arXiv:2304.05782v1 [math.FA] 12 Apr 2023

与环域相关的正规算子的扩张

Sourav Pal 和 Nitin Tomar

摘要。对于 $0 < r < 1$，考虑以下环域：

$$\mathbb{A}_r = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}.$$

若希尔伯特空间上的算子 T 满足 $\overline{\mathbb{A}}_r$ 是谱集，则称其为 $\mathbb{A}_r$-压缩算子。此外，谱包含于 $\partial\mathbb{A}_r$ $\mathbb{A}_r$ 边界上的正规算子 U 称为 $\mathbb{A}_r$-酉算子。我们证明，任意 m 个两两交换的正规 $\mathbb{A}_r$-压缩算子 N1,... , N_m 都可以同时扩张为两两交换的 $\mathbb{A}_r$-酉算子 U1,...,U_m。为构造这样的扩张，我们求解多重环域 $\mathbb{A}_r^m$ 上的狄利克雷问题。此外，我们证明，任意有限多个双重交换的次正规 $\mathbb{A}_r$-压缩算子都可以同时扩张为两两交换的 $\mathbb{A}_r$-酉算子。最后，我们证明，任意有限多个双重交换的 2×2 标量$\mathbb{A}_r$-压缩算子也满足这样的同时 $\mathbb{A}_r$-酉扩张。

1. 引言

本文中每个算子都是作用在复希尔伯特空间上的有界线性算子。对于希尔伯特空间 $\mathscr{H}$，$\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 表示定义在 $\mathscr{H}$ 上的所有算子所构成的空间。收缩算子是指其范数小于或等于 1 的算子。我们分别用 $\mathbb{C}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{N}$ 表示复数、实数、整数和正整数集。此外，$\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{T}$ 分别表示复平面 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘和单位圆。我们在第 2 节中定义 Taylor 联合谱、谱集、有理扩张等概念。

每个算子都是一个收缩算子的标量倍数，而根据 Sz.-Nagy 在 [34] 中的证明，收缩算子可以实现为酉算子的一部分。

定理 1.1（Sz.-Nagy，1953）。如果 T 是作用于希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的压缩算子，那么存在一个希尔伯特空间 $\mathscr{K} \supseteq \mathscr{H}$，以及作用于 $\mathscr{K}$ 上的酉算子 U，使得

$$f(T) = P_{\mathscr{H}} f(U)|_{\mathscr{H}}, \quad \textit{for every rational function } f \textit{ with poles off } \overline{\mathbb{D}},$$

其中 $f(T) = p(T)q(T)^{-1}$，当 $f = p/q$，且 $p、q \in \mathbb{C}[z]$ 时。

在算子理论中，这称为压缩算子的有理扩张（详情见第 2 节）。Sz.-Nagy 将压缩算子刻画为酉算子的压缩，而 von Neumann [38] 则将压缩算子描述为一种以闭单位圆盘 $\overline{\mathbb{D}}$ 为谱集的算子。

定理 1.2（冯·诺伊曼，1951年）。算子 T 是压缩算子，当且仅当 $\overline{\mathbb{D}}$ 是 T 的谱集。

2010 年数学主题分类：47A20、47A25。关键词和短语：谱集、 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子、狄利克雷问题、正规边界扩张。第一作者获得 IIT Bombay 的“早期研究成就奖资助”（资助编号：RI/0220-10001427-001）以及印度政府 CDPA 的支持。第二作者获得印度政府总理研究奖学金的支持（获奖编号：1300140）。

毋庸置疑，酉算子是一种正规算子，其谱位于 $\mathbb{T}$上。因此，Sz.-Nagy 定理大致指出，作用于 $\overline{\mathbb{D}}$ 内部的算子可以扩张为一个位于 $\overline{\mathbb{D}}$边界上的正规算子。这些重要结果促使众多数学家研究以紧集为谱集的算子及其向边界的正规扩张，例如参见经典文献[14, 30] 及其中的参考文献。后来，Arveson 将算子的谱集概念推广到有限个交换算子组成的算子组（参见 [10]）；由此，我们得以见证算子组的结构性质与该算子组所关联的 $\mathbb{C}^m$ 中某个底层紧子集的复几何之间有趣的相互作用（例如 [5, 6, 27]）。请注意，在多变量情形中，考虑的是紧集 X 的特征边界，而非拓扑边界（详情参见第 2 节）。在发现压缩算子的酉扩张之后，我们仍面临一个至今悬而未决的问题：若紧集 $X \subset \mathbb{C}^m$是希尔伯特空间 $\mathscr{H}$上一个交换算子组 $(T_1, \ldots, T_m)$ 的谱集，那么能否找到一个作用于希尔伯特空间 $\mathscr{K} \supseteq \mathscr{H}$ 上的交换正规算子组 $(N_1, \ldots, N_m)$，使其联合谱位于 X 的特征边界上，并且满足

$$f(T_1, \ldots, T_m) = P_{\mathscr{H}} f(N_1, \ldots, N_m)|_{\mathscr{H}}$$

对于每个有理函数 $f = p/q$，其中 $p、q \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m]$，且 q 在 X 中没有零点。除单位圆盘 $\mathbb{D}$外，有理扩张问题在环域 [3], 、双圆盘 $\mathbb{D}^2$ [8] 和对称双圆盘 $\mathbb{G}_2$ [7, 15]上的答案均为肯定，其中

$$\mathbb{G}_2 = \{(z_1 + z_2, z_1 z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{D}\}.$$

此外，我们还知道，三连通域上的有理扩张会失败 [19, 4], 多圆盘 $\mathbb{D}^3$ [29]等。不过，目前尚无已知结果表明，在多于两个变量的域上，有理扩张能够成功。事实上，在多变量情形下寻找扩张一直是一个极具挑战性且困难的问题。自从 Agler 深刻地证明了环域上的有理扩张能够成功以来，一个经典问题随之而来：多重环域上会是什么情形？本文旨在通过寻找与闭环域相关联的正规算子可交换元组的正规边界扩张，迈出解决这一问题的第一步。

对于 $0 < r < 1$，考虑环域 $\mathbb{A}_r = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$。因此，m-环域，或简称多重环域，是指以下区域：

$$\mathbb{A}_r^m = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m : z_i \in \mathbb{A}_r, 1 \le i \le m\}.$$

显然， $\mathbb{A}_r$ 的拓扑边界$\partial \mathbb{A}_r$ 是 $\mathbb{T}$ 与 $r\mathbb{T}$的并。我们将在第 2 节证明， $\mathbb{A}_r^m$的特征边界等于$(\partial \mathbb{A}_r)^m$，这类似于 $\mathbb{T}^m$ 是多圆盘 $\mathbb{D}^m$的特征边界。继 Agler的著名文章 [3], 之后，关于环域上的函数与算子理论已经出现了相当多的重要研究成果，例如 [1, 2, 12, 13, 26, 28,33, 37]。

定义 1.3.对于 $m \ge 1$，如果 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$是$(T_1, \ldots, T_m)$ 的谱集，则称交换算子元组$(T_1, \ldots, T_m)$ 为 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子。 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子 $(T_1, \ldots, T_m)$ 称为正规算子，如果每个T_i都是正规算子。此外，如果 Taylor联合谱 $\sigma_T(U_1, \ldots, U_m)$ 位于特征边界 $(\partial \mathbb{A}_r)^m$ 的$\mathbb{A}_r^m$上，则称可交换正规元组算子$(U_1, \ldots, U_m)$ 为 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子。

根据 Taylor 联合谱的性质，如果 $N_1, \ldots, N_m$ 是彼此可交换的正规算子，且 $\overline{\mathbb{A}}_r$ 是每个 N_i 的谱集，那么 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 是元组 $(N_1, \ldots, N_m)$ 的谱集，反之亦然。更具体地说，$(U_1, \ldots, U_m)$ 是一个 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子，当且仅当

每个 U_i 都是一个 $\mathbb{A}_r$-酉算子。因此，为可交换正规$\mathbb{A}_r$-压缩算子N1,... , N_m寻找一个同时的 $\mathbb{A}_r$-酉算子膨胀，等价于为正规 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子(N1, . . . ,N_m) 寻找一个 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子膨胀。在本文的主要结果定理 6.2中，我们证明每个正规$\mathbb{A}_r^m$-压缩算子都存在一个 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子膨胀。在定理 6.3中，我们通过证明每个次正规 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子都具有一个 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子膨胀，对这一结果作了改进。对可交换正规 $\mathbb{A}_r$-压缩算子 N1,. . .,N_m进行膨胀的下一步，是为双重交换 $\mathbb{A}_r$-压缩算子寻找同时的 $\mathbb{A}_r$- 酉算子膨胀。如果算子元组 (A1,.. .,A_m) 满足 $A_iA_j^* = A_j^*A_i$ ，其中 $1 \le i,j \le m$ 且 $i \ne j$，则称其为双重交换的。在定理 6.4 中，我们证明任意双重交换次正规 $\mathbb{A}_r$-压缩算子 S1,.. . ,S_m都具有同时的可交换$\mathbb{A}_r$-酉算子膨胀。此外，在定理 6.7中，我们证明任意m个双重交换 2×2标量 $\mathbb{A}_r$-压缩算子都可以同时膨胀为可交换的 $\mathbb{A}_r$-酉算子。

在定理 5.3 中，我们为多重环域 $\mathbb{A}_r^m$求解一个狄利克雷问题；该问题实际上在主要膨胀定理（定理 6.2）的证明中起着核心作用。事实上，对于正规 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子组 (N1, . . ., N_m)，根据谱定理，我们有一个支撑在$\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 处的谱测度。现在，如果我们想将这样的算子组扩张为一个 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子，那么首先需要构造一个支撑在特征边界 $b\mathbb{A}_r^m$上的谱测度。多重环域的狄利克雷问题（即定理 5.3）恰好解决了这一需求。

在第 4 节中，我们证明了关于多重环域 $\mathbb{A}_r^m$的有理函数演算的一些结果。这些结果将在下文中使用。

2. 预备知识

本节回顾文献中的一些基本事实及若干相关的已有结果，这些内容将在下文中使用。我们首先给出交换算子组的 Taylor 联合谱的定义。

2.1. 泰勒联合谱。设 Γ是由 n 个生成元 $e_1, e2, \ldots, e_n$构成、单位元为 $e_0 \equiv 1.\Lambda$的外代数；它是由形式 $e_1, e2, \ldots, e_n$组成的代数，其系数为复数，并满足性质 $e_ie\,j + e_je_1 = 0(1 \le i, j \le n)$。令 E_i: $\Lambda \to \Lambda$表示如下定义的算子: $E_i\xi = \xi(\xi \in \Lambda, 1 \le i, j \le n)$。若规定 $\{e^{i_1}, \ldots, e^{i_k}: 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n\}$为一组正交基，则外代数 Γ 成为一个希尔伯特空间，并具有正交分解 $\Lambda = n\oplus \Lambda^k k=1$，其中 $\dim\Lambda^k = \binom{n}{k}$. 因此，每个$\xi \in \Lambda$都有唯一的正交分解 $\xi =$ $e_1\xi' + \xi''$不含 e_i 项。由此可得 $E_i^*\xi = \xi'$，并且每个 E_i 都是部分等距算子，满足 $E_i^*E\,j + E_j^*E_i = \delta_ij$. 设 $\mathcal{X}$为一个赋范空间，且 $T = (T1, \ldots, T_n)$ 是 $\mathcal{X}$ 上的有界算子构成的交换 n 元组，并令 $\Lambda(\mathcal{X}) = \mathcal{X}\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda$. 我们定义 $D_{\underline{T}}$: $\Lambda(\mathcal{X}) \to \Lambda(\mathcal{X})$ 如下:

$$D_{\underline{T}} = \sum_{i=1}^{n} T_i \otimes E_i.$$

那么显然，$D_{\underline{T}}^2 = 0$，因此 $\mathrm{Ran}D_{\underline{T}} \subset \mathrm{Ker}D_{\underline{T}}$. 。如果 $\mathrm{Ran}D_{\underline{T}} = \mathrm{Ker}D_{\underline{T}}$.，则称交换 n 元组在 $\mathcal{X}$ 上是非奇异的。

定义 2.1。T 在 $\mathcal{X}$ 上的 Taylor 联合谱是集合

$$\sigma_T(\underline{T}, \mathcal{X}) = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : \underline{T} - \lambda \text{ is singular}\}.$$

如需进一步阅读 关于 Taylor 联合谱，读者可参阅 Taylor 的著作 [35] 和 [36] .

