arXiv:2304.05745v1 [math.RA] 12 Apr 2023

具有集合分次的非交换泊松代数

瓦利奥拉·哈利利[1]

摘要：本文研究带有任意集合 $\mathcal{S}$. 的非交换泊松代数的结构。我们证明，任意这样的代数 $\mathcal{P}$ 都分解为

$$\mathcal{P} = \mathcal{U} \oplus \sum_{[\lambda]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim} \mathcal{P}_{[\lambda]},$$

其中 $\mathcal{U}$ 是 $_{\mathbb{F}}\{[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta]+\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta$ 的张成空间的线性子空间补空间： μ、 $\eta \in [\lambda]\}\cap\mathcal{P}_0$ 属于 $\mathcal{P}_0$ ，并且任意 $\mathcal{P}_{[\lambda]}$ 是 $\mathcal{P}$ 的描述良好的分次理想，满足 $[\mathcal{P}_{[\lambda]}, \mathcal{P}_{[\mu]}] + \mathcal{P}_{[\lambda]}\mathcal{P}_{[\mu]} = 0$ ，如果 $[\lambda] \neq [\mu].$ 。在某些条件下， $\mathcal{P}$ 的单性得到了刻画，并证明 $\mathcal{P}$ 是其分次单理想族的直和。

1. Introduction

非交换泊松代数是一种李代数，赋予了非交换结合乘积，使得李乘积和结合乘积通过莱布尼茨法则相容；该法则最初出现在 Smeon-DenisPoisson关于天体力学的研究中 [1]。这些代数在泊松几何 [2, 19, 22], 、变形量子化 [16, 14]以及交换结合代数的变形 [12]研究中发挥着核心作用。泊松结构也用于顶点算子代数的研究（见 [11]）。此外，泊松代数的上同调群、变形、张量积以及 Γ-分次已由许多作者在 [4, 13, 21, 23, 24, 25] 中进行了研究。

存在一种不涉及群的分次概念。这是一种借助任意集合 $\mathcal{S}$进行的分次，该集合不一定是群。对李代数[5, 9, 10], 上分次的研究始于 1933 年Jordan的奠基性工作，其目的是将量子力学 [15] 形式化。文献中最早由Patera 和Zassenhaus 在 [20] 研究李代数上的集合分次，当时要求集合 $\mathcal{S}$与分次支撑一致；他们将这类分次称为李分次。值得一提的是，所谓的根的连接技术早已由Calderon、AntonioJ. 在具有对称根系的分裂李代数上于 [7] 引入。自那以后，近年来，通过连接不同类别代数的分次支撑中的元素这一技术进行的分次研究受到了极大关注，其部分动机来自它们在

[1]阿拉克大学理学院数学系，伊朗阿拉克385156-8-8349，邮政信箱：879。
V-Khalili@araku.ac.ir 2000年数学学科分类号：17A30、17B63、17A60。关键词：非交换泊松代数、集合分次的李代数、结构理论

物理学和几何学。最近，通过分次支撑的连接，已经确定了 [3, 8, 17], 具有集合分次的李代数、具有集合分次的李超代数以及具有集合分次的莱布尼茨超代数。我们的目标是研究任意基域 $\mathbb{F}$ 上的任意非交换泊松代数的结构（不一定是有限维的），重点关注分次支撑中元素的连接技术。其结构。受 [6], 中关于分裂非交换泊松代数的先前研究启发，我们希望通过使用连接技术，重点研究集合分次非交换泊松代数的内部结构。

本文中，我们考虑任意维数、底域 $\mathbb{F}$ 的特征为零的非交换泊松代数 $\mathcal{P}$。我们还考虑带有单位元零的任意集合 $\mathcal{S}$。

作为引言的结尾，我们简要概述本文的内容。第 2 节首先回顾分次泊松色代数所需的背景知识。第 3 节借助任意集合，为分次非交换泊松代数构造其分次支撑中元素之间的连接方法。我们还证明，这样的代数 $\mathcal{P}$ （ $\Lambda_{\mathcal{S}}$ ）具有如下形式：$\mathcal{P} = \mathcal{U} \oplus \sum_{[\lambda] \in (\Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}) /\sim} \mathcal{P}_{[\lambda]}$，其中 $\mathcal{U}$ 是张成空间 ${}_{\mathbb{F}}\{[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta] + \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\eta$ 的向量子空间补空间： μ、$\eta \in [\lambda]\} \cap \mathcal{P}_0$ 属于 $\mathcal{P}_0$，且任意 $\mathcal{P}_{[\lambda]}$ 都是 $\mathcal{P}$ 的一个描述明确的分次理想，并满足 $[\mathcal{P}_{[\lambda]}, \mathcal{P}_{[\mu]}] + \mathcal{P}_{[\lambda]}\mathcal{P}_{[\mu]} = 0$ （若 $[\lambda] \neq [\mu].$）。第 4 节中，我们证明，在某些条件下，当 $\mathcal{P}$ 具有最大长度时，代数的分次单性可由此刻画。

2. Preliminaries

本节首先回顾集合分次非交换泊松代数的一些基本定义和性质。

定义 2.1. [6] 非交换泊松代数是任意基域 $\mathbb{F}$ 上的李代数 $(\mathcal{P}, [.,.])$，并赋予一个以并置表示的结合积，使其满足以下莱布尼茨法则：

$$[x, yz] = [x, y]z + y[x, z],$$

对任意 $x, y, z \in \mathcal{P}.$ 均成立

子代数 A 是 $\mathcal{P}$ 的一个线性子空间，对李积和结合积均封闭，即 $[A, A] + AA \subset A$。理想 I 是 $\mathcal{P}$ 的一个满足$[I, \mathcal{P}] + I\mathcal{P} + \mathcal{P}I \subset I.$ 的子代数。若非交换泊松代数 $\mathcal{P}$ 满足$[\mathcal{P}, \mathcal{P}] \neq 0, \mathcal{P}\mathcal{P} \neq 0$，且其仅有的理想为 $\{0\}$ 和 $\mathcal{P}.$，则称其为简单的。

定义 2.2. 设 $\mathcal{P}$ 为非交换泊松代数， $\mathcal{S}$ 为任意（非空）集合。称 $\mathcal{P}$ 通过 $\mathcal{S}$ 具有集合分次，或称其为集合分次的，如果

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_s,$$

作为以 $\mathcal{S}$ 为指标的非零子空间的直和，具有如下性质：对于任意 s、$t \in \mathcal{S}$ 及 $0 \neq [\mathcal{P}_s, \mathcal{P}_t] + \mathcal{P}_s\mathcal{P}_t$，存在唯一的 $u \in \mathcal{S}$ 使得$[\mathcal{P}_s, \mathcal{P}_t] + \mathcal{P}_s\mathcal{P}_t \subset \mathcal{P}_u$.

注意，分裂的非交换泊松代数、分次泊松色代数都是集合分次泊松超代数的例子。因此，本文扩展了 [6, 18] 中的结果。

我们将集合分次的支撑称为集合

$$\Lambda_{\mathcal{S}} = \{\lambda \in \mathcal{S} : \mathcal{P}_\lambda \neq 0\}.$$

因此我们可以写成

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}} \mathcal{P}_\lambda.$$

通常的正则性条件将按与非交换泊松代数结构相容的分次意义来理解，也就是说，集合分次非交换泊松代数 $\mathcal{P}$ 的分次子代数A 是一个分次子空间，并且可分解为

$$A = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} A_s \text{ with } A_s = A \cap \mathcal{P}_s, \tag{2.3}$$

并且 $[A, A] + AA \subset A$. 若 $\mathcal{P}$ 的分次子代数 I 满足$[I, \mathcal{P}] + I\mathcal{P} + \mathcal{P}I \subset I.$，则称其为分次理想。若集合分次非交换泊松代数 $\mathcal{P}$ 满足 $[\mathcal{P}, \mathcal{P}] + \mathcal{P}\mathcal{P} \neq 0$，且其仅有的理想为 $\{0\}$ 和 $\mathcal{P}$.，则称其为分次单

3. Connections in $\Lambda_{\mathcal{S}}$.*Decompositions*

在本节中，我们首先在如 [8] 中所述的集合分次非交换泊松代数的支撑上发展连接技术。

令 $\mathcal{P} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}} \mathcal{P}_\lambda$ 为任意一个集合分次的非交换泊松代数，其分次支撑为 $\Lambda_{\mathcal{S}}$。首先，我们回顾一些可在 [8] 中找到的术语。

对于每个 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$，引入一个新符号 $\lambda \notin \Lambda_{\mathcal{S}}$，并记为

$$\widetilde{\Lambda_{\mathcal{S}}} := \{\tilde{\lambda} : \lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}\},$$

由所有这些新符号组成的集合。

我们将用 $P(A)$ 表示给定集合 A 的幂集。接下来，我们考虑以下运算。

$$\star : (\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \widetilde{\Lambda_{\mathcal{S}}}) \times (\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \widetilde{\Lambda_{\mathcal{S}}}) \longrightarrow P(\Lambda_{\mathcal{S}}),$$

