arXiv:2304.05831v1 [cs.DS] 12 Apr 2023

何时应等待后再更新?

迈向鲁棒性细化

Swan Dubois ！ 索邦大学，法国国家科学研究中心，LIP6，DELYS，法国

Laurent Feuilloley 里昂大学、法国国家科学研究中心、里昂国立应用科学学院、里昂第一大学、LIRIS、UMR5205、维勒班、法国

Franck Petit ！ 索邦大学、法国国家科学研究中心、LIP6、DELYS、法国

MikaëlRabie 巴黎西岱大学,法国国家科学研究中心, IRIF, 巴黎, 法国

摘要

考虑一个动态网络和一个给定的分布式问题。在任意时刻，可能存在多个根据问题规范同样优良的解，但从算法视角来看它们彼此不同，因为当网络发生变化时，其中一些解可能比其他解更容易更新。换句话说，人们更希望得到一个对网络拓扑变化更加鲁棒的解；在这一方向上，最理想的情况是，无论网络如何动态变化，该解始终保持正确。

在 [6], 中，作者提出了一个非常强的鲁棒性准则：他们要求，对于任何保持网络连通的边删除，解都保持有效。他们聚焦于极大独立集问题，其方法在于刻画以下图：其中存在一个鲁棒解（存在性问题），或者更进一步，其中任意解都是鲁棒的（全称问题）。由于该鲁棒性准则要求极高，只有少数图具有鲁棒解，而其中所有解都具备鲁棒性的图则更少。在本文中，我们提出以下问题：如果限制允许的边删除数量，能否使更大类的网络具备鲁棒性 k？

为了回答这个问题，我们考虑三个经典问题：极大独立集、极小支配集和极大匹配。对于全称问题，这三种情形的答案出人意料地各不相同。对于极小支配集，该类不依赖于被删除边的数量。对于极大匹配，仅删除一条边就定义了一个与完美匹配相关的鲁棒类；但对于其他所有上界 k，该类都与任意数量的边删除所对应的类相同。最后，对于极大独立集，各类构成严格的层次结构：上界为 k 时的类严格大于上界为 $k+1$ 时的类。

对于 [6], 的鲁棒性概念，尚无关于存在性问题的刻画，只有一个多项式时间识别算法。我们表明，对于有界 k，情况甚至更糟：即使对于 $k=1$，判断一个图是否具有鲁棒极大独立集也是NP困难的。

2012年美国计算机协会主题分类 计算理论 → 算法设计与分析；计算数学 → 离散数学

关键词和短语 鲁棒性、动态网络、时序图、边删除、连通性、足迹、打包/覆盖问题、极大独立集、极大匹配、最小支配集、完美匹配、NP困难性

资助 ANR SKYDATA(ANR-22-CE25-0008-02) ANR GrR (ANR-18-CE40-0032)

1 引言

在计算机网络领域，“动态网络”这一短语涵盖了许多不同的情形，从链路可能不稳定的静态有线网络，到无线网络

自组织网络，其中各实体通过无线电直接相互通信。在后一种情况下，各实体可能随时以完全不可预测的方式加入、离开网络，甚至在网络内部移动。所有这些网络的一个共同特征是，通信链路会随时间不断变化。正因如此，与固定的静态网络相比，算法工程要困难得多。事实上，解必须能够适应持续不断的拓扑变化。在维护单个领导者 [3] 或（本应）“静态”的覆盖数据结构时，这一点尤其具有挑战性，例如生成树、节点着色、极大独立集（MIS）、极小支配集（MDS）或极大匹配（MM）。大多数时候，为了应对这类拓扑变化，算法会计算并反复重新计算其解，力求在任何情况下都尽可能接近正确解。

当然，当网络动态性很高，也就是拓扑变化极为频繁时，有时便不可能获得可接受的解。在实践中，为了接近期望的行为，同时摊销重新计算的成本，通常会放宽算法的正确性要求。实际上，这有时会促使我们重新思考问题的本质，例如：寻找一个“移动领导者”、每个连通分量中的领导者或生成树、时间支配集、不断演化的极大独立集（MIS）、尽力而为的广播，等等——更多示例请参阅 [3, 4] 。

本文采用一种与 [1, 6]中所提出的方法类似的思路，探讨网络动态性问题：在多大程度的网络动态性下，计算仍能在不放宽其规范的情况下进行？在进一步阐述我们的动机之前，先回顾一下本研究所依据的相关工作。

过去几十年间，人们提出了许多动态网络模型—— [3] 中列出了全面的模型清单——其中一些模型旨在统一先前的建模方法，主要见 [4, 11]。与许多情况一样，在本研究中，网络被建模为一张图，其中顶点集（也称为节点）是固定的，而通信链路则由一组边表示，这些边会随时间意外地出现和消失。若不作额外假设，这种建模涵盖了随时间可能发生的所有情况，例如，网络拓扑可能在某一时刻不包含任何边；也可能出现某条边在某个时刻存在、之后却永久消失的情况。根据对边出现和消失所作的不同假设（频率、同步性、持续时间等），时序网络的动态性可分为许多类别 [4]。

其中有一个类别——类别 $\mathcal{TC}^{\mathcal{R}}$——尤为重要。在该类别中，任意两个顶点之间的时序路径都会无限次出现。可以说，这个类别是将静态网络中的连通性概念推广到动态网络中最自然、最通用的方式：每个顶点都能够在任意时刻向任何其他顶点发送消息（不一定是直接发送）。

对于顶点集 V上的 T C类动态网络$\mathcal{TC}^{\mathcal{R}}$，可以将 $V \times V$划分为三个集合：在整个时间范围内无限次出现的边——称为重复 边——、仅出现有限次的边——称为最终缺失 边——以及从未出现的边。前两个集合的并集定义了一个称为该网络 [4], 的足迹 的图，而对无限次出现的边进行限制所得的图称为该网络的最终足迹 [2]。在 [2], 中，作者证明，T C类$\mathcal{TC}^{\mathcal{R}}$ 实际上正是其最终足迹 连通的动态网络集合。