2.2. 特征边界。设 X 是 $\mathbb{C}^m$ 的一个紧子集，令 $\mathcal{A}(X)$ 表示 X 上连续复值函数所构成的代数，这些函数在 X 的内部全纯。X 的一个边界是 X 的一个闭子集 C，使得 $\mathcal{A}(X)$ 中的每个函数都在 C 上取得其最大模。由一致代数理论可知，X 的所有边界的交集也是 X 的一个边界，且是所有边界中最小的一个。这称为 X 的特征边界，记作 bX。对于有界域 G $\subset \mathbb{C}^m$，我们将 G 的特征边界记作 bG；为简便起见，称其为 G 的特征边界。

2.3. 谱集、完全谱集、有理扩张和 Arveson 定理。设X是 $\mathbb{C}^m$的一个紧子集，Rat(X)是有理函数 p/q所构成的代数，其中 p、q $\in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m]$，且 q 在 X中没有任何零点。设T = (T1, . . . , T$_m$) 是作用于希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的可交换元组。如果 T的 Taylor联合谱包含于 X 中，并且对于任意 f $\in$ Rat(X)，冯·诺伊曼不等式成立，即，则称 X 是 T 的谱集。

$$\|f(\underline{T})\| \leq \sup_{\xi \in X} |f(\xi)| = \|f\|_{\infty, X},$$

其中，当 f = p/q 时，f(T) = p(T)q(T)$^{-1}$。此外，如果对于任意 F = [f$_{ij}$]$_{n\times n}$，其中每个 f$_{ij}$ $\in$ Rat (X)，我们有

$$\|f(\underline{T})\| = \|\,[f_{ij}(\underline{T})]_{n\times n}\,\| \leq \sup_{\xi \in X} \|\,[f_{ij}(\xi)]_{n\times n}\,\|.$$

一组以 X 为谱集的可交换算子 m 元组 T，若存在一个希尔伯特空间 $\mathscr{K}$、一个等距算子 V: $\mathscr{H} \to \mathscr{K}$ 以及一个可交换的正规算子 m 元组 N = (N1, . . . , N$_m$) 作用于 $\mathscr{K}$，并且 σ_T(N) $\subseteq$ bX，则称其具有有理扩张或正规 bX-扩张，其中

$$f(\underline{T}) = V^* f(\underline{N}) V \quad \text{for all } f \in \overline{Rat}(X)\ .$$

换言之，对于每个 f $\in$ Rat(X)，都有 f (T) = P$_{\mathscr{H}}$f (N)|$\mathscr{H}$，其中 $\mathscr{H}$ 被视为 $\mathscr{K}$ 的闭子空间。

下面这个由 Arveson 提出的著名定理结合了这两个概念。

定理 2.2（Arveson, [10]）。交换算子组 T 存在一个正规 bG 扩张，当且仅当 G 是 T 的完全谱集。

2.4. 算子值测度与 Naimark 扩张定理。设 X 为紧豪斯多夫空间，$\mathscr{B}$ 为 X 中博雷尔集的σ代数。X 上的算子值测度是映射 E : $\mathscr{B} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$，它是弱可列可加的，即若 {B$_i$} 是一个可列的不相交博雷尔集族，其并集为 B，则

$$\langle E(B)x, y\rangle = \sum_i \langle E(B_i)x, y\rangle \qquad \text{for all } x, y \in \mathscr{H}.$$

如果 sup{||E(B)||: B $\in \mathscr{B}$} $< \infty$. 有界，则称该测度为有界。此外，如果诱导的复测度彩在线

$$\mu_{x,y}(B) = \langle E(B)x, y\rangle, \qquad \text{for all } x, y \in \mathscr{H} \tag{2.1}$$

是正则的。给定一个正则有界的 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 值测度 E，可得到一个有界线性映射ϕ_E : C(X) $\to \mathscr{B}(\mathscr{H})$，定义为

$$\langle \phi_E(f)x, y\rangle = \int_X f d\mu_{x,y}. \tag{2.2}$$

反过来，对于有界线性映射 $\phi : C(X) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$，可以利用 (2.2) 为 $\mathscr{H}$ 中的每一对 x, y 定义一个正则 Borel 测度 $\{\mu_{x,y}\}$。同样，对于每个 Borel 集 B，都存在唯一的有界算子 E(B)，由 (2.1) 给出，使得 $B \mapsto E(B)$ 定义一个有界正则 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$-值测度。因此，C(X) 到 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的有界线性映射与正则有界 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$-值测度之间存在一一对应关系。

X 上取值于 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的正则测度 E 称为谱测度，如果对于 X 的任意 Borel 子集 S_1,S_2，都有

$$E(S_1 \cap S_2) = E(S_1)E(S_2).$$

此外，如果对于 X 中的每个 Borel 集 S，$E(S) \geq 0$，则称 E 为正测度。众所周知，算子测度与线性映射之间存在一一对应关系。由此可得纳伊马克提出的以下著名扩张结果。

定理 2.3（[30], 定理 4.6）。设 E 是 X 上取值于 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的正则正测度。那么，存在一个希尔伯特空间 $\mathscr{K}$、一个有界线性算子 V: $\mathscr{H} \to \mathscr{K}$，以及一个 X 上取值于 $\mathscr{K}$ 的正则谱$\mathscr{B}$测度 F，使得

$$E(B) = V^* F(B)V.$$

此外，如果映射 ϕ_E 是幺元的，那么 V 是一个等距算子。

2.5. Reisz-Kakutani 表示定理。经典测度论中的一个核心定理是 Reisz-Kakutani 表示定理，它建立了空间 C(X) 上的线性泛函与 X 上的正则 Borel 测度之间的联系，其中 X 是局部紧豪斯多夫空间。

定理 2.4. 设 X 为紧豪斯多夫空间。对于 C(X) 上任意连续线性泛函 ψ，存在唯一的正则博雷尔复测度 μ，使得

$$\psi(f) = \int_X f d\mu \quad (f \in C(X))$$

且$\|\psi\| = \|\mu\|$是 μ 的全变差。此外，ψ 为正，当且仅当测度μ为非负。

3. 多重环域 $\mathbb{A}_r^m$ 的特征边界与多重环域酉算子

在本节中，我们确定多重环域 $\mathbb{A}_r^m$ 的特征边界，并为多重环域-酉算子，即 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子，找到一种刻画。多圆盘$\mathbb{D}^m$ 的特征边界是m-环面 $\mathbb{T}^m$，这无非是圆盘 $\mathbb{D}$的（拓扑）边界的笛卡尔积。我们将在这里看到，多重环域 $\mathbb{A}_r^m$也存在类似结果。事实上，$\mathbb{A}_r^m$的特征边界是$(\partial\mathbb{A}_r)^m$。我们还将得到这一结果的算子论版本，即，一个交换算子元组(U1,.. .,U$_m$) 是一个 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子，当且仅当每个 U_i 都是一个 $\mathbb{A}_r$-酉算子。

若存在函数 $f \in \mathcal{A}(\mathbb{A}_r^m)$ 和点 $a \in \overline{\mathbb{A}}^m{}_r$，使得 $f(a) = 1$ 且对所有 $z \in \overline{\mathbb{A}}^m{}_r \setminus \{a\}$，都有 $|f(z)| < 1$，则 a 必属于 b$\mathbb{A}_r^m$. 。我们称这样的点 a 为 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 的峰点，并称函数 f 为点 a 的峰函数。这里我们将证明，b$\mathbb{A}_r^m$实际上由 $\overline{\mathbb{A}_r}^m$的所有峰点组成。

定理 3.1. 对于一个 $= (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{C}^m$，以下条件等价。

(1) a 是 $\overline{\mathbb{A}}^m$ r 的峰点；(2) 对所有 k $=1$， a $_k \in \partial \mathbb{A}_r$； 2, . . ., m；(3) a $\in$ b$\mathbb{A}_r^m$， $\mathbb{A}_r^m$. 的特征边界

因此，我们有 $b\mathbb{A}_r^m = \underbrace{\partial \mathbb{A}_r \times \ldots \times \partial \mathbb{A}_r}_{m-times}$.

