arXiv:2304.05747v1 [math.SP] 12 Apr 2023

利用谱映射法求解Barcilon逆问题的反问题

AI-WEI GUAN、CHUAN-FU YANG 和 NATALIA P. Bondarenko

Abstract. 本文研究 Barcilon逆问题，即由三组谱恢复四阶微分算子的问题。我们建立了 Barcilon 的三组谱与魏尔-尤尔科矩阵之间的关系。此外，我们通过发展谱映射法的思想，证明了逆问题解的唯一性定理。我们的方法使我们能够在系数为复值分布的一般情形下得到这一结果。今后，本文的方法和结果可以推广到阶数大于 4 的微分算子，并用于进一步发展高阶微分算子的逆问题理论。

1. Introduction

本文研究由下述微分表达式生成的四阶算子的逆谱问题:

$$l(y) = y^{(4)} - (py')' + qy, \quad x \in (0,1), \tag{1.1}$$

分布系数为 $p \in W_2^{-1}(0,1)$ 和 $q \in W_2^{-2}(0,1)$。式 (1.1) 中的导数按分布意义理解。

谱分析的反问题包括根据谱特征量恢复算子。关于二阶Sturm-Liouville算子$-y'' + q(x)y$的反问题理论，已经取得了最为完整的成果（例如，参见 Levitan [23], Marchenko [24], Freiling 和 Yurko[14], Kravchenko [22], 的专著及其中的参考文献）。特别是，Borg [11]于1946年证明，Sturm-Liouville方程的势函数 $q(x)$

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1),$$

日期：2023年4月13日。2020年数学主题分类：34A55，34B24，47E05。关键词：四阶微分算子，分布系数，逆谱问题，唯一性。

由对应于不同边界条件组的两个谱唯一确定，即，$y(0) = y(1) = 0$ 和 $y'(0) = y(1) = 0$。Gelfand和Levitan提出了一种解决逆Sturm-Liouville问题的构造性方法 [16]。然而，对于阶数大于2的微分算子，Gelfand-Levitan方法似乎并不奏效。因此，高阶微分算子的研究从根本上比二阶微分算子更为困难，所以高阶逆谱理论仍然包含许多未解决的问题。

1974年，Barcilon [2, 3] 研究了一个关于四阶微分方程的逆问题

$$y^{(4)} - (py')' + qy = \lambda y, \quad x \in [0, 1], \tag{1.2}$$

其中，函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 取实值，$p(x)$ 可微，λ 是谱参数。Barcilon 问题包括根据三个谱以及 $p(0)$ 的值重构函数 p 和 q。例如，可以采用方程（1.2）在以下边界条件下的边值问题的谱：

$$\begin{aligned} &y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = y''(1) = 0, \\ &y(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = y''(1) = 0, \\ &y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = y''(1) = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

因此，$x = 1$ 处的边界条件对于三个谱而言相同，而 $x = 0$ 处的边界条件则不同。在第一篇论文 [2], 中，证明了恢复 p和 q 的唯一性。在第二篇论文 [3], 中，Barcilon 提出了一种基于迭代的重构过程。然而，Barcilon 的研究 [2, 3] 主要聚焦于地球物理学中的应用，因此他的论文在某些方面缺乏数学严谨性。尤其是，Barcilon 没有说明函数 $p(x)$和 $q(x)$属于哪些函数类。据作者所知，[2] 的唯一性结论对于 $p \in W_1^1[0, 1]$ 和 $q \in L_1(0, 1)$成立，而重构过程 [3]则要求更高阶的光滑性。此外，Barcilon 没有研究逆问题解的存在性和稳定性，因此这些问题仍未解决。

四阶微分算子的谱理论因其在力学、光学、声学及其他科学领域中的应用而受到学者们的关注（见 [27, 34]）。近年来，[1, 33, 36]研究了这类具有非光滑系数的算子的各种谱理论问题。在近期的研究 [32], Perera 和 B¨ockmann 开发了一种求解 Barcilon 问题的数值方法。
[13, 17, 21, 25, 26, 30, 31]研究了其他表述下四阶微分算子的反问题。

高阶微分算子的反谱问题的一般理论

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y, \quad n > 2,$$

已由 Yurko [38–40] 构建。在作者看来，Yurko 在这些研究中的主要成就是正确选取了谱特征量，使其在一般情况下能够唯一确定算子，且不受其谱的限制。该特征量是魏尔-尤尔科矩阵 $M(\lambda)$，它是一个亚纯三角矩阵函数，是 Sturm-Liouville 算子 m 函数的推广（例如，参见 [24, 38]）。本文的目标之一是说明，Barcilon 问题实际上是魏尔-尤尔科矩阵逆问题的一个特例。Yurko [38] 的另一项重要成就是发展了谱映射法。该方法不仅可用于二阶算子，也可用于高阶算子，因此比 Gelfand-Levitan方法更具普适性。

过去20年来，具有分布系数的微分算子的反问题理论得到了积极发展。对于 Sturm–Liouville 算子，Hryniv 和 Mykutyuk [18–20] 将变换算子法推广开来，并将反问题理论的基本结果推广到了 $W_2^{-1}(0, 1)$ 类分布势。需要指出的是，空间 $W_2^{-1}(0, 1)$ 包含具有狄拉克 δ函数等奇异性的势，以及库仑型奇异性 $\frac{1}{x}$ 等。Freiling 等人 [15] 以及 Bondarenko [4, 5]将谱映射法推广到了势属于 $W_2^{-1}(0, 1)$ 的 Sturm–Liouville 算子。近几年，对具有分布系数的高阶微分算子的研究逐步取得进展。Mirzoev 和 Shkalikov [28, 29] 为这类算子发展了正则化方法。对于具有奇异系数的任意偶数阶微分方程，Savchuk 和 Shkalikov [35] 构造了谱参数趋于无穷时具有特定渐近行为的 Birkhoff解。Bondarenko [6–9]开启了对具有分布系数的高阶微分算子的反谱问题的研究。文献 [6, 8] 关注这类算子在有限区间和半直线上的唯一性定理。在 [7], 中，Bondarenko 依托谱映射法的思想，发展了一种从谱数据恢复微分算子系数的构造性方法。这种方法可应用于多种系数可积或具有分布系数的高阶微分算子。

在 [9], 通过这种方法，获得了具有分布系数的三阶微分算子的谱数据的充要条件。

本文遵循 Barcilon 的思想 [2, 3], ，考虑通过三个谱恢复四阶算子（1.1）的问题，并研究该问题与谱映射法 [7, 38] 之间的关系。不同于 Barcilon 的论文 [2, 3], ，我们在更一般的情形下考虑微分表达式（1.1）。我们假设函数 p（x）和 q（x）为复值函数，分别属于分布空间 W_2^{-1}（0, 1）和 W_2^{-2}（0, 1）。我们根据 Mirzoev 和 Shkalikov 的正则化方法 [28]，针对这些函数类给出问题的表述。随后，我们研究三个 Barcilon 型谱与 Weyl-Yurko 矩阵之间的关系。最后，我们利用谱映射法证明逆问题解的唯一性定理。未来，我们的结果和方法可以推广到阶数大于 4 的微分算子，也可用于研究存在性和稳定性问题。

