arXiv:2304.05794v1 [physics.soc-ph] 12 Apr 2023

以系统对初始冲击的韧性衡量系统性风险

Luka Klinˇci´c,[1] Vinko Zlati´c,[2] Guido Caldarelli,[3,4,5,6] 和 Hrvoje ˇStefanˇci´c[7]

[1] *Department of Physics, Faculty of Science, University of Zagreb, Bijenička c. 32, 10000 Zagreb, Croatia*
[2] *Theoretical Physics Division, Rudjer Bošković Institute, Bijenička c. 54, 10000 Zagreb, Croatia*
[3] *DSMN University of Venice Ca'Foscari, Via Torino 155, 30171 Venezia Mestre, Italy*[4] *ISC-CNR, Dipartimento di Fisica Univ. Sapienza, Rome, Italy*[5] *London Institute for Mathematical Sciences, London, UK*[6] *Fondazione per il futuro delle città Florence, Italy*[7] *Catholic University of Croatia, Ilica 242,* 10000, *Zagreb, Croatia*(日期：2023年4月13日)

系统性风险研究通常通过分析若干指标来呈现，这些指标涉及从业者和政策制定者使用的各类量度。几乎所有情况下，这些指标都用于评估外生事件可能对金融系统造成的影响规模，却不分析初始冲击的性质。本文提出一种对称方法，并提出一组指标，用于衡量系统在开始恶化之前能够吸收的外生冲击量。为此，我们采用 DebtRank 的线性化版本，以清晰展示金融困境的出现，从而正确估算系统性风险。我们展示如何显式计算局部和均匀外生冲击，并通过谱图论解释其行为。我们还将分析扩展到异质冲击，这类冲击必须通过蒙特卡洛模拟计算。我们认为，我们的方法更加通用且自然，能够以标准化的方式表达金融系统中的失效风险。

一、引言

对自然界和社会中的网络进行研究，产生了许多有趣的模型，这些模型既旨在解释拓扑结构，也旨在解释在其上运行的动力学[1]。在这些动力学模型的研究中，与系统性崩溃相关的模型代表了一个广泛而重要的方向。在这一类模型中，经济学即金融系统中的系统性风险模型受到了特别关注 [2–4]。

系统性风险，即复杂系统主要部分崩溃的风险，一直是学术界关注的重点，也是政策制定者和监管机构面临的重要问题。分析系统性风险的一种方法是运用复杂性理论和网络分析 [5]。这使得研究金融机构之间的相互联系和依赖关系成为可能。研究表明，金融系统的网络结构会对冲击传导和传染的可能性产生重大影响。一项近期研究 [6] 表明，网络模型可用于衡量和管理银行间市场（下文简称“银行间网络”）中的系统性风险。同样，有研究报告称 [7]，相互连接密集的金融系统与较高水平的系统性风险相关。这一认识促使人们针对具体的关注案例开展了更多定量分析 [8–11]。近期关于系统性风险的研究将金融网络扩展为多层网络，其中包括不同的资产和贷款类型等 [12–14]。这些研究首次提供了一些证据，证明网络分析对于理解和缓解系统性风险的重要性；同时，这些研究也被用于为监管机构提供参考 [8], ，以便分别评估系统性风险 [15], 、模拟不同的政策（例如银行税收） [16, 17], ，或了解哪些网络哪些架构风险更高，哪些风险更低 [18]。

分析系统性风险的另一个重要方面是债务排名 [8], ，这是一种根据不同金融机构的债务水平及其在网络中的位置，赋予其相对重要性或“排名”的方法。与其他中心性指标一样，债务排名可用于识别系统重要性最高的机构，这些机构通常被称为“大到不能倒”或“关联过密而不能倒”的机构。这些机构被视为对金融系统稳定至关重要，因此受到更严格的监管和监督。

上述网络化系统性风险的衡量方法，均基于系统性事件发生后对金融系统造成的后果，以及违约级联在金融网络中的传播 [19]。

本文提出一种不同的方法来衡量系统性风险：以系统性事件发生前系统能够吸收的外部冲击量作为衡量标准。我们将系统性事件定义为任何由冲击在网络中传播所导致的金融机构违约。从技术角度而言，对于模型中发生系统性事件的情形，可以通过求解逆问题、估计初始条件来计算系统性风险。尽管这种方法看起来可能比通常研究的方法更复杂，但借助网络化系统性风险模型，即 DebtRank[20], ，我们能够深入了解这一现象，并得出定量指标，将风险分析推广至所有可能的外生冲击情形。

在第 2 节中，我们介绍分析所采用的 DebtRank 版本，并解释为什么它适合用于处理逆问题。在第 3 节中，我们描述了可

使用该方法评估的 3 种不同冲击类型，即均匀冲击、局部冲击和异质冲击，并以此提出三种新的系统性风险度量方法。在第 4 节中，我们展示分析结果。首先，我们给出针对极小型网络的分析结果；随后，展示针对较大型网络的模拟结果。最后，我们总结全文并概述未来的研究方向。

II. 系统性风险的DEBTRANK度量

作为本分析的起点，我们假设能够全面了解银行余额和银行间贷款。银行余额由资产 - A、负债 - L 和权益 - E 构成，它们之间的关系是一个常见的资产负债表方程：

$$A = L + E \tag{1}$$

系统性风险将使用 DebtRank算法 [8], 进行建模，更准确地说，使用其发表于 [20]的版本。在此版本中，系统由 n 家银行组成，这些银行在代表金融系统的网络中表示为 n 个顶点。银行之间最常见的交互方式是银行间贷款，在网络中由加权边 A_{ij}表示，其权重表示银行 i 借给银行 j的贷款总额。银行 i 的网络总资产，即其对其他银行的放贷金额，为 $A_i = \sum_j A_{ij}$。银行 i 的其余资产记为 A_i^E。银行 i 每笔贷出的资产 A_{ij}，都对应着银行 j 需要在未来某个时候偿还的同等金额的负债 L_{ij}。与资产类似，银行 i 中与银行间金融系统无关的负债记为 s L_i^E。银行 i的权益使用 1 按照 $E_i = A_i - L_i$计算。本文采用的约定是：当负债大于资产时，即在 $E_i \leq 0$的情况下，银行 i 就会破产。

为了研究系统的演化，我们考虑时刻 t 未破产银行的集合

$$\mathcal{A}(t) = \{j : E_j(t) > 0\}\,. \tag{2}$$

进一步假设，当银行 j 破产时，其资产将从系统中移除，即 A_{ij} =0，但负债保持 L_{ij} 不变。这将导出时间平衡方程

$$E_i(t) = A_i^E(t) - L_i^E(t) + \sum_{j\in\mathcal{A}(t-1)} A_{ij}(t) - \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(t)\,, \tag{3}$$

其中，资产总和仅包含在时刻 $t-1$ 仍然“健康”的银行，即我们假设破产信息需要一个时间单位才能传递。

这就引出了金融冲击传播的以下机制，其假设是：The 贷款人的资产按借款人在前一时间戳的权益成比例地变动，即。

$$A_{ij}(t+1) = \begin{cases} A_{ij}(t)\frac{E_j(t)}{E_j(t-1)}\,, & j \in \mathcal{A}(t-1) \\ A_{ij}(t) = 0\,, & j \notin \mathcal{A}(t-1)\,. \end{cases} \tag{4}$$