证明。我们将证明 (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3)。

(1) $\implies$ (2) 如果 (a1, . . ., a$_m$) 是 $\mathcal{A}(\mathbb{A}_r^m)$ 的峰点，则存在 f $\in \mathcal{A}(\mathbb{A}_r^m)$，使得

$$f(a_1,\ldots,a_m) = 1 \ \ \& \ \ |f(z_1,\ldots,z_m)| < 1 \quad \text{for all} \quad (z_1,\ldots,z_m) \in \overline{\mathbb{A}}_r^m \setminus \{(a_1,\ldots,a_m)\}.$$

定义 g : $\overline{\mathbb{A}}_r \to \mathbb{C}$，令 g(z) $=$f(z,a2,. . ., a$_m$)。由于f $\in \mathcal{A}(\mathbb{A}_r^m)$，g在 $\mathbb{A}_r$中解析且在 $\overline{\mathbb{A}}_r$ 上连续。现在，g 在a$_1$. 处取得其最大模。因此，根据最大值原理，我们有 a$_1 \in \partial \mathbb{A}_r$。类似地，可以证明，对于所有 k $=1, \ldots,$ m， a$_k \in \partial \mathbb{A}_r$。

(2) $\implies$ (1) 对于 $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$，由 $\overline{\mathbb{A}}_r \to \mathbb{C}$ 定义的函数 f$_\theta$, g$_\phi$。

$$f_\theta(z) = \frac{e^{i\theta}}{2e^{i\theta} - z} \quad \text{and} \quad g_\phi(z) = \frac{re^{i\phi}}{2z - re^{i\phi}}$$

在 $\mathbb{A}_r$ 上解析且在 $\overline{\mathbb{A}}_r$ 上连续。由于 f$_\theta$(e$^{i\theta}$) $=1$，我们有 |z -2e$^{i\theta}$| >1，对任意 z $\neq$e$^{i\theta}$ 都成立于 $\overline{\mathbb{A}}_r$，这意味着

$$|f_\theta(z)| = \frac{1}{|z - 2e^{i\theta}|} < 1.$$

因此，e$^{i\theta}$ 是 $\overline{\mathbb{A}}_r$的峰点。再次，g$_\phi$(re$^{i\phi}$) $=1$ 并且对于任意 z $\in \overline{\mathbb{A}}_r \setminus \{re^{i\phi}\}$，我们有 |z $-$re $^{i\phi}/2| >$ r$/2$，即 |2z $-$re$^{i\phi}| >$ r，从而

$$|g_\phi(z)| = \frac{r}{|2z - re^{i\phi}|} < 1.$$

因此，re$^{i\phi}$ 是 $\overline{\mathbb{A}}_r$的峰点。如果(a1, . . ., a$_m$) $\in \partial \mathbb{A}_r \times \ldots \times \partial \mathbb{A}_r$，那么每个a$_k$要么是e$^{i\theta_k}$，要么是re$^{i\phi_k}$，其中 $\theta_k, \phi_k \in [0, 2\pi]$。定义h : $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r \to \mathbb{C}$如下:

$$h(z_1,\ldots,z_m) = \prod_{k=1}^{m} f_{\theta_k}^{m_k}(z_k) g_{\phi_k}^{(1-m_k)}(z_k), \quad \text{where} \quad m_k = \begin{cases} 1, & a_k = e^{i\theta_k} \\ 0, & a_k = re^{i\phi_k}. \end{cases}$$

Thenh is in $\mathcal{A}(\mathbb{A}_r^m)$as each f$_{\theta_k}$ andg$_{\phi_k}$ arein $\mathcal{A}(\mathbb{A}_r)$.Since f$_{\theta_k}$ and g$_{\phi_k}$ peaksat e$^{i\theta_k}$ and re$^{i\phi_k}$ respectively, we havethat h(a1, .. . , a$_m$) $=1$and |h(z1,. . . , z$_m$)| $<1$for all (z1, . . . ,z$_m$) in $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r \setminus$ {(a1,. . ., a$_m$)}. Hence, (a1, . . ., a$_m$) is a peak point for $\mathcal{A}(\mathbb{A}_r^m)$ with h being a peaking function.

(2) $\iff$ (3)。注意到，$\mathcal{A}(\mathbb{A}_r^m)$ 是紧致可度量空间 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 上的一个一致函数代数。Dales 在 [18] 中证明，若 $\mathscr{A}$ 是紧致可度量空间 X 上的 Banach 函数代数，则 $\mathscr{A}$ 的峰点集在 $\mathscr{A}$（相对于 X）的 Shilov 边界中稠密。因此，$\mathbb{A}_r^m$ 的特征边界由 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 的峰点集的闭包给出。在此情形下，峰点集为 $\partial \mathbb{A}_r \times \ldots \times \partial \mathbb{A}_r$，且它是闭集。因此，我们有 b $\mathbb{A}_r^m = \underbrace{\partial \mathbb{A}_r \times \ldots \times \partial \mathbb{A}_r}_{\text{m–乘}}$ 。证明至此完成。

■

回顾一下，如果算子 T $\in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是正规算子且 $\sigma(T) \subseteq \partial\mathbb{A}_r$，则称 T 为 $\mathbb{A}_r$-酉算子。这里我们刻画 Taylor 联合谱位于 $\mathbb{A}_r^m$ 的特征边界 $b\mathbb{A}_r^m$ 上的交换正规算子组 (U1, . . .,U$_m$)。这样的算子组称为 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子。首先，我们来记下关于 $\mathbb{A}_r$-酉算子的几条重要观察。

定理 3.2（[28], 定理 3.2）。算子 N $\in \mathscr{B}(\mathscr{K})$ 是一个 $\mathbb{A}_r$-酉算子，当且仅当存在一个正交分解 $\mathscr{K} = \mathscr{K}_1 \oplus \mathscr{K}_2$，并且存在酉算子 $U_1 \in \mathscr{B}(\mathscr{K}_1)$ 和 $U_2 \in \mathscr{B}(\mathscr{K}_2)$，使得

$$N = \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & rU_2 \end{bmatrix} \quad \textit{with respect to } \mathscr{K} = \mathscr{K}_1 \oplus \mathscr{K}_2.$$

引理 3.3。 设 T $\in \mathscr{B}(\mathscr{H})$。那么 T 是一个 $\mathbb{A}_r$-酉算子，当且仅当 rT^{-1} 是一个 $\mathbb{A}_r$-酉算子。

证明。T 是正规算子，当且仅当 rT^{-1} 是正规算子，并且

$$\sigma(rT^{-1}) \subseteq \mathbb{T} \cup r\mathbb{T} \iff \sigma(T^{-1}) \subseteq r^{-1}\mathbb{T} \cup \mathbb{T} \iff \sigma(T) \subseteq r\mathbb{T} \cup \mathbb{T}.$$

最后一个等价关系来自正规算子的连续函数演算的谱映射定理，由此可得 $\sigma(T^{-1}) = \{z^{-1} | z \in \sigma(T)\}$. ■

引理 3.4. 若 =({style id='2'>1</style}, . . . , T$_m$) 是 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 上由相互交换的正规算子组成的 m 元组，则它是 $\mathbb{A}_r^m$-酉的，当且仅当每个 T$_k$ 都是 $\mathbb{A}_r$-酉的。

证明。假设 =(T1, . . . , T$_m$) 是 $\mathbb{A}_r^m$-酉的。那么 T1, . . ., T$_m$ 是相互交换的正规算子，且 $\sigma_T(T) \subseteq b\mathbb{A}_r^m$。由 Taylor 联合谱的投影性质可知 $\sigma(T_k) \subseteq \partial\mathbb{A}_r$。因此，每个 T$_k$ 都是 $\mathbb{A}_r$-酉的。反过来，假设每个 T$_k$ 都是 $\mathbb{A}_r$-酉的。那么

$$\sigma_T(\underline{T}) \subseteq \sigma(T_1) \times \ldots \times \sigma(T_m) \subseteq \underbrace{\partial\mathbb{A}_r \times \cdots \times \partial\mathbb{A}_r}_{m-times} = b\mathbb{A}_r^m$$

因此，(T1, . . ., T$_m$) 是 $\mathbb{A}_r^m$-酉的。

■

4. 多重环域上的有理函数演算 $\mathbb{A}_r^m$

回顾一下，若一个 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子 =(T1, . . . , T$_m$) 存在有理扩张或正规 $b\mathbb{A}_r^m$-扩张，即存在一个定义在更大的希尔伯特空间 $\mathscr{K} \supseteq \mathscr{H}$ 上的相互交换的正规算子 m 元组 N =(N1, . . . , N$_m$)，满足 $\sigma_T(N) \subseteq \overline{\mathbb{A}}^m{}_r$，使得对于任意有理函数 f =p/q（其中 p, q $\in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m]$，且 q 在 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 中无零点），都有 f(T) =P$_{\mathscr{H}}$f(N)$|_{\mathscr{H}}$。本节将说明，只需考虑更小的一类函数，即具有正、负整数次幂的单项式。在此之前，我们简要回顾文献 [32]中关于多重级数的一些基本事实。

定义 4.1. 多重级数 $\sum c_k$ 称为收敛的，如果$_{k\in\mathbb{N}^m}$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^m} |c_k| = \sup\left\{\sum_{k\in P} |c_k| : P \text{ finite}\right\} < \infty.$$

下面给出多重级数收敛性的一个刻画。

命题4.2。多重级数$\sum c_k$收敛，当且仅当对于任意双射$\nu:\mathbb{N}\to k\in\mathbb{N}^m\infty\mathbb{N}^m$，普通级数 $\sum j=0c$ $\nu(j)$ 按通常意义收敛到极限 $L\in\mathbb{C}$，且该极限与 ν. 无关。

有关上述结果的更多细节，请参见 [32] 中的第 1.5 节。在多变量情形下，我们还有如下洛朗级数展开。

命题 4.3（[32], 定理 1.4）。每个在 $\overline{\mathbb{A}}^m$ r 上解析的函数都有唯一表示

$$f(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_k z^k \ \ for\, z\in\overline{\mathbb{A}}_r^m$$

且该级数在 $\overline{\mathbb{A}}^m$.r 上一致且绝对收敛

根据上述有理函数 f 在 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 上的级数展开，我们现在说明当 $T=(T1,\ldots,T_m)$ 是一个 $\underline{\mathbb{A}}_r^m$-压缩时，f (T) 如何定义。为此，我们需要以下两个引理。

引理 4.4（[28], 引理 2.2）。对于希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的每个 $\mathbb{A}_r$-压缩 T，我们有 $r\le\|T\|\le 1.$

引理 4.5（[28], 引理 2.5）。当且仅当 rT^{-1} 是 $\mathbb{A}_r$-压缩算子时，算子 T 是 $\mathbb{A}_r$-压缩算子。

命题 4.6。对于希尔伯特空间 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子 $T=(T_1,\ldots..,T_m)$ 上的 $\mathscr{H}$有理函数 f（z）$=\sum f_k z^k$在 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 上，级数 $\sum f_k T^k$ 在算子范数下收敛，并且$k\in\mathbb{Z}^m$ m

$$f(\underline{T})=\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_k \underline{T}^k.$$

证明。由引理 4.4 和引理 4.5，我们得到，对于每个 $j=1$、.....、m，都有 $r\le\|T_j\|\le 1$ 以及 $r\le\|rT_j^1\|\le 1$。我们将级数改写为

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_k z^k=\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\tilde{f}_k\tilde{z_1}^{|k_1|}\ldots\tilde{z_m}^{|k^m|},\quad \text{where}\ \ \tilde{z_j}^{|k_j|}=\begin{cases} z_j^{k_j} & k_j\ge 1\\ (rz_j^{-1})^{-k_j} & k_j<0\,,\end{cases}$$

并且 $\tilde{}f_k=(r^{k_{j_1}}\ldots r^{k_{j_l}})\,f_k$，其中 l 是元组 $k=(k_1,k2,\ldots..,k_m)$ 中负整数的个数。类似地，我们写成

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_k\underline{T}^k=\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\tilde{f}_k\tilde{T_1}^{|k_1|}\ldots\tilde{T_m}^{|k^m|},\quad \text{where}\ \ \tilde{T_j}^{|k_j|}=\begin{cases} T_j^{k_j} & k_j\ge 1\\ (rT_j^{-1})^{-k_j} & k_j<0\,.\end{cases}$$