本文的组织如下。第 2 节介绍微分表达式 (1.1) 的正则化，给出基本概念，并阐述主要结果。第 3 节包含一些预备知识和辅助引理。第 4 节证明主要定理。第 5 节讨论将我们的结果应用于较低奇异阶的情形。

2. Main results

我们首先介绍微分表达式 (1.1) 的正则化。我们对该表达式的处理基于 Mirzoev 和 Shkalikov[28] 的方法。该方法包括按照特定规则构造矩阵函数 $F(x) = [f_{k,j}(x)]_{k,\ j=1}^{4}$ 该矩阵函数与微分表达式 (1.1) 相关联。该规则取决于微分方程的阶以及系数所属的类别。

对于四阶微分表达式 (1.1)，相关矩阵首次出现在 Vladimirov [37] 的一篇简短论文中，其形式为

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\tau_2 & \tau_1 & 1 & 0 \\ \tau_1\tau_2 & -\tau_1^2 + 2\tau_2 & -\tau_1 & 1 \\ \tau_2^2 & -\tau_1\tau_2 & -\tau_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

其中 $\tau_1' = p, \tau_2'' = q, \tau_1, \tau_2 \in L_2(0, 1)$。

利用由 (2.1) 定义的矩阵函数 $F(x)$ 的元素，我们引入准导数

$$y^{[0]} := y, \quad y^{[k]} = (y^{[k-1]})' - \sum_{j=1}^{k} f_{k,j} y^{[j-1]}, \quad k = \overline{1,4}, \tag{2.2}$$

以及定义域

$$\mathcal{D}_F := \{y\colon y^{[k]} \in AC[0,1],\ k = \overline{0,3}\}.$$

矩阵 $F(x)$ 的构造方式使得，对于任意 $y \in \mathcal{D}_F$，表达式 $l(y)$ 都会产生一个正则广义函数，并且关系式 $l(y) = y^{[4]}$成立。特别地，我们称函数 y 为方程的解

$$l(y) = \lambda y, \quad x \in (0,1), \tag{2.3}$$

其中 λ 为谱参数，若 $y \in \mathcal{D}_F$ 和 $y^{[4]} = \lambda y$, $x \in (0, 1)$。

下面给出逆问题的表述。利用由 (2.1) 定义的矩阵 $F(x)$ 及相应的准导数 (2.2)，定义线性形式

$$\begin{aligned} &U_s(y) = y^{[s-1]}(0), \quad s = \overline{1,4}, \\ &V_1(y) = y^{[3]}(1), \quad V_2(y) = y^{[1]}(1), \quad V_3(y) = y^{[2]}(1), \quad V_4(y) = y(1). \end{aligned} \tag{2.4}$$

对于 $(i, j) \in \{(1, 2)、(1, 3)、(2, 3)\}$，记 $\mathfrak{S}_{ij}$ 为方程 (2.3) 在边界条件

$$U_i(y) = U_j(y) = 0, \quad V_3(y) = V_4(y) = 0. \tag{2.5}$$

通过标准方法可以证明，谱 $\mathfrak{S}_{ij}$ 是可数的特征值集合（见 [6]）。因此，我们考虑与 Barcilon [3] 所采用的边界条件类似、且已在本文引言中给出的边界条件。不过，为明确起见，选取了线性形式 (2.4)。它们可以替换为其他阶的线性形式。逆问题表述如下。

逆问题 2.1。给定谱 $\mathfrak{S}_{12}$、 $\mathfrak{S}_{13}$ 和 $\mathfrak{S}_{23}$，求 p和 q。

此外，我们引入与线性形式 (2.4) 相关的以下系数矩阵：

$$U = I, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中， I 是（4×4）阶单位矩阵。

下文中，我们将问题 $\mathcal{L}$ 称为三元组（F（x） U， V），并引入一些与该问题相关的记号。

记 $\{C_k(x,\lambda)\}_{k=1}^4$、$\{S_k(x,\lambda)\}_{k=1}^4$ 和 $\{\Phi_k(x,\lambda)\}_{k=1}^4$ 为满足初始条件的方程 (2.3) 的解

$$U_s(C_k)=\delta_{s,k},\quad s=\overline{1,4},$$
$$V_s(S_k)=\delta_{s,k},\quad s=\overline{1,4}, \tag{2.6}$$

以及边界条件

$$U_s(\Phi_k)=\delta_{s,k},\quad s=\overline{1,k},\quad V_s(\Phi_k)=0,\quad s=\overline{k+1,4},$$

分别，其中 $\delta_{s,k}$ 为克罗内克 delta。对于每个固定的 $x\in[0,1]$，解 $\{C_k(x,\lambda)\}_{k=1}^4$、$\{S_k(x,\lambda)\}_{k=1}^4$ 及其准导数关于 λ 都是整函数，而 $\{\Phi_k(x,\lambda)\}_{k=1}^4$ 称为问题 $\mathcal{L}$ 的 Weyl 解。

引入记号 $\vec{y}(x)=\mathrm{col}(y^{[0]}(x)\ y^{[1]}(x)\ y^{[2]}(x)\ y^{[3]}(x))$ 以及 (4×4)- 矩阵 $C(x,\lambda)=[\vec{C}_k(x,\lambda)]_{k=1}^4$、$\Phi(x,\lambda)=[\vec{\Phi}_k(x,\lambda)]_{k=1}^4$。文献[6]已证明以下关系成立：

$$\Phi(x,\lambda)=C(x,\lambda)M(\lambda), \tag{2.7}$$

其中，矩阵函数 $M(\lambda)$ 被称为问题$\mathcal{L}$的魏尔-尤尔科矩阵。

根据 [6]，的结果，魏尔-尤尔科矩阵 $M(\lambda)=[m_{jk}(\lambda)]_{j,\ k=1}^4$ 是单位下三角矩阵，其非平凡元素的形式为

$$m_{jk}(\lambda)=-\frac{\Delta_{jk}(\lambda)}{\Delta_{kk}(\lambda)},\quad 1\le k<j\le 4, \tag{2.8}$$

其中，$\Delta_{kk}(\lambda):=\det[V_s(C_r)]_{s,r=k+1}^4$，而 $\Delta_{jk}(\lambda)$是通过将 C_j 替换为 C_k从 $\Delta_{kk}(\lambda)$得到的。容易证明，函数$\Delta_{jk}(\lambda)$的零点与方程（2.3）的边值问题 $\mathcal{L}_{jk}$ 在以下边界条件下的特征值重合：

$$U_\xi(y)=0,\quad \xi=\overline{1,k-1},j,\quad V_\eta(y)=0,\quad \eta=\overline{k+1,4}. \tag{2.9}$$

函数 $C_r^{[s]}(1,\lambda)$、$r=1$、4、$s=0$、$\overline{3}$在 λ 中是整函数，函数 $\Delta_{jk}(\lambda)$、$1\le k\le j\le 4$也是如此。因此，$M(\lambda)$在 λ 中是亚纯函数，而 $M(\lambda)$的第 k 列的极点与 $\Delta_{kk}(\lambda)$ 的零点重合。