利用方程3和4可计算资产的时间演化，得到

$$E_i(t+1) - E_i(t) = \sum_{j\in\mathcal{A}(t-1)} \frac{A_{ij}(0)}{E_j(0)}\big(E_j(t) - E_j(t-1)\big)\,, \tag{5}$$

其中，方程3被递归使用。，且 A_{ij}(1 =A_{ij}(0)。)

权益的演化可写为

$$E_i(t+1) = \max\left[0,\, E_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\Lambda}_{ij}(t)\big(E_j(t) - E_j(t-1)\big)\right], \tag{6}$$

其中

$$\tilde{\Lambda}_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{A_{ij}(0)}{E_j(0)}\,, & j \in \mathcal{A}(t-1) \\ 0\,, & j \notin \mathcal{A}(t-1) \end{cases}. \tag{7}$$

其中，最大值确保破产后的权益不会变为负数。现在，我们将银行的金融冲击 i 定义为

$$h_i(t) = \frac{E_i(0) - E_i(t)}{E_i(0)} \tag{8}$$

an同时利用 7，金融冲击的演化 为

$$h_i(t+1) = \min\left[0,\, h_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{ij}(t)\big(h_j(t) - h_j(t-1)\big)\right]. \tag{9}$$

其中

$$\Lambda_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{A_{ij}(0)}{E_i(0)}\,, & j \in \mathcal{A}(t-1) \\ 0\,, & j \notin \mathcal{A}(t-1) \end{cases}. \tag{10}$$

DebtRank 动力学的一个关键组成部分是，系统稳定性完全由矩阵 Λ(t)的性质决定。

如果考虑两次破产之间的时间段，即矩阵 Λ(t) = Λ 保持不变的时期。将金融冲击的变化定义为Δh(t) = h(t) − h(t − 1)，并利用 h(0) = 0 这一事实，方程 9 可以写成矩阵形式

$$\begin{aligned} \Delta h(t+1) &= \Lambda \Delta h(t) \\ &= \Lambda^t \Delta h(1) = \Lambda^t h(1)\,, \end{aligned} \tag{11}$$

$t+1$处的金融冲击是此前冲击的总和

$$h(t+1) = \sum_{t'=0}^{t+1} \Delta h(t') = \sum_{t'=0}^{t+1} \Lambda^{t'} h(1)\,. \tag{12}$$

如果$\|\Lambda\| < 1$，冲击的渐近值 $h^{\infty} = \lim_{t\to\infty} h(t)$是有限的。盖尔范德定理指出，对于方阵，谱半径$\rho(\Lambda) = \max_{1\le i\le n}(\lambda_i)$总可以表示为

$$\rho(\Lambda) = \lim_{k\to\infty} \|\Lambda^k\|^{\frac{1}{k}} . \tag{13}$$

如果谱半径小于 1，即 $|\lambda_{max}| < 1$金融冲击的渐近值趋向于

$$h^{\infty} = (I - \Lambda)^{-1} h(1) . \tag{14}$$

在相反的情况下 $|\lambda_{max}| \geq 1$，初始金融冲击会耗尽整个系统。

原则上，可以模拟冲击的传播过程，使得当机构破产时，矩阵 Λ的秩降低；但在下文中，我们将只关注常矩阵 Λ。

III. 促成无破产风险传播的初始冲击条件

本文的主要科学问题是：哪些初始冲击会在金融系统中导致系统性影响？显然，所有可能摧毁金融系统的初始冲击配置数量极其庞大，并且增长速度快于系统规模。为了使我们的分析尽可能连贯，我们将重点研究三种不同类型的冲击。我们考察的第一类冲击是均匀冲击，它模拟系统中发生的一起巨大外生事件，使所有机构损失相同比例的资产。第二类是仅作用于系统中某一家机构的冲击，我们称之为局部冲击。最后，我们将研究一种更为一般的冲击，即将前两种冲击结合起来的多参数冲击：它以不同强度影响所有机构，并将通过相应的超体积进行衡量，具体内容将在后文说明。

A. 均匀冲击

这种冲击是最常见的宏观经济冲击之一，可能由不同原因引起。它可能与需求／供给冲击、影响金融市场的立法变动、通货膨胀等有关。金融系统容易受到外部条件影响，也会受到各种全球事件的影响，而这些事件往往会对类似企业产生相同的影响。金融系统的构建方式也使其能够相对稳健地应对这些事件；但如果冲击足够大，均匀冲击预计会给金融系统带来相当大的问题。

为了对均匀冲击进行建模，我们使用方程 14。由于$h(1)$表示冲击的初始值，因此对于向量的所有分量，也就是每个i $h_i(1) = \psi_u$，我们都使用相同的值 $h(1)$。然后我们可以写成

$$h(1) = \psi_u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \psi_u \widetilde{h(1)} . \tag{15}$$

如果在方程 14 中使用均匀冲击

$$h^{\infty} = \psi_u (I - \Lambda)^{-1} \widetilde{h(1)} . \tag{16}$$

我们将系统能够承受的最大均匀冲击记为 Ψ_u。要计算它，我们需要最大化方程 16

$$\Psi_u = \frac{1}{\max_j \left[\left((I - \Lambda)^{-1} \widetilde{h(1)} \right)_j \right]} . \tag{17}$$

Ψ_u 仅取决于网络的具体情况，即银行间资产的数量和银行的杠杆率。Ψ_u 的值越大，系统能够承受的冲击就越大，因此系统的韧性也越强。反之，Ψ_u 的值越小，表明系统越容易受到外生均匀风险的影响。

B. 局部冲击

与均匀冲击相比，局部冲击代表了所有可能冲击谱系的另一端。局部冲击模型描述的是与单一金融机构相关的财务困境，但该机构具有系统重要性，也就是说，其违约可能导致整个金融系统陷入不稳定。历史上，局部冲击对现代金融系统产生了重大影响。例如，雷曼兄弟在2008年的违约是引发大衰退的事件。雷曼兄弟当时是美国第四大投资银行，其违约将金融冲击传导给交易对手，为道琼斯指数历史上最大跌幅的出现作出了重大贡献 [21]。

利用方程14，以类似于衡量均匀冲击的方式，构建均匀冲击下系统性风险的衡量指标。初始冲击向量 $h_i(1)$是第 i 个单位向量 $\boldsymbol{e}_i$ 乘以 ${\psi_l}^i$

$$h(1)^i = {\psi_l}^i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = {\psi_l}^i \boldsymbol{e}_i . \tag{18}$$

考虑一个由 n 家银行构成的网络，局部冲击有 n 种不同的初始条件，每一种都代表其所对应银行面临的问题。我们

我们关注最大 ${\psi_l}^i$ ，使得 $(h^\infty)^i$ 中的某个元素变为 1，

$$
\begin{aligned}
(h^\infty)^i_j &= {\psi_l}^i \big((I-\Lambda)^{-1}\boldsymbol{e}_i\big)_j \\
&= {\psi_l}^i \sum_{k=1}^{n} \big((I-\Lambda)^{-1}\big)_{jk}\delta_{ki} = {\psi_l}^i \big((I-\Lambda)^{-1}\big)_{ji},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

