与混沌杂志》 8 (1998年) 1857–1887。[2] A. Baider, J.A. Sanders, 《Takens–Bogdanov 正规形的进一步约化》, 《微分方程杂志》99 (1992) 205–244。[3] Q.S. Bi, P. Yu, 《用于计算双 Hopf 分岔正规形的符号软件开发》, Math. Comput. Modelling 29 (1999年) 49–70。[4] G. Chen, 《向量场正规形的进一步约化》, Numer. Algorithms 27 (2001年) 1–33。[5] G. Chen, J. Della Dora, 《动力系统正规形的进一步约化》, 《微分方程杂志》166 (2000) 79–106。[6] G. Chen, D. Wang, J. Yang, 《Hopf-零奇点向量场的唯一轨道正规形》, Journal of Dynamics and Differential Equations 17 (2005) 3–20。[7] G. Gaeta, 《对称系统中庞加莱–杜拉克正规形的进一步约化》, Cubo 9 (2007) 1–11。[8] G. Gaeta, 《庞加莱重整化形式》, Ann. Inst. H. Poincar´e Phys. Th´eor. 70 (1999年) 461–514。[9] G. Gaeta, 《庞加莱正规形的约化》, Lett. Math. Phys. 42 (1997) 103–114。[10] E. Gamero, E. Freire, A.J. Rodriguez-Luis, E. Ponce, A. Algaba, 《三重零退化的超正规形计算》, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 6 (1999年) 357–368。[11] M. Gazor, B. Hamzi, A. Shoghi, 《非共振双 Hopf 奇点的无限级形式》, 已投稿至 Systems & Control Letters (2023)。[12] M. Gazor, M. Kazemi, `Singularity`：用于标量光滑映射局部分岔控制的 MAPLE 程序库，Transactions of the ASME, Computational and Nonlinear Dynamics 15 (2020) 011001。

[13] M. Gazor, M. Kazemi, 《 $\mathbb{Z}_2$-等变奇点的正规形分析》, 《国际分岔与混沌杂志》29 (2019年) 1950015–1950035。[14] M. Gazor, M. Kazemi, 《Singularity 用户指南》, arXiv:1601.00268[15] M. Gazor, M. Moazeni, 《Bogdanov–Takens 奇点的参数标准形；广义鞍结情形》, 《离散与连续动力系统》35 (2015年) 205–224。[16] M. Gazor, F. Mokhtari, 《Hopf-零奇点的标准形》, 《非线性》28 (2015年) 311–330。[17] M. Gazor, F. Mokhtari, 《Hopf-零奇点的保体积标准形》, 《非线性》26 (2013年) 2809–2832。[18] M. Gazor, F. Mokhtari, J.A. Sanders, 《非保守非线性部分的 Hopf-零奇点标准形》, 《微分方程杂志》254 (2013年) 1571–1581。[19] M. Gazor, F. Mokhtari, J.A. Sanders, 《可积无散幂零奇点的矢量势标准形》, 《微分方程杂志》267 (2019年) 407–442。[20] M. Gazor, N. Sadri, 《具有首项无散项的 Hopf-零奇点的分岔控制与万能展开》, 《SIAM 应用动力系统杂志》15 (2016年) 870–903。[21] M. Gazor, N. Sadri, 《Bogdanov–Takens 奇点广义尖点对象的分岔控制器设计及其在船舶控制中的应用》, 《SIAM 控制与优化杂志》57 (2019年) 2122–2151。[22] M. Gazor, A. Shoghi, 《n 重 Hopf 奇点的叶标准形分类》, Communications in Mathematical Physics 396 (2022年) 481–526。[23] M. Gazor, A. Shoghi, 《音乐艺术中的分岔控制与声音强度》, 《微分方程杂志》293 (2021) 86–110。[24] M. Gazor, A. Shoghi, 《音乐中的音色与分岔控制》, 《微分方程杂志》326 (2022年) 129–163。[25] M. Gazor, P. Yu, 《形式分解法与参数标准形》, 《国际分岔与混沌杂志》20 (2010) 3487–3515。[26] M. Gazor, P. Yu, 《谱序列与参数标准形》, 《微分方程杂志》252 (2012) 1003–1031。[27] B. Hamzi, 《具有双零控制分岔的非线性控制系统的二次稳定化》, 第5届 IFAC 非线性控制系统研讨会论文集, NOLCOS, (2001年) 161–166。