我们称问题 $\mathcal{L}$ 属于类 $\mathcal{W}$，如果 $\Delta_{kk}(\lambda)$ 的所有零点对于 $k=1$、2、3 都是单零点，并且 $\Delta_{kk}(\lambda)$ 和$\Delta_{k+1,\ k+1}(\lambda)$对于 $k=1$、2 没有公共零点。那么，鉴于 (2.8)，$M(\lambda)$ 的极点是单极点。本文中，我们始终假设 $\mathcal{L}\in\mathcal{W}$。

~ ~ ~考虑另一个问题 $\mathcal{L} = (F(x)\ U, V)$，其中 $F(x)$ 是与 $F(x)$ 形式相同但系数 $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2 \in L_2(0, 1)$ 不同的矩阵函数。我们约定~，如果 ξ 表示与 $\mathcal{L}$相关的对象，那么 ξ 表示与 $\mathcal{L}$相关的类似对象~ ~ ~。我们假设 $\mathcal{L} = (F(x)\ U, V) \in \mathcal{W}$以及 $\mathcal{L} = (F(x)\ U, V) \in \mathcal{W}$。本文的主要定理表述如下:

~ ~ ~定理 2.2. 若 $\mathfrak{S}_{12} = \mathfrak{S}_{12}, \mathfrak{S}_{13} = \mathfrak{S}_{13}, \mathfrak{S}_{23} = \mathfrak{S}_{23}$，则 $\tau_1 = \tilde{\tau}_1$, $\tau_2 = \tilde{\tau}_2 + cx$，其中 c是一个复常数，因此 $p = \tilde{p}$属于 $W_2^{-1}(0, 1)$，且 $q = \tilde{q}$属于 $W_2^{-2}(0, 1)$。因此，给定三个谱 $\mathfrak{S}_{12}, \mathfrak{S}_{13}, \mathfrak{S}_{23}$，可唯一确定微分表达式 $l(y)$的系数 p 和 q。

在定理 2.2 中，我们只有 $p = \tilde{p}$、 $q = \tilde{q}$。我们失去了 $\tau_2 \in L_2(0,1)$的唯一性。一个自然的问题是，我们是否可以通过三个谱 $\mathfrak{S}_{12}$、$\mathfrak{S}_{13}$、$\mathfrak{S}_{23}$ 来确定 τ_2。下面的定理对此问题给出了否定的答案。

定理 2.3. 若 $\tau_1 = \tilde{\tau}_1$ 和 $\tau_2 = \tilde{\tau}_2 + cx$，其中 $c \in \mathbb{C}$ 是任意常数,
~ ~ ~则 $\mathfrak{S}_{12} = \mathfrak{S}_{12}$， $\mathfrak{S}_{13} = \mathfrak{S}_{13}$， $\mathfrak{S}_{23} = \mathfrak{S}_{23}$。

3. Preliminaries

本节将介绍一些预备知识。我们先讨论特征函数的渐近性质。首先，考虑扇形区域

$$\Gamma_k := \left\{ \rho \colon \frac{\pi(k-1)}{4} < \arg \rho < \frac{\pi k}{4} \right\}, \quad k = \overline{1, 8},$$

以及区域

$$\mathcal{G}_\delta = \mathcal{G}_{\delta, ijk} := \{ \rho \in \overline{\Gamma}_k : |\rho - \rho_{ij,l}| \geq \delta,\ l \geq 1 \}, \quad \delta > 0,$$

其中 $\{\rho_{ij,l}\}_{l \geq 1}$ 是 ρ平面内 $\Delta_{ij}(\rho^4)$ 的零点。

若 ρ 位于固定扇形区域 $\Gamma = \Gamma_k$内，我们用 $\{\omega_j\}_{j=1}^4$ 表示方程$\omega^4 = 1$ 的根，这些根按以下顺序编号

$$\mathrm{Re}(\rho\omega_1) < \mathrm{Re}(\rho\omega_2) < \mathrm{Re}(\rho\omega_3) < \mathrm{Re}(\rho\omega_4), \quad \rho \in \Gamma.$$

命题 3.1. ([6]) 当 $|\rho| \to \infty$ 时，下述渐近关系成立:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = c_{ij} \rho^{a_{ij}} e^{\rho s_j} (1 + o(1)), \quad \arg \rho = \phi, \quad 1 \leq j < i \leq 4,$$

4其中 $\lambda = \rho^4$, $\{\rho : \arg \rho = \phi\} \subset \Gamma$ 是一条固定射线,
$s_j = \sum \omega_k$,$k=j+1$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} p_{k,0} + \sum_{k=j+1}^{4} p_{k,1} + p_{i,0} - 6,$$

$$c_{ij} = (\det \Omega)^{-1} \det[\omega_k^{p_{s,0}}]_{k=\overline{1,j},s=\overline{1,j-1},i} \cdot \det[\omega_k^{p_{s,1}}]_{s,k=j+1}^{4},$$

$\Omega := [\omega_k^{j-1}]_{j,\ k=1}^{4}$, $p_{k,\ 0}$ 和 $p_{k,\ 1}$ 分别是 $k = 1,4$ 时线性形式 U_k 和 V_k的阶，即 $p_{1,\ 0} = p_{4,\ 1} = 0$, $p_{2,\ 0} = p_{2,\ 1} = 1$, $p_{3,\ 0} = p_{3,\ 1} = 2$, $p_{4,\ 0} = p_{1,\ 1} = 3$。

此外，考虑带边界的扇形区域，我们有以下渐近估计：

命题 3.2. ([10]) 对于充分大的 $|\rho|$，以下关系成立：

$$\Delta_{ij}(\lambda) = O(\rho^{a_{ij}} e^{\rho s_j}), \quad \rho \in \overline{\Gamma},$$
$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \geq C_\delta |\rho|^{a_{ij}} e^{Re(\rho s_j)}, \quad \rho \in \mathcal{G}_\delta,$$

其中 $\lambda = \rho^4$、C_δ 是一个取决于 $\mathcal{G}_\delta$ 的常数，a_{ij}、s_j、$1 \leq j < i \leq 4$ 在命题 3.1 中定义。

接下来，按照 [7], 我们定义辅助问题 $\mathcal{L}^\star = (F^\star(x)\ U^\star, V^\star)$，这有助于我们研究魏尔-尤尔科矩阵的结构。除了相关矩阵 $F(x)$ 外，我们还考虑矩阵函数 $F^\star(x) = [f_{k,j}^\star(x)]_{k,\ j=1}^{4}$其元素定义如下：

$$f_{k,j}^\star(x) := (-1)^{k+j+1} f_{5-j,5-k}(x).$$

利用 $F^\star(x)$，我们定义准导数

$$z^{[0]} := z, \quad z^{[k]} = (z^{[k-1]})' - \sum_{j=1}^{k} f_{k,j}^\star z^{[j-1]}, \quad k = \overline{1,4}, \tag{3.1}$$

以及定义域

$$\mathcal{D}_{F^\star} := \{z : z^{[k]} \in AC[0,1], \quad k = \overline{0,3}\}.$$

假设 $y \in \mathcal{D}_F$ 和 $z \in \mathcal{D}_{F^\star}$是 y 的准导数，它们由矩阵 $F(x)$通过 (2.2) 定义； z 的准导数由 (3.1) 定义。定义拉格朗日括号

$$\langle z, y \rangle := zy^{[3]} - z^{[1]}y^{[2]} + z^{[2]}y^{[1]} - z^{[3]}y. \tag{3.2}$$