总而言之，从分布式计算的角度来看，只考虑这样一些动态网络是完全合理的：其中某些边会反复出现，而且它们的并集确实构成其足迹的一个连通生成子图。

遗憾的是，节点无法区分一条会反复出现的边和一条最终消失的边

因此，节点所能做的就是根据足迹计算一个解，并希望这个解在最终的足迹中仍然有意义，无论最终的足迹是什么。在 [6], 中，作者引入了鲁棒性 这一概念来表达这种直觉，定义如下：

▶**定义 1**（鲁棒性）。当且仅当属性 P 在图 G 的每个连通生成子图中都成立（包括 G 自身）时，我们称属性 P 在图 G 上具有鲁棒性。

换句话说，如果移除任意数量的边，只要图仍保持连通，属性 P 依然成立，那么该属性就是鲁棒的。

在 [6], 中，作者聚焦于极大独立集（MIS）问题。他们研究的是：即使移除边，一个顶点集合仍能保持为极大独立集的情形。他们围绕两个问题组织研究结果：

全称性问题：对于哪些网络，所有解在任何不会使图断开的边删除操作后仍具有鲁棒性?

存在性问题：对于哪些网络，存在一个解，使其在任何不会使图断开的边删除操作后仍具有鲁棒性?

[6] 中的作者建立了能够回答极大独立集问题中第一个问题的网络的刻画。对于同一个问题，他们提供了一种多项式时间算法，用于判定某个网络是否能够回答第二个问题。

请注意， [5] 最近也研究了度量性质情况下的鲁棒性。在那篇论文中，作者证明了判断给定的两个顶点之间的距离是否具有鲁棒性可以在线性时间内完成。然而，他们还证明了判断直径是否具有鲁棒性是 coNP-完全问题。

1.1 我们的方法

我们的目标是超越 [6], ，并对鲁棒性这一概念获得更细致且更广泛的理解。

让我们先从细粒度维度入手。在 [6], 中，只要图保持连通，解就必须能够抵御任意数量的边删除。在本文中，我们想要了解，在保持连通性约束的同时，哪些结构能够抵御 k 边删除，且适用于任意特定的 k，从而为这一概念增添粒度。我们将这一概念称为 k-鲁棒性（见下文的正式定义），并聚焦于这一细粒度鲁棒性版本中的普遍性问题和 [6] 存在性问题。

现在转向更广泛的维度，让我们讨论所研究的问题。在 [6], 中，所研究的问题是极大独立集（MIS）；这是一个很好的选择，因为它带来了一个有趣的研究图景。事实上，鲁棒性是一项要求非常高的性质，因此必须找到适用它、同时又不会导致答案变得平凡的问题。在这一方向上，人们希望研究局部问题，因为一次修改只会在某个邻域内产生影响，而不会影响整个图，这使得修改实际上完全不影响正确性的希望得以保留。在经典的局部问题中，正如 LOCAL 模型中所研究的那样（参见 [9] 中的原始定义和 [8] 中的最新著作），主要有着色问题和打包/覆盖问题。在我们的语境下，着色问题（颜色数量固定）没有实际意义：边删除只会带来帮助。但打包/覆盖问题都很有趣，因此本文将研究范围扩展到三个经典问题：如前所述的极大独立集（MIS），以及极大匹配（MM）和极小支配集（MDS）。

为了帮助读者直观理解我们的方法，下面通过极大匹配来说明1-鲁棒性，即 一组互不共享顶点的边，并且它是极大的，也就是说无法再添加任何边。要具备1-鲁棒性，匹配在移除任意一条 不会使图断开的边之后，仍须保持极大。接下来我们看看图1中展示的各种配置（匹配边以粗体标示）。

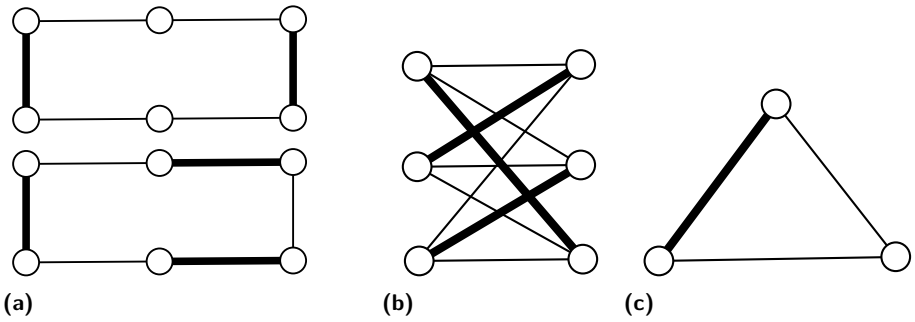


图1 不同图中的极大匹配示例。

对于图1a中的两个图，它们都是包含 6 个顶点的环，我们可以观察到，极大匹配的两种实例可能有不同的表现。事实上，对于上方的图，如果删除一条匹配边，剩下的匹配在新图中就不再是极大匹配：可以加入与被删除边相邻的两条边。相比之下，对于下方的图，删除任意一条边后，所得图仍然具有极大匹配。现在，对于图1b中的图，也就是一个完全平衡二部图，所有极大匹配在同构意义下都相同。任意删除一条边后，所得图中没有新的边可以被匹配。因此，在这个图中，任何匹配对于单边删除都是鲁棒的。请注意，这对于任意数量的边删除并不成立，这说明 k-鲁棒性与鲁棒性并不等价。最后，在图1c中，所有极大匹配都只包含一条边，并且它们对于删除一条边并不鲁棒。事实上，匹配边被删除后，可以从剩余的两条边中任选一条。

总而言之，图1展示了三种不同情况下 1-鲁棒性的影响：一种情况下，某些匹配是 1-鲁棒的；一种情况下，所有匹配都是 1-鲁棒的；还有一种情况下，没有任何匹配是 1-鲁棒的。