[28] B. Hamzi, 《分岔理论框架下不可控非线性系统的一阶近似分析与控制》, 博士论文, 巴黎第十一大学奥赛分校, 法国（2001年）。[29] B. Hamzi, 《具有零霍普夫控制分岔的非线性系统的分析与稳定化》, 第41届IEEE决策与控制会议论文集, 4（2002年）, 3912–3917。[30] B.Hamzi、J.-P.Barbot、W. Kang, 《非线性离散时间控制系统平衡集的分岔与拓扑》, 第4届IFAC非线性控制系统研讨会（NOLCOS'98）论文集（1998年）, 35–38。[31] B. Hamzi、J.-P.Barbot、W. Kang, 《具有不可控线性化的离散时间参数化系统的分岔》, 第38届IEEE决策与控制会议论文集（1999年）, 684–688。[32] B. Hamzi、J.-P.Barbot、W. Kang, 《具有不可控线性化的离散时间参数化系统的标准形》, 第38届IEEE决策与控制会议论文集（1999年）, 2035–2039。[33] B. Hamzi、J.-P. Barbot、W. Kang, 《具有不可控线性化的非线性离散时间控制系统的稳定化》, 第3届IEEE/IMACS电路、系统、通信与计算机多会议论文集（1999年）, 4581–4586。[34] B. Hamzi、J.-P. Barbot、S.Monaco、D.Normand-Cyrot, 《具有奈马克-萨克尔分岔的系统的非线性离散时间控制》, 《系统与控制快报》, 44（2001年）, 245–258。[35] B. Hamzi、J.-P. Barbot、S. Monaco、D. Normand-Cyrot, 《标准形与奈马克-萨克尔分岔控制》, 第5届IFAC非线性控制系统研讨会（NOLCOS）论文集（2001年）, 167–172。[36] B. Hamzi、W. Kang, 《具有一个不可控模态的非线性控制系统的共振项与分岔》, 《系统与控制快报》, 49（2003年）, 267–278。[37] B. Hamzi、W. Kang, 《一类具有静态分岔的系统中的共振项》, 第40届IEEE决策与控制会议论文集（2001年）, 722–727。[38] B.Hamzi、W. Kang、J.-P.Barbot, 《霍普夫分岔的分析与控制》, 《SIAM控制与优化杂志》, 42, 6（2004年）, 2200–2220。[39] B.Hamzi、W.Kang、J.-P. Barbot, 《关于霍普夫分岔的控制》, 第39届IEEE决策与控制会议论文集, 澳大利亚悉尼（2000年）, 1631–1636, [特邀论文]。[40] B.Hamzi、W.Kang、A. J. Krener, 《具有折叠或倍周期控制分岔的离散时间系统的稳定化》, 第16届IFAC世界大会论文集（CD-ROM）（2004年）。

[41] B. Hamzi、W. Kang、A.J.Krener，《受控中心动力学》，《SIAM多尺度建模与仿真杂志》，3，4，（2005年）838-852。[42] B. Hamzi、W. Kang、A.J. Krener，《离散时间控制分岔的受控中心动力学》，第六届IFAC非线性控制系统研讨会（NOLCOS'2004）论文集（2004年）。[43] B.Hamzi、W.Kang、A.J. Krener，《中心流形的控制》，第42届 IEEE决策与控制会议论文集，3，（2003年）2065 - 2070。[44] B.Hamzi、A.J.Krener，《具有折叠控制分岔系统的实用稳定化》，载于《非线性动力学与控制及其应用新趋势》，W.Kang、C.Borges 和M.Xiao编，（2003年）34-48，Springer，柏林。[45] B. Hamzi、A. J. Krener，《受控中心系统》，《IEEE自动控制汇刊》，52，11，（2007年）2188 - 2192。[46] B.Hamzi、A. J. Krener，《受控中心系统》，第45届 IEEE决策与控制会议论文集，（2006年）6414 -6418。[47] B. Hamzi、A. J.Krener、W.Kang，《离散时间控制分岔的受控中心动力学》，《系统与控制快报》，55，7，（2006年）585-596。[48] B. Hamzi、J.S.W.Lamb、D. Lewis，《控制系统正规形的刻画》，《动力学与控制系统杂志》21，（2015年）273-284。[49] B. Hamzi、S.Monaco、D. Normand-Cyrot，《具有周期倍化分岔系统的二次稳定化》，第41届 IEEE 决策与控制会议论文集，4（2002年）3907-3911。[50] B. Hamzi、I. A.Tall，《离散时间控制系统的正规形》，第42届 IEEE决策与控制会议论文集，2（2003年）1357- 1361。[51] W. Kang，《非线性控制系统的分岔与正规形》，第一部分和第二部分，《SIAM 控制与优化杂志》36（1998年）193–212 和213–232。[52] W.Kang，《通过状态反馈对具有单个不可控模态的系统进行分岔控制》，《SIAM 控制与优化杂志》，38（2000年）1428-1452。[53] W. Kang、B. Hamzi和 A.J. Krener，《三维正规形的收敛性与行为》，第一届IFAC混沌系统分析与控制会议论文集，（2006年） [特邀论文]。[54] W.Kang、A.J.Krener，《扩展二次控制器正规形与非线性系统的动态状态反馈线性化》，《SIAM 控制与优化杂志》30（1992年）1319–1337。