容易证明，若 y 和 z 分别满足方程 $y^{[4]} = \lambda y$ 和 $z^{[4]} = \mu z$，则

$$\frac{d}{dx}\langle z, y \rangle = (\lambda - \mu) zy. \tag{3.3}$$

特别地，如果 $\lambda = \mu$，那么拉格朗日括号 $\langle z, y \rangle$ 不依赖于 x。

Set

$$\vec{y}(x) = \mathrm{col}(y^{[0]}(x), y^{[1]}(x), y^{[2]}(x), y^{[3]}(x)),\ \vec{z}(x) = \mathrm{col}(z^{[0]}(x), z^{[1]}(x), z^{[2]}(x), z^{[3]}(x)).$$

通过使用相应的准导数 (2.2) 和 (3.1)，我们得到以下关系：

$$\langle z, y\rangle|_{x=a} = [\vec{z}(a)]^T J\vec{y}(a),$$

其中 $J := [(-1)^{k+1}\delta_{k,\ 5-j}]_{k,\ j=1}^{4}$。

除了 U 和 V，考虑矩阵

$$U^\star := [JU^{-1}J_0^{-1}]^T, \quad V^\star := [JV^{-1}J_1^{-1}]^T,$$

其中

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

且符号 T 表示矩阵转置。

类似于魏尔-尤尔科矩阵 $M(\lambda)$，可以为问题 $\mathcal{L}^\star = (F^\star(x)\ U^\star, V^\star)$定义矩阵 $M^\star(\lambda)$。在 [7], 中，已获得魏尔-尤尔科矩阵 $M(\lambda)$与 $M^\star(\lambda)$ 之间的关系。然而，在我们的情形下，计算表明 $F(x) = F^\star(x)$、$U = U^\star$和 $V = V^\star$。因此 $M(\lambda) = M^\star(\lambda)$。 consequently, [7]的结果蕴含以下命题。

命题 3.3. ([7]). 下列关系成立：

$$(M(\lambda))^T J_0 M(\lambda) = J_0. \tag{3.5}$$

在逐元素形式下，我们得到以下推论。

推论 3.4。以下关系成立：

$$m_{43}(\lambda) = m_{21}(\lambda), \tag{3.6}$$

$$m_{42}(\lambda) - m_{32}(\lambda)m_{21}(\lambda) + m_{31}(\lambda) = 0. \tag{3.7}$$

证明。我们知道 M 是一个单位下三角矩阵。将 (3.4) 代入 (3.5)，得到

$$\begin{pmatrix} 0 & m_{31}+m_{42}-m_{21}m_{32} & m_{43}-m_{21} & 1 \\ m_{21}m_{32}-m_{31}-m_{42} & 0 & -1 & 0 \\ m_{21}-m_{43} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此得到关系式（3.6）和（3.7）。 □

下面证明，谱 $\mathfrak{S}_{ij}$ 与某些特征函数的零点重合。

引理 3.5. 谱 $\mathfrak{S}_{12}$、 $\mathfrak{S}_{13}$、 $\mathfrak{S}_{23}$ 分别与特征函数 Δ_{22}、 Δ_{32}、 Δ_{42} 的零点重合。

证明。回想一下， $\Delta_{jk}(\lambda)$ 的零点与满足边界条件 (2.9) 的方程 (2.3) 边值问题 $\mathcal{L}_{jk}$ 的特征值相同。显然，对于 $j=k=2$ 和 $j=3, k=2$ ，边界条件 (2.9) 分别与 $i=1$ 和 $j=2$ 、 $i=1$ 和 $j=3$ 的条件 (2.5) 相同。因此， Δ_{22} 和 Δ_{32} 的零点分别与谱 $\mathfrak{S}_{12}$ 和 $\mathfrak{S}_{13}$ 相同。我们只需证明函数 Δ_{42} 的零点与谱 $\mathfrak{S}_{23}$ 相同。

回顾一下， $S_1(x,\lambda)$ 和 $S_2(x,\lambda)$ 满足方程 $y^{[4]}=\lambda y$ 和 $\mathcal{L}=\mathcal{L}^\star$。因此，利用 (2.6) 和 (3.3)，我们得到

$$\langle S_1, S_2\rangle|_{x=0} = \langle S_1, S_2\rangle|_{x=1} = 0. \tag{3.8}$$

利用 (2.4)、(3.2) 和 (3.8)，我们得到

$$U_2(S_1)U_3(S_2) - U_3(S_1)U_2(S_2) = U_1(S_1)U_4(S_2) - U_4(S_1)U_1(S_2). \tag{3.9}$$

显然，(3.9) 的左端是方程 (2.3) 在边界条件下所对应边值问题的特征函数。

$$U_2(y) = U_3(y) = 0, \quad V_3(y) = V_4(y) = 0.$$

因此，它的零点与谱 $\mathfrak{S}_{23}$ 重合。(3.9) 式右端是边值问题 $\mathcal{L}_{42}$ 的特征函数。因此，谱 $\mathfrak{S}_{32}$ 与 $\Delta_{42}(\lambda)$ 的零点重合。□

引理 3.6。谱 $\mathfrak{S}_{12}$、 $\mathfrak{S}_{13}$、 $\mathfrak{S}_{23}$ 分别唯一确定特征函数 Δ_{22}、 Δ_{32}、 Δ_{42}。

证明。设 $\Lambda_{m,k}=\{\lambda_{lmk}\}_{l\geq 1}$ 为 $\Delta_{mk}(\lambda)$ 的零点，其中 (m,k) 是集合 {(2, 2), (3, 2), (4, 2)} 中的指标。由命题 3.2 可知，函数$\Delta_{mk}(\lambda)$ 是 λ 上的整函数，阶为 $1\ 4$。根据 Hadamard 因式分解定理，我们有

$$\Delta_{mk}(\lambda) = C_{mk}\prod_{l=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{lmk}}\right),$$

where C_{mk} are some constants.

根据命题 3.1，我们得到以下渐近关系：

$$\Delta_{mk}(\lambda) = c_{mk}\rho^{a_{mk}}e^{\rho(1-i)}(1+o(1)), \quad \arg\rho=\frac{\pi}{8}, \quad |\rho|\to\infty,$$

其中 $c_{22}=\frac{1-i}{8}$、$c_{32}=\frac{i}{4}$、$c_{42}=-\frac{1+i}{8}$、$a_{22}=-3$、$=a_{32}=-2$、$a_{42}=-1$.因此，我们得到

$$C_{mk}=\lim_{\substack{\arg\lambda=\frac{\pi}{2}\\ |\lambda|\to\infty}} c_{mk}\rho^{a_{mk}}e^{\rho(1-i)}\prod_{l=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{lmk}}\right)^{-1}.$$

由此得证。 □

为方便起见，我们引入以下记号。如果对于 $\lambda\to\lambda_0$,

$$A(\lambda)=\sum_{k=-q}^{p}a_k(\lambda-\lambda_0)^k+o((\lambda-\lambda_0)^p),$$

然后 $A_{\langle k\rangle}(\lambda_0):=a_k$.