对于每个 $j=1$、2、.....、m，我们有 $r\le\|\tilde{}T_j\|\le 1$，因此

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\|f_k\underline{T}^k\|&=\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\left\|\tilde{f}_k\tilde{T_1}^{|k_1|}\ldots\tilde{T_m}^{|k^m|}\right\|\\ &\le\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}|\tilde{f}_k|\,\|\tilde{T_1}\|^{|k_1|}\ldots\|\tilde{T_m}\|^{|k^m|}\end{aligned}$$

这是一个收敛级数，因为 $\|\tilde{}T_j\|\in\overline{\mathbb{A}}_r$，且 f 的级数在 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 中绝对收敛。因此，级数 $\sum f_k$ T^k 在算子范数下收敛到一个有界算子，记作 $\tilde{}T$。现在连续性$k\in\mathbb{Z}^m$

全纯函数演算的性质意味着f (T) = $\sum f_k T^k$，证明$k\in\mathbb{Z}^m$完毕。

■

鉴于命题 4.3 和4.6，正规 $b\mathbb{A}_r^m$-扩张的定义归结为仅以如下方式考虑具有正整数次幂和负整数次幂的单项式。

命题 4.7. 设 $T = (T_1, \ldots, T_m)$ 是 $\mathscr{H}$ 上的一个 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子，而 $U = (U_1, \ldots, U_m)$ 是包含 $\mathscr{H}$ 的希尔伯特空间 $\mathscr{K}$ 上的另一个 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子。则以下各项等价。

(1) $f(\underline{T})x = P_{\mathscr{H}} f(\underline{U})x$ 对每个 $f \in \mathrm{Rat}(\overline{\mathbb{A}}^m r)$ 和 $x \in \mathscr{H}$；

(2) $\underline{T}^k x = P_{\mathscr{H}} \underline{U}^k x$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}^m$ 和 $x \in \mathscr{H}$.

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 显然。我们在此证明 (2) $\Rightarrow$ (1)。令 $f \in \mathrm{Rat}(\overline{\mathbb{A}}^m{}_r)$，并令$f(z) = \sum f_k z^k$ 如命题 4.3 中所述。由引理4.6 可知$k\in\mathbb{Z}^m$

$$f(\underline{T}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_k \underline{T}^k \quad \text{and} \quad f(\underline{U}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_k \underline{U}^k.$$

因此，对任意 $x \in \mathscr{H}$，我们有

$$f(\underline{T})x = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_k \underline{T}^k x = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_k (P_{\mathscr{H}} \underline{U}^k x) = P_{\mathscr{H}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_k \underline{U}^k x = P_{\mathscr{H}} f(\underline{U})x.$$

■

5. 多重环域上的狄利克雷问题 $\mathbb{A}_r^m$

回顾一下，若 $X \subset \mathbb{C}^m$ 是一个紧集，则 $C_{\mathbb{R}}(X)$ 表示 X 上实值连续函数构成的空间。在本节中，我们求解多重环域 $\mathbb{A}_r^m$ 上的一个狄利克雷问题。事实上，我们证明，在特征边界 $b\mathbb{A}_r^m$ 上连续的函数 f 可以延拓为 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 上的函数 $\hat{f}$，使得 $\hat{f}$ 对每个变量分别都是调和函数。我们称这样的函数 $\hat{f}$ 为强调和函数。我们从环域 $\mathbb{A}_r$ 上的一个狄利克雷问题开始。

定理 5.1 ([11], 定理 10.13)。设 f 是定义在 $\partial\mathbb{A}_r$ 上的实值连续函数，给定为

$$f(z) = \begin{cases} g(z) & z \in \mathbb{T} \\ h(z) & z \in r\mathbb{T}. \end{cases}$$

存在唯一的 $u \in C_{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{A}}_r)$，使得 $\Delta u = 0$ 在 $\mathbb{A}_r$ 中且 $u = f$ 在 $\partial\mathbb{A}_r$ 上。此外，唯一解 u 由下式给出

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}} g(w) P_A(z,w)\,dw + \int_{\mathbb{T}} h(rw) P_A(z,rw)\,dw, \tag{5.1}$$

其中，函数 $P_A(\cdot, w)$ 和 $P_A(\cdot, rw)$ 对每个 $w \in$ 都在 $\mathbb{A}_r$ 上是调和函数 $\mathbb{T}$.

注 5.2. 上述定理表明，在 $\overline{\mathbb{A}}_r$ 上定义的函数为

$$u_0(z) = \int_{\mathbb{T}} P_A(z,w)\,dw \quad \text{and} \quad u_r(z) = \int_{\mathbb{T}} P_A(z,rw)\,dw$$

是实值连续函数，并且由于 $\overline{\mathbb{A}}_r$ 是紧的，存在 $M > 0$ 使得

$$|u_0(z)|, |u_r(z)| \le M \quad \text{for every } z \in \overline{\mathbb{A}}_r.$$

在单变量情形下， $\mathbb{A}_r$ 的特征边界与其拓扑边界相同，但对于多重环域 $\mathbb{A}_r^m$，情况不再如此。事实上，当 $m \geq 2$时， $\mathbb{A}_r^m$的特征边界为 $b\mathbb{A}_r^m = (\partial \mathbb{A}_r)^m$。注意，这是 $\mathbb{A}_r^m$拓扑边界的一个非常稀疏的子集；然而，我们将看到，$b\mathbb{A}_r^m$上的任意连续实值函数 f 都能唯一地延拓为 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 上的强调和函数。这是$\mathbb{A}_r^m$的狄利克雷问题的唯一解，我们将其记为 $\hat{f}$，并称为 f 的调和延拓。这是本节的主要结果。

定理 5.3. 令 $m \geq 2$，设 f 是 $b\mathbb{A}_r^m$ 上的实值连续函数。则存在唯一的定义在 $\overline{\mathbb{A}}^m r$ 上的实值连续函数 u，使得对于每个 $j = 1$、2、.....、m，都有 $\Delta ju = 0 in\ \mathbb{A}_r^m$，且 $u|_{b\mathbb{A}_r^m} = f$。

证明。我们证明 $m = 2$的情形，即双环域情形；一般情形可类似推出。假设 f 是 $\partial \mathbb{A}_r \times \partial \mathbb{A}_r$ 上的实值连续函数。那么 f 具有如下形式：

$$f(z,w) = \begin{cases} g(z,w) & \text{on } \mathbb{T}\times\mathbb{T} \\ h(z,w) & \text{on } \mathbb{T}\times r\mathbb{T} \\ p(z,w) & \text{on } r\mathbb{T}\times\mathbb{T} \\ q(z,w) & \text{on } r\mathbb{T}\times r\mathbb{T}, \end{cases}$$

其中，g、h、p、q 均为连续函数。考虑狄利克雷问题。

$$\Delta_1 u = 0 = \Delta_2 u \ \text{ in } \ \mathbb{A}_r^2 \ \text{ with } \ u = \begin{cases} g & \text{on } \mathbb{T}\times\mathbb{T} \\ 0 & \text{on } b\mathbb{A}_r^2 \setminus \mathbb{T}^2. \end{cases}$$

我们证明，由.....定义的函数

$$u_{11}(z_1,z_2) = \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} g(w_1,w_2) P_A(z_1,w_1) P_A(z_2,w_2) dw_1 dw_2,$$

其中 P_A 如式 (5.1) 所示，且满足上述狄利克雷问题。给定 $z_1 \in \overline{\mathbb{A}}_r$，定义函数$\phi_{z_1} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$，使得

$$\phi_{z_1}(w) = \int_{\mathbb{T}} g(w_1,w) P_A(z_1,w_1) dw_1.$$

我们证明 $\phi_{z_1} \in C(\mathbb{T})$。由注 5.2 可知，存在 $M > 0$，使得对每个 $z \in \overline{\mathbb{A}}_r$，都有

$$\Big|\int_{\mathbb{T}} P_A(z,w) dw\Big| \leq M.$$

由于 g 在 $\mathbb{T}^2$ 上一致连续，对于每个$\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得

$$|g(w_1,w) - g(w_1,w')| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{whenever} \quad |w - w'| < \delta.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \phi_{z_1}(w) - \phi_{z_1}(w') &= \int_{\mathbb{T}} \Big(g(w_1,w) - g(w_1,w') \Big) P_A(z_1,w_1) dw_1 \\ &< \frac{\varepsilon}{M} \int_{\mathbb{T}} P_A(z_1,w_1) dw_1 \\ &< \varepsilon \ \text{ whenever } \ |w - w'| < \delta. \end{aligned}$$

同样地，当 $|w-w'|<\delta$ 时，$\phi_{z_1}(w')-\phi_{z_1}(w)<\varepsilon$。因此，我们有

$$|\phi_{z_1}(w)-\phi_{z_1}(w')|<\varepsilon \quad \text{whenever} \quad |w-w'|<\delta.$$

因此，

$$u_{11}(z_1,z_2)=\int_{\mathbb{T}}\phi_{z_1}(w_2)P_A(z_2,w_2)dw_2.$$

对于固定的 $z_1\in\overline{\mathbb{A}}_r$，定理 5.1 推出函数 $u_{11}(z_1,.)$ 在 $\{z_1\}\times\overline{\mathbb{A}_r}$ and $\Delta_2 u_{11}(z_1,.)=0$ on $\{z_1\}\times\mathbb{A}_r$ 上连续，使得

$$u_{11}(z_1,z)=\begin{cases}\phi_{z_1}(z), & z\in\mathbb{T}\\ 0, & z\in r\mathbb{T}.\end{cases}$$

对于 $(z_1,z_2)\in\mathbb{T}^2$，由定理 5.1 可得，

$$g(z_1,z_2)=\int_{\mathbb{T}}g(w,z_2)P_A(z_1,w)dw \quad \text{and} \quad \phi_{z_1}(z_2)=\int_{\mathbb{T}}\phi_{z_1}(w_2)P_A(z_2,w_2)dw_2.$$

因此，我们有

$$u_{11}(z_1,z_2)=\int_{\mathbb{T}}\phi_{z_1}(w_2)P_A(z_2,w_2)dw_2=\phi_{z_1}(z_2)=\int_{\mathbb{T}}g(w_1,z_2)P_A(z_1,w_1)dw_1=g(z_1,z_2).$$

接下来，我们证明，对于固定的 $z_2\in\overline{\mathbb{A}}_r$, $\Delta_1 u_{11}=0$. 为此，我们首先将 u_{11} 写作

$$u_{11}(z_1,z_2)=\int_{\mathbb{T}}\phi_{z_2}(w_1)P_A(z_1,w_1)dw_1,$$

其中 $\phi_{z_2}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\phi_{z_2}(w)=\int_{\mathbb{T}}g(w,w_2)P_A(z_2,w_2)dw_2.$$