由.....给出

- 对于 λ， $\mu \in \Lambda_{\mathcal{S}}$,

$$\lambda \star \mu = \begin{cases} \emptyset & \text{if } [\mathcal{P}_\lambda, \mathcal{P}_\mu] + \mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_\mu = 0 \\ \{\eta\} & \text{if } 0 \neq [\mathcal{P}_\lambda, \mathcal{P}_\mu] + \mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_\mu \subset \mathcal{P}_\eta \end{cases} ;$$

- for $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}, \tilde{\mu} \in \tilde{\Lambda_{\mathcal{S}}}$,
$$\lambda \star \tilde{\mu} = \tilde{\mu} \star \lambda = \{\eta \in \Lambda_{\mathcal{S}} : 0 \neq [\mathcal{P}_\eta, \mathcal{P}_\mu] + \mathcal{P}_\eta \mathcal{P}_\mu \subset \mathcal{P}_\lambda\};$$
- for $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \in \tilde{\Lambda_{\mathcal{S}}}$,
$$\tilde{\lambda} \star \tilde{\mu} = \emptyset.$$

˜从现在起，给定任意 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ 我们将记作
$$\tilde{\tilde{\lambda}} := \lambda.$$
~ ˜ ˜此外，给定 $\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \Lambda_{\mathcal{S}}$ 的任意子集 Ω，我们记 $\Omega := \{\lambda : \lambda \in \Omega\}$，如果 $\Omega \neq \emptyset$ 且还满足 $\emptyset := \emptyset$.

值得一提的是，有时区分分次支撑中的一个元素 0 很有意义，因为齐次空间 $\mathcal{P}_0$ 在某种意义上，相对于空间集合 $\mathcal{P}_\lambda$ 中的其余元素具有特殊性质，$\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$.例如，当分次集合 $\mathcal{S}$ 是阿贝尔群时，便是如此；与群中单位元 0 相关联的齐次空间 $\mathcal{P}_0$ 扮演着特殊角色（见 [18]）。如果我们考虑由最大长度分裂李代数的嘉当分解所确定的群分次，那么与单位元相关联的齐次空间就是嘉当子代数 H，并且对分次支撑中的任意 λ，$\dim \mathcal{P}_\lambda = 1$ 均成立；而 $\dim \mathcal{P}_0$ 不受此条件限制（见 [7]）。因此，在接下来的研究中，我们将不妨区分分次支撑中的一个元素 0。于是，现在固定一个元素 0，使得要么 $0 \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ 满足性质 $0 \star \lambda \neq \{0\}$，对任意 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ 均成立；要么 $0 = \emptyset$. 。可能性 $0 = \emptyset$ 适用于不希望在 $\Lambda_{\mathcal{S}}$. 中区分任何元素的情形。最后，我们需要引入以下映射；

$$\psi : \left((\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \widetilde{\Lambda_{\mathcal{S}}}) \setminus \{0, \tilde{0}\}\right) \times (\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \widetilde{\Lambda_{\mathcal{S}}}) \longrightarrow P\left((\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \widetilde{\Lambda_{\mathcal{S}}}) \setminus \{0, \tilde{0}\}\right),$$

给定 b y

- $\psi(\emptyset, \Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \widetilde{\Lambda_{\mathcal{S}}}) = \emptyset$;
- for any $\emptyset \neq \Omega \in P\left((\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \widetilde{\Lambda_{\mathcal{S}}}) \setminus \{0, \tilde{0}\}\right)$ and any $a \in (\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \widetilde{\Lambda_{\mathcal{S}}})$,
$$\psi(\Omega, a) = \left(\left(\bigcup_{x \in \Omega} (x \star a)\right) \setminus \{0\}\right) \cup \left(\left(\bigcup_{x \in \Omega} \widetilde{(x \star a)}\right) \setminus \{0\}\right).$$

注 3.1. 显然，对于任意 $\Omega \in P\left((\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \widetilde{\Lambda_{\mathcal{S}}}) \setminus \{0, \tilde{0}\}\right)$ and 任意 $a \in \widetilde{(\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \Lambda_{\mathcal{S}})}$，我们有

$$\psi(\Omega, a) = \widetilde{\psi(\Omega, a)}, \tag{3.2}$$

and

$$\psi(\Omega, a) \cap \Lambda_{\mathcal{S}} = \left(\bigcup_{x \in \Omega} (x \star a)\right) \setminus \{0\}.$$

~另请注意，对于任意 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ 和 $a \in (\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \Lambda_{\mathcal{S}})$，存在某个 ~ $x \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ 使得 $\lambda \in x \star a$ 当且仅当 $x \in \lambda \star \tilde{a}$；而存在某个 $\mu \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ 使得 $\lambda \in \mu \star a$ 当且仅当 $\tilde{\mu} \in \lambda \star a$.

这些事实与式 (3.2) 一起意味着，对于任意满足 $\Omega \in P\left((\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \widetilde{\Lambda_{\mathcal{S}}}) \setminus \{0, \tilde{0}\}\right)$ ~ $\widetilde{}$，且 $\Omega = \Omega$ 和 $a \in (\Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \Lambda_{\mathcal{S}})$ 的 Ω，我们有 $\lambda \in \psi(\Omega\ a) \cap \Lambda_{\mathcal{S}}$ 当且仅当 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}\widetilde{}$，并且 $\psi(\{\lambda\}, \tilde{a}) \cap \Omega \cap \Lambda_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$ 或 $\psi(\Lambda_{\mathcal{S}}, a) \cap \Omega \cap \Lambda_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$.

定义 3.3. 设 $\lambda, \mu \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$. 。若存在一个族，我们称 λ 与 μ 连通，并记作 $\lambda \sim \mu$。

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n\} \subset \Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \widetilde{\Lambda_{\mathcal{S}}},$$

满足以下条件;

If $n = 1$:
(1) $\lambda_1 = \lambda = \mu$.
If $n \geq 2$:
(1) $\lambda_1 \in \{\lambda, \tilde{\lambda}\}$,
(2) $\psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2) \neq \emptyset$,
$\psi(\psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2), \lambda_3) \neq \emptyset$,
$\psi(\psi(\psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2), \lambda_3), \lambda_4) \neq \emptyset$,
...
$\psi(\psi(...(\psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2), ...), \lambda_{n-2}), \lambda_{n-1}) \neq \emptyset$.

(3) $\mu \in \psi(\psi(...(\psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2), ...), \lambda_{n-2}), \lambda_{n-1}), \lambda_n)$.

族 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n\}$ 称为从 λ 到 μ.的连接。

命题 3.4。由 $\lambda \sim \mu$ 当且仅当 λ 与 μ 相连定义的关系 $\sim$ in $\Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$，是一种等价关系。

证明。该证明与 [8] 中命题 2.1 的证明类似。 □

根据上述命题，给定 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$，我们可以考虑商 se t

$$(\Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\})/\sim := \{[\lambda] \ : \ \lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}\},$$

那么 $[\lambda]$ 是 $\Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ 中与 λ. 相连的元素集合。根据命题 3.4，如果 $\mu \notin [\lambda]$，那么 $[\lambda] \cap [\mu] = \emptyset$.

本节的下一个目标是将 $\mathcal{P}$ 的一个理想 $I_{[\lambda]}$ 与任意 $[\lambda]$. 联系起来。固定 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$，我们定义集合 $I_{0,[\lambda]}$ 如下;

$$I_{0,[\lambda]} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta] + \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\eta : \mu, \eta \in [\lambda]\} \cap \mathcal{P}_0.$$

也就是说

$$I_{0,[\lambda]} = \left(\sum_{\substack{\mu,\eta \in [\lambda] \\ \mu \star \eta = \{0\}}} ([\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta] + \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\eta) \right) \subset \mathcal{P}_0, \tag{3.5}$$

其中 $\mathcal{P}_0 := \{0\}$ 由此可得 $0 = \emptyset$. 接下来，我们定义

$$\mathcal{V}_{[\lambda]} := \bigoplus_{\mu \in [\lambda]} \mathcal{P}_\mu.$$

最后，我们用 $I_{[\lambda]}$ 表示上述两个分次子空间的直和，即，

$$I_{[\lambda]} := I_{0,[\lambda]} \oplus \mathcal{V}_{[\lambda]}.$$

命题 3.6。对于任意 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$，分次子空间 $I_{[\lambda]}$ 是 $\mathcal{P}.$的分次子代数。

证明。首先，我们将验证 $I_{[\lambda]}$ 满足 $[I_{[\lambda]}, I_{[\lambda]}] \subset I_{[\lambda].}$。我们有

$$\begin{aligned}[I_{[\lambda]}, I_{[\lambda]}] &= [I_{0,[\lambda]} \oplus \mathcal{V}_{[\lambda]}, I_{0,[\lambda]} \oplus \mathcal{V}_{[\lambda]}] \\ &\subset [I_{0,[\lambda]}, I_{0,[\lambda]}] + [I_{0,[\lambda]}, \mathcal{V}_{[\lambda]}] + [\mathcal{V}_{[\lambda]}, I_{0,[\lambda]}] + [\mathcal{V}_{[\lambda]}, \mathcal{V}_{[\lambda]}]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