除了魏尔-尤尔科矩阵之外，我们还考虑问题 $\mathcal{L}$的离散谱数据。记 $\Lambda_k=\{\lambda_{nk}\}_{n\geq 1}$ 为 Δ_{kk} 对于 $k=1$、2、3、$\Lambda=\cup_{k=1}^{3}\Lambda_k$ 的零点集合，记 $M(\lambda)$ 的韦尔矩阵的极点集合。考虑洛朗级数

$$M(\lambda)=\frac{M_{\langle -1\rangle}(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}+M_{\langle 0\rangle}(\lambda_0)+M_{\langle 1\rangle}(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)+\ldots,\quad \lambda_0\in\Lambda.$$

定义权矩阵

$$\mathcal{N}(\lambda_0):=(M_{\langle 0\rangle}(\lambda_0))^{-1}M_{\langle -1\rangle}(\lambda_0),\quad \lambda_0\in\Lambda. \tag{3.10}$$

考虑矩阵 $\mathcal{N}(\lambda_0)=[\mathcal{N}_{kj}(\lambda_0)]_{k,\ j=1}^{4}$.由于 $M(\lambda)$ 是单位下三角矩阵，因此对于所有 $k\leq j$, $\lambda_0\in\Lambda$.，都有 $\mathcal{N}_{kj}(\lambda_0)=0$ 此外，根据 [7], 的引理 2.4，我们还有:

命题 3.7. 假设 $\mathcal{L}\in\mathcal{W}$，我们有以下性质 :

(I) 若 $\lambda_0\notin\Lambda_k$，则 $\mathcal{N}_{sj}(\lambda_0)=0$, $s=k+1,4,\ j=1,k$.(II) 若 $\lambda_0\in\Lambda_s$ 对于 $s=\nu+1$, $k-1$, $\lambda_0\notin\Lambda_\nu$, $\lambda_0\notin\Lambda_k$, $1\leq\nu+1<k\leq 4$，则$\mathcal{N}_{k,\ \nu+1}(\lambda_0)\neq 0$. (此处 $\Lambda_0=\Lambda_4=\varnothing$)。

在主定理的证明中，谱映射矩阵 $\mathcal{P}(x,\lambda)$ 起着重要作用，其定义如下:

$$\mathcal{P}(x,\lambda):=\Phi(x,\lambda)(\tilde{\Phi}(x,\lambda))^{-1}. \tag{3.11}$$

~ ~因此， $\mathcal{P}(x,\lambda)$ 将问题 $\mathcal{L}$ 的魏尔解矩阵 $\Phi(x,\lambda)$ 映射为问题 $\mathcal{L}$ 的魏尔解矩阵 $\Phi(x,\lambda)$。

[7] 的引理 4.6 和 [8] 中定理 2 的证明推出以下命题。

~ ~ ~命题 3.8. 假设对所有$\lambda_0 \in \Lambda$， $\mathcal{L}, \mathcal{L} \in \mathcal{W}$, $\Lambda = \Lambda$和 $\mathcal{N}(\lambda_0) = \mathcal{N}(\lambda_0)$。那么谱映射矩阵 $\mathcal{P}(x, \lambda)$与 λ无关，也就是说， $\mathcal{P}(x, \lambda) \equiv \mathcal{P}(x)$。此外， $\mathcal{P}(x)$是一个单位下三角矩阵函数，并且满足以下关系：

$$\mathcal{P}'(x) + \mathcal{P}(x)\tilde{F}(x) = F(x)\mathcal{P}(x), \quad x \in (0, 1). \tag{3.12}$$

4. Proofs of main theorems

本节中，我们证明定理 2.2 和定理 2.3。定理 2.2 的证明思路是，给定的谱 $\mathfrak{S}_{ij}$ 唯一确定魏尔 - 尤尔科矩阵的各个元素，但 $m_{41}(\lambda)$ 除外。元素 $m_{41}(\lambda)$ 只能唯一确定到一个常数。因此，我们无法唯一恢复 τ_2。尽管如此，我们仍应用谱映射法，并利用相关矩阵 (2.1) 的特殊结构来证明定理 2.2 的结论。定理 2.3 的证明同样依赖于相关矩阵的特殊结构以及边界条件 (2.5)。

~定理 2.2 的证明。假设两个 $\mathcal{W}$ 类问题 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$ 具有~ ~ ~相同的谱 $\mathfrak{S}_{12} = \mathfrak{S}_{12}$、$\mathfrak{S}_{13} = \mathfrak{S}_{13}$、$\mathfrak{S}_{23} = \mathfrak{S}_{23}$。证明分为四个步骤。

步骤 1. 证明对于 $(j, k) =$(2, 1)、(3, 1)、(3, 2)、(4, 2)，有 $m_{jk}(\lambda) = \tilde{m}_{jk}$({v4)。
由引理 3.6 和魏尔-尤尔科矩阵的定义可得 $m_{42}(\lambda) = \tilde{m}_{42}(\lambda)$ 和 $m_{32}(\lambda) = \tilde{m}_{32}(\lambda)$。由 (3.6) 还可得 $m_{43}(\lambda) = m_{21}(\lambda)$，因此我们只需证明 $m_{21}(\lambda) = \tilde{m}_{21}(\lambda)$ 和 $m_{31}(\lambda) = \tilde{m}_{31}(\lambda)$。

计算 (3.7) 两边的留数，得到以下关系：

$$m_{42\langle -1\rangle}(\lambda_{n2}) = m_{32\langle -1\rangle}(\lambda_{n2}) m_{21}(\lambda_{n2}), \quad n \geq 1,$$

其中 $\{\lambda_{n2}\}_{n\geq 1}$ 是函数 Δ_{22} 的零点。因此，我们有

$$m_{21}(\lambda_{n2}) = \tilde{m}_{21}(\lambda_{n2}). \tag{4.1}$$

构造函数

$$G(\lambda) = \Delta_{11}(\lambda)\tilde{\Delta}_{21}(\lambda) - \Delta_{21}(\lambda)\tilde{\Delta}_{11}(\lambda),$$

注意， $\mathcal{L} \in \mathcal{W}$ 意味着 $\Delta_{11}(\lambda_{n2}) \neq 0, n \geq 1$。因此，由此可得 (4.1)

$$G(\lambda_{n2}) = 0, \quad n \geq 1.$$

因此，函数 $K(\lambda) = {}^{G}(\lambda)\ \underline{\Delta_{22}(\lambda)}$ 关于 λ 是整函数。

由命题 3.2 可得射线 $\arg\rho=\frac{\pi}{4}$ 上的以下渐近估计:

$$\Delta_{11}(\lambda)=O(\rho^{-3}e^{\rho}),\quad \Delta_{21}(\lambda)=O(\rho^{-2}e^{\rho}),\quad |\Delta_{22}(\lambda)|\geq C_{\delta}|\rho|^{-3}e^{\mathrm{Im}\rho+\mathrm{Re}\rho}.$$

因此，我们得到

$$|K(\lambda)|\leq|\rho|^{-2}|e^{\mathrm{Re}\rho-\mathrm{Im}\rho}|=|\rho|^{-2}\to 0,\quad \arg\rho=\frac{\pi}{4},\ |\rho|\to\infty.$$