通过与上述证明 ϕ_{z_1} 连续性的论证类似的方法，我们可以说 $\phi_{z_2}\in C(\mathbb{T})$。我们来改写一下。

$$u_{11}(z_1,z_2)=\int_{\mathbb{T}}\phi_{z_2}(w_1)P_A(z_1,w_1)dw_1.$$

对于固定的$z_2\in\overline{\mathbb{A}}_r$，单变量理论（即定理 5.1）意味着 $\Delta_1 u_{11}=0$. 因此，我们有

$$\Delta_1 u_{11}=0=\Delta_2 u_{11} \text{ on } \mathbb{A}_r\times\mathbb{A}_r \text{ with } u_{11}=\begin{cases}g & \text{on } \mathbb{T}\times\mathbb{T}\\ 0 & \text{on } b\mathbb{A}_r^2\setminus\mathbb{T}^2.\end{cases}$$

现在只需证明函数 u_{11} 在 $\overline{\mathbb{A}}^2{}_r$ 上连续。我们已经证明，对于每个 $z_1,z_2\in\overline{\mathbb{A}}_r$，$u_{11}(z_1,.)$ 和 $u_{11}(.,z_2)$ 都是定义在 $\overline{\mathbb{A}}_r$ 上的连续函数。设 $\varepsilon>0$ 给定。

对于每个 (z_1,z_2)、$(\alpha_1,\alpha_2) \in \overline{\mathbb{A}}^2{}_r$，我们有

$$\begin{aligned} u_{11}(z_1,z_2)-u_{11}(\alpha_1,\alpha_2) &= \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} g(w_1,w_2)\Big[P_A(z_1,w_1)P_A(z_2,w_2)-P_A(\alpha_1,w_1)P_A(\alpha_2,w_2)\Big]dw_1dw_2 \\ &= \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} g(w_1,w_2)\Big[P_A(z_1,w_1)P_A(z_2,w_2)-P_A(\alpha_1,w_1)P_A(z_2,w_2)\Big]dw_1dw_2 \\ &+ \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} g(w_1,w_2)\Big[P_A(\alpha_1,w_1)P_A(z_2,w_2)-P_A(\alpha_1,w_1)P_A(\alpha_2,w_2)\Big]dw_1dw_2 \\ &= A+B. \end{aligned} \tag{5.2}$$

由于 $g(w_1,w_2)$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上连续，因此存在 $K>0$，使得 $|g(w_1,w_2)|<K$ 对所有 $(w_1,w_2)\in\mathbb{T}^2$ 都成立。此外，函数 u_0 的一致连续性意味着，对于 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得

$$|u_0(z)-u_0(w)|<\frac{\varepsilon}{2KM}, \quad \text{whenever } |z-w|<\delta, \text{ for every } z,w\in\overline{\mathbb{A}}_r.$$

由 (5.2) 可知

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} g(w_1,w_2)\Big[P_A(z_1,w_1)P_A(z_2,w_2)-P_A(\alpha_1,w_1)P_A(z_2,w_2)\Big]dw_1dw_2 \\ &= \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} g(w_1,w_2)P_A(z_2,w_2)\Big[P_A(z_1,w_1)-P_A(\alpha_1,w_1)\Big]dw_1dw_2 \\ &\le K\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} P_A(z_2,w_2)\Big[P_A(z_1,w_1)-P_A(\alpha_1,w_1)\Big]dw_1dw_2 \\ &= K\int_{\mathbb{T}} P_A(z_2,w_2)\Big[\int_{\mathbb{T}}(P_A(z_1,w_1)-P_A(\alpha_1,w_1))dw_1\Big]dw_2 \\ &= K\int_{\mathbb{T}} P_A(z_2,w_2)[u_0(z_1)-u_0(\alpha_1)]dw_2 \\ &< K\frac{\varepsilon}{2KM}\int_{\mathbb{T}} P_A(z_2,w_2)dw_2 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{whenever } |z_1-\alpha_1|<\delta. \end{aligned}$$

同理，我们可以证明，当 $|z_2-\alpha_2|<\delta$. 时，$B<\varepsilon/2$。因此，我们有

$$u_{11}(z_1,z_2)-u_{11}(\alpha_1,\alpha_2)<\varepsilon \quad \text{whenever } |z_1-\alpha_1|<\delta, |z_2-\alpha_2|<\delta.$$

交换 z_i 与 α_i 在 $i=1$、2 时所起的作用，可得

$$|u_{11}(z_1,z_2)-u_{11}(\alpha_1,\alpha_2)|<\varepsilon \quad \text{whenever } |z_1-\alpha_1|<\delta, |z_2-\alpha_2|<\delta.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，我们有 u_{11} 是 $\overline{\mathbb{A}}^2{}_r\cdot$ 上的连续函数。利用 u_0 和 u_r 在 $\overline{\mathbb{A}}_r$ 上的连续性，我们可以用类似的方法证明，以下狄利克雷型问题在 $C_{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{A}}^2{}_r)$ 中有唯一解，具体如下。

(1)

$$\Delta_1 u = 0 = \Delta_2 u \ \text{ on } \ \mathbb{A}_r^2 \ \text{ with } \ u = \begin{cases} h & \text{on } \mathbb{T}\times r\mathbb{T} \\ 0 & \text{on } b\mathbb{A}_r^2 \setminus \mathbb{T}\times r\mathbb{T}, \end{cases}$$

有解答

$$u_{1r}(z_1,z_2) = \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} h(w_1, rw_2) P_A(z_1,w_1) P_A(z_2, rw_2) dw_1 dw_2 .$$

(2)

$$\Delta_1 u = 0 = \Delta_2 u \ \text{ on } \mathbb{A}_r^2 \ \text{ with } \ u = \begin{cases} p & \text{on } r\mathbb{T}\times\mathbb{T} \\ 0 & \text{on } b\mathbb{A}_r^2 \setminus r\mathbb{T}\times\mathbb{T}, \end{cases}$$

有解

$$u_{r1}(z_1,z_2) = \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} p(rw_1, w_2) P_A(z_1,rw_1) P_A(z_2, w_2) dw_1 dw_2 .$$

(3)

$$\Delta_1 u = 0 = \Delta_2 u \ \text{ on } \mathbb{A}_r^2 \ \text{ with } \ u = \begin{cases} q & \text{on } r\mathbb{T}\times r\mathbb{T} \\ 0 & \text{on } b\mathbb{A}_r^2 \setminus r\mathbb{T}\times r\mathbb{T}, \end{cases}$$

有解

$$u_{rr}(z_1,z_2) = \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} q(rw_1, rw_2) P_A(z_1,rw_1) P_A(z_2, rw_2) dw_1 dw_2 .$$

综上所述，$\mathrm{u} = \mathrm{u}_{11} + \mathrm{u}_{1r} + \mathrm{u}_{r1} + \mathrm{u}_{rr} \in \mathrm{C}_{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{A}}^2{}_r)$ 是以下狄利克雷问题的一个解:

$$\Delta_1 u = 0 = \Delta_2 u \ \text{ on } \mathbb{A}_r \times \mathbb{A}_r \ \text{ with } \ u = f = \begin{cases} g & \text{on } \mathbb{T}\times\mathbb{T} \\ h & \text{on } \mathbb{T}\times r\mathbb{T} \\ p & \text{on } r\mathbb{T}\times\mathbb{T} \\ q & \text{on } r\mathbb{T}\times r\mathbb{T}. \end{cases}$$

该解的唯一性由各个解的唯一性推出。对于一般的多重环域 $\mathbb{A}_r^m$情形，必须有 2^m 个独立的狄利克雷型问题；将这 2^m 个狄利克雷问题的解相加，便得到原狄利克雷问题的唯一解。证明至此完成。

■

接下来，我们证明调和延拓的一些性质。

推论 5.4. 给定 $\mathrm{u} \in \mathrm{C}_{\mathbb{R}}(\mathrm{b}\mathbb{A}_r^m)$，我们有 $\|\hat{\mathrm{u}}\|_\infty, \ \overline{\mathbb{A}}^m{}_r = \|\mathrm{u}\|_\infty, \ b\mathbb{A}_r^m$。

证明。给定 $\mathrm{u} \in \mathrm{C}_{\mathbb{R}}(\mathrm{b}\mathbb{A}_r^m)$，我们有 $\hat{\mathrm{u}} \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{A}}^m{}_r)$。设 $(\mathrm{a1}, \ldots, \mathrm{a}_m) \in \overline{\mathbb{A}}^m{}_r$满足。

$$|\hat{u}(a_1,\ldots,a_m)| = \sup\{|\hat{u}(z_1,\ldots,z_m)| : (z_1,\ldots,z_m) \in \overline{\mathbb{A}}_r^m\}.$$

定义函数 $\hat{\mathrm{u}}_1(\mathrm{z}) = \hat{\mathrm{u}}(\mathrm{z}, \mathrm{a2}, \ldots, \mathrm{a}_m)$，该函数在 $\overline{\mathbb{A}}_r$ 上取实值且连续。按照定理 5.3 的证明，对于固定的 $\mathrm{a2}, \ldots, \mathrm{a}_m \mathrm{in}\ \overline{\mathbb{A}}_r, \Delta_1 \hat{\mathrm{u}} = 0$，因此我们有$\Delta \hat{\mathrm{u}}_1 = 0$ 在 $\mathbb{A}_r$ 上。由于调和函数满足最大模原理，$\hat{\mathrm{u}}_1$, 的最大模在 a_1, 处取得，且该点必属于 $\partial\mathbb{A}_r$。类似地，可以证明 $\mathrm{a2}, \ldots, \mathrm{a}_m$属于 $\partial\mathbb{A}_r$。因此，$(\mathrm{a1}, \ldots, \mathrm{a}_m) \in \mathrm{b}\mathbb{A}_r^m$。由于 $\hat{\mathrm{u}} = \mathrm{u}$ 在 $\mathrm{b}\mathbb{A}_r^m$ 上，我们有

$$\hat{\mathrm{u}}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, a_m)| = \sup\{|\hat{u}(z_1,z_2,\ldots,z_m)| : (z_1,z_2,\ldots,z_m) \in \overline{\mathbb{A}}_r^m\} = |u(a_1,a_2,\ldots,a_m)|.$$

因此，综合以上结果可得 $\|\hat{u}\|_{\infty,\ \overline{\mathbb{A}}^m_r} = \|u\|_{\infty,\ b\mathbb{A}^m_r}$，证明完毕。

■

推论5.5. 给定 $u_1, u_2 \in C_{\mathbb{R}}((\partial\mathbb{A}_r)^m)$ 以及α_1、 $\alpha_1 \in \mathbb{R}$，$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ 的唯一调和延拓为 $\alpha_1 \hat{u}_1 + \alpha_2 \hat{u}_2$。

证明。p　证明很直接，因为函数 $\alpha_1 \hat{u}_1 + \alpha_2 \hat{u}_2$ 求解狄利克雷问题

$$\Delta_j u = 0 \ \text{ on } \ \mathbb{A}^m_r \ (1 \le j \le m) \ \text{ and } \ u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \ \text{ on } \ b\mathbb{A}^m_r.$$

