arXiv:2304.05859v2 [cs.DM] 9 Jul 2023

平面图中具有算法推论的霍尔型定理

EbrahimGhorbani, Hossein Jowhari*

数学学院，K. N. Toosi University of Technology，邮政信箱16765-3381，伊朗德黑兰。{ghorbani,jowhari}@kntu.ac.ir

摘要

给定一个图 $G=(V,E)$，对于一个顶点集 $S\subseteq V$，令 $N(S)$ 表示 V中与 S中的某个顶点相邻的顶点集。受 Woodall（1973）对图的绑定数概念的推广启发，对于顶点集 $X\subseteq V$，我们将 X的绑定数定义为满足以下条件的最大数，记作 bind(X)：对于每个 $S\subseteq X$，若 $N(S)\neq V(G)$，则有 $|N(S)|\geq b|S|$。基于此定义，我们证明，若图 $V(G)$ 含有一个子集 X，且 bind(X) $=1/k$，其中 k为整数，则 G 具有一个大小至少为 $|X|/(k+1)$ 的匹配。利用这一结论，我们为平面图中匹配大小的估计量推导出紧界。这些估计量此前曾用于设计数据流计算模型下、以次线性空间算法近似匹配大小的方法。具体而言，我们证明，在平面图中，局部优越顶点的数量是匹配大小的 3 因子近似。Jowhari（2023）此前的分析证明了 3.5 的近似因子。作为另一项应用，我们证明，Esfandiari 等人（2015）提出的一个估计量的简单变体，在平面图中可实现匹配大小的 3 因子近似。具体来说，令 s 为两端点的度均不超过 2 的边数，令 h 为度至少为 3 的顶点数。我们证明，当图为平面图时，匹配大小至少为 $(s+h)/3$。该结果推广了一个已知事实：每个具有 n 个顶点且最小度为 3 的平面图都存在一个大小至少为 $n/3$ 的匹配。

1 引言

对于二分图 $G=(A\cup B,E)$，著名的霍尔定理 [6] 根据 A 的子集的邻域大小，给出了 A 存在完美匹配的充要条件。具体而言，霍尔定理指出，若对每个 $S\subseteq A$ 都有 $|N(S)|\geq|S|$，则 $\nu(G)\geq|A|$，其中 $\nu(G)$ 是 G 中最大匹配的大小。对于一般图，或许最相关的结果是 Woodall [10] 提出的。在其开创性工作中，Woodall 将图 G 的绑定数定义为 bind(G)，即满足以下条件的最大数值 b：对每个 $S\subseteq V(G)$，若 $N(S)\neq V(G)$，则有 $|N(S)|\geq b|S|$。基于此定义，Woodall 给出了以下结果。

定理 1（Woodal [10]）。设 G 是一个满足绑定数$(G)=c\in[0,\frac{1}{2}]$ 的图。那么 $\nu(G)\geq\frac{c}{c+1}|V(G)|$。

[{"id":0,"output":"作者还隶属于伊朗德黑兰基础科学研究院（IPM）数学学院。本研究得到 IPM 项目编号 98050014 的资助。"}]

1.1 主要结果

在本文中，我们利用一个类似的概念，并证明了一个可以被视为一般图中霍尔定理另一种变体的命题。为此，我们将 Woodall 绑定数的定义扩展到顶点的任意子集。

定义 1. 设 $G = (V, E)$ 是一个简单图。顶点集 $X \subseteq V$ 的绑定数，记作 bind(X)，是满足以下条件的最大数 b：对于每个子集 $S \subseteq X$，若 $N(S) \neq V(G)$，则有 $|N(S)| \geq b|S|$。

以下是本文的主要结果。

定理 2。设 $k \geq 2$ 为一个整数。设 X 为图 G 中绑定数为 $c = \frac{1}{k}$ 的顶点集。则 $\nu(G) \geq \frac{c}{c+1}|X|$。