因此

$$|K(\lambda)|\to 0,\quad \arg\lambda=\pi,\ \lambda\to-\infty.$$

整函数 $\Delta_{21}(\lambda)$、 $\Delta_{22}(\lambda)$和 $\Delta_{11}(\lambda)$ 的阶为1 4 ，函数 $K(\lambda)$ 也是如此。应用 Phragmen-Lindel¨of定理 [12], 我们可以得到 $K(\lambda)\equiv 0,\quad \lambda\in\mathbb{C}$。因此 $G(\lambda)\equiv 0,\ \lambda\in\mathbb{C}$ 从而 $m_{21}(\lambda)=\tilde{m}_{21}(\lambda)$。考虑到(3.7)，我们还得到 $m_{31}(\lambda)=\tilde{m}_{31}(\lambda)$。

第2步。证明，如果 $m_{21}(\lambda)=\tilde{m}_{21}(\lambda)$， $m_{42}(\lambda)=\tilde{m}_{42}(\lambda)$，那么$m_{41\langle -1\rangle}(\lambda_{n1})=\tilde{m}_{41\langle -1\rangle}(\lambda_{n1})$，其中 $\lambda\in\mathbb{C}$ 和 $\{\lambda_{n1}\}_{n\geq 1}$ 是 $\Delta_{11}(\lambda)$的零点。

考虑矩阵 $\mathcal{N}(\lambda)=[\mathcal{N}_{kj}(\lambda)]_{k,\ j=1}^{4}$· 根据命题 3.7，我们知道 $\mathcal{N}(\lambda_{n1})$ 中除 $\mathcal{N}_{21}(\lambda_{n1})$ 和 $\mathcal{N}_{43}(\lambda_{n1})$ 外的每个元素都为零。利用 (3.10)，我们得到方程。

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ m_{21\langle 0\rangle}(\lambda_{n1})&1&0&0\\ m_{31\langle 0\rangle}(\lambda_{n1})&m_{32}(\lambda_{n1})&1&0\\ m_{41\langle 0\rangle}(\lambda_{n1})&m_{42}(\lambda_{n1})&m_{43\langle 0\rangle}(\lambda_{n1})&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ \mathcal{N}_{21}(\lambda_{n1})&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&\mathcal{N}_{43}(\lambda_{n1})&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ m_{21\langle -1\rangle}(\lambda_{n1})&0&0&0\\ m_{31\langle -1\rangle}(\lambda_{n1})&0&0&0\\ m_{41\langle -1\rangle}(\lambda_{n1})&0&m_{43\langle -1\rangle}(\lambda_{n1})&0\end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathcal{N}_{21}(\lambda_{n1})=m_{21\langle -1\rangle}(\lambda_{n1}),\quad \mathcal{N}_{21}(\lambda_{n1})m_{42}(\lambda_{n,1})=m_{41\langle -1\rangle}(\lambda_{n1}).$$

因此

$$m_{41\langle -1\rangle}(\lambda_{n1})=m_{21\langle -1\rangle}(\lambda_{n1})m_{42}(\lambda_{n1}).$$

因此，我们有 $m_{41\langle -1\rangle}(\lambda_{n1})=\tilde{m}_{41\langle -1\rangle}(\lambda_{n1})$。

步骤 3. 证明 $\Lambda=\tilde{\Lambda}$ 和 $\mathcal{N}(\lambda_0)=\tilde{\mathcal{N}}(\lambda_0)$ 对所有 $\lambda_0\in\Lambda$。

等式 $\Lambda\subset\tilde{\Lambda}$ 显然成立，因为 $\{m_{ij}\}_{(i,j)=(2,1),(3,2),(4,3)}$ 和 $\{\tilde{m}_{ij}\}_{(i,j)=(2,1),(3,2),(4,3)}$的极点，分别。考虑矩阵 $\mathcal{N}(\lambda_0)=[\mathcal{N}_{kj}(\lambda_0)]_{k,j=1}^{4}$· 根据命题 3.7，我们知道， $\mathcal{N}(\lambda_0)$中的每个元素都为零，除了 $\mathcal{N}_{21}(\lambda_0)$、 $\mathcal{N}_{32}(\lambda_0)$和 $\mathcal{N}_{43}(\lambda_0)$之外。

考虑到 (3.10)，我们得到的是

$$\mathcal{N}_{21}(\lambda_0) = m_{21\langle -1\rangle}(\lambda_0), \quad \mathcal{N}_{32}(\lambda_0) = m_{32\langle -1\rangle}(\lambda_0), \quad \mathcal{N}_{43}(\lambda_0) = m_{43\langle -1\rangle}(\lambda_0).$$

因此，对于所有 $\lambda_0 \in \Lambda$，都有 $\mathcal{N}(\lambda_0) = \mathcal{N}(\lambda_0)$。

步骤 4. 下面证明 $\lambda_0 \in \Lambda$， $\mathcal{N}(\lambda_0)\tilde{} = \mathcal{N}(\lambda_0)$ 推出 $\tilde{\tau}_1(x) = \tau_1(x)$ 和 $\tilde{\tau}_2(x) = \tau_2(x)$，在 (0, 1) 上几乎处处成立。

考虑由 (3.11) 定义的谱映射矩阵 $\mathcal{P}(x, \lambda)$。可以证明

$$\mathcal{P}(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) J_0^{-1} (\tilde{\Phi}(x, \lambda))^T J. \tag{4.2}$$

根据命题 3.8， $\mathcal{P}(x, \lambda) \equiv \mathcal{P}(x)$，其中 $\mathcal{P}(x)$ 是单位下三角矩阵。因此，结合 (2.7) 和 (4.2)，可得

$$\mathcal{P}(0) = M(\lambda) J_0^{-1} \tilde{M}(\lambda) J. \tag{4.3}$$

根据（4.3），我们有

$$\mathcal{P}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \tilde{m}_{41} - m_{41} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

根据命题 3.8，关系式（3.12）成立。将（2.1）代入（3.12），得到

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{P}'_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{P}'_{31} & \mathcal{P}'_{32} & 0 & 0 \\ \mathcal{P}'_{41} & \mathcal{P}'_{42} & \mathcal{P}'_{43} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{P}_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \mathcal{P}_{31} & \mathcal{P}_{32} & 1 & 0 \\ \mathcal{P}_{41} & \mathcal{P}_{42} & \mathcal{P}_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\tilde{\tau}_2 & \tilde{\tau}_1 & 1 & 0 \\ \tilde{\tau}_1\tilde{\tau}_2 & -\tilde{\tau}_1^2 + 2\tilde{\tau}_2 & -\tilde{\tau}_1 & 1 \\ \tilde{\tau}_2^2 & -\tilde{\tau}_1\tilde{\tau}_2 & -\tilde{\tau}_2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\tau_2 & \tau_1 & 1 & 0 \\ \tau_1\tau_2 & -\tau_1^2 + 2\tau_2 & -\tau_1 & 1 \\ \tau_2^2 & -\tau_1\tau_2 & -\tau_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{P}_{21} & 1 & 0 & 0 \\ P_{31} & \mathcal{P}_{32} & 1 & 0 \\ \mathcal{P}_{41} & \mathcal{P}_{42} & \mathcal{P}_{43} & 1 \end{pmatrix}.$$