其余部分由解的唯一性可得。 ■

注意，给定 $u \in C_{\mathbb{R}}(b\mathbb{A}^m_r)$，我们在 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 上有唯一的强调和延拓 $\hat{u}$。通过对 $\hat{u}$关于 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 上的正则复 Borel测度进行积分，我们可以在$C_{\mathbb{R}}(b\mathbb{A}^m_r)$ 上构造一个有界线性泛函，从而得到$b\mathbb{A}^m_r$上的正则 Borel 测度。这提示了一种从现有的、支撑于 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r \cdot$ 上的测度构造支撑于 $b\mathbb{A}^m_r$的测度的方法。下面的命题对此进行了说明。

命题 5.6。设ν是 $\overline{\mathbb{A}}^m r \cdot$ 上的正则复Borel测度。那么存在唯一的正则复 Borel 测度 $\hat{\nu}$在 $b\mathbb{A}^m_r$上，使得

$$\int_{\overline{\mathbb{A}}^m_r} \hat{u}\, d\nu = \int_{b\mathbb{A}^m_r} u\, d\hat{\nu} \qquad \textit{for all } \ u \in C_{\mathbb{R}}(b\mathbb{A}^m_r).$$

证明。映射 $\Lambda : C_{\mathbb{R}}(b\mathbb{A}^m_r) \to \mathbb{C}$ 由以下方式给出。

$$\Lambda(u) := \int_{\overline{\mathbb{A}}^m_r} \hat{u}\, d\nu$$

是一个有界线性泛函。事实上， Λ 的线性性由推论 5.5 得出，而 Λ 的有界性通过应用推论 5.4 获得。因此，我们有

$$\begin{aligned} |\Lambda(u)| &\le \|\hat{u}\|_{\infty,\overline{\mathbb{A}}^m_r} |\nu(\overline{\mathbb{A}}^m_r)| \\ &\le \|u\|_{\infty,b\mathbb{A}^m_r} \|\nu\|. \end{aligned}$$

因此，我们得到 $\|\Lambda\| \le \|\nu\|$. 所需结论由 Riesz-Kakutani 表示定理推出（见定理 2.4）。

■

6. 正规 $\mathbb{A}_r$-压缩算子与双重交换 2×2 标量$\mathbb{A}_r$-压缩算子的伸张

本节将介绍本文的主要结果。我们证明，任意一组相互交换的正规 $\mathbb{A}_r$-压缩算子 $T_1, \ldots, T_m$，都可以同时扩张为相互交换的 $\mathbb{A}_r$-酉算子 $U_1, \ldots, U_m$。引理 3.4 告诉我们，$(U_1, \ldots, U_m)$ 是 $\mathbb{A}^m_r$-酉算子，当且仅当每个 U_j 都是 $\mathbb{A}_r$-酉算子。因此可得，对于每个 f 属于 Rat $(\overline{\mathbb{A}}^m{}_r)$，$f(T_1, \ldots, T_m)$ 都是 $f(U_1, \ldots, U_m)$ 的压缩；于是根据 Arveson 定理（定理 2.2），$\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$是 $(T_1, \ldots, T_m)$ 的完全谱集。因此，$\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$是 $(T_1, \ldots, T_m)$ 的谱集，并且自然地，冯·诺伊曼不等式在 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$上成立，即

$$\|f(T_1, \ldots, T_n)\| \le \sup_{z \in \overline{\mathbb{A}}^m_r} |f(z)| = \|f\|_{\infty,\overline{\mathbb{A}}^m_r},$$

对于每个 $f \in \mathrm{Rat}(\overline{\mathbb{A}}^m{}_r)$。我们进一步证明，当 $(T_1, \ldots, T_m)$ 是次正规 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子，或当 $T_1, \ldots, T_n$ 是双重交换的 2×2 标量 $\mathbb{A}_r$-压缩算子时，也存在这样的扩张。我们先给出一个引理，其证明直接由 Taylor 联合谱的性质得出。

引理 6.1. 一个由相互交换的正规算子组成的 m 元组 $N = (N_1, \ldots, N_m)$ 是一个 $\mathbb{A}_r^m$-压缩，当且仅当每个 N_j 都是一个正规 $\mathbb{A}_r$-压缩。

定理 6.2. 每个正规 $\mathbb{A}_r^m$-压缩都可扩张为一个 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子。

证明。设 $\underline{N} = (N_1, \ldots, N_m)$ 是作用于希尔伯特空间 $\mathscr{H}$. 上的正规 $\mathbb{A}_r^m$-压缩。那么存在唯一一个相对于 $(\overline{\mathbb{A}}^m{}_r, \mathscr{H})$ 的谱测度 E，使得

$$N_j = \int_{\overline{\mathbb{A}}_r^m} z_j dE(z) \quad \text{for all} \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

其中 z_j 表示到第 j 个坐标的投影。对于 $x, y \in \mathscr{H}$，定义 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 上的正则复 Borel 测度 $\nu_{x,y}$，使得 $\nu_{x,y}(S) = \langle E(S)x, y\rangle$. 由命题 5.6 可知，存在唯一一个定义在 $b\mathbb{A}_r^m$ 上的正则复 Borel 测度 $\hat{}\nu_{x,y}$，使得

$$\int_{\overline{\mathbb{A}}_r^m} \hat{u}\, d\nu_{x,y} = \int_{b\mathbb{A}_r^m} u\, d\hat{\nu}_{x,y} \quad \left(u \in C_{\mathbb{R}}(b\mathbb{A}_r^m)\right).$$

若 Δ 是 $b\mathbb{A}_r^m$ 中的一个博雷尔集，则映射 $B_\Delta(x,y) = \hat{}\nu_{x,y}(\Delta)$ 在 $\mathscr{H}$. 上定义了一个有界的半双线性型。由 Reisz 表示定理可知，存在唯一的算子 $A(\Delta) \in B(\mathscr{H})$，使得 $\hat{}\nu_{x,y}(\Delta) = \langle A(\Delta)x, y\rangle$ 对任意 $x, y \in \mathscr{H}$. 均成立。同样，显然映射

$$A : \Delta \mapsto A(\Delta),\ \Delta \overset{Borel}{\subseteq} b\mathbb{A}_r^m,$$

是一个正则正算子值测度。因此，由定理 2.3 可知，存在一个空间 $\mathscr{K}$、一个等距算子 $V : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$，以及定义在 $b\mathbb{A}_r^m$ 上的正则自伴谱测度 F，使得

$$A(\Delta) = V^* F(\Delta) F$$

对所有博雷尔集 $\Delta \subseteq b\mathbb{A}_r^m$. 均成立。因此 $\hat{}\nu_{x,y} = F_{Vx,Vy}$，因为

$$\hat{\nu}_{x,y}(\Delta) = \langle A(\Delta)x, y\rangle = \langle V^* F(\Delta) Vx, y\rangle = \langle F(\Delta)Vx, Vy\rangle = F_{Vx,Vy}(\Delta)$$

对所有博雷尔集 $\Delta \subseteq b\mathbb{A}_r^m$. 均成立。现在，对每个 $j = 1, \ldots, m$，令 U_j: $\mathscr{K} \to \mathscr{K}$ 为算子

$$\langle U_j x, y\rangle := \int_{b\mathbb{A}_r^m} z_j\, dF_{x,y}.$$

由谱定理可知，$U = (U_1, \ldots, U_m)$ 是一组可交换的正规算子，且 $\sigma_T(U_1, \ldots, U_m) \subseteq b\mathbb{A}_r^m$。因此，$U$ 是一个 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子。现在我们证明，元组 $\underline{U}$ 确实是我们所需的正规 $b\mathbb{A}_r^m$-膨胀。对于 $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$，定义函数 g 于 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 上，令 $g(z_1, \ldots, z_m) = z_1^{k_1} \ldots z^{k_m}{}_m$，显然它是解析的。若记 $g = f_1 + i f_2$,，其中 f_1, f_2 为实值函数，则由定理 5.3 可知 $f_1 = \hat{}f_1$ 且 $f_2 = \hat{}f_2$。因此，$\hat{}g = \hat{}f_1 + i\,\hat{}f_2 = g$。所以，

我们有.....

$$\begin{aligned}\langle (N_1^{k_1}\dots N_m^{k_m})x,y\rangle &= \langle g(N_1,\dots,N_m)x,y\rangle\\ &= \int_{\overline{\mathbb{A}}_r^m} g\, d\nu_{x,y}\\ &= \int_{b\mathbb{A}_r^m} \hat{g}\, d\hat{\nu}_{x,y} \qquad [\text{ by Proposition 5.6}]\\ &= \int_{b\mathbb{A}_r^m} g\, d\hat{\nu}_{x,y} \qquad [\text{since } g=\hat{g}]\\ &= \int_{b\mathbb{A}_r^m} g\, dF_{Vx,Vy}\\ &= \langle g(\underline{U})Vx,Vy\rangle \qquad [\text{since } F \text{ is a spectral measure}]\\ &= \langle (U_1^{k_1}\dots U_m^{k_m})Vx,Vy\rangle.\end{aligned}$$

因此，我们 对于每个 k，我们有 $N^k = V\,{}^*U^kV \in \mathbb{Z}^m$.。因此，由命题 4.7 可得 th at

$$f(\underline{N})x = V^* f(\underline{U})Vx$$

对于每个 $x \in \mathscr{H}$以及每个有理函数 $f = p/q$，只要 q 在 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 中没有零点。证明至此完成。 ■

前述膨胀定理甚至适用于更广泛的一类 $\mathbb{A}_r^m$-压缩。事实上，下面我们将证明，次正规 $\mathbb{A}_r^m$-压缩可以有一个正规 $b\mathbb{A}_r^m$-膨胀。回顾一下，作用在希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的算子可交换 m 元组 $S = (S1,\dots,S_m)$ 称为次正规的，如果存在希尔伯特空间 $\mathscr{K} \supseteq \mathscr{H}$ 以及其中的可交换正规算子 $N1,\dots,N_m$，它们属于 $B(\mathscr{K})$，使得 $\mathscr{H}$ 是 $(N1,\dots,N_m)$ 的联合不变子空间，并且对 $1 \le j \le m$ 有 $N_j|\mathscr{H} = S_j$。在所有此类可交换元组 S 的可交换正规扩张中，存在一个极小扩张，且在酉等价意义下唯一。因此， $\mathbb{A}_r^m$-压缩 $S = (S1,\dots,S_m)$称为次正规$\mathbb{A}_r^m$-压缩，当且仅当 m 元组 S 是次正规的。

定理6.3. 每个次正规 $\mathbb{A}_r^m$-压缩都有一个正规 $b\mathbb{A}_r^m$-扩张 .