我们使用最大流最小割定理，以及关于度有界的树和单圈图中匹配大小的下界，证明定理 2。遗憾的是，我们的证明策略仅适用于 bind$(X) = \frac{1}{k}$ for an integer k。我们猜想，类似的结论应对所有取值 bind$(X) \in [0, \frac{1}{2}]$都成立，并将其留作未决问题。值得注意的是，定理 2 并不能直接由定理 1 推出。取 $X \cup N(X)$ 上的诱导子图并不足够，因为它的绑定数可能远小于 bind(X)。另一方面，我们不清楚如何运用 Woodall 的论证（该论证基于 Tutte-Berge 公式 [1], ），从定理 1 推导出我们的结果。

1.2 应用

现在我们来探讨定理 2 的一些应用。

局部优越顶点。给定一个无向图 $G = (V, E)$，若顶点 $u \in V$ 满足 u 有一个度不超过 deg(u) 的相邻顶点，则称 $u \in V$ 为局部优越顶点。图 G 的局部优越顶点集合记为 $L(G)$。无向图 G 的森林度是覆盖 G 所有边所需的最少森林数。文献 [7], 表明，在森林度有界的图中，局部优越顶点的数量可以近似匹配的大小。特别地，文献指出，当 G 为平面图时，有 $\nu(G) \leq |L(G)| \leq 3.5\nu(G)$。此外，当 G 的森林度至多为 α 时，文献证明了 $\nu(G) \leq |L(G)| \leq (\alpha + 2)\nu(G)$。利用定理 2，我们改进了先前的分析，并证明了以下定理。证明见第 3 节。

定理 3。设 G 是一个图，$\alpha \geq 2$ 是一个整数。当G 是平面图时，我们有 $\nu(G) \leq |L(G)| \leq 3\nu(G)$。当 G 的森林度不超过 α时，我们有 $\nu(G) \leq |L(G)| \leq (\alpha + 1)\nu(G)$

作为一个直接推论，这表明，在平面图中，[7] 所提出的算法的近似因子实际上是 $3 \pm \epsilon$。类似地，当 G 是顶点到达流中的有界森林度图时，这将改进对 $\nu(G)$进行近似的界。在顶点到达模型（也称为邻接表模型）中，输入图以任意顺序排列的顶点序列给出。每个顶点还附带一个其邻居列表。在边到达模型（也称为任意顺序模型）中，输入图以任意顺序排列的边序列给出。

另一种 3 因子近似。Esfandiari等人 [5] 首次证明，通过仅考虑图的顶点和边的局部邻域，可以在常数因子内近似有界森林度图中的最大匹配大小。更准确地说，给定一个简单图 G，令 $H_t(G)$表示度大于 t 的顶点集合，并令 $S_t(G)$表示 G 中两端点的度均不超过 t的边集合。通过将霍尔定理推广到二部图（见 [5, 引理3.1]），Esfandiari等人证明，当 G 的森林度有界于 α时，$\nu(G) \leq |S_{(2\alpha+3)}(G)| + |H_{(2\alpha+3)}(G)| \leq (5\alpha+9)\nu(G)$。特别地，由于平面图的森林度有界于3，令 $\alpha = 3$，该估计量给出了平面图中匹配大小的24因子近似。作为定理2 的另一个应用，我们证明下面的不等式，该不等式给出了平面图中匹配大小的更好估计。

定理4。对于平面图 G，我们有 $\nu(G) \leq |S_2(G)| + |H_2(G)| \leq 3\nu(G)$。

最小度为3的平面图中的匹配。已知，一个具有 n个顶点且最小度为3的平面图至少有一个大小为 $n/3$的匹配。这一事实最早由 Nishizeki 和 Baybars [8]发现。 [8] 中的证明基于著名的Tutte–Berge 公式 [1]。 [3]给出了一个针对3-连通平面图的不同证明，该证明同样基于Tutte–Berge公式。Biedl [2] 提出了一种线性时间算法，利用一种替代性证明，在平面图中寻找大小为 $n/3$ 的匹配。定理4的一个直接推论给出了这一事实的另一种证明，这一证明可能具有独立的研究价值。值得注意的是，在一个最小度为3的图 G 中，集合 $S_2(G)$为空。

2 定理2的证明

我们先陈述两个引理，它们将在后续论证中用到。 .