让我们考虑 (3.7) 中的第二个加项。考虑到 $I_{0,\ [\lambda]} \subset \mathcal{P}_0$ 并假设存在 $\mu \in [\lambda]$ 使得 $0 \neq [I_{0,[\lambda]}, \mathcal{P}_\mu] \subset [\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_\mu] \subset \mathcal{P}_\tau$，其中 $0 \star \mu = \{\tau\}$、$\tau \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$.。那么，连接 $\{\tau, 0\}$ 给出 $\mu \sim \tau$，因此 $\tau \in [\lambda]$。于是，$[I_{0,[\lambda]}, \mathcal{V}_{[\lambda]}] \subset \mathcal{V}_{[\lambda]\cdot}$。根据李乘积的斜对称性 $[\mathcal{V}_{[\lambda]}, I_{0,[\lambda]}] \subset \mathcal{V}_{[\lambda]}$.因此，

$$[I_{0,[\lambda]}, \mathcal{V}_{[\lambda]}] + [\mathcal{V}_{[\lambda]}, I_{0,[\lambda]}] \subset I_{[\lambda]}. \tag{3.8}$$

现在考虑 (3.7) 中的第四个加项。假设存在 μ、$\eta \in [\lambda]$，其中 $\mu \star \eta = \{\tau\}$、$\tau \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ 满足 $0 \neq [\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta] \subset \mathcal{P}_{\tau\cdot}$。若 $\tau = 0$，显然 $[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta] \subset \mathcal{P}_0$，并且考虑到等式 (3.5)，我们有 $[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta] \subset I_{0,\ [\lambda]\cdot}$。否则，若 $\tau \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$，则连接 $\{\tau, \tilde{\eta}\}$ 给出 $\mu \sim \tau$，因此 $\tau \in [\lambda].$。于是 $[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta] \subset \mathcal{P}_\tau \subset \mathcal{V}_{[\lambda]\cdot}$。无论哪种情况，我们都有

$$[\mathcal{V}_{[\lambda]}, \mathcal{V}_{[\lambda]}] \subset I_{[\lambda]}. \tag{3.9}$$

最后考虑 (3.7) 中的第一加项，我们有

$$\begin{aligned}[I_{0,[\lambda]}, I_{0,[\lambda]}] &= \left[\sum_{\substack{\mu,\eta\in[\lambda] \\ \mu\star\eta=\{0\}}} \left([\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta] + \mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta\right), \sum_{\substack{\mu',\eta'\in[\lambda] \\ \mu'\star\eta'=\{0\}}} \left([\mathcal{P}_{\mu'}, \mathcal{P}_{\eta'}] + \mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'}\right) \right] \\ &\subset \sum_{\substack{\mu,\eta,\mu',\eta'\in[\lambda] \\ \mu\star\eta=\{0\}=\mu'\star\eta'}} ([[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta], [\mathcal{P}_{\mu'}, \mathcal{P}_{\eta'}]] + [[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta], \mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'}] \\ &+ [\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta, [\mathcal{P}_{\mu'}, \mathcal{P}_{\eta'}]] + [\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta, \mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'}]). \end{aligned} \tag{3.10}$$

对于(3.10) 中的第一项，假设存在 μ、η、μ'、$\eta' \in [\lambda]$，其中 $\mu \star \eta = \{0\}$和 $\mu' \star \eta' = \{0\}$ 使得 $[[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta], [\mathcal{P}_{\mu'}, \mathcal{P}_{\eta'}]] \neq 0.$。考虑到式 (3.5) 和雅可比恒等式，我们有

$$\begin{aligned}[[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta], [\mathcal{P}_{\mu'}, \mathcal{P}_{\eta'}]] &\subset [[[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta], \mathcal{P}_{\mu'}], \mathcal{P}_{\eta'}] + [[[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\eta], \mathcal{P}_{\eta'}], \mathcal{P}_{\mu'}] \\ &\subset [[\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_{\mu'}], \mathcal{P}_{\eta'}] + [[\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_{\eta'}], \mathcal{P}_{\mu'}]. \end{aligned}$$

如果 $0 \neq [\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_{\mu'}] \subset \mathcal{P}_\tau$，在 $0 \star \mu' = \{\tau\}$、$\tau \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ 的情况下，那么 $\{\tau, 0\}$ 是从 τ到 μ'的连接，因此 $\tau \in [\lambda].$同样地，利用 $[\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_{\eta'}]$ 以得到

$$\sum_{\substack{\mu,\eta,\mu',\eta'\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}=\mu'\star\eta'}} [[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta],[\mathcal{P}_{\mu'},\mathcal{P}_{\eta'}]] \subset I_{0,[\lambda]}. \tag{3.11}$$

对于(3.10)中的第二项和第三项，考虑到 $\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'} \subset \mathcal{P}_0$ 或$\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta \subset \mathcal{P}_0$ 以及雅可比恒等式，可以得到

$$\sum_{\substack{\mu,\eta,\mu',\eta'\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}=\mu'\star\eta'}} ([[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta],\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'}]+[\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,[\mathcal{P}_{\mu'},\mathcal{P}_{\eta'}]]) \subset I_{0,[\lambda]}. \tag{3.12}$$

对于(3.10)中的最后一项，假设存在 μ、 η、 μ'、 $\eta' \in [\lambda]$，其中 $\mu\star\eta=\{0\}$且 $\mu'\star\eta'=\{0\}$，使得 $[\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'}] \neq 0.$。考虑到公式 (3.5) 和莱布尼茨法则，我们有

$$\begin{aligned}[\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'}] &\subset [\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'}]\\ &\subset [\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_{\mu'}]\mathcal{P}_{\eta'}+\mathcal{P}_{\mu'}[\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_{\eta'}])\end{aligned}$$

同上，如果 $0\neq[\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_{\mu'}]\subset\mathcal{P}_\tau$，且 $0\star\mu'=\{\tau\}$、 $\tau\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$，那么 $\{\tau,0\}$ 是从 τ 到 μ' 的连接，因此 $\tau\in[\lambda].$。类似地，令 $[\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_{\eta'}]$ 可得

$$\sum_{\substack{\mu,\eta,\mu',\eta'\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}=\mu'\star\eta'}} [\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'}] \subset I_{0,[\lambda]}. \tag{3.13}$$

由式（3.11）–（3.13），我们得出结论:

$$[I_{0,[\lambda]},I_{0,[\lambda]}] \subset I_{0,[\lambda]}. \tag{3.14}$$

最后，方程 (3.8)、(3.9) 和 (3.14) 给出的是

$$[I_{[\lambda]},I_{[\lambda]}] \subset I_{[\lambda]}. \tag{3.15}$$

接下来，我们将证明 $I_{[\lambda]}$ 满足 $I_{[\lambda]}I_{[\lambda]}\subset I_{[\lambda]}.$。我们有

$$\begin{aligned}I_{[\lambda]}I_{[\lambda]} &= (I_{0,[\lambda]}\oplus\mathcal{V}_{[\lambda]})(I_{0,[\lambda]}\oplus\mathcal{V}_{[\lambda]})\\ &\subset I_{0,[\lambda]}I_{0,\lambda]}+I_{0,[\lambda]}\mathcal{V}_{[\lambda]}+\mathcal{V}_{[\lambda]}I_{0,[\lambda]}+\mathcal{V}_{[\lambda]}\mathcal{V}_{[\lambda]}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

我们只需考虑 (3.16) 中的第一个加项。对于其余加项，按照上述类似的方法，可以证明

$$I_{0,[\lambda]}\mathcal{V}_{[\lambda]}+\mathcal{V}_{[\lambda]}I_{0,[\lambda]}+\mathcal{V}_{[\lambda]}\mathcal{V}_{[\lambda]} \subset I_{[\lambda]}. \tag{3.17}$$

现在，考虑 (3.16) 中的第一个加项 $I_{0,\ [\lambda]}I_{0,\ [\lambda]}$，我们有

$$\begin{aligned} I_{0,[\lambda]}I_{0,[\lambda]} &= \left(\sum_{\substack{\mu,\eta\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}}}([\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta]+\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta)\right)\left(\sum_{\substack{\mu',\eta'\in[\lambda]\\ \mu'\star\eta'=\{0\}}}([\mathcal{P}_{\mu'},\mathcal{P}_{\eta'}]+\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'})\right)\\ &\subset \sum_{\mu,\eta,\mu',\eta'\in[\lambda]}([\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta][\mathcal{P}_{\mu'},\mathcal{P}_{\eta'}]+[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta](\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'}) \qquad (3.18)\\ &+ (\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta)[\mathcal{P}_{\mu'},\mathcal{P}_{\eta'}]+(\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta)(\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'})). \end{aligned}$$