其中， δ_{ki} 是克罗内克δ函数。我们将最大允许局部冲击（MALS）定义为使方程 19 达到最大值的局部冲击值。

$$
{\Psi_l}^i = \frac{1}{\max\limits_j \left[\big((I-\Lambda)^{-1}\big)_{ji}\right]}. \tag{20}
$$

${\Psi_l}^i$ 仅由约化邻接矩阵 Λ决定，并且只取决于逆矩阵的一个元素（$I-\Lambda$）$^{-1}$。这一指标可以解释为衡量单个机构抵御金融破产级联启动的韧性。

通常，我们不必只关注单个数值，还可以关注向量 Ψ_l 的各个分量，从而全面呈现网络中不同元素对应的 MALS。根据这一思路定义的一个重要指标，是最大允许局部冲击的最小分量，

$$
\Psi_l^m = \min_i \Psi_l^i \tag{21}
$$

它表示系统中韧性最弱的组成部分所能承受的、针对任意机构的最大允许局部冲击。

C. 异质性金融冲击

均匀金融冲击和局部金融冲击是此处所考虑的金融系统中会导致系统性风险的两种边界情况。这两种情况都可以通过一个参数 ψ 来表征，该参数可用于评估系统的风险程度。学者和从业者都关注这类标量指标，因为它们只需一个可测量的数值，便能简化对系统的评估。

这些标量度量在现实情形中可能受到质疑，因为金融系统中可能同时发生多种不同的冲击。事实上，在由 n 家金融机构组成的金融系统的一般情形下，可以预期金融冲击有 n 个不同的参数，并且人们会关注仍能保持系统稳定的不同初始冲击组合。为此，我们提出一种与此类冲击相关、但仍以标量表示的度量。该度量同样源自累积资本损失的迭代演化 14，但我们将把这个方程视为允许子空间 h^∞ 上的线性变换。

$$
h(1) = (I-\Lambda)h^\infty . \tag{22}
$$

考虑到金融机构i 的违约发生在 $h_i^\infty = 1$时，系统中不会发生违约的值的总子空间（$0 \le h_i^\infty < 1$）对应于 n 超立方体，它位于由坐标轴 h_i^∞定义的坐标空间原点处。因此，所有不会对金融机构造成损害的允许情况都位于该超立方体内。

为了确定初始冲击参数子空间中对应于无违约系统的取值 $h(1)$，我们使用方程 22，将渐近冲击空间中的超立方体变换到初始冲击子空间。

矩阵 Λ 的元素均为非负数，并且对角线元素始终等于零，假设各机构不投资于自身。这意味着最一般的矩阵 $I-\Lambda$ 在对角线上为 1，其余所有元素均为非正数，即

$$
I-\Lambda = \begin{pmatrix}
1 & -\Lambda_{12} & \dots & -\Lambda_{1n} \\
-\Lambda_{21} & 1 & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \\
-\Lambda_{n1} & \dots & & 1
\end{pmatrix}. \tag{23}
$$

关于超立方体的线性变换，这意味着子空间 $h(1)$ 必然会包含严格正 2^n 象限之外的取值，即不存在违约的 $h(1)_i$ 取值将包括现实区间 $[0,1\rangle$ 之外的取值。这些取值不应使用，因为它们代表正的初始冲击，即机构资产增加。因此，所关注的子空间是允许的 $h(1)$ 子空间与正 2^n 象限的交集 V 。

根据矩阵 Λ ，允许的初始冲击子空间可能较大，也可能较小。换言之，如果网络结构使初始冲击子空间 V 较小，而我们知道所有其他初始冲击组合都会导致至少一个机构违约，那么这种网络结构的韧性就较低。另一方面，如果 V 的大小与子空间 h^∞的大小相近，那么初始冲击组合导致违约的概率就较小。

因此，用允许子空间 V的超体积 Ψ_V 来衡量系统风险是合理的。如果与 2^n-tant 的交集并不重要，那么该指标的计算显然就是 $\det(I-\Lambda)$。遗憾的是，取决于银行间投资总额，即使顶点数量很少，问题的几何结构也可能极其复杂。

为了展示复杂性并为分析提供一些直观理解，我们对几个小型网络进行精确计算。

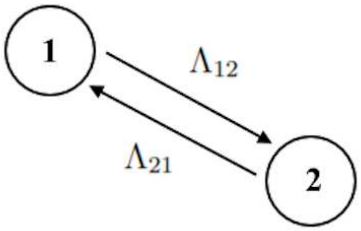


图 1. 具有相互敞口的 $n = 2$ 个顶点网络。

IV. 结果

A. 具有 n = 2 个顶点的网络

最简单的网络是由两个机构组成的网络，形成如图1所示的 $n = 2$ 网络。

在这种情况下，变换矩阵为 is

$$I - \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda_{12} \\ -\Lambda_{21} & 1 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

而其逆矩阵为

$$(I - \Lambda)^{-1} = \frac{1}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{21}} \begin{pmatrix} 1 & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & 1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

我们可以轻松计算均匀冲击和局部冲击的度量，分别为

$$\Psi_u = \frac{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{21}}{1 + \max\left[\Lambda_{12},\, \Lambda_{21}\right]}, \tag{26}$$

$$\Psi_l = (1 - \Lambda_{12}\Lambda_{21}) \begin{pmatrix} \min\left[1,\, \frac{1}{\Lambda_{21}}\right] \\ \min\left[1,\, \frac{1}{\Lambda_{12}}\right] \end{pmatrix}. \tag{27}$$

在此情况下，超体积对应于平行四边形的面积，该面积通过变换计算得出，并限制在第一象限内。异质性冲击的度量则是

$$\Psi_V = 1 - \frac{1}{2}\big(\Lambda_{12}(1 - \Lambda_{21}^2) + \Lambda_{21}(1 - \Lambda_{12}^2)\big). \tag{28}$$

可以通过关系$0 \le h_i^{\infty} < 1$, $i \in \{1, 2\}$ 计算系统中不会导致违约的初始冲击允许区间，从而得到

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{h(1)_1 + \Lambda_{21} h(1)_2}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{21}} < 1 \\ 0 &\le \frac{\Lambda_{12} h(1)_1 + h(1)_2}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{21}} < 1 \end{aligned}. \tag{29}$$

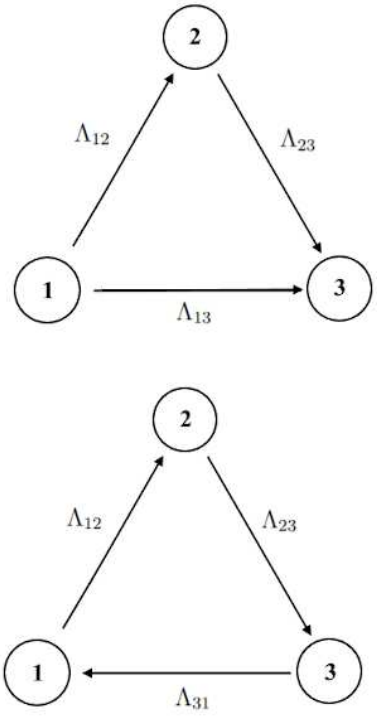


图 2。上方面板为上三角结构，下方面板为具有 $n = 3$ 个顶点的网络的循环构型。

B. n = 3 个顶点的网络

对于 $n = 3$，存在两种独立情况，通过循环改变 Λ_{ij} 的指标即可得到其他所有配置。我们省略了包含两条边的情况，因为它们不太有意思。图 2 展示了三个顶点和三条边的两种可能配置。