引理1. 设 G 为一个简单图， $X \subseteq V(G)$是一个顶点集，且 bind$(X) = 1/k$，其中 $k \geq 1$为某个整数。那么存在一个函数 $f\colon X \to N(X)$，满足以下性质：

- 对于所有 $x \in X$， $f(x)$都是 x的相邻顶点，
- 对于所有 $y \in N(X)$， $|\{x\colon f(x) = y\}| \leq k$。

证明。证明是对利用著名的最大流最小割定理证明霍尔定理的过程所作的直接推广。我们按如下方式构造一个单源单汇流网络 F。 F的顶点集为 $A \cup B \cup \{s,t\}$，其中 s 和 t 分别是源点和汇点。对于 X中的每个 x，我们在 A中放入一个对应的顶点。同样，对于每个 $y \in N(X)$，我们在 B中放入一个对应的顶点。对于每个 $x \in A$ 和 $y \in B$，当且仅当 y 是 G中 x 的相邻顶点时，我们添加边(x,y)。这些边的容量设为 ∞（准确地说，此处取一个大于 $|X|$ 的值即可）。我们从源点 s 向 A 中的所有顶点添加一条容量为1的边。最后，我们从 B 中的每个顶点向汇点 t 添加一条容量为 k的边。

我们声称， F 中的最大 s-t 流的值为 $|X|$。这一结论意味着存在一个值为 $|X|$的整数 s-t 流。因此， A 与 B 之间各边上的流量为我们提供了满足所需性质的赋值函数 f。

关于我们的最大流断言，假设 s-t割(S,T)，其中 $S = \{s\} \cup A' \cup B'$和 $T = A'' \cup B'' \cup \{t\}$，是 F中的一个最小 s-t割。注意，此处 $A' \cup A'' = A$和 $B' \cup B'' = B$。

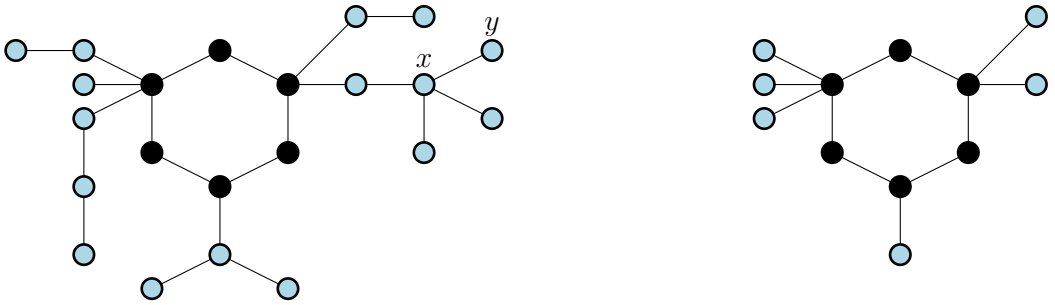

图1：引理2的证明中讨论的图实例。(a) 一个附有树的环。(b) 一个附有单边的环。

根据最大流最小割定理，(S,T) 割的容量等于最大流的值，且至多为 $|X|$。由此可得，(S,T) 不应割断 A 和 B 之间的任何无穷容量边。因此，该割的容量恰好为 $|A''|+k|B'|$。同样根据这一观察，我们有 $N(A')\subseteq B'$。因此

$$c(S,T)=|A''|+k|B'|\geq|A''|+k|N(A')|.$$

若 $N(A')=V(G)$，则 $|B'|=|V(G)|$。在这种情况下，显然 $c(S,T)\geq k|B'|\geq|X|$。因此，我们可以放心地假设 $N(A')\neq V(G)$。由 X 是一个绑定数为 $1/k$ 的顶点集这一事实，我们得到

$$c(S,T)\geq|A''|+k|N(A')|\geq|A''|+|A'|=|A|=|X|.$$

因此，如所述，最大 s-t 流的值为 $|X|$。至此，证明完成。 □

引理2。设 $k\geq 3$。以下陈述成立。

- 设 T 是一棵阶为 n、最大度为 k 的树。那么 $\nu(T)\geq\frac{n-1}{k}$.
- 设 G 为一个阶为 n且恰有一个环、最大度为k的连通图。我们有 $\nu(G)\geq\frac{n}{k}$。这里，G 可能含有平行边，在这种情况下，我们将唯一的一对平行边计作一个环。