对于 (3.18) 中的第四项，由乘积的结合律可得

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mu,\eta,\mu',\eta'\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}=\mu'\star\eta'}}(\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta)(\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'}) &= \sum_{\substack{\mu,\eta,\mu',\eta'\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}=\mu'\star\eta'}}(\mathcal{P}_\mu\left(\mathcal{P}_\eta(\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'})\right))\\ &\subset \sum_{\substack{\mu,\eta\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}}}(\mathcal{P}_\mu(\mathcal{P}_\eta\mathcal{P}_0))\,. \end{aligned}$$

若 $0\neq\mathcal{P}_\eta\mathcal{P}_0\subset\mathcal{P}_\tau$，且有 $\eta\star 0=\{\tau\}$, $\tau\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$，则 $\{0,\tau\}$ 是从 τ 到 η 的连接，因此 $\tau\in[\lambda]$. 。因此，$\mathcal{P}_\eta\mathcal{P}_0\subset\mathcal{P}_\tau\subset\mathcal{V}_{[\lambda]}$.

$$\sum_{\substack{\mu,\eta,\mu',\eta'\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}=\mu'\star\eta'}}(\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta)(\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'})\subset I_{[\lambda]}. \qquad (3.19)$$

对于 (3.18) 中的第二项，由莱布尼茨法则可得

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\mu,\eta,\mu',\eta'\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}=\mu'\star\eta'}}[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta](\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'})\\ &\qquad\subset \sum_{\substack{\mu,\eta\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}}}[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta]\mathcal{P}_0\\ &\qquad\subset \sum_{\substack{\mu,\eta\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}}}([\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta\mathcal{P}_0]+\mathcal{P}_\eta[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_0])\,. \end{aligned}$$

仿照上述方法，取 $\mathcal{P}_\eta\mathcal{P}_0$ 和 $[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_0]$，可得

$$\sum_{\substack{\mu,\eta,\mu',\eta'\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}=\mu'\star\eta'}}[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta](\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'})\subset\mathcal{V}_{[\lambda]}.$$

同样地，$\sum_{\mu,\eta,\mu',\eta'\in[\lambda]}(\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta)[\mathcal{P}_{\mu'},\mathcal{P}_{\eta'}]\subset\mathcal{V}_{[\lambda]}$. 因此，

$$\sum_{\substack{\mu,\eta,\mu',\eta'\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}=\mu'\star\eta'}}([\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta](\mathcal{P}_{\mu'}\mathcal{P}_{\eta'})+(\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta)[\mathcal{P}_{\mu'},\mathcal{P}_{\eta'}])\subset I_{[\lambda]}. \qquad (3.20)$$

对于（3.18）中的第一项，考虑到 $[\mathcal{P}_{\mu'}, \mathcal{P}_{\eta'}] \subset \mathcal{P}_0$和莱布尼茨法则，可以像上面那样得到。

$$\sum_{\substack{\mu,\eta,\mu',\eta' \in [\lambda] \\ \mu\star\eta=\{0\}=\mu'\star\eta'}} ([\mathcal{P}_{\mu}, \mathcal{P}_{\eta}][\mathcal{P}_{\mu'}, \mathcal{P}_{\eta'}]) \subset I_{[\lambda]}. \tag{3.21}$$

由等式 (3.19)-(3.21)，我们证明了

$$I_{0,[\lambda]} I_{0,[\lambda]} \subset I_{[\lambda]}. \tag{3.22}$$

因此，等式 (3.17) 和 (3.22) 给出

$$I_{[\lambda]} I_{[\lambda]} \subset I_{[\lambda]}. \tag{3.23}$$

最后，由等式 (3.15) 和 (3.23)，我们得出 $[I_{[\lambda]}, I_{[\lambda]}] + I_{[\lambda]} I_{[\lambda]} \subset I_{[\lambda]}$，因此 $I_{[\lambda]}$ 是 $\mathcal{P}$. □的（分次）子代数

Prop命题 3.24. 对任意 λ、$\mu \in \Lambda_{\mathcal{S}} \backslash \{0\}$，若 $[\lambda] \neq [\mu]$，则 $[I_{[\lambda]}, I_{[\mu]}] + I_{[\lambda]} I_{[\mu]} = 0.$

证明. 我们有

$$\begin{aligned} [I_{[\lambda]}, I_{[\mu]}] &= [I_{0,[\lambda]} \oplus \mathcal{V}_{[\lambda]}, I_{0,[\mu]} \oplus \mathcal{V}_{[\mu]}] \\ &\subset [I_{0,[\lambda]}, I_{0,[\mu]}] + [I_{0,[\lambda]}, \mathcal{V}_{[\mu]}] + [\mathcal{V}_{[\lambda]}, I_{0,[\mu]}] + [\mathcal{V}_{[\lambda]}, \mathcal{V}_{[\mu]}], \end{aligned} \tag{3.25}$$

以及

$$\begin{aligned} I_{[\lambda]} I_{[\mu]} &= (I_{0,[\lambda]} \oplus \mathcal{V}_{[\lambda]})(I_{0,[\mu]} \oplus \mathcal{V}_{[\mu]}) \\ &\subset I_{0,[\lambda]} I_{0,[\mu]} + I_{0,[\lambda]} \mathcal{V}_{[\mu]} + \mathcal{V}_{[\lambda]} I_{0,[\mu]} + \mathcal{V}_{[\lambda]} \mathcal{V}_{[\mu]}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

我们来考察 (3.25) 和 (3.26) 中最后的加项。假设存在$\lambda' \in [\lambda]$和 $\eta' \in [\mu]$，使得 $[\mathcal{P}_{\lambda'}, \mathcal{P}_{\mu'}] + \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\mu'} \neq 0.$。由于必然有 $\lambda' \star \mu' \neq \emptyset$，因此 λ'，$\mu' \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}.$。所以$\{\lambda', \mu', \lambda'\}$是从 λ'到 $\mu'.$的连接。由连接关系的传递性可知 $\mu' \in [\lambda]$，这与假设矛盾。因此，$[\mathcal{P}_{\lambda'}, \mathcal{P}_{\mu'}] + \mathcal{P}_{\lambda'} \mathcal{P}_{\mu'} = 0$，于是

$$[\mathcal{V}_{[\lambda]}, \mathcal{V}_{[\mu]}] + \mathcal{V}_{[\lambda]} \mathcal{V}_{[\mu]} = 0. \tag{3.27}$$

现在考察 (3.25) 和 (3.26) 中的第二个加项，我们有

$$\begin{aligned}[I_{0,[\lambda]},\mathcal{V}_{[\mu]}]+I_{0,[\lambda]}\mathcal{V}_{[\mu]} &= \left[\sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda]\\ \lambda_1\star\lambda_2=\{0\}}}([\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}]+\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2}),\bigoplus_{\mu'\in[\mu]}\mathcal{P}_{\mu'}\right]\\ &+\left(\sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda]\\ \lambda_1\star\lambda_2=\{0\}}}([\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}]+\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2}),\bigoplus_{\mu'\in[\mu]}\mathcal{P}_{\mu'}\right)\\ &\subset \sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda],\ \mu'\in[\mu]\\ \lambda_1\star\lambda_2=\{0\}}}([[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}],\mathcal{P}_{\mu'}]+[\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2},\mathcal{P}_{\mu'}]\\ &+ ([\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}]\mathcal{P}_{\mu'}+(\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2})\mathcal{P}_{\mu'}).\end{aligned}$$

假设存在 λ_1、$\lambda_2\in[\lambda]$，满足 $\lambda_1\star\lambda_2=\{0\}$ 和 $\mu'\in[\mu]$，使得

$$[[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}],\mathcal{P}_{\mu'}]+[\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2},\mathcal{P}_{\mu'}]+[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}]\mathcal{P}_{\mu'}+(\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2})\mathcal{P}_{\mu'}\neq 0.$$

下面分四种情况进行讨论：

- 如果 $[[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}],\mathcal{P}_{\mu'}]\neq 0$. 根据雅可比恒等式，我们得到要么 $[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\mu'}]\neq 0$要么$[\mathcal{P}_{\lambda_2},\mathcal{P}_{\mu'}]\neq 0$. 在这两种情况下，根据方程 (3.27)，我们都得到矛盾。因此，

$$\sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda],\ \mu'\in[\mu]\\ \lambda_1\star\lambda_2=\{0\}}}[[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}],\mathcal{P}_{\mu'}]=0.$$

- 如果 $[\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2},\mathcal{P}_{\mu'}]\neq 0$. 根据莱布尼茨法则，我们有

$$0\neq[\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2},\mathcal{P}_{\mu'}]\subset[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\mu'}]\mathcal{P}_{\lambda_2}+\mathcal{P}_{\lambda_1}[\mathcal{P}_{\lambda_2},\mathcal{P}_{\mu'}].$$

因此，要么是 $[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\mu'}]\neq 0$，要么是 $[\mathcal{P}_{\lambda_2},\mathcal{P}_{\mu'}]\neq 0$.。在这两种情况下，根据等式 (3.27)，我们都得到了矛盾。因此，

$$\sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda],\ \mu'\in[\mu]\\ \lambda_1\star\lambda_2=\{0\}}}[\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2},\mathcal{P}_{\mu'}]=0.$$