1.2 我们的结果

我们的首项贡献是在第 2 节引入鲁棒性的细粒度版本。此后，本文的每个技术章节都致力于针对我们研究的问题之一，对上述两个问题（存在性与全称性）的细粒度版本给出一些解答。我们实际上着重于理解不同设置之间的差异，既比较问题本身，也比较可移除边的数量。

我们先来看全称性问题。在这里，我们证明这三个问题表现各不相同。

对于极小支配集，正如第 3 节所证明的，对于每个 k，任何解都是 k-鲁棒的图类完全相同（这个图类此前已在 [6]中以人造卫星图之名出现）。

对于极大匹配，$k = 1$ 的情况比较特殊。我们之前曾以此为例，它与完美匹配之间有着有趣的联系；不过，每个 $k \geq 2$ 对应的类都相同。这些结果将在第 4 节中介绍。

最后，对于极大独立集，我们在第5节中证明存在严格的层次结构：对于 k 边删除，其对应的类严格小于 $k-1$对应的类。对于这一情形，我们没有确定确切的刻画，而是给出了这些类的一些额外结构性结果。

存在性问题更具挑战性。第6节介绍了对这一问题研究的一些初步结果。对于极大独立集，我们证明，对于任意 k，判定一个图是否具有对 k 边删除具有鲁棒性的极大独立集是NP困难的。这是针对这类问题的首个 NP困难性结果。

2 模型、定义和基本性质

在本文中，除非另有说明，图命名为 G，顶点集为 V，边集为 E。

2.1 鲁棒性和图问题

本文的关键概念是 k-鲁棒性。

▶**定义2.** 给定一个图问题和一个图，如果移除至多 k 条边后，该图不连通，或该解仍然有效，则该解是 k-鲁棒的。

注意， k-鲁棒性指的是至多移除 k 条边，而不是恰好移除 k 条边。
在提及鲁棒性这一概念时，我们将滥用记号，写作 ∞-鲁棒 from $[6]$, , 且移除次数无界。因此， k 是 $\mathbb{N} \cup \infty$中的一个参数。

▶**记号1.** 我们按如下方式定义U_P^k 和E_P^k：

- 令U_P^k 为这样一类图：对于问题 P 的任意解都是 k-鲁棒的。令E_P^k 为这样一类图：存在
- 一个对问题 P 的解，该解是k-鲁棒的

请注意，为了便于纳入参数 k，我们决定不完全沿用 $[6]$ 中的记法。

图问题。

我们考虑三个图问题：
1. 极小支配集（MDS）：选择一个极小的顶点集，使得图中的每个顶点要么属于该集合，要么在该集合中有一个邻居。2. 极大匹配（MM）：选择一个极大的边集，使得任意两条选中的边都不共享端点。3. 极大独立集（MIS）：选择一个极大的顶点集，使得任意两个选中的顶点之间都没有边。

完美匹配是一种匹配，其中每个顶点都被匹配。我们还将使用 k-支配集 这一概念，它是一个由选定顶点组成的集合，使得每个顶点要么被选中，要么与两个选定顶点相邻。请注意， k-支配集有时指的是另一个与到选定顶点的距离有关的概念，但这不是我们的定义。

鲁棒极大匹配的情形。

对于极大匹配，鲁棒性的定义可能有所不同。我们采用以下定义：如果移除任意一组至多包含 k 条边的边，且图 G 仍然连通，那么图 G 的极大匹配 M 就是 k-鲁棒的；此时，M 剩余部分是剩余图 G 的极大匹配。

2.2 图的概念

下面列出一些我们将用到的图论定义。

▶ **定义 3.** 节点 v 的邻域 记作 $N(v)$，是与 v 相邻的节点集合。节点 v 的闭邻域 记作 $N[v]$，是 v 的邻域再加上 v 其自身。

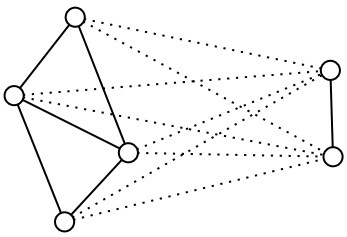
▶ **定义 4. </style}若删除任意一组 ($t-1$)条边后，图仍然连通，则该图是 t-(边)-连通的。** t-(边)-连通连通分量是一个t-(边)-连通的子图。

下文中我们只关注边连通性，因此将简单地写作t-连通性 来指代 t-边连通性。在证明中，我们将多次使用以下简单观察：在一个2-连通图中，每个顶点都属于某个环。

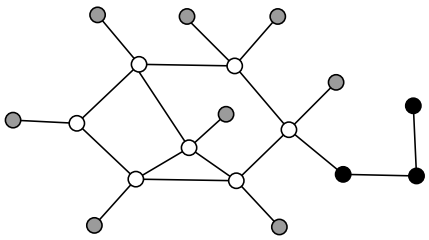
▶**定义5**。 在连通图中，桥 是指移除后会使图断开的边。

▶ **定义6**。 给定两个图 G 和 H，这两个图的图并， $join(G,H)$，是由 G 和 H的并集构成，并添加所有可能的边(u,v)，其中$u \in G$ 和 $v \in H$。见图*2a*。

▶ **定义7**。 人造卫星图 （*[6]*）是这样一种图：其中每个属于环的节点都有一条天线，即一个度为*1*的邻居。见图*2b*。



(a) 两个图的图并：黑色边是原有的边，点状边是通过连接操作添加的边。



(b) 一幅人造卫星图。白色顶点属于一个环，灰色顶点是这些环的天线，黑色顶点既不属于任何环，也不是天线。

图 2 第2.2小节中各定义的示意图。

2.3 基本性质

以下性质可由定义直接得出。

▶ **性质1**。对于任意问题 P，对于任意 k，$U_P^{k+1} \subseteq U_P^k$和 $E_P^{k+1} \subseteq E_P^k$。