由此，我们得到 $\mathcal{P}'_{32} = \mathcal{P}'_{41} = 0$, $\mathcal{P}_{32} = \tilde{\tau}_1 - \tau_1$, $\mathcal{P}_{42} = \tilde{\tau}_2 - \tau_2$, $\mathcal{P}'_{42} = -\mathcal{P}_{41}$。然后有 $\mathcal{P}_{32} = \mathcal{P}_{32}(0) = 0$, $\mathcal{P}_{41} = \mathcal{P}_{41}(0) = \tilde{m}_{41} - m_{41} = c$, $\mathcal{P}'_{42} = -c$，其中 c 是常数。因此，我们得到 $\tilde{\tau}_1 = \tau_1$, $\tilde{\tau}_2 = \tau_2 + cx$ 在 $L_2(0, 1)$ 中，这就完成了证明。□

~定理 2.3 的证明。回想一下，矩阵 $F(x)$ 和 $F(x)$ 由 (2.1) 定义。假设 $\tilde{\tau}_1 = \tau_1$, $\tilde{\tau}_2 = \tau_2 + cx$。那么，准导数等于

$$\begin{aligned} y^{[4]} &= y^{(4)} - \tau_1'' y' - \tau_1' y'' + \tau_2'' y \\ &= y^{(4)} - \tilde{\tau}_1'' y' - \tilde{\tau}_1' y'' + \tilde{\tau}_2'' y \end{aligned}$$

以及 $l(y) = y^{[4]}$。考虑与 $\mathfrak{S}_{12}$ 对应的边界条件：

$$\begin{aligned} &U_1(y) = y^{[0]}(0) = y(0) = 0, \quad U_2(y) = y^{[1]}(0) = y'(0) = 0, \\ &V_3(y) = y^{[2]}(1) = y''(1) - \tau_1 y'(1) = y''(1) - \tilde{\tau}_1 y'(1) = 0, \\ &V_4(y) = y(1) = 0, \end{aligned}$$

~ ~那么我们有 $\mathfrak{S}_{12} = \mathfrak{S}_{12}$。通过使用相同的方法，可以得到 $\mathfrak{S}_{13} = \mathfrak{S}_{13}$~以及 $\mathfrak{S}_{23} = \mathfrak{S}_{23}$。□

5. Lower singularity orders

情形 $p \in W_2^{-1}(0, 1)$ 和 $q \in W_2^{-2}(0, 1)$ 对应于最高的奇异阶数，在这些阶数下，微分表达式 (1.1) 的 Mirzoev-Shkalikov 正则化 [28] 存在。本节研究系数 p 和 q 具有较低奇异阶数的情形。在这种情况下，可以从两个角度考虑逆问题。首先，可以将其视为与相应矩阵 (2.1) 相关的问题 2.1 的特例。于是，较低奇异阶数的结果可以作为定理 2.2 的推论得出。其次，我们可以使用其他类型的相应矩阵。从这两个角度出发，可以得到不同的谱。无论如何，逆问题解的唯一性仍然成立。下面两个例子将对此加以说明。

例 5.1. 假设 $p \in W_2^{-1}(0, 1)$、$\tau_1' = p\,\tau_1 \in L_2(0, 1)$、$q \in W_2^{-1}(0, 1)$ $\sigma_2' =$~ ~ ~q 和 $\sigma_2 \in L_2(0, 1)$。若 $\mathfrak{S}_{12} = \mathfrak{S}_{12}$ $\mathfrak{S}_{13} = \mathfrak{S}_{13}$ $\mathfrak{S}_{23} = \mathfrak{S}_{23}$，则 $\tau_1 = \tilde{\tau}_1$ $\sigma_2 = \tilde{\sigma}_2 + c$。

（1）从第一个角度出发，令

$$\tau_2(x) = \int_0^x \sigma_2(t)dt + \tau_2(0),$$

则 $\tau_2'' = q$。显然， $\tau_2 \in L_2(0,1) \cap AC[0,1]$。考虑由相应矩阵（2.1）导出的准导数。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned} &U_1(y) = y^{[0]}(0) = y(0) = 0, \ \ U_2(y) = y^{[1]}(0) = y'(0) = 0, \\ &U_3(y) = y^{[2]}(0) = y''(0) + \tau_2(0)y(0) - \tau_1(0)y'(0) = 0, \\ &V_3(y) = y^{[2]}(1) = y''(1) + \tau_2(1)y(1) - \tau_1(1)y'(1) = 0, \\ &V_4(y) = y(1) = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

根据定理 2.2，我们有 $\tau_2 = \tilde{\tau}_2 + cx$，于是得到 $\tau_2' = \tilde{\tau}_2' + c$，即 $\sigma_2 = \tilde{\sigma}_2 + c$。

(2) 从第二种角度来看，我们使用以下相关矩阵对微分表达式 (1.1) 进行正则化，其中 $p, q \in W_2^{-1}(0,1)$:

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 & 1 & 0 \\ -\sigma_2 & -\tau_1^2 & -\tau_1 & 1 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned} &U_1(y) = y^{[0]}(0) = y(0) = 0, \ \ U_2(y) = y^{[1]}(0) = y'(0) = 0, \\ &U_3(y) = y^{[2]}(0) = y''(0) - \tau_1(0)y'(0) = 0, \\ &V_3(y) = y^{[2]}(1) = y''(1) - \tau_1(1)y'(1) = 0, \\ &V_4(y) = y(1) = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

按照定理 2.2 的证明策略，可以很容易证明$\tau_1 = \tilde{\tau}_1$, $\sigma_2 = \tilde{\sigma}_2 + c$。

考虑到 (5.1) (5.2)，我们发现谱 $\mathfrak{S}_{12}$ 和 $\mathfrak{S}_{13}$ 保持不变；如果 $\tau_2(0) = 0$，则 $\mathfrak{S}_{23}$ 也保持不变。显然，在提高正则性之后，尽管边界条件可能发生变化且相应的谱不再相同，我们仍然可以根据三个谱唯一恢复势函数。

例 5.2. 假设 $p, q \in L_1(0,1)$。若 $\mathfrak{S}_{12} = \tilde{\mathfrak{S}}_{12}$, $\mathfrak{S}_{13} = \tilde{\mathfrak{S}}_{13}$, $\mathfrak{S}_{23} = \tilde{\mathfrak{S}}_{23}$，则 $p = \tilde{p}$, $q = \tilde{q}$。

(1) 从第一个观点来看，与例 5.1 类似，我们有边界条件 (5.1)，其中 $\tau_1' = p$, $\tau_2'' = q$. 根据定理 2.2，我们有 $\tau_1 = \tilde{\tau}_1$, $\tau_2 = \tilde{\tau}_2 + cx$，因此 $p = \tilde{p}$, $q = \tilde{q}$。

（2）从第二种观点出发，我们如下定义相关矩阵：

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p & 0 & 1 \\ -q & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

我们有边界条件

$$\begin{aligned} &U_1(y) = y^{[0]}(0) = y(0) = 0, \;\; U_2(y) = y^{[1]}(0) = y'(0) = 0, \\ &U_3(y) = y^{[2]}(0) = y''(0) = 0, \\ &V_3(y) = y^{[2]}(1) = y''(1) = 0, \; V_4(y) = y(1) = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