- 若 $[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}]\mathcal{P}_{\mu'}\neq 0$. 根据莱布尼茨法则，我们有

$$0\neq[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}]\mathcal{P}_{\mu'}\subset[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}\mathcal{P}_{\mu'}]+\mathcal{P}_{\lambda_2}[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\mu'}].$$

因此，要么 $[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\mu'}]\neq 0$要么 $\mathcal{P}_{\lambda_2}\mathcal{P}_{\mu'}\neq 0$. 在这两种情况下，根据等式 (3.27)，都会得到矛盾。因此，

$$\sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda],\ \mu'\in[\mu]\\ \lambda_1\star\lambda_2=\{0\}}}[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}]\mathcal{P}_{\mu'}=0.$$

- 最后，如果 $(\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2})\mathcal{P}_{\mu'}\neq 0$. 根据结合律，我们有

$$0\neq(\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2})\mathcal{P}_{\mu'}=\mathcal{P}_{\lambda_1}(\mathcal{P}_{\lambda_2}\mathcal{P}_{\mu'}).$$

因此 $\mathcal{P}_{\lambda_2}\mathcal{P}_{\mu'} \neq 0$，这就产生了矛盾（见方程 (3.27)）。因此，

$$\sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda],\ \mu'\in[\mu]\\ \lambda_1\star\lambda_2=\{0\}}} (\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2})\mathcal{P}_{\mu'} = 0.$$

因此，

$$[I_{[\lambda],1}, \mathcal{V}_{[\mu]}] + I_{[\lambda],1}\mathcal{V}_{[\mu]} = 0. \tag{3.28}$$

同理，我们得到

$$[\mathcal{V}_{[\lambda]}, I_{[\mu],1}] + \mathcal{V}_{[\lambda]}I_{[\mu],1} = 0. \tag{3.29}$$

最后，我们考察 (3.25) 和 (3.26) 中的第一个加项。我们有

$$\begin{aligned}
&[I_{0,[\lambda]}, I_{0,[\mu]}] = \\
&\left[\sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda]\\ \lambda_1\star\lambda_2=\{0\}}} ([\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}] + \mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2}), \sum_{\substack{\mu_1,\mu_2\in[\mu]\\ \mu_1\star\mu_2=\{0\}}} ([\mathcal{P}_{\mu_1},\mathcal{P}_{\mu_2}] + \mathcal{P}_{\mu_1}\mathcal{P}_{\mu_2})\right] \\
&\subset \sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda],\ \mu_1,\mu_2\in[\mu]\\ \lambda_1\star\lambda_2=\{0\}=\mu_1\star\mu_2}} ([[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}],[\mathcal{P}_{\mu_1},\mathcal{P}_{\mu_2}]] + [[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}],\mathcal{P}_{\mu_1}\mathcal{P}_{\mu_2}] \\
&+ \quad [\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2},[\mathcal{P}_{\mu_1},\mathcal{P}_{\mu_2}]] + [\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2},\mathcal{P}_{\mu_1}\mathcal{P}_{\mu_2}]).
\end{aligned}$$

假设存在 λ_1、$\lambda_2 \in [\lambda]$，满足 $\lambda_1 \star \lambda_2 = 0$，以及 μ_1、$\mu_2 \in [\mu]$，满足 $\mu_1 \star \mu_2 = 0$，使得

$$\begin{aligned}
0 \quad &\neq \quad [[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}],[\mathcal{P}_{\mu_1},\mathcal{P}_{\mu_2}]] + [[\mathcal{P}_{\lambda_1},\mathcal{P}_{\lambda_2}],\mathcal{P}_{\mu_1}\mathcal{P}_{\mu_2}] \\
&+ \quad [\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2},[\mathcal{P}_{\mu_1},\mathcal{P}_{\mu_2}]] + [\mathcal{P}_{\lambda_1}\mathcal{P}_{\lambda_2},\mathcal{P}_{\mu_1}\mathcal{P}_{\mu_2}].
\end{aligned}$$

如上所述，莱布尼茨法则和雅可比恒等式给出

$$[I_{0[\lambda]}, \mathcal{V}_{[\mu]}] + I_{0,[\lambda]}\mathcal{V}_{[\mu]} + [\mathcal{V}_{[\lambda]}, I_{0,[\mu]}] + \mathcal{V}_{[\lambda]}I_{0,[\mu]} \neq 0,$$

这会与式 (3.28) 或式 (3.29) 矛盾。由此

$$[I_{0,[\lambda]}, I_{0,[\mu]}] = 0. \tag{3.30}$$

类似地，可以得到

$$I_{0,[\lambda]}I_{0,[\mu]} = 0. \tag{3.31}$$

由式 (3.28)–(3.31) 和式 (3.27)，我们得出结论。 □

定理 3.32. 以下断言成立

(1) 对于任意 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$，分次子代数 $I_{[\lambda]} = I_{0,\ [\lambda]} \oplus \mathcal{V}_{[\lambda]}$ 是 $\mathcal{P}$. 的分次理想。

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是分次单的，则对于任意 λ、$\mu \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$.，存在从 λ 到 μ 的连接

证明。(1) 首先，我们将验证 $I_{[\lambda]}$ 满足 $[I_{[\lambda]},\mathcal{P}]\subset I_{[\lambda]}$.。我们有

$$[I_{[\lambda]},\mathcal{P}]=[I_{0,[\lambda]}\oplus\mathcal{V}_{[\lambda]},\mathcal{P}_0\oplus(\bigoplus_{\eta\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}}\mathcal{P}_\eta)]. \tag{3.33}$$

考虑等式 (3.33) 中的乘积 $[\mathcal{V}_{[\lambda]},\mathcal{P}_0]$，并假设存在 $\mu\in[\lambda]$使得 $[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_0]\neq 0$.。于是我们有 $\mu\star 0=\{\eta\}$，其中 $\eta\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$.。因此，$\{\mu,o\}$ 是从 μ 到 η 的连接，进而 $\eta\in[\lambda]$.。由此可得 $[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_0]\subset\mathcal{P}_\eta\subset\mathcal{V}_{[\lambda]}$.。因此，

$$[\mathcal{V}_{[\lambda]},\mathcal{P}_0]\subset I_{[\lambda]}. \tag{3.34}$$

考虑式 (3.33) 中的乘积 $[\mathcal{V}_{[\lambda]},\bigoplus_{\eta\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}}\mathcal{P}_\eta]$。根据命题 3.6 和 3.24，我们有

$$[\mathcal{V}_{[\lambda]},\bigoplus_{\eta\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}}\mathcal{P}_\eta]=\left[\mathcal{V}_{[\lambda]},\left(\bigoplus_{\eta\in[\lambda]}\mathcal{P}_\eta\right)\oplus\left(\bigoplus_{\eta\notin[\lambda]}\mathcal{P}_\eta\right)\right]\subset I_{[\lambda]}. \tag{3.35}$$

现在考虑式 (3.33) 中的乘积 $[I_{0,[\lambda]},\mathcal{P}_0]$。我们有

$$[I_{0,[\lambda]},\mathcal{P}_0]=\left[\sum_{\substack{\mu,\eta\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}}}([\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta]+\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_0\right]\subset\sum_{\substack{\mu,\eta\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}}}([[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta],\mathcal{P}_0]+[\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_0]).$$

假设存在 μ，$\eta\in[\lambda]$ 满足 $\mu\star\eta=\{0\}$ 使得 $0\neq[\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_0]\subset\mathcal{P}_\tau$满足 $\tau\in\Lambda_{\mathcal{S}}$. 在 $\tau=0$的情况下，我们有 $0\neq[\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_0]\subset\mathcal{P}_0$. 现在，根据莱布尼茨法则，我们有 $0\neq\mathcal{P}_\mu[\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_0]\subset\mathcal{P}_0$ 或 $0\neq[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_0]\mathcal{P}_\eta\subset\mathcal{P}_0$. 在第一种可能性下，我们有 $\eta\star 0=\{\nu\}$ 对于某个 $\nu\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$. 连接 $\{\eta,0\}$ 给出 $\eta\sim\nu$ 因此$\nu\in[\lambda]$ 于是 $0\neq\mathcal{P}_\mu[\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_0]\subset\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu\subset I_{0,[\lambda]}$. 类似地，在第二种可能性下，我们得出 $0\neq[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_0]\mathcal{P}_\eta\subset I_{0,[\lambda]}$. 因此，$\sum_{\mu,\eta\in[\lambda]}[\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_0]\subset I_{0,[\lambda]}{}_{\mu\star\eta=\{0\}}$

通过对第一个加项使用雅可比恒等式，我们得到相同的结果$[[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta],\mathcal{P}_0]\neq 0$. 因此，我们可以断言来概括这一段】【。

$$[I_{0,[\lambda]},\mathcal{P}_0]\subset I_{[\lambda]}. \tag{3.36}$$

最后，考虑公式 (3.33) 中的乘积 $[I_{0,[\lambda]},\bigoplus_{\eta\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}}\mathcal{P}_\eta]$。我们有

$$\begin{aligned}[I_{0,[\lambda]},\bigoplus_{\nu\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}}\mathcal{P}_\nu] &= \left[\sum_{\substack{\mu,\eta\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}}}([\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta]+\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\bigoplus_{\nu\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}}\mathcal{P}_\nu\right]\\ &\subset\sum_{\substack{\mu,\eta\in[\lambda],\ \nu\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}\\ \mu\star\eta=\{0\}}}([[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta],\mathcal{P}_\nu]+[\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_\nu]).\end{aligned}$$