特别是，对于所有 k，$\mathcal{U}_P^\infty \subseteq \mathcal{U}_P^k \subseteq \mathcal{U}_P^1$ 和 $\mathcal{E}_P^\infty \subseteq \mathcal{E}_P^k \subseteq \mathcal{E}_P^1$。

▶ **性质 2.** 如果图是 $(k+1)$-连通 的，那么解是 k-鲁棒的，当且仅当移除任意一组 k 条边后，该解仍然正确。

3 极小支配集

▶ **定理 8.** 对于所有 k 属于 $\mathbb{N} \cup \infty$，U_{MDS}^k 是人造卫星图的集合。

证明。 我们知道，根据 [6]，定理对 $k = \infty$成立。因此，根据性质 1，只需证明定理对 $k = 1$成立。为反证，考虑一个图 G，它属于 $\mathcal{U}_{MDS}^1$，但不是人造卫星图。那么存在一个节点 u，它属于一个环，且没有天线。令 S 为 u 的闭邻域，$S = N[u]$。我们称 S中不同于 u 的一个节点为 内部节点，如果它只与 S中的节点连通。现在，我们根据是否存在内部节点分两种情况讨论。见图 3。

1. 假设存在一个内部节点 v。注意，v 至少有一个不同于 u 的邻居，否则它就是一根天线。令集合 W 为 v 的闭邻域，但不包括 u。集合 $D = V \setminus W$ 是图的一个支配集，因为所有节点要么属于 D，要么是 u 的邻居（而 u 属于 D）。现在，我们通过贪心方式将 D 转化为极小支配集：按照任意顺序从 D 中移除节点，直到再移除任何节点都会使 D 不再是支配集。我们声称这个极小支配集不是 1-鲁棒的。事实上，如果移除边 (u, v)，v 就不再被覆盖（它当前的邻居中没有任何一个属于 D），而图仍然是连通的（因为 v 有一个不同于 u 的邻居）。

2. 假设不存在内部顶点。令 a 为环上 u 的一个邻居。令 W 为集合$S \setminus a$。同样，我们声称 $V \setminus W$ 是一个支配集。事实上，由于不存在内部节点，S 中除 u 以外的每个节点都由 W 之外的节点覆盖，而 u 由 a覆盖，该节点属于 $V \setminus W$。和之前一样，我们可以通过贪心地移除节点，将此集合变为一个 MDS；同样，我们声称它不是 1-鲁棒的。事实上，若移除边 (u, a)，图不会断开（因为存在包含 u的环），而 u 将不再被覆盖。

◀

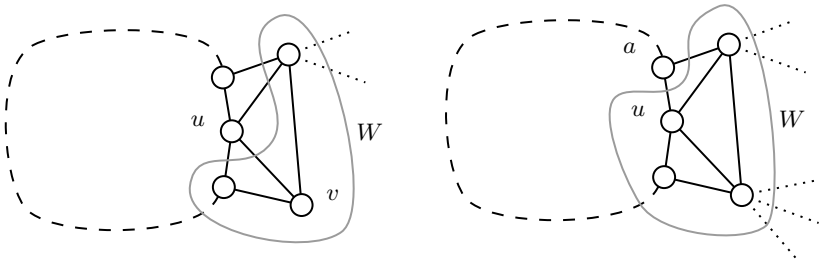


图 3 定理 8 证明中的两种情况：左侧有内部节点，右侧没有内部节点。环以虚线表示，点线表示非内部节点的出边。

4 极大匹配

现在我们将注意力转向极大匹配问题，并得到以下定理。

▶**定理 9**。 类 U^1_{MM} 由树、平衡完全二部图以及节点数为偶数的团组成。对于任意 $k \geq 2$，类 U^k_{MM} 由四节点环和树组成。

本部分的核心是研究仅移除一条边的情形。在本节末尾，我们将考虑移除多条边这一更一般但技术上不那么有趣的情形。

4.1 移除一条边

在本小节中，我们刻画每个极大匹配都具有 1-鲁棒性的图类。

▶**引理 10**。 U^1_{MM} 由树、平衡完全二部图以及节点数为偶数的团组成。

本小节的其余部分将用于证明引理 10。

关于完美匹配的一个结果

证明的核心是展示其与完美匹配之间的联系。完成这一步后，我们就可以使用来自 [10]的以下定理。

▶**定理 11** ([10])。任何极大匹配都是完美匹配的图类，是平衡完全二部图与偶数大小的团的并集。

首次纳入

我们先证明定理中较容易的方向，即证明我们提到的这些图属于 $\mathcal{U}^1_{MM}$。对于树，任何性质都是鲁棒的，因为删除任何一条边都会使图不连通。对于另外两类图，我们将使用以下断言。

▷ 断言 12. 完美匹配是 1-鲁棒的极大匹配。

考虑图中的一个完美匹配，并删除一条任意的边（该边不会使图不连通）。如果这条边不属于该匹配，那么我们仍然有一个完美匹配，因此也有一个极大匹配。如果这条边属于该匹配，那么图中只有两个未匹配的节点（即与这条边相邻的节点），并且它们的所有邻居都已匹配，因此该匹配仍然是极大匹配。由此断言得证。◁

在平衡完全二部图和偶数阶团中，任何极大匹配都是完美匹配（定理 11）；又因为完美匹配是 1-鲁棒的极大匹配，所以我们得到了引理 10 的第一个方向。

第二个包含关系：三个有用的主张

现在我们处理另一个方向。下面的引理确立了 1-鲁棒匹配必须满足的局部条件。示意图见图4。

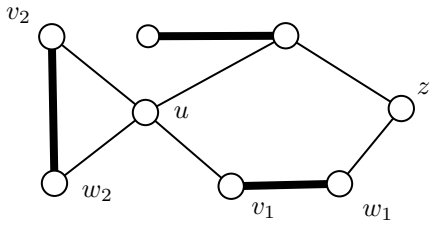


图4 断言 13 的示意图。这里有一个极大匹配，尤其是，u 的所有邻居都已匹配，但它并非 1-鲁棒匹配。事实上，移除 (v_1, w_1) 后，就可以添加 (u, v_1) 和 (w_1, z)。此外，不可能出现一个三角形，其中有一条匹配边和一个未匹配节点，例如 $(u, v2, w_2)$（断言14）；因为移除 (v_2, w_2) 后，就可以将 (u, v_2) 或 (u, w_2) 加入匹配中，这与极大性矛盾。因此，我们需要桥条件。