重复与相关矩阵 (5.3) 的唯一性定理证明中相同的论证，我们证明 $p(x) = \tilde{p}(x)$ 和 $q(x) = \tilde{q}(x)$ 在 (0, 1) 上几乎处处成立。

考察（5.1）和（5.4），我们看到，若 $\tau_1(1) = 0$，则 $\mathfrak{S}_{12}$ 不变；若 $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$，则 $\mathfrak{S}_{13}$不变；且若 $\tau_2(0) = \tau_1(1) =0$，则 $\mathfrak{S}_{23}$ 不变。注意，边界条件（5.4）与边界条件（1.3）完全一致。因此，我们的唯一性定理推广了巴尔西隆的原始结果。

References

[1] Badanin, A., Korotyaev, E. L.，《半直线上 Euler–Bernoulli 算子的共振》。《微分方程杂志》，2017，263(1)：534-566。[2] Barcilon, V.，《反特征值问题解的唯一性》。Geophysical Journal International，1974，38(2)：287-298。[3] Barcilon, V.，《高阶反特征值问题的求解》。Geophysical Journal International，1974，39(1)：143-154。[4] Bondarenko, N. P.，《用 Yurko 方法求解具有奇异势的 Sturm-Liouville 算子的反问题》。Tamkang J. Math.，2021，52(1)，125-154。[5] Bondarenko, N. P.，《具有奇异势的矩阵 Sturm–Liouville 算子的反问题求解与谱数据刻画》。Analysis and Mathematical Physics，2021，11：1-26。[6] Bondarenko, N. P.，《具有分布系数的任意阶微分算子的反谱问题》。Mathematics，2021，9(22)：2989。[7] Bondarenko, N. P.，《根据谱数据重构高阶微分算子》。Mathematics，2022，10(20)：3882。

[8] Bondarenko, N. P.，《具有不同奇异阶数分布系数的线性微分算子》。Mathematical Methods in the Applied Sciences，2023，46(6)：6639–6659。[9] Bondarenko, N. P.，《三阶微分方程的反谱问题》。arXiv：2303.13124。[10] Bondarenko, N. P.，《具有分布系数的高阶微分算子的谱数据渐近性》。Journal of Mathematical Sciences，2023，1-22。[11] Borg, G.，《Sturm-Liouville 特征值问题的逆转》。Acta Mathematica，1946，78(1)：1-96。[12] Buterin, S., A., Freiling, G., Yurko V. A.，《整函数理论讲义》。Schriftenriehe der Fakultat fur Matematik，Duisbug-Essen Univer- sity。SM-UDE-779，2014。[13] Caudill Jr, L. F., Perry, P. A., Schueller, A. W.，《四阶常微分算子的等谱集》。SIAM journal on mathematical analysis，1998，29(4)：935-966。[14] Freiling, G., Yurko, V.，《反 Sturm-Liouville 问题及其应用》。Nova Science Publishers, Huntington, NY，2001。[15] Freiling, G., Ignatiev, M. Y., Yurko, V. A.，《星形图上具有奇异势的 Sturm-Liouville 算子的一个反谱问题》。Proc. Symp. Pure Math.，2008，77：397-408。[16] Gel’fand, I. M., Levitan, B. M.，《根据谱函数确定微分方程》。Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.，1951，15(4)：309-360。[17]Gladwell, G. M. L.，《振动中的反问题》，第二版。Solid Mechanics and Its Applications，Springer，Dordrecht，2005，119。[18]Hryniv, R. O., Mykytyuk, Y. V.，《具有奇异势的 Sturm–Liouville 算子的半反谱问题》。Inverse Problems，2004，20(5)：1423。[19] Hryniv, R.O., Mykytyuk, Y. V.，《具有奇异势的 Sturm–Liouville 算子的反谱问题》。Inverse Problems，2003，19(3)：665-684。[20]Hryniv, R. O., Mykytyuk, Y. V.，《具有奇异势的 Sturm-Liouville 算子的反谱问题，II：利用两组谱进行重构》。North-Holland Mathematics Studies。North-Holland，2004，197：97-114。[21]Jiang, X., Xu, X.，《基于迹公式的四阶 Sturm–Liouville 算子的反谱问题》。Applied Mathematics Letters，2021，111：106654。

[22] Kravchenko, V. V.，《Sturm-Liouville问题的正问题与反问题》。Birkh¨auser，Cham，2020。[23] Levitan, B. M.，《Sturm-Liouville反问题》。VNU Sci. Press，Utrecht，1987。[24]Marchenko, V. A.，《Sturm-Liouville算子及其应用》。Birkh¨auser，Basel，1986。[25] McLaughlin, J. R.，根据谱数据恢复微分方程系数的解析方法。SIAM Review，1986，28(1)：53-72。[26] McLaughlin, J. R.，关于构造Euler–Bernoulli反问题的解。载于《声波与弹性波反问题》，1984：341-347。[27] Mikhlin, S. G., Chambers, L. I. G.，《数学物理中的变分方法》。Oxford：Pergamon Press，1964。[28]Mirzoev, K.A., Shkalikov, A.A.，具有分布系数的偶数阶微分算子。Mathematical Notes，2016，99：779-784。[29] Mirzoev, K.A., Shkalikov A.A.，具有分布系数的奇数阶常微分算子。arXiv:1912.03660，2019。[30] Morassi, A.，具有有限个给定固有频率的梁的精确构造。Journal of Vibration and Control，2015，21(3)：591-600。[31] Papanicolaou, V. G., Kravvaritis, D.，振动梁Euler-Bernoulli方程的一个反谱问题。Inverse Problems，1997，13(4)：1083。[32] Perera, U., B¨ockmann, C.，利用Magnus展开求解正阶与反阶Sturm-Liouville问题。Mathematics，2019，7(6)：544。[33] Polyakov, D. M.，具有非光滑系数的四阶非自伴算子的谱分析。Siberian Mathematical Journal，2015，56(1)。[34] Polyakov, D. M.，具有矩阵系数的四阶算子的谱估计。Computational Mathematics and Mathematical Physics，2020，60：1163-1184。[35] Savchuk. A. M., Shkalikov. A.A.，具有分布系数的常微分方程解的渐近分析。Sbornik: Mathematics，2020，211(11)：1623。[36] U˘gurlu, E., Bairamov, E.，具有分布势的四阶微分算子。Turkish Journal of Mathematics，2020，44(3)：825-856。[37] Vladimirov, A. A.，关于常微分方程序列的收敛性。Mathematical Notes，2004，75：877-880。[38] Yurko, V. A.，《反问题理论中的谱映射法》。VSP，2002。

[39] Yurko, V. A.，关于具有奇异点的高阶微分算子。Inverse problems，1993，9(4)：495。[40] Yurko, V. A.，关于具有正则奇点的高阶微分算子。Sbornik Mathematics，1995，186(6)：901-928。

Department of Mathematics, School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094, Jiangsu, People's Re-public of China

电子邮箱：guan.ivy@njust.edu.cn

Department of Mathematics, School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094, Jiangsu, People's Re-public of China

电子邮件地址：chuanfuyang@njust.edu.cn

S.M. Nikolskii Mathematical Institute, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Street, Moscow, 117198, RussianFederation

电子邮件地址：bondarenkonp@sgu.ru