假设存在 $\mu,\eta\in[\lambda]$，满足 $\mu\star\eta=\{0\}$ 和 $\nu\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$，使得$0\neq[\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_\nu]\subset\mathcal{P}_\tau$，由于必然有 $\tau\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$.。因此我们有 $0\neq[\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_\nu]\subset\mathcal{P}_\tau$。根据莱布尼茨法则，我们有 $0\neq\mathcal{P}_\mu[\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_\nu]\subset\mathcal{P}_\tau$ 或 $0\neq[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu]\mathcal{P}_\eta\subset\mathcal{P}_\tau$。在第一种可能性下，存在一个 $\delta\in\Lambda_{\mathcal{S}}$，使得 $0\neq[\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_\nu]\subset\mathcal{P}_\delta$，且 $\eta\star\nu=$。

$\{\delta\}$. 因此， $\{\eta,\delta\}$ 是从 η 到 τ的连接，然后 $\tau\in[\lambda]$. 因此 $\mathcal{P}_\mu[\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_\nu]\subset\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\delta\subset\mathcal{V}_{[\lambda]}$. 同样，在第二种可能性中，我们得出 $[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu]\mathcal{P}_\eta\subset\mathcal{V}_{[\lambda]}$.因此， $\sum_{\mu,\eta\in[\lambda]}[\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta,\mathcal{P}_\nu]\subset\mathcal{V}_{[\lambda]}$. 通过使用$\nu\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$，我们得到了相同的结果。
第一个加项的雅可比恒等式 $[[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta],\mathcal{P}_\nu]\neq 0$. 从这里

$$[I_{0,[\lambda]},\bigoplus_{\eta\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}}\mathcal{P}_\eta]\subset I_{[\lambda]}. \tag{3.37}$$

由式 (3.34)–(3.35)，我们得到

$$[I_{[\lambda]},\mathcal{P}]\subset I_{[\lambda]}.$$

接下来，我们将检查 $I_{[\lambda]}\mathcal{P}\subset I_{[\lambda]}$. 我们有

$$I_{[\lambda]}\mathcal{P}=(I_{0,[\lambda]}\oplus\mathcal{V}_{[\lambda]})\left(\mathcal{P}_0\oplus(\bigoplus_{\eta\in[\lambda]}\mathcal{P}_\eta)\oplus(\bigoplus_{\eta\notin[\lambda]}\mathcal{P}_\eta)\right). \tag{3.38}$$

考虑方程 (3.38) 中的乘积$I_{0,[\lambda]}\mathcal{P}_0$ 。利用结合律和莱布尼茨法则，按照命题 3.6 的证明，我们有

$$I_{0,[\lambda]}\mathcal{P}_0=\sum_{\substack{\mu,\eta\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}}}([\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta]+\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta)\mathcal{P}_0\subset\sum_{\substack{\mu,\eta\in[\lambda]\\ \mu\star\eta=\{0\}}}([\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta]\mathcal{P}_0+(\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta)\mathcal{P}_0)\subset I_{0,[\lambda]}.$$

我们还有 $\mathcal{V}_{[\lambda]}\mathcal{P}_0\subset\mathcal{V}_{[\lambda]}$. 因此 $(I_{0,\ [\lambda]}\oplus\mathcal{V}_{[\lambda]})\mathcal{P}_0\subset I_{[\lambda]}$. 由此以及命题 3.6 和 3.24，我们可以断言

$$I_{[\lambda]}\mathcal{P}=(I_{0,[\lambda]}\oplus\mathcal{V}_{[\lambda]})\left(\mathcal{P}_0\oplus(\bigoplus_{\eta\in[\lambda]}\mathcal{P}_\eta)\oplus(\bigoplus_{\eta\notin[\lambda]}\mathcal{P}_\eta)\right)\subset I_{[\lambda]}.$$

以类似的方式，我们得到 $\mathcal{P}I_{[\lambda]}\subset I_{[\lambda]}$ ，因此 $I_{[\lambda]}$ 是 $\mathcal{P}$. 的一个理想。

(2) $\mathcal{P}$ 的单性意味着，对于某个 $\lambda\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}.$ ，有 $\mathcal{P}=I_{[\lambda]}$ 。因此，$[\lambda]=\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ ，所以 $\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ 中任意一对元素都是连通的。□

定理 3.39. 一个集分次非交换泊松代数 $\mathcal{P}$ 可分解为

$$\mathcal{P}=\mathcal{U}\oplus\sum_{[\lambda]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim}I_{[\lambda]},$$

其中 $\mathcal{U}$ 是 $\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta]+\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta$ 的线性空间补空间： μ， $\eta\in[\lambda]\}$ 属于 $\mathcal{P}_0$ ，且任意 $I_{[\lambda]}$ 都是定理 3.32-(1) 中所描述的 $\mathcal{P}$ 的一个分次理想，并满足 $[I_{[\lambda]},I_{[\mu]}]+I_{[\lambda]}I_{[\mu]}=0$, 只要 $[\lambda]\neq[\mu]$.
证明。我们有 $I_{[\lambda]}$ 良定义，并且根据定理3.32-(1)，是 $\mathcal{P}$.的一个分次理想。现在，考虑一个线性补空间 $\mathcal{U}$，相对于张成空间$_{\mathbb{F}}\{[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\eta]+\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\eta$： μ、$\eta\in[\lambda]\}$在 $\mathcal{P}_0$中，我们有

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}_0\oplus(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}}\mathcal{P}_\lambda)=\mathcal{U}\oplus\sum_{[\lambda]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim}I_{[\lambda]}.$$

最后，命题 3.24 给出 $[I_{[\lambda]}, I_{[\mu]}] + I_{[\lambda]}I_{[\mu]} = 0$，只要 $[\lambda] \neq [\mu]$。 □

如果没有在分次支撑中指定任何元素 0，也就是说$0 = \emptyset$，则定理 3.32 立即推出以下结果；

推论 3.40. 如果 $0 = \emptyset$，那么

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{[\lambda]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim} I_{[\lambda]},$$

其中，任意一个 $I_{[\lambda]}$ 都是定理3.32-(1)中描述的 $\mathcal{P}$ 的分次理想，并且满足 $[I_{[\lambda]}, I_{[\mu]}] + I_{[\lambda]}I_{[\mu]} = 0$，只要 $[\lambda] \neq [\mu]$. □

我们用 $Z(\mathcal{P})$ 表示 $\mathcal{P}$ 的中心，即 $Z(\mathcal{P}) = \{x \in \mathcal{P}\colon\ [x, \mathcal{P}] + x\mathcal{P} + \mathcal{P}x = 0\}$.

定义 3.41。设 $\mathcal{P}$ 是一个集合分次的非交换泊松代数。我们说 $\mathcal{P}_0$ 是紧的，当且

$$\mathcal{P}_0 = \{0\} \text{ or } \mathcal{P}_0 = \sum_{\substack{\mu,\eta\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}\\ \lambda\star\mu=\{0\}}} ([\mathcal{P}_\lambda, P_\mu] + \mathcal{P}_\lambda, P_\mu).$$

推论 3.42。如果 $Z(\mathcal{P}) = 0$ 且 $\mathcal{P}_0$ 是紧的。那么 $\mathcal{P}$ 是定理 3.32-(1) 中给出的分次理想的直和，

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{[\lambda]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim} I_{[\lambda]},$$

其中 $[I_{[\lambda]}, I_{[\mu]}] + I_{[\lambda]}I_{[\mu]} = 0$，每当 $[\lambda] \neq [\mu]$.时

证明。由于 $\mathcal{P}_0$ 是紧的，显然

$$\mathcal{P} = \sum_{[\lambda]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim} I_{[\lambda]}.$$

对于直接特征，取一些

$$x \in I_{[\lambda]} \cap \sum_{\substack{[\mu]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim\\ [\lambda]\neq[\mu]}} I_{[\mu]}.$$

由 $x \in I_{[\lambda]}$ 以及事实 $[I_{[\lambda]}, I_{[\mu]}] + I_{[\lambda]}I_{[\mu]} + I_{[\mu]}I_{[\lambda]} = 0$ 可知，若 $[\lambda] \neq [\mu]$，则有

$$\left[x, \sum_{\substack{[\mu]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim\\ [\lambda]\neq[\mu]}} I_{[\mu]}\right] + x\left(\sum_{\substack{[\mu]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim\\ [\lambda]\neq[\mu]}} I_{[\mu]}\right) + \left(\sum_{\substack{[\mu]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim\\ [\lambda]\neq[\mu]}} I_{[\mu]}\right)x = 0. \tag{3.43}$$

另一方面，由于 $x \in \sum_{[\mu]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim} I_{[\mu]}$ ，且上述相同事实意味着$[\lambda]\neq[\mu]$

$$[x, I_{[\lambda]}] + xI_{[\lambda]} + I_{[\lambda]}x = 0. \tag{3.44}$$

现在，公式（3.43）和（3.44）给出 $x \in Z(\mathcal{P})$，因此 $x = 0$.于是， $\mathcal{P} = \bigoplus_{[\lambda]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim} I_{[\lambda]}$，如所需 □

4. The graded simple components

本节将研究集合分次非交换泊松代数的单性，并探讨在何种条件下，集合分次非交换泊松代数 $\mathcal{P}$ 可分解为其分次单理想族的直和。我们首先在具有集合分次的集合分次非交换泊松代数框架中引入最大长度和$\Lambda_{\mathcal{S}}$-乘法性的概念，其方式与集合分次李代数、集合分次李超代数、分裂非交换泊松代数以及群分次泊松色代数等框架中的做法类似（关于这些概念的讨论和示例，见 [6, 7, 17, 18] ）。从现在起，对于任意 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ ，我们将记 $\mathcal{P}_{\bar{\lambda}} = \{0\}$.