▷ 断言 13。在 1-鲁棒极大匹配 M 中，如果节点 u 未匹配，则 $N(u)$ 中的所有节点都已匹配，且它们的匹配边都是图的桥。

$N(u)$ 中所有节点都已匹配，这一事实可由 M 是一个极大匹配得出。现在，假设存在 $(v, w) \in M$，使得 $v \in N(u)$ 和 (v, w) 不是桥。换言之，移除 (v, w) 不会使图断开。移除后，u 和 v 都未匹配；而由于 (u, v) 是图中的一条边，新图中的匹配便不可能是极大匹配。这与 M 的 1-鲁棒性矛盾，从而证明了该引理。◁

以下断言直接由断言 13 推出。

▷ 断言14。在 1-鲁棒极大匹配 M 中，如果存在一个未匹配节点 u，两个节点 $a, b \in N(u)$ 满足 $(a, b) \in E$，则 $(a, b) \notin M$。

现在我们来研究环中 1-鲁棒极大匹配的形态。

▷ 命题 15. 在 $\mathcal{U}^1_{MM}$ 中图的每个极大匹配里，如果一个节点属于某个环，那么它就会被匹配。

我们对命题 15 的证明在于证明：如果一个极大匹配不满足该条件，那么它要么不是 1-鲁棒，要么我们可以利用它构造出另一个不是 1-鲁棒的极大匹配。在这两种情况下，这都意味着该图不属于 $\mathcal{U}^1_{MM}$。

考虑环中的一个节点 u。设 a 和 b 是它在环中的直接邻居，其他邻居为 $(c_i)_{i\circ}$ 可能存在多种构型，例如 a 与 b 相邻或不相邻等。该证明适用于所有这些情况，但图 5 展示了不同的情况。考虑一个 1-鲁棒极大匹配 M，其中 u 未匹配。根据断言 13，我们知道，对于所有 i，都存在节点 a'、b'和 c'_i，使得相应地，(a, a')、(b, b') 和 (c_i, c'_i)（对所有 i而言）是图的桥。根据桥条件，这些节点 a'、b' 和 c'_i（对所有 i而言）彼此不同，且与 a、b、u 以及 c_i们不同。我们还将环中 a 的、不同于 u的邻居记作 d。注意，d 可以是 c_i 或 b，但不能是其他已命名的节点。（参见图 5 中的示意图。）现在，我们按以下方式从 M 构造一个新的匹配 M'。首先，移除匹配中所有与上述节点均不相邻的边。然后，移除 (a, a') 以及任何匹配边 d（如果存在）。注意，最后这条匹配边 d可能是 (c_j, c'_j) 或 (b, b')。将 (a, d) 加入匹配中（注意，执行此操作前这两个节点都未匹配）。在这个匹配中，u 的所有邻居都已匹配。我们将此匹配补全为一个极大匹配 M'。边 (a, d) 属于 M'

而 u 未匹配，这与断言 13矛盾，因此 M' 不可能是 1-鲁棒，这就证明了该断言。◁

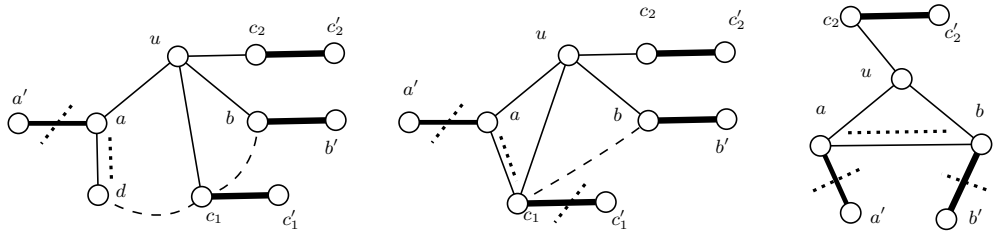


图 5 断言 16 的证明示意图，分为三种情况： d 既不是 b ，也不是 c_i； d 是其中一个c_i； d 是 b。虚线表示至少包含一条边的路径。点线表示我们所做的修改：划掉的边从匹配中移除，带点状双线的边则加入匹配。

第二个包含关系：将各部分组合起来

▷ 断言 16. 类 $\mathcal{U}^1_{MM}$ 中的图要么是一棵树，要么是 2-连通图。

考虑一个既不是树也不是 2-连通图的图。必然存在一条桥（u， v），使得 u 属于一个环。我们分两种情况讨论。

1. 节点 v 仅与 u相连，也就是说， v 是一个悬挂节点。然后，我们先强制让 M 与一个不是 u 的节点匹配，再采用贪心方法补全，从而构造一个极大匹配。现在，如果我们移除与 v 匹配的边，图不会因此断开，因为 u属于一个环；但 u 和 u 都没有 v 匹配，因此该匹配并非极大匹配（$(u,\ v)$ 可以加入）。因此，匹配 M 不具备 1-鲁棒性。