给定金融冲击演化并由矩阵 $I - \Lambda$ 和配置 $n = 3$ 表示的参数集合，根据其矩阵类型，分别称为上三角结构（索引 UT）和循环的（索引 cyc）。两种情况下的演化矩阵如下：

$$I - \Lambda_{UT} = \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda_{12} & -\Lambda_{13} \\ 0 & 1 & -\Lambda_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$I - \Lambda_{cyc} = \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda_{12} & 0 \\ 0 & 1 & -\Lambda_{23} \\ -\Lambda_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

计算风险度量需要用到 $I - \Lambda$ 矩阵的逆矩阵，其表达式为

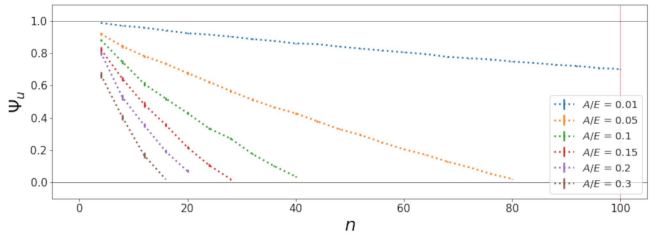


图 3. 纵轴为 CASD 网络 Ψ_u 上的最大允许均匀冲击，横轴为系统规模 n, $n \in [5, 100]$。研究的参数 A/E 列于图例中。

$$(I - \Lambda_{UT})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \Lambda_{12} & \Lambda_{12}\Lambda_{23} + \Lambda_{13} \\ 0 & 1 & \Lambda_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

$$(I - \Lambda_{cyc})^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & \Lambda_{12} & \Lambda_{12}\Lambda_{23} \\ \Lambda_{23}\Lambda_{31} & 1 & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{31}\Lambda_{12} & 1 \end{pmatrix}}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{31}}. \tag{33}$$

与 $n = 2$ 情形类似，对于上三角结构情形，最大均匀冲击和局部冲击为

$$\Psi_u^{UT} = \frac{1}{1 + \max\left[\Lambda_{13} + \Lambda_{12}(1 + \Lambda_{23}),\, \Lambda_{23}\right]}, \tag{34}$$

$$\Psi_l^{UT} = \begin{pmatrix} 1 \\ \min\left[1,\, \frac{1}{\Lambda_{12}}\right] \\ \min\left[1,\, \frac{1}{\Lambda_{23}},\, \frac{1}{\Lambda_{13}+\Lambda_{12}\Lambda_{23}}\right] \end{pmatrix}, \tag{35}$$

以及对于循环构型

$$\Psi_u^{cyc} = \frac{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{31}}{1 + \max\left[\Lambda_{ij}(1 + \Lambda_{jk})\right]}, \tag{36}$$

$$\Psi_l^{cyc} = (1 - \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{31}) \begin{pmatrix} \min\left[1,\, \frac{1}{\Lambda_{31}},\, \frac{1}{\Lambda_{23}\Lambda_{31}}\right] \\ \min\left[1,\, \frac{1}{\Lambda_{12}},\, \frac{1}{\Lambda_{31}\Lambda_{12}}\right] \\ \min\left[1,\, \frac{1}{\Lambda_{23}},\, \frac{1}{\Lambda_{12}\Lambda_{23}}\right] \end{pmatrix}, \tag{37}$$

其中，在第一个方程中，将相应的指标 i, j, k 替换为方括号内取最大值时对应的指标。

对于所研究的 $n = 3$ 网络配置，我们同样可以利用条件 $0 \le h_i^{\infty} < 1$, $i \in \{1, 2, 3\}$求得允许的初始冲击区间。与前一种情况一样，对于上三角结构配置，解是一个方程组

$$\begin{aligned} 0 \le h(1)_1 + \Lambda_{12}h(1)_2 + (\Lambda_{13} + \Lambda_{12}\Lambda_{23})h(1)_3 < 1 \\ 0 \le h(1)_2 + \Lambda_{23}h(1)_3 < 1 \end{aligned}, \tag{38}$$

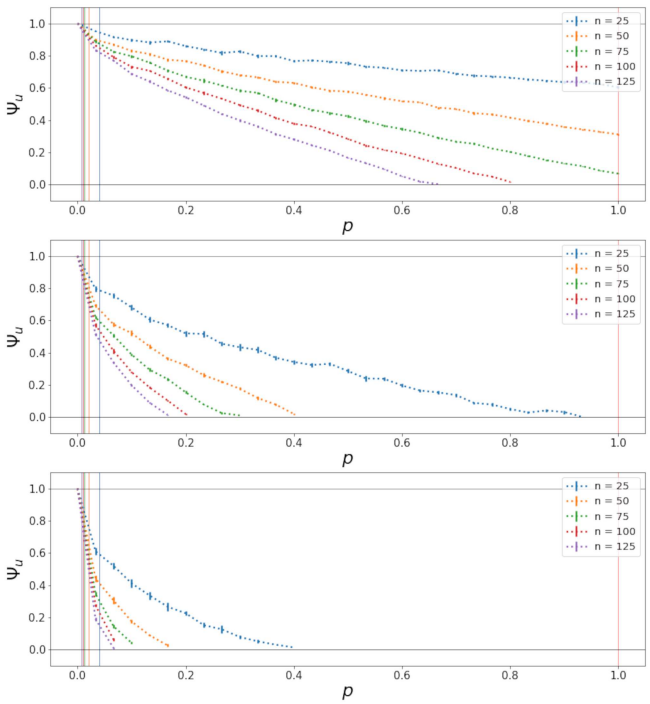


图 4. 不完整随机网络上的最大允许均匀冲击。纵轴为 Ψ_u，横轴为连通性参数 p_c。网络规模见图例，分别为 $n \in \{25, 50, 75, 100, 125\}$；竖线对应不同 n 值下的 p_c。上、中、下三个子图分别对应参数 A/E 为 0.05、0.2 和 0.5。p_c 的取值以不同颜色的竖线标示。

以及针对循环构型

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{h(1)_1 + \Lambda_{12}h(1)_2 + \Lambda_{12}\Lambda_{23}h(1)_3}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{31}} < 1 \\ 0 \le \frac{\Lambda_{23}\Lambda_{31}h(1)_1 + h(1)_2 + \Lambda_{23}h(1)_3}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{31}} < 1 \\ 0 \le \frac{\Lambda_{31}h(1)_1 + \Lambda_{31}\Lambda_{12}h(1)_2 + h(1)_3}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{31}} < 1 \end{aligned}. \tag{39}$$

异质冲击 Ψ_V 在由 $n = 3$ 个顶点构成的网络上的超体积度量，对应于通过 $I - \Lambda$变换在 h(1)空间中得到的平行六面体位于第一卦限内的体积。体积 Ψ_V 可通过几何方法计算，即将平行六面体切分为已知体积的棱柱和棱锥；但即使在三维空间中，这类元素的数量也会变得很多，且不同的几何形状也会随元素 Λ_{ij}而有所不同。例如，超体积的方程