[55] W. Kang, M. Xiao, I.A. Tall, 《可控性与局部可达性：一种正规形方法》, 《IEEE 自动控制汇刊》48（2003年）1724–1736。[56] E. Knobloch, 《非共振双 Hopf 分岔的正规形系数》, 《物理快报 A》116（1986）365–369。[57] H. Kokubu, H. Oka, D. Wang, 《线性分级函数与正规形的进一步约化》, 《微分方程杂志》132（1996）293–318。[58] A.J. Krener, W. Kang, D.E. Chang, 《控制分岔》, 《IEEE 自动控制汇刊》49（2004年）1231–1246。[59] A. J. Krener, W. Kang, B. Hamzi, I. A. Tall, 《余维一和余维二控制奇异性》, 第一届 IFAC 混沌系统分析与控制会议论文集, （2006年）[特邀论文]。[60] A. J. Krener, W. Kang, B. Hamzi, I. A. Tall, 《低余维控制奇异性》, 载于《控制理论的新方向与应用》, W. P. Dayawansa、A. Lindquist 和 Y. Zhou 编, （2005年）181–192。[61] W.F. Langford, 《周期模态与稳态模态相互作用导致环面》, 《SIAM 应用数学杂志》37（1979）649–686。[62] J. Li, L. Zhang, D. Wang, 《具有对称性的一类三维向量场的唯一正规形》, 《微分方程杂志》257（2014）2341–2359。[63] J. Li, L. Kou, D. Wang, 《一类三维幂零向量场的唯一正规形》, 《国际分岔与混沌杂志》27（2017）1750131。[64] J. Murdock, 《局部动力系统的正规形与展开》, Springer-Verlag, 2003年。[65] J. Murdock, 《超正规形理论：基础与算法》, 《微分方程杂志》205（2004）424–465。[66] B.W. Qin, K.W. Chung, A. Algaba, A.J. Rodriguez-Luis, 《Hopf–零点与非共振双 Hopf 奇异性一般情形下截断二维正规形中异宿分岔的高阶近似》, 《SIAM 应用动力系统杂志》20（2021）403–437。[67] J.A. Sanders, 《正规形理论与谱序列》, 《微分方程杂志》192（2003）536–552。[68] S. Ushiki, 《向量场奇异性的正规形》, 《日本应用数学杂志》1（1984）1–34。

[69] D. Wang, J. Li, M. Huang, Y. Jiang, 《Bogdanov–Takens 奇异性的唯一正规形》, 《微分方程杂志》163（2000）223–238。[70] P. Yu, A.Y.T. Leung, 《Hopf 分岔的最简正规形》, 《非线性》16（2003年）277–300。[71] P. Yu, Y. Yuan, 《一种计算向量场最简正规形的匹配追踪技术》, 《符号计算杂志》35（2003年）591–615。[72] P. Yu, Y. Yuan, 《与指标为一和二的三重零特征值相关的最简正规形》, 《非线性分析》47（2001年）1105–1116。[73] P. Yu, Y. Yuan, 《纯虚特征值对与零特征值奇异性的最简正规形》, 《动力系统、连续与离散及脉冲系统 B 系列》 8 （ 2001 年） 219–249。[74] Q.C. Zhang, A.Y.T. Leung, 《受迫振子中双 Hopf 分岔的正规形》, 《声与振动杂志》231（2000）1057–1069。