2. 节点 v 与另一个节点 w相连。考虑 $(v_i)_i$ 这一节点集合，其中 $v_i \neq v$，且 (u, v_i) 是一条桥。根据前一点，我们知道在 $N(v_i)$ 中存在某个 $w_i \neq u$。此外，这些 (w_i) 两两不同，且与所有其他已命名节点均不同，否则 (u, v_i) 就不会是一条桥。节点 w 和节点 $(w_i)_i$不能属于 u 的 2- 连通分量，否则 (u, v) 和 (u, v_i) 就不会是桥。我们先强制加入所有 i 对应的 (u, v) 和 (v_i, w_i)，再通过贪心方式补全，从而构造一个极大匹配 M。如前所述， u 的 2- 连通分量中的每个节点都必须属于某个环，因此根据命题 15，该分量中的每个节点都必须被匹配。现在我们构造第二个匹配 M'。我们从M 开始，从匹配中移除 (u, v) 以及位于 v桥的这一侧的所有边。然后强制将 (v, w) 加入匹配，再通过贪心方式补全。匹配 M' 是极大匹配，而 u 未匹配，因为它的所有邻居都已匹配；因此根据命题 15，它不是 1-鲁棒，因为它属于一个 2-连通分量，因而也属于某个环。

至此，命题的证明完成。 ◁

综上，该类中的图要么是树，要么是 2-连通的；在后一种情况下，根据命题 15，每个节点在每个极大匹配中都必须被匹配。因此，引理 10 可由定理 11 得出。

4.2 多于一次边删除

▶ **引理 17.** 对于任意 $k \geq 2$， U^k_{MM} 由一个包含四个节点的环和树集组成。

证明。 我们首先证明反向包含关系。如前所述，树属于 $\mathcal{U}^k_{MM}$ 对于任意 k，因为删除任意一条边都会使图断开。然后对于 C_4，注意到它属于 $\mathcal{U}^1_{MM}$，并且删除多于一条边会使图断开。

对于另一个方向，我们可以将范围限制在 U^2_{MM}，根据定义，它包含于 U^1_{MM}。因此，我们只需研究平衡完全二部图和偶数个节点的团。首先考虑一个完全二部图 $B_{k,k}$，其 $k > 2$（即任意大于 C_4 的 $B_{k,k}$），以及一个极大匹配 M。从该匹配中任取两条边 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2)，并将它们从图中删除。此时图仍然连通。现在，节点 a_1 和 b_2 未匹配，且它们之间有一条边，因此得到的匹配不是极大匹配，且 M 不是 2-鲁棒。因此，类 U^2_{MM} 中仅剩下的$B_{k,k}$ 是 C_4。对于偶数个节点的团，考虑一个顶点数严格大于两个的团。一个极大匹配 M 至少包含两条边 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2)。从图中删除这些边后，图仍然连通，u_1 和 u_2 未匹配，但 (u_1, u_2) 仍然存在，因此得到的匹配不是极大匹配，且 M 不是 2-鲁棒。◀

5 极大独立集

极大独立集展现了类 $(\mathcal{U}^k_{MIS})_k$的另一种行为：它们构成一个无限严格层级。

5.1 无限层级

▶ **定理18。** 对于每个 $k \geq 1$，U^{k+1}_{MIS} 严格包含于 U^k_{MIS}。

证明。 令 $k \geq 1$。我们将定义一个图 G_k，并证明它属于 $\mathcal{U}^k_{MIS}$ 但不属于$\mathcal{U}^{k+1}_{MIS}$。

要构造 G_k，考虑一个二部图，其两侧 A 和 B 各有 $k+2$ 个节点，并在 A 侧的一个节点 u 上添加一个悬挂邻点 v。见图6。这个图只有三个极大独立集：A、$v \cup B$ 和 $v \cup (A \setminus u)$。事实上：(1) 若极大独立集包含 u，则它不能包含 A 之外的顶点；要使其极大，它必须包含全部 A；(2) 若它包含 B 中的一个顶点，则不能包含 A 中的顶点；根据极大性，它包含全部 B 和 v；(3) 若它包含 v 且不包含 B 中的任何顶点，则根据极大性，它就是 $v \cup (A \setminus u)$。

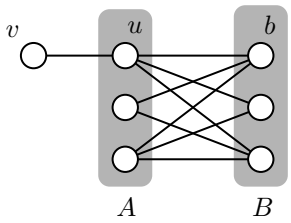


图6 。定理18证明中图 G_k 的示意图。

我们声称这三个极大独立集都是 k-鲁棒的，因此 G_k 属于 $\mathcal{U}^k_{MIS}$。假设某个极大独立集不是 k- 鲁棒的。那么存在一个不属于该极大独立集的顶点 w，删除至多 k 条边后，它便不再有邻居属于该极大独立集。我们来根据这个顶点是谁 w进行简要的分类讨论。它不可能是 v，因为删除边（u，v）会使图不连通。它也不可能是 A中的顶点，也不可能是 B中的顶点，因为在提到的所有极大独立集中，所有未选定的节点（ v除外）都有至少 $k+1$ 个选定邻居。

现在我们声称，$v \cup (A \setminus u)$ 不是（$k+1$）-鲁棒的，因此 G_k 不属于 $\mathcal{U}_{MIS}^{k+1}$。我们选取一个位于 B 侧的顶点 b，并删除所有边（a，b），其中 $a \in A \setminus u$。这组边共包含 $k+1$ 条边，删除它们不会使图不连通，但会让 b 失去所有选定邻居。这个 $v \cup (A \setminus u)$ 不是（$k+1$）-鲁棒的。◀

5.2 $\mathcal{U}_{MIS}^{k}$ 的结构定理

定理18的证明中所用的构造非常具体，并不能真正揭示$\mathcal{U}_{MIS}^{k}$中图的性质。该构造可以推广，例如在两侧都设置天线，并使用规模任意大（且不平衡）的二部图，且每个节点上的天线数量任意；但它仍然很具体。此外，这些构造严重依赖悬挂节点，在某种意义上，这是利用了这样一个事实：如果图变得不连通，我们就不必担心解是否正确。

为了更好地理解这些类，并提供一种更灵活的方式来构造此类图，我们证明了一个关于这些类在连接操作（定义6）下如何变化的定理。

我们用$\mathcal{G}_p$ 表示这样一类图：其中每个极大独立集的大小至少为 p。如果对该类中的任意一个或一组图应用某项操作后，所得图仍属于该类，我们就称该图类在该操作下封闭。