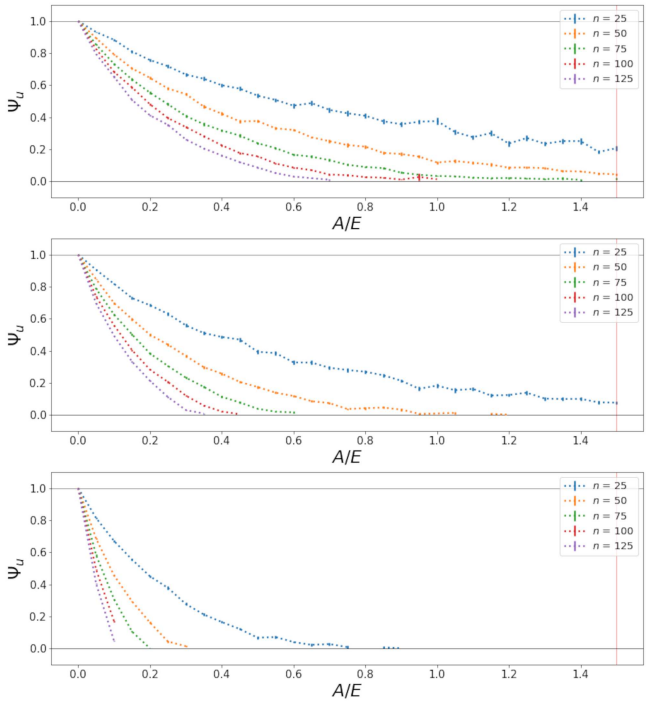


图5. 不完整随机网络所允许的最大均匀冲击随参数 A/E 的变化。纵轴为度量指标 Ψ_u，横轴为 $A/E \in \langle 0, 1.5]$。网络规模见图例，取值为 $n \in \{25, 50, 75, 100, 125\}$。从上到下的子图分别对应参数 p 等于 0.05、0.1 和 0.3。

与上三角结构相关联的是

$$\Psi_V^{UT} = \frac{1}{2}\Lambda_{12}\left(1-\Lambda_{23}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\Lambda_{13}+\Lambda_{12}\Lambda_{23}\right)\left(1-\frac{2}{3}\Lambda_{23}\right) + \frac{1}{6}\Lambda_{13}\Lambda_{23} + \left(1-\Lambda_{23}+\frac{1}{2}\Lambda_{23}\right)\left(1-\Lambda_{12}-\Lambda_{13}\right); \quad \Lambda_{23} < 1\,,\ \Lambda_{12}+\Lambda_{13} < 1\,. \tag{40}$$

C. 多个顶点

显然，随着系统规模的增大，计算这些指标的分析方法会变得复杂，因此异质冲击 Ψ_V 是通过蒙特卡洛模拟计算的。

在 h^∞ 空间中，从均匀分布中生成分量为 $0 \le h_i^\infty < 1$ 的随机允许向量 M。允许子空间 h^∞ 的超体积始终为 1。随后使用方程 22，将生成的向量变换到 $h(1)$ 空间。用 M' 表示多面体与正 2^n 象限交集内的点数。由于生成点的数量与多面体 $I-\Lambda$ 的超体积 $\det(I-\Lambda)$ 成正比，因此允许初始条件的体积 Ψ_V 估算为——

通过以下方式估算

$$\Psi_V = \frac{M'}{M}\det(I-\Lambda)\,. \tag{41}$$

为了在更复杂的架构中估算风险度量，我们将使用完全非对称简单有向图（CASD）以及我们改进的随机网络模型。采用完全非对称简单有向图的原因是，许多金融网络的连接非常密集，而完全网络既代表高密度的极限，也代表最多元化的投资模式——通常认为这种模式能够降低个体风险，但可能会增加系统性风险 [9]。

生成 CASD 时会生成矩阵 Λ。生成 CASD 的算法步骤如下：

1. 我们选择 n 个顶点。
2. 我们假设所有组成部分的权益相等，即 $E_i = E$；银行之间的投资 A_{ij} 从区间 $[0, A]$ 上的均匀分布中随机选取。
3. 对于每一对索引 i、$j < n$，从均匀分布 $p' \in [0,1]$ 中抽取一个随机数 $i < j$。如果 $p' < 0.5$，则将一个随机值赋给元素 A_{ij}；否则，将相同的值赋给元素 A_{ji}。
4. 矩阵元素 A_{ij} 除以常数权益 E，从而得到约化邻接矩阵 Λ。
5. 我们检查矩阵 Λ 的谱半径是否小于 1；如果不是，则返回步骤 1。

除了参数 A 和 E外，不完全随机网络还由附加参数 p 描述，该参数表示随机选取的两个顶点之间存在有向边的概率。为了在上述算法中生成这种网络，我们在第二步之后加入一个中间步骤：选取参数 $p \in [0,1]$，并针对每一对顶点$i, j < n$；$i < j$生成一个随机数 $p'' \in [0,1]$。如果满足 $p'' < p$，则这两个顶点相连，否则不相连。完成这一步后，重复步骤 3-5。

Uniform shock Ψ_u

首先针对 CASD 情况计算均匀冲击的度量。我们主要关注均匀冲击 Ψ_u 对不同网络参数的依赖关系。对由 $N = 100$ 个网络组成的集合进行模拟。我们首先研究均匀冲击如何随网络规模变化。结果如图 3 所示。误差棒表示模拟结果 $\sigma_{\bar{\Psi}_u}$ 的标准差，其他所有模拟也均如此。The

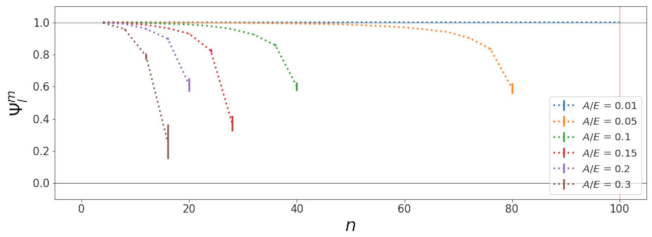


图 6. CASD 上允许的最大局部冲击随顶点数量的变化。纵轴为 Ψ_l^m，横轴为网络规模 $n = \in [5, 100]$。图例中显示参数 A/E $A/E \in$，其取值为。$\{0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3\}$

第一个有趣的观察是，对于其他参数的所有取值，系统规模都会持续减小 Ψ_u，这本质上表明，就均匀冲击而言，大系统总是比小系统风险更高。参数 A/E 与 Ψ_u 趋近于零的速度有关。

我们继续在由参数 n、p 和 A/E 表征的不完全随机网络集合上计算 Ψ_u。我们首先考察度量 Ψ_u 对参数 p 的依赖关系。由于参数小于 $p_c \approx \frac{1}{n}$ 时，网络不存在巨型连通分量，因此我们仅展示 $p > p_c$ 的结果。图 4 展示了 Ψ_u 对 p 的依赖关系。显然，对于所有观测到的参数值，参数 p 和 n 的增加都会系统性地降低允许的最大均匀冲击。这意味着，在系统中观察到违约之前，分散化和系统规模都会对机构所能承受的最大均匀冲击产生负面影响。