证明。第一部分源于一个更一般的事实（见 [9, 第 121] 页）：在一个具有 m 条边且最大度为 k 的二分图 G中，我们有 $\nu(G)\geq m/k$。对于第二部分，我们对顶点数进行归纳法证明。考虑一个阶为 n 的连通图 G，它只有一个环，且其最大度为 $k\geq 3$。$n=2$ 的基础情形显然成立。注意，我们可以将 G 看作附着在一个简单圈 C 上的树的集合 T_1、.....、T_r。见图1(a)。

假设对于某个 i，存在一个顶点 $x\in V(T_i)\setminus V(C)$，使得$\deg(x)\geq 2$。我们可以假设 x 只有一个度为 ≥ 2 的邻点和 $d\leq k-1$ 个度为1的邻点。令 y为其中一个叶邻点。我们选取边 xy 作为匹配边，并从 G 中移除 x 及其叶邻点。剩下的是一个阶为 $n-(d+1)$ 的连通图 G'，它只有一个环，且最大度为 $\leq k$。根据归纳假设，我们有 $\nu(G')\geq{}^{n-}{}_{(d+1)\ k}$。因此，$\nu(G)\geq 1+{}^{n-}{}_{\binom{d+1}{k}}=\frac{k}{k}+\frac{n-d-1}{k}\geq\frac{n}{k}$)。

现在假设不存在满足上述条件的顶点 x 。在这种情况下，树 T_1、...、T_r 是连接到圈 C上的单边。见图1(b)。我们区分两种情况。在一种情况下， G 是一个简单圈（树为空）。每个阶为 n 的圈都有一个大小至少为 $\frac{n-1}{2} \geq \frac{n}{k}$ 的匹配。接下来，假设有一些边连接到圈 C上。设 z是圈 C 中的一个顶点，它有一个度为1的邻点 y 。我们选取边 zy 作为匹配边，并从 G中移除 z及其叶邻点。设移除的顶点数为 $d \leq k-1$ 。剩下的是一个阶为 $n-d$ 且最大度为 $\leq k$的树 T' 。根据第一部分中的陈述，我们有 $\nu(T') \geq \frac{n-d-1}{k}$。因此 $\nu(G) \geq 1+\frac{n-d-1}{k} = \frac{k}{k}+\frac{n-d-1}{k} \geq \frac{n}{k}$。证明完成。

□

现在我们可以证明主要结果了。

定理 2 的证明。由于 $\mathrm{bind}(X) = 1/k$，根据引理1，存在一个函数 $f\colon X \to N(X)$，具有引理陈述中描述的性质。我们将 X under$f$ 的像记作 $f(X)$。

考虑按以下方式 $\vec{H}$定义的有向图： $V(\vec{H}) = X \cup f(X)$，并且当 $f(x) = y$时，存在一条边 $(x,y) \in E(\vec{H})$。我们将 $\vec{H}$的无向版本记为 H，其定义为$\vec{}$简单地去掉 H中边的方向。注意， H 可能包含平行边。然而，如果排除这些平行边， H 确实是 G的一个子图。因此， H 的任何匹配 $\vec{}$ $\vec{}$也是 G中的一个匹配。令 H_1、...、H_t为 H的连通分量，并令 H_1、...、H_t为这些连通分量对应的有向分量。对于 $j = 1$、...、t，我们设 $X_j := X \cap V(\vec{H}_j)$。固定任意$i \in \{1,\dots,t\}$。我们断言， H_i具有大小至少为 $|X_i|/(k+1)$的匹配。由于这些连通分量是顶点不交的，且有 $|X_1|+\cdots+|X_t| = |X|$，证明这一断言足以确立$\vec{}$定理。为证明这一断言，考虑有向分量 H_i。