证明。设 $S = (S1,\dots,S_m)$是希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的次正规 $\mathbb{A}_r^m$-收缩，且 $N = (N1,\dots,N_m)$是其在最小空间 $\mathscr{K} \supseteq \mathscr{H}$ 上的最小正规扩张。次正规算子的可交换元组 [31] 的谱包含定理表明

$$\sigma_T(\underline{N}) \subseteq \sigma_T(\underline{S}) \subseteq \overline{\mathbb{A}}_r^m.$$

这表明 m 元组 N 是一个 $\mathbb{A}_r^m$-收缩。由于每个 S_j 都是可逆算子（因为它是一个 $\mathbb{A}_r$-收缩），且 $N_j|\mathscr{H} = S_j$，因此空间 $\mathscr{H}$ 也在 N_j^{-1} 下保持不变。因此，对于 $1 \le j \le m$，有 $S_j^{-1} = N_j^{-1}|\mathscr{H}$。于是，对于任意 $k = (k1,\dots,k_m) \in \mathbb{Z}^m$，我们有

$$S_1^{k_1}\dots S_m^{k_m} = N_1^{k_1}\dots N_m^{k_m}|\mathscr{H}.$$

由于根据定理 6.2，$(N1,\dots,N_m)$ 可扩张为一个 $\mathbb{A}_r^m$ 酉算子，因此所需结论成立。 ■

仅说明，如果 $S1,\dots,S_m$ 是作用于希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的交换次正规算子，那么元组 $(S1,\dots,S_m)$ 可能不是次正规算子元组。因此，如果 $S1,\dots,S_m$ 是交换的

次正规 $\mathbb{A}_r$-压缩算子，那么 $(S_1, \ldots, S_m)$ 可能不是次正规 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子。自然地，$S_1, \ldots, S_m$ 可能无法同时扩张为作用在更大希尔伯特空间上的交换 $\mathbb{A}_r$-酉算子 $U_1, \ldots, U_m$。这是因为，如果可以，那么 $(S_1, \ldots, S_m)$ 就扩张为 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子 $(U_1, \ldots, U_m)$，并且再次由 Arveson 定理（定理 2.2），$\overline{\mathbb{A}}_r^m$ 是 $(S_1, \ldots, S_m)$ 的完全谱集，这进一步意味着 $\overline{\mathbb{A}}_r^m$ 是 $(S_1, \ldots, S_m)$ 的谱集，矛盾。有趣的是，如果考虑双重交换的次正规 $\mathbb{A}_r$-压缩算子 $S_1, \ldots, S_m$，则这样的扩张确实存在。

定理 6.4. 设 $S_1, \ldots, S_m$ 是作用于 $\mathscr{H}$ 上的双重交换次正规 $\mathbb{A}_r$-压缩算子。则 m 元组 $S = (S_1, \ldots, S_m)$ 具有正规 $b\mathbb{A}_r^m$-膨胀。

证明。根据文献（例如 [16]），任意双重交换压缩算子 m元组$S = (S_1, \ldots, S_m)$ 都是次正规算子元组。令$N = (N_1, \ldots, N_m)$在 $\mathscr{K} \supseteq \mathscr{H}$上是 $(S_1, \ldots, S_m)$ 的最小正规扩张。交换次正规算子的谱包含定理 [31]以及 Taylor 联合谱的性质意味着

$$\sigma_T(\underline{N}) \subseteq \sigma_T(\underline{S}) \subseteq \sigma(S_1) \times \ldots \times \sigma(S_m) \subseteq \overline{\mathbb{A}}_r^m.$$

因此，$\underline{N}$是一个 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子。通过类似于定理 6.3证明中的论证，对于任意 $k = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$，

$$S_1^{k_1} \ldots S_m^{k_m} = N_1^{k_1} \ldots N_m^{k_m} | \mathscr{H}.$$

证明的其余部分由定理 6.2 推出。

■

6.1. 与环域相关的双重交换 2×2标量矩阵的膨胀。我们已经为可交换的正规 $\mathbb{A}_r$-压缩算子找到了同时正规 $b\mathbb{A}_r$-膨胀。自然会产生一个问题：如果我们改为考虑双重交换的 $\mathbb{A}_r$-压缩算子 $T_1, \ldots, T_m$，会出现什么情况？毋庸置疑，由正规算子组成的可交换元组总是双重交换的。因此，我们的问题是：能否找到双重交换 $\mathbb{A}_r$- $\mathbb{A}_r$压缩算子的同时 $\mathbb{A}_r$-酉膨胀，从而实现推广？在本小节中，我们至少针对由双重交换的 m 元 2×2标量 $\mathbb{A}_r$-压缩算子组成的元组解决了这个问题。显然，此时 $\overline{\mathbb{A}}_r^m$ 成为这类 m 元组的完全谱集，因而也是一个谱集。讨论这一点之前，我们先展示一种构造由 2×2标量 $\mathbb{A}_r$-压缩算子组成的可交换族的规范方法，其中这些算子全都是上三角矩阵。以下来自 [24] 的结果在构造中起着核心作用。不过，我们只能为 2×2 双重交换 $\mathbb{A}_r$-压缩算子找到膨胀。

定理 6.5（[24], 推论 1.1′）。对于任意的 $w \in \mathbb{A}_r$，集合 $\overline{\mathbb{A}}_r$ 是 $\begin{bmatrix} w & h(w) \\ 0 & w \end{bmatrix}$ 的谱集，当且仅当 $|h(w)| \leq \hat{K}_r(w,w)^{-1}$，其中 $h : \mathbb{A}_r \to \mathbb{C}$ 是任意函数。

例6.6. 设$L^2(\partial\mathbb{A}_r)$ 是 $\partial\mathbb{A}_r$ 上的平方可积勒贝格可测函数所构成的希尔伯特空间，其中内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \overline{g(re^{it})} dt.$$

设 $H^2(\partial\mathbb{A}_r)$ 为由 $L^2(\partial\mathbb{A}_r)$ 中的全纯函数构成的 Hardy 空间。那么，空间 $H^2(\partial\mathbb{A}_r)$ 是一个再生核希尔伯特空间（参见 [24]），其核函数定义为

$$\hat{K}_r(z,w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(z\overline{w})^n}{1+r^{2n}},\quad z,w\in\mathbb{A}_r\,.$$

对于每个 $w\in\mathbb{A}_r$，我们都有

$$\begin{aligned}\hat{K}_r(\overline{w},w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|w|^{2n}}{1+r^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|w|^{2n}}{1+r^{2n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|r|^{2n}}{|w|^{2n}(1+r^{2n})}&\le\sum_{n=0}^{\infty}|w|^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}|r/w|^{2n}\\&=\frac{1}{1-|w|^2}+\frac{|w|^2}{|w|^2-r^2}\\&\le\frac{1}{1-|w|^2}+\frac{1}{|w|^2-r^2}\\&=\frac{1-r^2}{(1-|w|^2)(|w|^2-r^2)}\\&\le\frac{1}{(1-|w|^2)(|w|^2-r^2)}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

现在让我们考虑以下 2×2 可交换标量矩阵：

$$T_w=\begin{pmatrix}w & (1-|w|^2)(|w|^2-r^2)\\0 & w\end{pmatrix},\qquad w\in\overline{\mathbb{A}}_r.$$

首先我们证明每个 T_w 都是一个 $\mathbb{A}_r$-压缩算子。如果 $w\in\partial\mathbb{A}_r$，矩阵 T_w 是正规矩阵，其 $\sigma(T_w)=\{w\}\subset\partial\mathbb{A}_r$。因此，$T_w$ 是一个 $\mathbb{A}_r$-压缩算子，特别是一个 $\mathbb{A}_r$-酉算子。再次假设 $w\in\mathbb{A}_r$。根据定理 6.5，我们有：$\overline{\mathbb{A}}_r$ 是 T_w 的谱集，当且仅当 $(1-|w|^2)(|w|^2-r^2)\le\hat{K}_r(w,w)^{-1}$，这由方程 (6.1) 可知为真。因此，每个 T_w 都是一个 $\mathbb{A}_r$-压缩算子。

定理 6.7. 任意一个双重交换的 m元组 2×2 标量 $\mathbb{A}_r$-压缩算子都有一个同时$\mathbb{A}_r$-酉算子扩张。

证明。设 $B1,\ldots,B_m$ 是两两双重交换的 2×2 标量 $\mathbb{A}_r$-压缩算子。由于它们相互交换，因此相对于某个固定的标准正交基，它们可以同时化为上三角形式，即不失一般性

$$B_j=\begin{pmatrix}a_j & c_j\\0 & b_j\end{pmatrix},\quad(j=1,2,\ldots,m).$$

如果每个 $c_j=0$，那么 $(B1,\ldots,B_m)$ 是一个正规的 $\mathbb{A}_r^m$-压缩，所需结论由定理 6.2 得出。因此，我们假设其中至少有一个，设为 $c_1\neq0$。对于所有 $j\neq1$，我们有 $B_jB_1^*=B_1^*B_j$，这意味着

$$\begin{pmatrix}a_j & c_j\\0 & b_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{a_1} & 0\\\overline{c_1} & \overline{b_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{a_1} & 0\\\overline{c_1} & \overline{b_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_j & c_j\\0 & b_j\end{pmatrix}$$

$$\text{i.e. }\begin{pmatrix}a_j\overline{a_1}+c_j\overline{c_1} & c_j\overline{b_1}\\b_j\overline{c_1} & b_j\overline{b_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{a_1}a_j & \overline{a_1}c_j\\\overline{c_1}a_j & \overline{b_1}b_j\end{pmatrix}.$$

因此，对于每个 $j\neq1$，都有 $c_j=0\,\text{and}\,a_j=b_j$。因此，

$$B_1=\begin{pmatrix}a_1 & c_1\\0 & b_1\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad B_j=a_j\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\quad(j\neq1).$$

然后，Agler膨胀定理 [3] 意味着存在一个希尔伯特空间 $\mathscr{K} \supseteq \mathbb{C}^2$ 和一个 $\mathbb{A}_r$-酉算子 N_1 在 $\mathscr{K}$ 上，使得

$$f(B_1) = P_{\mathscr{H}} f(N_1)|_{\mathscr{H}}$$

对于每个极点不在 $\overline{\mathbb{A}}_r$. 上的有理函数 f，令 $N_j = a_j I_{\mathscr{K}}$ 对于 $j \neq 1$. 于是，$N = (N1, \ldots, N_m)$ on $\mathscr{K}$ 是一个正规 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子，根据定理 6.2 可扩张为一个 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子。因此，证明完成。