此外，为了完整起见，我们在图 5 中展示了 Ψ_u 的值如何取决于 A/E，尽管直观上很明显，A/E 增大时，它会变小。

Measure of localised shock Ψ_l

对于均匀金融冲击的所有分析，我们都针对局部冲击重复进行。我们将注意力集中在局部冲击 Ψ_l的最大允许向量 Ψ_l^m的最小分量上。

与均匀冲击的情况相比，参数 A/E 对 Ψ_l^m下降的影响更为显著，具体影响取决于顶点数量 n。相应的曲线现在呈凹形，而均匀冲击下的曲线则呈凸形。经过一段相对稳定的时期（其时长会随着 A/E增加而缩短）后，最大允许局部冲击的最小值会突然下降。度量 Ψ_l^m会进一步下降至某一数值，此后生成的矩阵 Λ 的谱半径大于一。

我们再次研究随机网络上随参数 p 和 A/E变化的风险。在这种情况下，我们使用了由 $N = 100$ 个网络组成的集合，以获得令人满意的稳定性

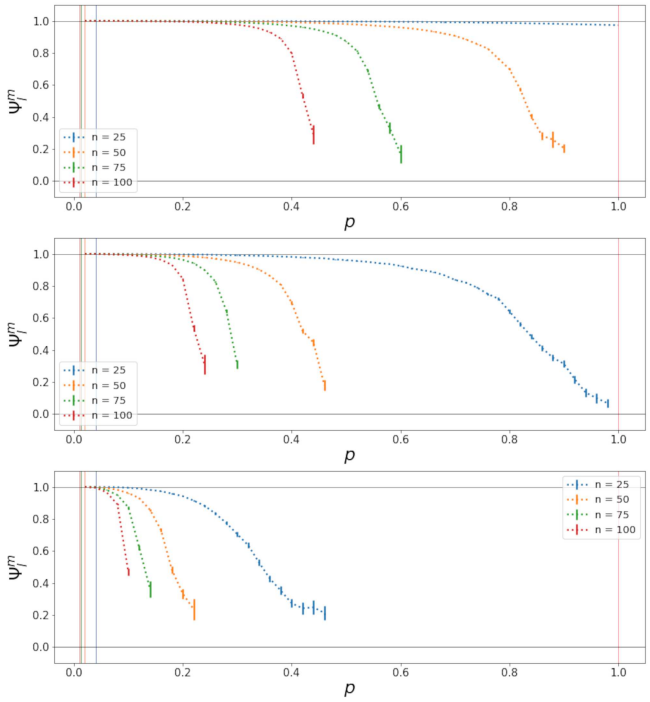


图 7. Ψ_l^m随参数 p 在随机有向网络中的变化。纵轴为 Ψ_l^m，横轴为 $p \in \langle 0, 1]$。图例中标出了网络规模 $n \in \{25, 50, 75, 100\}$，竖线对应 p_c 的临界值。上、中、下三个子图分别对应参数 A/E 等于 0.1、0.2 和 0.5。

结果。模拟结果如图 7 和图 8 所示。

在这两种情况下，随着 n、p 和 A/E 增加，Ψ_l^m 单调递减。与不完全随机网络相比，对于 Ψ_l^m，这种下降更为陡峭；而对于均匀冲击 Ψ_u，下降则较缓，这表明与均匀冲击相比，这些参数对局部冲击的影响更大。

图论为这项分析提供了一项重要补充 [22], ，它给出了谱半径的上界 $= \max\{\sqrt{s_i s_o}\}$，其中 s_i 和 s_o 是顶点强度。在我们的案例中，这些值大约为 A/E量级，也是导致网络突然崩溃的主要因素之一 Ψ_l^m。

到目前为止，我们一直在考虑局部冲击 Ψ_l^m的度量；但如果要更深入地了解网络中的风险分布，我们可以考虑向量 Ψ_l的所有分量，即以网络中任意一个顶点为起点的最大冲击。

例如，我们选择了代表性参数来表示系统的三种不同状态。图 9 上方的面板中，大多数数值都分布在 1 附近，表明网络整体稳定。图 9 中间的面板中，数值分布向较小值移动，表明系统承受的压力更大。图 9 下方的面板中，数值开始聚集在 $\Psi_l \approx 0$ 附近，表明系统濒临崩溃。这样的图可以提供

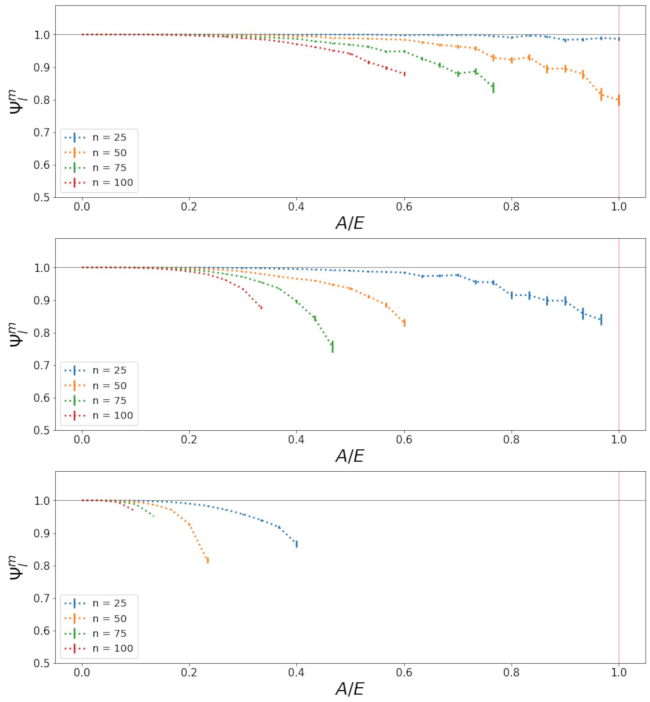


图8. Ψ_l^m随机有向网络中随参数 A/E的变化。纵轴为Ψ_l^m，横轴为 $A/E \in \langle 0、\ 1]$。图例中标出了网络规模 $n \in \{25, 50, 75, 100\}$。上、中、下三个子图分别对应参数 p等于0.05、0.1和0.3。

系统风险的重要信息，让人一目了然。

Measure of multi-parametric shock Ψ_V

最后，我们考察与冲击相关的超体积 Ψ_V对网络参数的依赖关系。为近似计算 n维超体积，我们使用前文介绍的蒙特卡罗方法。

比较图10与前面的图可以发现，度量 Ψ_V 相对于n而言，在下降速度方面的限制最为严格。这意味着，与其他度量相比，它将系统参数评估为风险更高。

在连接不完全的网络中，图10再次显示出 Ψ_V 下降更陡的趋势。对于参数 n、 p 或A/E 的增加，结果同样如此，图11和图12也进一步印证了这一点。我们认为，这种表现与该度量本身的特性有关。超体积度量 Ψ_V 涵盖了范围更大的初始冲击组合，这些冲击会导致某种破产；而度量 Ψ_u 和 Ψ_l则不然。需要强调的是，超体积度量与其他提出的度量有本质区别，因为它衡量的不是允许的冲击，而是允许参数的相对规模