▶ **定理19**。对于所有 k，类 $\mathcal{U}_{MIS}^{k} \cap \mathcal{G}_{k+1}$ 在连接操作下封闭。此外，如果G 或 H 不属于 $\mathcal{U}_{MIS}^{k+1}$，那么 $join(G,H)$ 也不属于 $\mathcal{U}_{MIS}^{k+1}$。

证明。先来看定理的第一个结论。考虑两个图 G 和 H 属于 $\mathcal{U}_{MIS}^{k} \cap \mathcal{G}_{k+1}$。我们证明 $J = join(G, H)$ 也属于 $\mathcal{U}_{MIS}^{k} \cap \mathcal{G}_{k+1}$。

▷ 断言20。J 的任何极大独立集要么完全包含在 G的顶点集中，且是 G的极大独立集；要么包含在 H的顶点集中，且是 H的极大独立集。

考虑 J中的一个独立集。如果它包含一个属于 G的节点 u，那么它就不包含 H中的任何节点，因为根据构造，H 的所有节点都与 u相连。如果该独立集包含 H中的一个节点，情况也类似。因此，任何独立集要么完全包含在 G 中，要么完全包含在 H中。现在，当且仅当一个集合在 G（分别为 H）中是极大独立集时，它在 J内部的 G（分别为 H）中也是极大独立集。事实上，我们添加的边仅连接 G 中的节点与 H中的节点。这就证明了该断言。◁

因此，得到的图属于 $\mathcal{G}_{k+1}$。现在，对于 k-鲁棒性，不失一般性地考虑一个属于部分 G 的 J 极大独立集，并假设它不具备 k-鲁棒性。在这种情况下，必定存在一个未选定的顶点 v，在移除k 条边后（同时图仍保持连通），它不再有任何选定邻居。该节点不能属于部分 G，否则图 G 中的同一个独立集就不具备 k-鲁棒性。它也不能属于部分 H，因为 H 中的每个节点都与极大独立集中的所有顶点相连，而该集合的大小至少为 $k+1$，因为 $G \in \mathcal{G}_{k+1}$。

现在，让我们继续讨论定理的第二个陈述。假设 G 有一个极大独立集 S 和 $k+1$ 条边，移除这些边后，S 不再是极大的（也就是说，存在某个 u 可以加入该集合）。那么，S 也是 $join(G, H)$的一个极大独立集；移除相同的边后，就可以将 u 加入该集合，因为 u 唯一的新邻居来自 H，而其中不包含所选极大独立集中的任何节点◀

6 鲁棒极大独立集的存在性是NP困难的

请记住，我们定义了两种与鲁棒性相关的图类。对于给定的问题和参数 k，通用类是指其中每个解都具有 k-鲁棒性的图类。这是我们目前探讨的版本。对于这一版本，由于图类具有简单明确的刻画，因此识别属于该类的图很容易。第二种是存在型图类，我们希望其中存在一个具有 k-鲁棒性的解。这里的情况要复杂得多。事实上，在 [6] 中，即使是在不带参数的较简单鲁棒性情形下，存在型图类也没有明确的刻画，只有一个相当复杂的算法。本节将展示，加入参数 k 后，情况会变得更加棘手： [6] 的算法能在多项式时间内运行，而我们将在这里证明，识别 $\mathcal{E}^1_{MIS}$ 是 NP困难的。

▶**定理 21**。 对于每个奇整数 k，判定一个图是否属于 E^k_{MIS} 是 *NP*困难的。

本节其余部分将致力于证明这一定理。其基础是以下问题的 NP 完全性。

完美稳定输入：图 $G = (V, E)$。问题：是否存在一个顶点子集 $S \subset V$，使其为独立的 2-支配集？

请记住，如果一个集合中没有两个邻居可以同时被选中，并且每个未选顶点都至少有两个选定邻居，那么这个集合就是独立 2-支配集。为了直观了解我们为什么关注这个问题，请注意，对于独立 2-支配集，移除一条连接选定顶点与未选顶点的边后，该未选顶点仍然受到支配。已有证明表明， [7] 中的完美稳定集问题一般而言是 NP困难的。我们将需要这一困难性结果的以下加强形式。

▶**引理22**。 判定一个 *2*-连通图是否具有独立 *2*-支配集是 *NP* 完全的。

注意，这个引理并不能直接由 [7] 推出，因为其中的归约确实使用了一些非 2-连通图。

证明。 令 G 为一个至少有一条边的任意连通图。考虑将 G' 视为与 G 相同，但增加一个全局顶点，也就是说， G 添加一个顶点 u ，该顶点与 G的所有顶点相邻。此图是 2-边连通的。确实，由于 G 是连通的且至少有两个顶点，删除任意一条边 (u, v) （其中 $v \in V(G)$ 不会使图不连通；删除 G 中的一条边也不会使图不连通，因为所有节点都通过 v相连。

我们声称， G' 存在独立的 2-支配集，当且仅当 G 存在这样的集合。首先，假设 G 有这样一个集合 S。注意，集合 S 至少包含两个被选中的顶点。事实上， G 至少有一条边，这意味着至少有一个顶点未被选中（根据独立性），而这样的顶点应当至少被两个被选中的顶点支配。现在我们声称， S 也是 G'的一个解。事实上，将 u 加入图中不会影响 S 的独立性，也不会影响 G中节点的 2-支配性；并且 v 至少被覆盖两次，因为 G中至少有两个被选中的顶点。其次，如果 G' 有独立的 2-支配集 S'，那么该集合不可能包含 v。事实上，由于独立性条件，如果 v