■

对于紧集 $X \subset \mathbb{C}^m$ 以及一个可交换算子元组 $(T1, \ldots, T_m)$，若 X 是其谱集，则有理扩张的目标是将 $f(T1, \ldots, T_m)$ 实现为 $f(N1, \ldots, N_m)$ 的压缩，其中对每个 $f \in \mathrm{Rat}(X)$，$(N1, \ldots, N_m)$ 都是一个可交换正规元组，且 $\sigma_T(N1, \ldots, N_m) \subseteq bX$。现在，若 $X = \overline{\mathbb{A}}^m{}_r$，且 $B1, \ldots, B_m$ 是双重交换的标量矩阵，并且每个 B_j 都是一个 $\mathbb{A}_r$-压缩算子，那么我们证明，对于 $\mathrm{Rat}(\mathbb{A}_r^m)$ 的每个有限维子空间 $\mathscr{R}$，都存在一个由标量矩阵组成的 $\mathbb{A}_r^m$-酉元组 $(U1, \ldots, U_m)$，使得对每个 $f \in \mathscr{R}$，$f(B1, \ldots, B_m)$ 都是 $f(U1, \ldots, U_m)$ 的压缩。注意，根据定理 6.7，元组 $(B1, \ldots, B_m)$ 是一个 $\mathbb{A}_r^m$-压缩算子，因为它可扩张为一个 $\mathbb{A}_r^m$-酉元组。在此背景下，我们陈述一个由 Hartz 和 Lupini 提出的有趣且实用的结果。

定理 6.8.（[21], 定理 3.3）设 A 是一个交换含单位 C^*-代数，且 $S \subseteq A$ 是一个算子系统，维数为 $< \infty$，并设 $\phi: S \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个含单位完全正映射，维数为 $\mathscr{H} < \infty$. 。那么 ϕ 可扩张为 A 的一个有限维表示，即存在一个包含 $\mathscr{H}$ 的有限维空间 $\mathscr{K}$，以及一个含单位 $*$-表示 $\pi: A \to \mathscr{B}(\mathscr{K})$，使得 $\phi(s) = P_{\mathscr{H}} \pi(s)|_{\mathscr{H}}$ 对所有 $s \in S$ 均成立。

现在我们陈述并证明所需的结果，并以此结束本节。

定理 6.9. 设 $B_1, \ldots, B_m$ 是作用于 $\mathscr{H} = \mathbb{C}^2$ 上的双重交换 2×2 标量 $\mathbb{A}_r$-压缩算子。设 $\mathscr{R} \subset \mathrm{Rat}(\overline{\mathbb{A}}^m{}_r)$ 是一个有限维子空间。则存在一个有限维希尔伯特空间 $\mathscr{K} \supseteq \mathscr{H}$，以及由交换的 $\mathbb{A}_r$-酉算子组成的 m 元组 $(U_1, \ldots, U_m)$，使得

$$f(B_1, \ldots, B_m) = P_{\mathscr{H}} f(U_1, \ldots, U_m)|_{\mathscr{H}}$$

对每个 $f \in \mathscr{R}$.

证明。我们将定理 6.8 应用于 $A = C(b\mathbb{A}_r^m)$，并且

$$S = \mathrm{span}\{1, f, \overline{f} : f \in \mathscr{R}\} \subset C(b\mathbb{A}_r^m).$$

根据定理 6.7，存在一个希尔伯特空间 $\mathscr{K}_0 \supseteq \mathscr{H}$，以及在 $\mathscr{K}_0$ 上作用的、彼此交换的 $\mathbb{A}_r$-酉算子 $N1, \ldots, N_m$，使得

$$f(B_1, \ldots, B_m) = P_{\mathscr{H}} f(N_1, \ldots, N_m)|_{\mathscr{H}}$$

对所有 $f \in \mathrm{Rat}(\mathbb{A}_r^m)$ 均成立。现在考虑映射 $\phi_N : C(b\mathbb{A}_r^m) \to \mathscr{B}(\mathscr{K})$，其定义如下：

$$\phi_N(g) = g(N_1, \ldots, N_m),$$

该映射是连续的，且是 $C(b\mathbb{A}_r^m)$ 的一个表示。于是，映射 $\phi: S \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$，定义为 $\phi(q) = P_{\mathscr{H}} \phi_N(q)|_{\mathscr{H}}$，是一个含单位完全正映射，且 $\dim(\mathscr{H}) < \infty$. 。根据定理 6.8，$\phi$ 可扩张为 $C(b\mathbb{A}_r^m)$ 的一个有限维表示 π，使得

$$f(B_1, \ldots, B_m) = \phi(f) = P_{\mathscr{H}} \pi(f)|_{\mathscr{H}}, \quad \text{for every } f \in \mathscr{R}.$$

若我们对 $j = 1, 2, \ldots, m$ 定义 $U_j = \pi(z_j)$，则 $U1, \ldots, U_m$ 是彼此交换的矩阵，并且对所有 $f \in \mathrm{Rat}(\overline{\mathbb{A}}^m{}_r)$，都有 $f(U1, \ldots, U_m) = \pi(f)$。此外，$\pi$ 是一个同态，因此 $(U1, \ldots, U_m)$ 是一个 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子。于是，每个 U_j 都是一个 $\mathbb{A}_r$-酉算子，证明完毕。

■

总结。本文结果的下一步，应当尝试确定一个双重交换的 $\mathbb{A}_r^m$-压缩是否具有 $\mathbb{A}_r^m$-酉算子扩张。注意，若 $A_1, \ldots, A_m$是双重交换的 $\mathbb{A}_r$-压缩，则不能由此推出元组 $(A_1, \ldots, A_m)$ 是一个$\mathbb{A}_r^m$-压缩。不过，本文通过在 $A_1, \ldots, A_m$ 是双重交换的 2×2标量矩阵时获得这样的扩张，取得了一些进展。目前，一般情形，即有理扩张能否在 $\overline{\mathbb{A}}^m{}_r$ 上成立，似乎非常复杂且具有挑战性。

参考文献

[1] M. B. Abrahamse, 《有限连通域上的 Pick 插值定理》, Michigan Math. J., 26 (1979), 195 – 203.[2] M. B. Abrahamse 和 R.G. Douglas, 《与多重连通域相关的一类次正规算子》, Advances in Math., 19 (1976), 106 – 148.[3] J. Agler, 《环域上的有理扩张》, Ann. of Math. (2), 121 (1985), 537 – 563.[4] J. Agler、J. Harland 和 B. J. Raphael, 《多重连通域上的经典函数论、算子扩张理论与机器计算》, Mem. Amer. Math. Soc., 191 (2008),892.[5] J. Agler 和 J. E. McCarthy, 《Pick 插值与希尔伯特函数空间》, Graduate Studies in Mathematics 44，Amer. Math. Soc., 普罗维登斯，R.I. 2002.[6] J. Agler 和 N. J. Young, 《优选簇》, Acta Math., 194 (2005), 133 – 153.[7] J. Agler 和 N. J. Young, 《$\mathbb{C}^2$ 中的一个交换子提升定理及谱插值》, J. Funct. Anal., 161 (1999), 452 – 477.[8] T. Ando, 《关于一对交换压缩算子》, Acta. Sci. Math. (塞格德), 24 (1963), 88 – 90.[9] W. B. Arveson, 《C*代数的子代数》, Acta Math., 123 (1969), 141 – 224.[10] W. B. Arveson, 《C*代数的子代数 II》, Acta Math., 128 (1972), 271 – 308.[11] S. Axler、P. Bourdon 和 R. Wade, 《调和函数论》, 第 137 卷，Springer Science & Business Media，2013.[12] J. A. Ball, 《多重连通域上有限秩算子模型的提升定理》, J. Operator theory, 1 (1979), 3 – 25.[13] G. Bello 和 D. Yakubovich, 《环域上的算子模型》, J. Operator Theory，即将出版，见 https://arxiv.org/abs/2106.08757.[14] B. Sz.-Nagy、C. Foias、L. Kerchy 和 H. Bercovici, 《希尔伯特空间上算子的调和分析》, Universitext Springer，纽约，2010.[15] T. Bhattacharyya、S. Pal 和 S. Shyam Roy, 《通过求解算子方程对 Γ-压缩算子作扩张》, Advances in Math., 230 (2012), 577 – 606。

[16] J. B. Conway, 《次正规算子理论》, 第 36 卷, Amer. Math. Soc., 1991.[17] R. Curto, 《双重交换的次正规 n 元组的谱包含》, 美国数学会会刊, 83 (1981), 730 – 34.[18] H. G. Dales, 《Banach 函数代数的边界与峰点》, 伦敦数学会会刊 (3), 22 (1971), 121 – 136.[19] M. A. Dritschel 和 S. McCullough, 《三连通域上的有理扩张失效》, 美国数学会杂志, 18 (2005), 873 – 918.[20] M. Gerhold、S. K. Pandey、O. M. Shalit 和 B. Solel, 《酉元组的扩张》, 伦敦数学会杂志 (2), 104 (2021), 2053 – 2081.[21] M. Hartz 和 M. Lupini, 《有限维中的扩张理论与矩阵凸性》, 以色列数学杂志, 245 (2021), 39 – 73.[22] R. V. Kadison 和 J. R. Ringrose, 《算子代数理论基础, 第一卷: 基础理论》, 纽约: 学术出版社, 1986.[23] S. McCullough 和 S. Sultanic, 《环域上的 Agler-交换子提升》, Integral equations operator theory, 72 (2012), 449 – 482.[24] G. Misra, 《丛移位的曲率不等式与极值性质》, J. Operator Theory, 11 (1984), 305 – 317.[25] G. Murphy, 《C*代数与算子理论》, 学术出版社, 2014.[26] J. Pascoe 和 S. McCullough, 《几何扩张与算子环域》, https://arxiv.org/abs/2202.08872.[27] S. Pal 和 O. M. Shalit, 《对称双圆盘中的谱集与优选簇》, J. Funct. Anal., 266 (2014), 5779 – 5800.[28] S. Pal 和 N. Tomar, 《环域上的算子模型》, https://arxiv.org/abs/2209.00373.[29] S. Parrott, 《交换压缩算子的酉扩张》, 太平洋数学杂志, 34 (1970), 481 – 490.[30] V. Paulsen, 《完全有界映射与算子代数》, 剑桥大学出版社, 2002.[31] M. Putinar, 《次正规 n 元组的谱包含》, 美国数学会会刊, 90 (1984), 405 – 406.[32] R. M. Range, 《多复变数中的全纯函数与积分表示》, Springer Science & Business Media, 第 108 卷, 1998.[33] D. Sarason, 《环域上的 H^p 空间》, Mem. Amer. Math. Soc. (56), 78 (1965).[34] Bela Sz.-Nagy, 《关于希尔伯特空间的压缩算子》, 数学科学学报, 15 (1953), 87 – 92.[35] J. L. Taylor, 《多个交换算子的解析泛函演算》, Acta Math., 125 (1970), 1 – 38.[36] J. L. Taylor, 《多个交换算子的联合谱》, 泛函分析杂志, 6 (1970), 172 – 191.[37] G. Tsikalas, 《环域上的冯·诺伊曼型不等式》, https://arxiv.org/abs/2106.06013。

[38] J. von Neumann, 《关于酉空间一般算子的一种谱理论》, 《数学新闻》4（1951年）, 258–281。

（Sourav Pal）印度理工学院孟买分校数学系，印度孟买波瓦伊，邮编 400076。电子邮箱：sourav@math.iitb.ac.in，souravmaths@gmail.com（Nitin Tomar）印度理工学院孟买分校数学系，印度孟买波瓦伊，邮编 400076。电子邮箱：tnitin@math.iitb.ac.in