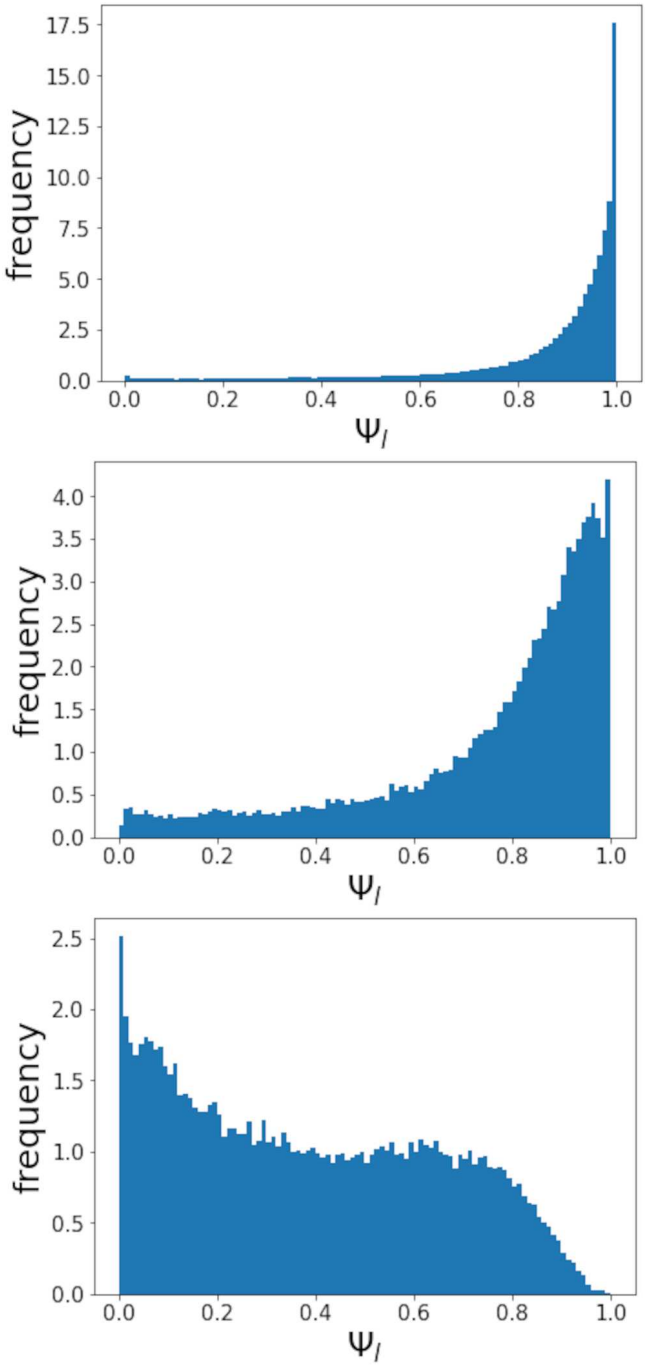


图 9. 随机网络集合中局部冲击向量分量的直方图。横轴分为 100 个区间，并对数值进行归一化，使面积等于 1。顶部面板所使用的参数为 $n = 75$、 $p = 0.1$、 $A/E = 0.5$。中部面板所使用的参数为 $n = 50$、 $p = 0.2$、 $A/E = 0.4$。底部面板所使用的参数为 $n = 50$、 $p = 0.4$、 $A/E = 0.23$。

用于缓解冲击的空间。由于超体积的维度等于网络中机构的数量 D=n，而前两项度量是一维的，实际上表示的是向量上的度量，而这些向量要么跨越

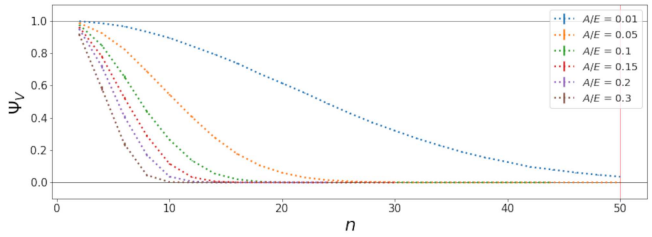


图10。根据顶点数量在CASD 网络上评估的超体积度量 Ψ_V。通过对每个参数 $n \in [2, 50]$ $A/E \in \{0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3\}$ 以及参数进行 $N = 50$ $M = 10^4$ 实现获得计算结果。我们使用了点来评估超体积。

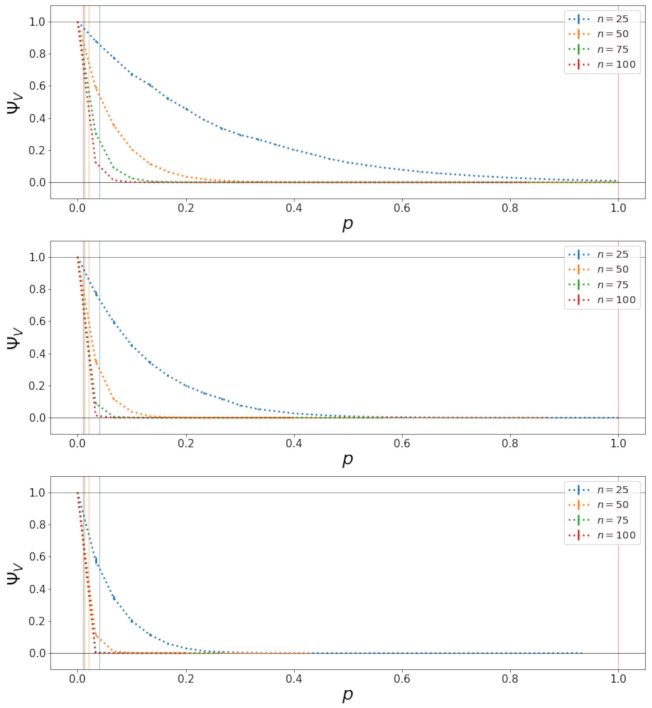


图 11. 随参数 p 变化的随机网络上的超体积 Ψ_V 测度。计算基于 $N = 50$ $p \in \langle 0\ 1]$ $n \in \{25, 50, 75, 100\}$ 个实现的集合，针对 、 和 进行评估。竖线对应随机网络渗流的 p_c 临界值。图 (a)、(b) 和 (c) 对应参数 A/E 分别等于 0.05、0.1 和 0.2。蒙特卡罗是用于 $M = 10^4$ 个点的算法。

这个超体积（局部冲击）或表示对角线（均匀冲击），人们可能会天真地认为，能够抵御异质冲击的区域按 $\sim h^n$ 缩放，因此，对于较大的系统规模 n，其与总体积之比会非常小。

还需要强调的是，如果目标是尽可能减小相对误差，对高维多胞体进行采样在计算上会十分昂贵。从这个意义上说， $M = 10^4$ 个点并不足够。不过，(i) 本研究的目的是展示这一原理