定义 4.1。我们称集分次非交换泊松代数 $\mathcal{P}$ 是$\sim_{\Lambda_{\mathcal{S}}}$-乘法的，如果给定 λ、 $\mu \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ 使得 $\lambda \in \mu \star s$ 对于某个 $s \in \Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \Lambda_{\mathcal{S}}$，那么

$$\mathcal{P}_\lambda \subset [\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_s + \mathcal{P}_{\bar{s}}] + \mathcal{P}_\mu(\mathcal{P}_s + \mathcal{P}_{\bar{s}}).$$

定义 4.2. 集分次非交换泊松代数 $\mathcal{P}$ 是最大长度的，当且仅当对于任意 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ ，我们都有 $\dim \mathcal{P}_\lambda = 1$.

引理 4.3. 设 $\mathcal{P}$ 是一个最大长度且 $\mathcal{P}_0$ 紧的无中心集分次非交换泊松代数。如果 I 是 $\mathcal{P}$ 的一个理想，使得 $I \subset \mathcal{P}_0$ ，那么 $I = \{0\}$.

证明。假设存在 $I = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_{\mathcal{S}}} I_\lambda$ 的一个非零分次理想 $\mathcal{P}$ ，使得 $I \subset \mathcal{P}_0$. 。对于任意 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ ，由于 $I_\lambda = I \cap \mathcal{P}_\lambda$，且 $\mathcal{P}$ 的最大长度，使我们得到

$$I = (I \cap \mathcal{P}_0) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\}} (I \cap \mathcal{P}_\lambda) \right). \tag{4.4}$$

现在，给定任意 $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$，考虑到 $I \subset \mathcal{P}_0$，我们有

$$[I, \mathcal{P}_\lambda] + I\mathcal{P}_\lambda + \mathcal{P}_\lambda I \subset \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_\mu,$$

对于某个 $0 \star \lambda = \{\mu\}$ $\mu \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$. 因此，

$$[I, \mathcal{P}_\lambda] + I\mathcal{P}_\lambda + \mathcal{P}_\lambda I = 0, \ \forall \lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}. \tag{4.5}$$

由于 $Z(\mathcal{P}) = 0$ 和 $\mathcal{P}_0$ 是紧的，对于任意 $0 \neq x \in I$，存在 λ、$\mu \in \Lambda_{\mathcal{S}} \backslash \{0\}$ 使得

$$[x, [\mathcal{P}_\lambda, \mathcal{P}_\mu]] + x(\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu) + (\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu)x \neq 0.$$

由雅可比恒等式和结合律，我们有 $[x, \mathcal{P}_\lambda] + x\mathcal{P}_\lambda + \mathcal{P}_\lambda x \neq 0$或 $[x, \mathcal{P}_\mu] + x\mathcal{P}_\mu + \mathcal{P}_\mu x \neq 0$，这与式 (4.5) 矛盾。因此，我们得出
$I = \{0\}$. □

定理 4.6. 设 $\mathcal{P}$ 是一个无中心的 $\Lambda_{\mathcal{S}}$-乘法集合分次非交换泊松代数，具有最大长度，且 $\mathcal{P}_0$ 紧。则 $\mathcal{P}$ 是分次单的，当且仅当其 $\Lambda_{\mathcal{S}}$ 中的所有非零元素彼此连通。

证明. 第一个蕴含由定理 3.32-(2) 得出。为证明逆命题，考虑$I = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}} I_\lambda$ $\mathcal{P}$. 的一个非零理想。根据式 (4.4)，我们可以写成

$$I = (I \cap \mathcal{P}_0) \oplus (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}^I} \mathcal{P}_\lambda), \tag{4.7}$$

其中 $\Lambda_{\mathcal{S}}^I := \{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\} : \ I \cap \mathcal{P}_\lambda \neq \{0\}\}$，根据引理 4.3，它也满足 $\Lambda_{\mathcal{S}}^I \neq \emptyset$。因此，我们可以选择 $\lambda_0 \in \Lambda_{\mathcal{S}}^I$ 使其如此。

$$0 \neq \mathcal{P}_{\lambda_0} \subset I. \tag{4.8}$$

现在，让我们任取一个 $\mu \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$. 事实 λ_0 与 μ相连接，为我们给出了一个 $\widetilde{}$连接 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_k\} \subset \Sigma_\Lambda \subset \Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \Lambda_{\mathcal{S}}$，满足以下条件；

如果 $k = 1$:

(1) $\lambda_1 = \lambda_0 = \mu$.

如果 $k \geq 2$:

(1) $\lambda_1 \in \{\lambda, \tilde{\lambda}\}$,
(2) $\psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2) \neq \emptyset$,
$\psi(\psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2), \lambda_3) \neq \emptyset$,
$\psi(\psi(\psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2), \lambda_3), \lambda_4) \neq \emptyset$,
...
$\psi(\psi(...(\psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2), ...), \lambda_{k-2}), \lambda_{k-1}) \neq \emptyset$.

(3) $\mu \in \psi(\psi(...(\psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2), ...), \lambda_{k-2}), \lambda_{k-1}), \lambda_k)$.

考虑 $\psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2) \neq \emptyset$，于是 $\psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2) \cap \Lambda_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$（见注 3.1）。因此，˜对于任意 $\mu_1 \in \psi(\{\lambda_1\}, \lambda_2) \cap \Lambda_{\mathcal{S}}$，我们有 $\mu_1 \in \lambda_1 \star \lambda_2$.。事实 $\lambda_1 \in \{\lambda, \lambda\}$ 给出˜ ˜
要么是 $\mu_1 \in \lambda_0 \star \lambda_2$，要么是 $\mu_1 \in \lambda_0 \star \lambda_2 = \lambda_2 \star \lambda_0$，且在后一种情况下必有 $\lambda_2 \in \Lambda_{\mathcal{S}}$。现在，根据 $\Lambda_{\mathcal{S}}$–的乘法性以及由式 (4.8) 推得的 $\mathcal{P}$ 最大长度，我们得到

$$0 \neq \mathcal{P}_{\mu_1} = [\mathcal{P}_{\lambda_0}, \mathcal{P}_{\lambda_2} + \mathcal{P}_{\tilde{\lambda_2}}] + \mathcal{P}_{\lambda_0}(\mathcal{P}_{\lambda_2} + \mathcal{P}_{\tilde{\lambda_2}}) \subset I.$$

或者 $0 \neq \mathcal{P}_{\mu_1} = [\mathcal{P}_{\lambda_0}, \mathcal{P}_{\lambda_2}] + \mathcal{P}_{\lambda_0}\mathcal{P}_{\lambda_2} \subset I$. 由此我们断言

$$\bigoplus_{\lambda \in \psi(\{\lambda_1\},\lambda_2)\cap\Lambda_{\mathcal{S}}} \mathcal{P}_{\lambda} \subset I. \tag{4.9}$$

接下来，备注 3.1 再次表明 $\psi(\psi(\{\lambda_1\},\lambda_2)\ \lambda_3) \cap \Lambda_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$. 给定任意 $\mu_2 \in \psi(\psi(\{\lambda_1\},\lambda_2)\ \lambda_3) \cap \Lambda_{\mathcal{S}}$，我们有 $\mu_2 \in \eta \star \lambda_3$，其中某个 $\eta \in \psi(\{\lambda_1\},\lambda_2)$。现在，根据 $\Lambda_{\mathcal{S}}$–的乘法性以及由式 (4.9) 得出的 $\mathcal{P}$ 的最大长度，我们得到以下两种情况之一：

$$0 \neq \mathcal{P}_{\mu_2} = [\mathcal{P}_{\eta}, \mathcal{P}_{\lambda_3} + \mathcal{P}_{\tilde{\lambda_3}}] + \mathcal{P}_{\eta}(\mathcal{P}_{\lambda_3} + \mathcal{P}_{\tilde{\lambda_3}}) \subset I.$$