被选中，那么就不能再选中其他节点，此时 2-支配条件便无法满足。于是 S' 包含于 G，并且是 G的一个独立 2-支配集。◀

现在，让我们形式化鲁棒性与独立 2-支配之间的联系。

▶**引理 23.** *在 2-连通图中，1-鲁棒极大独立集恰好就是独立 2-支配集。*

证明。 根据性质 2，在 2-连通图中，1-鲁棒极大独立集是一个能够抵御任意一条边被移除的极大独立集（也就是说，在鲁棒性的定义中，我们可以忽略连通性的保持）。这意味着，任何不属于该极大独立集的节点都被覆盖两次；否则，移除仅被覆盖一次的节点与覆盖它的节点之间的边，就会破坏其极大性。换句话说，该独立集必须是 2-支配的。对于反方向，只需注意到任何独立支配集都是极大独立集。◀

此时，结合引理 22 和引理 23，我们可以得到：即使假设图是 2-连通的，判定图中是否存在 1-鲁棒极大独立集仍然是 NP困难。这个最后的引理是证明定理 21 的最后一步。

▶**引理 24.** *对于任意 2-连通图 G 以及任意整数 $k > 1$，我们可以在多项式时间内构造一个图 G'，使得：G 有一个 1-鲁棒极大独立集，当且仅当 G' 有一个 $2k-1$-鲁棒极大独立集。*

证明。 我们按如下方式构造 G'。取 k 个 G副本，记作 G_1，……，G_k，约定 u_x 表示第 x 个副本中的顶点 u。对于 (u,v) 中的每条边，我们为任意一对 G添加边 (u_x, v_y) $x, y \in 1$，……，k。

我们先证明以下断言。图 G' 中的极大独立集必定具有如下形式：它是在每个副本上重复出现的完全相同集合的并。事实上，设 u_i 属于该极大独立集。对于任意 $j \neq i$，副本 G_j 中 u_j 的所有邻居都是 u_i的邻居，因此它们不属于该极大独立集。因此，任何副本中 u 的邻居都不能属于该极大独立集。由于这些节点是 u_j仅有的邻居，这意味着 u_j 也属于该极大独立集。

现在假设 G 有一个 1-鲁棒极大独立集。我们可以在每个副本中选取这个极大独立集的克隆，并为 G' 构造一个极大独立集（其独立性和极大性很容易验证）。在 G'的这个极大独立集中，每个未选定的顶点至少有 $2k$ 个选定邻居，因此这个极大独立集是$2k-1$ 鲁棒的。

最后，假设 G' 有一个 $2k-1$ 鲁棒极大独立集。根据上述论断，我们知道这个极大独立集是在每个副本上重复出现的同一组顶点。我们声称，将这个极大独立集限制在给定的副本上时，它是 1-鲁棒的。事实上，如果不是这样，那么就会有一个未选定的顶点至多只有一个选定邻居；这意味着在 G' 中，该顶点只有 k 个选定邻居，这与 $2k-1$ 鲁棒性相矛盾（考虑到连通性）。

◀

7 结论

本文从多个方面发展了鲁棒性理论：引入粒度，并研究新的自然问题，以探索其多样性。下一步是弥补现有结果中的空白：精确刻画各类 $\mathcal{U}^k_{MIS}$，并弄清楚针对极大匹配和最小支配集回答存在性问题的复杂度。我们相信，可以设计一种多项式时间算法，在 $k = 1$ 的情况下回答极大匹配的存在性问题，方法类似于

针对 MDS 的 [6] 方法（即在图的类树分解上进行细致的动态规划）。更长期的目标是重新利用研究鲁棒性所获得的洞见，助力动态算法的设计。

致谢。
我们感谢 Nicolas El Maalouly 就完美匹配展开富有成效的讨论，也感谢 Dennis Olivetti 指出了参考文献 [10]。

参考资料

1 Nicolas Braud Santoni、Swan Dubois、Mohamed Hamza Kaaouachi 和 Franck Petit。时变图中不可能性结果的通用框架。载于 IEEE 第 29 届并行与分布式处理国际研讨会（IPDPS 2015）第 17 届并行与分布式计算模型进展研讨会（APDCM 2015），第 483–489 页。IEEE，2015。2 Nicolas Braud-Santoni、Swan Dubois、Mohamed-Hamza Kaaouachi 和 Franck Petit。时变图中的后续 700 项不可能性结果。《国际网络与计算期刊》，6(1)：27–41，2016。3 A. Casteigts 和 P. Flocchini。动态网络中的确定性算法：问题、分析与算法工具。技术报告，加拿大国防研究与发展部，2013-020，2013。4 A. Casteigts、P. Flocchini、W. Quattrociocchi 和 N. Santoro。时变图与动态网络。《国际并行、涌现与分布式系统期刊》，27(5)：387–408，2012年。5 Arnaud Casteigts、Timothée Corsini、Hervé Hocquard 和 Arnaud Labourel。脆弱网络中距离与直径的鲁棒性。载于第一届动态网络算法基础研讨会（SAND 2022），LIPIcs 第 221 卷，第 9:1–9:16 页，2022年。 doi:10.4230/LIPIcs.SAND.2022.9。6 Arnaud Casteigts、Swan Dubois、Franck Petit 和 John Michael Robson。鲁棒性：受动态网络启发的一种新型遗传性。《理论计算机科学》，806：429–445，2020。doi:10.1016/j.tcs.2019.08.008。7 Cornelius Croitoru 和 Emilian Suditu。图中的完美稳定集。《信息处理快报》，17(1)：53–56，1983。 doi:10.1016/0020-0190(83)90091-1。8 Juho Hirvonen 和 Jukka Suomela。分布式算法，2020。 https://jukkasuomela.fi/da2020/da2020.pdf。9 David Peleg。分布式计算：一种对局部性敏感的方法。SIAM，2000。10 David P Summer。随机可匹配图。《图论期刊》，3(2)：183–186，1979。doi:10.1002/jgt.3190030209。11 B. Xuan、A. Ferreira 和 A. Jarry。计算动态网络中的最短、最快和最前行程。《国际计算机科学基础期刊》，14(02)：267–285，2003。