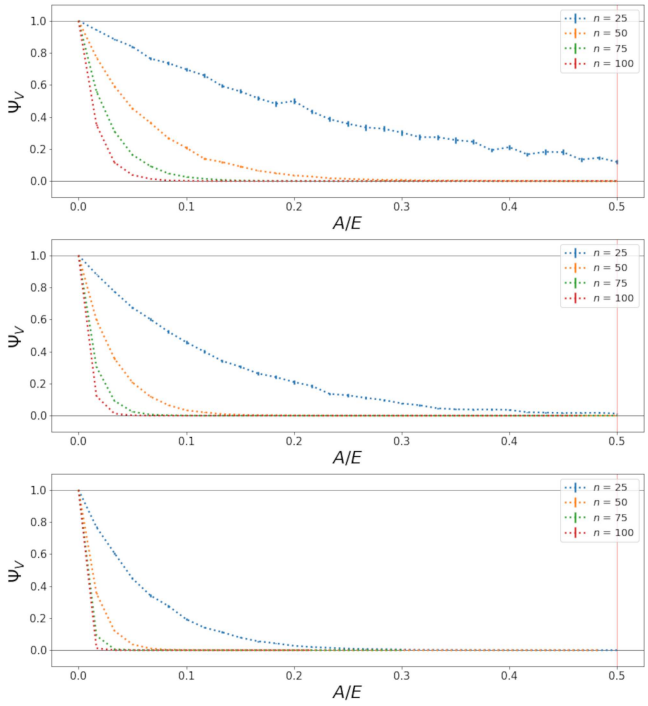


图 12. 不完全随机网络上的超体积度量 Ψ_V 随参数 A/E的变化。对由 $N = 50$ 个网络组成的集合，在 $A/E \in \langle 0$、 $1]$和 $n \in \{25, 50, 75, 100\}$条件下进行计算。图中分别对应参数 p 取 0.05 、 0.1 和 0.2 的情况。使用 $M = 10^4$ 个点评估超体积。

以及 (ii) 我们并非只评估一个多胞体，而是对一组多胞体进行计算，这原则上应能降低算法的相对误差。

最大的相对误差出现在精确超体积有限但非常小，而蒙特卡罗度量得到的超体积为零的点上。另一方面，对于更常见的参数选择，相对误差要小得多。这一点在实践中十分重要，因为在金融系统中，小数值冲击是日常常见事件，而蒙特卡罗方法能够对更符合实际的冲击值给出更好的估计。在实际系统中，可以使用更先进的算法（如 VolEsti [23]）来近似超体积。另一种可能的扩展方法是利用单次冲击的历史度量，按照其发生的预期概率对点进行比例采样，从而更好地描述边界情况。

V. 结论

本研究考察了金融领域系统性风险的三种拟议度量。我们使用均匀冲击度量 Ψ_u 来估算系统中所有机构可能同时遭受的资本最大跌幅，且不会导致其中任何一家机构倒闭。最大局部冲击 Ψ_l

是一个向量，表示单个机构在不导致自身或系统中其他机构破产的情况下所能承受的最大冲击。超体积度量 Ψ_V 是一种广义度量，考虑了初始冲击的所有区间，只能通过近似方法进行评估。

我们已对小型网络 $n \leq 3$的度量方程进行了解析评估，以了解不同参数的重要性。

此外，我们使用了大量随机网络集合，在更贴近现实的金融系统模型上评估所提出的指标。我们在此得出了一些重要的观察结果：

首先，在所列出的度量指标中，均匀冲击度量随系统参数增加而下降得最慢，这表明系统对于广泛且均匀的外部冲击最具韧性。在所有参数范围内，这些函数似乎都是凹函数。

其次，随着参数的增加，局部冲击的度量值缓慢下降，直到系统突然变得极易受到某一机构冲击的区域为止。在我们考察的所有参数范围内，都发现这些函数似乎是凸函数。

第三，用于估计异质冲击的超体积度量是这些度量中最保守的，因为在所研究的度量中，它会随着参数增加而下降得最快。它也是一种会随模型参数变化而兼有凹区域和凸区域的度量。

我们认为，这种方法对监管机构可能具有参考价值，因为它提供了初始冲击如何影响金融系统其他组成部分的信息，并能指出行为不良、可能严重影响其他行为良好的机构。我们希望未来有机会在真实金融数据上评估这些指标，以便在更贴近现实的环境中更好地理解其表现。

致谢

HS 和 VZ 的研究获得了欧盟区域发展基金的资助，资助项目为 KK.01.1.1.01.0009（DATACROSS）。GC 感谢欧盟项目“HumanE-AI-Net”（编号：952026）的支持。VZ 感谢克罗地亚科学基金会（HrZZ）项目（编号：IP-2019-4-3321）的支持，并感谢 Quan- tiXLie 卓越中心提供的部分资助。该项目由克罗地亚政府和欧盟通过欧洲区域发展基金及“竞争力与凝聚力”运营计划共同资助（资助编号：KK.01.1.1.01.0004，分项负责人：N.P.）。

[1] M. E. Newman、A.-L. E. Barab´asi 和 *The structure and dynamics of networks.* D. J. Watts（普林斯顿大学出版社，2006）。[2] M. Chinazzi 和 G. Fagiolo, *Systemic risk, contagion, and financial networks: A survey* 2015 (SSRN,)。[3] P. Gai 和 S. Kapadia，《牛津经济政策评论》35，586（2019）。[4] M. Bardoscia、P. Barucca、S. Battiston、F. Caccioli、G. Cimini、D. Garlaschelli、F. Saracco、T. Squartini 和 G. Caldarelli，《自然评论：物理》3，490（2021）。[5] S. Battiston、J. D. Farmer、A. Flache、D. Garlaschelli、A. G. Haldane、H. Heesterbeek、C. Hommes、C. Jaeger、R. May 和 M. Scheffer，《科学》351，818（2016）。[6] P. Gai 和 S. Kapadia，《英国皇家学会学报 A：数学、物理与工程科学》466，2401（2010）。[7] N. Beale、D. G. Rand、H. Battey、K. Croxson、R. M. May 和 M. A. Nowak，《美国国家科学院院刊》108，12647（2011）。[8] S. Battiston、M. Puliga、R. Kaushik、P. Tasca 和 G. Caldarelli，《科学报告》2（2012）。[9] S. Battiston、D. D. Gatti、M. Gallegati、B. Greenwald 和 J. E. Stiglitz，《经济动力学与控制杂志》36，1121（2012）。[10] C. Minoiu 和 J. A. Reyes，《金融稳定杂志》9，168（2013）。[11] M. Chinazzi、G. Fagiolo、J. A. Reyes 和 S. Schiavo，《经济动态与控制杂志》37，1692（2013）。[12] S. Poledna、J. L. Molina-Borboa、S. Mart´ınez-Jaramillo、M. Van Der Leij 和 S. Thurner，《金融稳定杂志》20，70（2015）。[13] M. Montagna 和 C. Kok，欧洲中央银行工作论文第1944号，可在 SSRN 获取：https://ssrn.com/abstract=2830546（2016）。[14] C. D. Brummitt 和 T. Kobayashi，《物理评论E》91，062813（2015）。[15] S. Poledna、A. Hinteregger 和 S. Thurner，arXiv 预印本 arXiv:1801.10487（2018）。[16] V. Zlati´c、G. Gabbi 和 H. Abraham，《公共科学图书馆·综合》10，e 0114928（2015）。[17] S. Poledna 和 S. Thurner，《定量金融》16，1599 2016( )。[18] S. M. Krause、H. ˇStefanˇci´c、G. Caldarelli 和 V. Zlati´c，《物理评论E》103，042304（2021）。[19] T. Roukny、H. Bersini、H. Pirotte、G. Caldarelli 和 S. Battiston，《科学报告》3，2759（2013）。[20] M. Bardoscia、S. Battiston、F. Caccioli 和 G. Cal- darelli，《公共科学图书馆·综合》10，e0130406（2015）。[21] K. Gibson，“众议院否决救助方案后，美国股票遭重挫，”

[22] J. Kwapisz，《图论杂志》23，405（1996）。[23] A. Chalkis 和 V. Fisikopoulos，arXiv 预印本 arXiv:2007.01578 （ 2020 ）。