或者 $\eta \in \psi(\{\lambda_1\},\lambda_2) \cap \Lambda_{\mathcal{S}}$ 且 $\lambda_3 \in \Lambda_{\mathcal{S}}$，考虑到 $\mu_2 \in \lambda_3 \star \eta$ 和 $\tilde{\mu_2} \in \psi(\{\lambda_1\},\lambda_2) \cap \Lambda_{\mathcal{S}}$，我们得到

$$0 \neq \mathcal{P}_{\mu_2} = [\mathcal{P}_{\lambda_3}, \mathcal{P}_{\tilde{\eta}}] + \mathcal{P}_{\lambda_3}\mathcal{P}_{\tilde{\eta}} \subset I.$$

由此我们断言

$$\bigoplus_{\lambda \in \psi(\psi(\{\lambda_1\},\lambda_2),\lambda_3)\cap\Lambda_{\mathcal{S}}} \mathcal{P}_{\lambda} \subset I.$$

$\widetilde{\ }$按照这一过程，利用连接 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_k\} \subset \Sigma_{\Lambda} \subset \Lambda_{\mathcal{S}} \dot{\cup} \Lambda_{\mathcal{S}}$，我们得到

$$\bigoplus_{\lambda \in \psi(\psi(...(\psi(\{\lambda_1\},\lambda_2),...),\lambda_{k-2}),\lambda_{k-1}),\lambda_k)\cap\Lambda_{\mathcal{S}}} \mathcal{P}_{\lambda} \subset I.$$

现在考虑到 $\mu \in \psi(\psi(...(\psi(\{\lambda_1\},\lambda_2)\ ...)\ \lambda_{k-2})\ \lambda_{k-1})\ \lambda_k) \cap \Lambda_{\mathcal{S}}$，我们得出 $\mathcal{P}_{\mu} \subset I$，因此

$$\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\}} \mathcal{P}_{\mu} \subset I. \tag{4.10}$$

最后，$\mathcal{P}_0$ 是紧的这一事实结合公式 (4.10)，得到 $\mathcal{P}_0 \subset I$，从而 $I = \mathcal{P}$. 。也就是说，$\mathcal{P}$ 是分次单。□

定理 4.11. 设 $\mathcal{P}$ 是一个无中心的 $\Lambda_{\mathcal{S}}$-乘法集分次非交换泊松代数，具有最大长度且 $\mathcal{P}_0$ 紧致。那么

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{[\lambda] \in (\Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\})/\sim} I_{[\lambda]},$$

其中任意一个 $I_{[\lambda]}$ 都是一个单理想，其所有元素均不等于 0，且在其支撑中连通。

证明。根据推论 3.42，$\mathcal{P} = \bigoplus_{[\lambda] \in (\Lambda_{\mathcal{S}} \setminus \{0\})/\sim} I_{[\lambda]}$ 是这些理想的直和。

$$\begin{aligned} I_{[\lambda]} &= I_{0,[\lambda]} \oplus \mathcal{V}_{[\lambda]} \\ &= (\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{[\mathcal{P}_{\mu}, \mathcal{P}_{\eta}] + \mathcal{P}_{\mu}\mathcal{P}_{\eta} : \mu, \eta \in [\lambda]\} \cap \mathcal{P}_0) \oplus (\bigoplus_{\mu \in [\lambda]} \mathcal{P}_{\mu}), \end{aligned}$$

具有任意 $I_{[\lambda]}$ 其支撑，$\Lambda_{I_{[\lambda]}} = [\lambda]$（通过包含在 $[\lambda]\dot{\cup}[\lambda]$ 中的元素相连）。为了将定理 4.11 应用于每个 $I_{[\lambda]}$，注意到这一事实

$\Lambda_{I_{[\lambda]}} = [\lambda]$，很容易得出 $\Lambda_{I_{[\lambda]}}$ 的支撑中所有非零元素彼此相连。我们还知道，任意一个 $I_{[\lambda]}$ 都是 $\Lambda_{I_{[\lambda]}}$-乘法的，这是由 $\mathcal{P}$. 的 $\Lambda_{\mathcal{S}}$-乘法性所致。显然， $I_{[\lambda]}$ 具有最大长度。 $I_{[\lambda]}$ 的零次齐次分量等于 $I_{0,\ [\lambda]}$ ，因此按构造是紧的。我们还有 $Z_{I_{[\lambda]}}(I_{[\lambda]}) = 0$，即 $I_{[\lambda]}$ 自身的中心，这是由 $[I_{[\lambda]}, I_{[\mu]}] + I_{[\lambda]}I_{[\mu]} = 0$ 所致；如果 $[\lambda] \neq [\mu]$ （见命题 3.24），则 $Z(\mathcal{P}) = 0$. 。我们可以将定理 4.11 应用于任意 $I_{[\lambda]}$ ，从而得出 $I_{[\lambda]}$ 是分次单的。显然，分解 $\mathcal{P} = \bigoplus_{[\lambda]\in(\Lambda_{\mathcal{S}}\setminus\{0\})/\sim} I_{[\lambda]}$ 满足定理的断言。□

References

[1] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, 《数学研究生教材》60，施普林格，柏林（1978）。[2] F. Aicardi, *Projective geometry from Poisson algebras* 61, 8, , 几何与物理杂志，第 卷第 期，– （）。[3] H. Albuquerque、E. Barreiro、A.J. Calderon M. Sanchez, *Lectures on superalgebras with a set grading* 155, , 几何与物理杂志，第（ 2020 10 1016 2020 103772 ）卷；https://doi.org/ 。/ j.geomphys. 。[4] J. Avan 和 Doikou, *Boundary Lax pairs from non-ultra-local Poisson algebras*, 《数学物理杂志》，第 50 卷第 11 期，113512（2009）。[5] Y.A. Bahturin、I.P. Shestakov、M.V. Zaicev, *Gradings on simple Jordan and Lie algebras* 代数杂志 283，849–868（2005）。[6] A.J. Calderon, *On the structure of split non-commutative Poisson algebras* 60, 7, 775 785 2012 ，线性与多重线性代数，第 卷第 期，– （）。https://doi.org/ 10 1080 03081087 2012 661428 。/ 。。A. J. Calderon, *On split Lie algebras with symmetric root systems*, 《印度科学院院刊：数学科学》118（3），351–356（2008）。[7] A.J. Calderon Martin, *Lie algebras with a set grading*, 线性代数及其应用 452（2014）7–20。[8] A. Elduque, *Fine grading on simple classical Lie algebras*, 代数杂志 324(12)，3532-3571（2010）。[9] A. Elduque、M. Kochetov, *grading on simple Lie algebras*, 《数学评论与专著》，第 189 卷。纽约州科马克：美国数学会、数学科学研究大西洋协会。[10] E. Frenkel 和 D. Ben-Zvi, *Vertex Algebras and Algebraic Curves*, 《数学评论与专著》第 88 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，美国，第二版，（2004）。[11] M. Gerstehaber, *On the deformation of ring and algebras*, 《数学年刊》79，59-103（1964）。[12] V. Ginzburg 和 D. Kaledin，辛商奇点的泊松变形，《数学进展》186（1），1–57（2004）。DOI: https://doi.org/10.1016/j.aim.2003.07.006。[13] J. Huebschmann, *Poisson cohomology and quantization*, 《纯粹与应用数学杂志》408，57-113（1990）。[14] P. Jordan, *Uber Verallgemeinerungsm oglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik* 209 214 1933 ，《哥廷根科学学会新闻》，– （）。[15] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, 《数学物理快报》66（157），157-216（2003）。[16] V. Khalili, *Lie superalgebras with a set grading*。代数与应用杂志 20(3):2150028（2021）。DOI: 10 1142 0219498821500286 。/S V. Khalili, *On the structure of graded Poisson color algebras*, arXiv:2303.13832, https://doi.org/ 10 48550 2303 13832 。/arXiv. 。[17] L. C. Li, *Classical r-matrices and compatible Poisson structures for Lax equations on Poisson algebras* 573 592 1999 ，数学物理通讯，- （）。

[20] J. Patera、H. Zassenhaus, *On Lie gradings I*，线性代数及其应用 112，57-159（1989）。[21] P. Schaller 和 T. Strobl, *Poisson structure induced (topological) field theory*。现代物理快报 A，9，3129-3136（1994）。[22] I. Vaisman, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*，Birkhauser，巴塞尔，（1994）。[23] C. Wang、Q. Gao 和 Q. Zhang, *Poisson color algebras*，《中国数学年刊》A辑 36（2015），第 2 期，209–216（2015）。DOI：https://doi.org/10.16205/j.cnki.cama.2015.0020。[24] X. Wu、H. Zhu 和 M. Chen, *The tensor product of n-differential graded Poisson algebras* 42, 4, 391 395 2015 ，《浙江大学学报（理学版）》，第 期 –（）。DOI：https://doi.org/10.3785/j.issn.1008-9497.2015.04.003。[25] C. Zhu、H. Li 和 Y. Li, *on trivial extension algebras* 45, 5, 1339 1352 2019 ，《伊朗数学学会通报》，第 期 –（）。DOI：https://doi.org/10.1007/s41980-018-00201-3。