首先，假设 $\vec{H}_i$ 是一个有向无环图（DAG）。每个有向无环图都有一个出度为零的顶点。设 u 是 H_i中的这样一个顶点。根据 H的定义，顶点 u 不可能属于 X 。因此， $|X_i| \leq |V(\vec{H}_i)| - 1$。注意，由于 $\vec{H}_i$ 是有向无环图，其无向版本 H_i 没有平行边。此外，其最大度为 $k+1$。根据引理2和前述观察可得， $\nu(H_i) \geq \frac{|V(H_i)|-1}{k+1} = \frac{|V(\vec{H}_i)|-1}{k+1} \geq \frac{|X_i|}{k+1}$。

因此，在证明的其余部分，我们假设 $\vec{}$，我们将证明 H_i $\vec{}$具有一种特定结构。具体而言，我们将证明 H_i 只包含一个环（这里将平行边视为一个环）。为此，我们需要先作几点观察。

$\vec{}$观察 1. 设 $e_1,\dots,e_r$ 是构成 H_i 中一个环 C 的一系列边。设 C 是方向恢复后的同一边序列。则 C 必定是一个有向环。

$\vec{}$ $\vec{}$证明。注意， C 至少有两条边。如果 C 不是有向环，那么 C 中必定存在一个顶点$\vec{}$ $\vec{}$，它有两条出边。这与 H 的定义矛盾。 □

观察 2. 设 H_i 中有一个环 C，且 $x \in V(H_i) \setminus V(C)$。设 P 是一条将 x 与 C 连接起来的简单路径$\vec{}$。那么 P 中的所有边都必须指向该环。

证明。设 z 是 C 中的一个顶点，且是 H_i中 P 的一个端点。另一个端点是 x。由$\vec{}$观察 1，C 必为一个有向环；又由于 z 不能有两条出边，因此 P 中与 C 相接的边$\vec{}yz$ 必须指向 z。因此， P 中的所有边都必须指向C，否则就能找到一个有两条出边的顶点，这与假设矛盾。

□

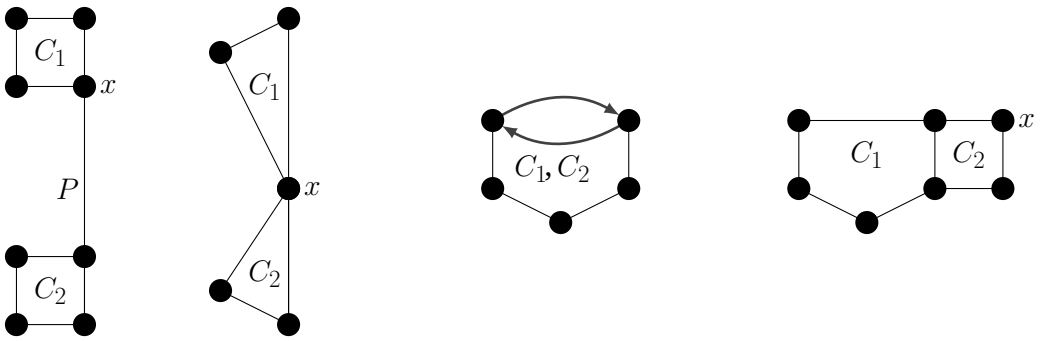

图 2：定理 2 证明中矛盾情形的示意图。

现在我们准备证明 H_i 只有一个环。假设 H_i 有两个不同的环，分别为 C_1和 C_2。我们分四种情况讨论：

(a) C_1 和 C_2 顶点不交。在这种情况下，设 P 是H_i中连接 C_1 和 C_2 的一条简单路径。设 x 是 P在 $V(C_1)$中的起始顶点。见图 2(a)。根据观察 2， P 的 $\vec{}$初始边必定从 x出发。这表明 x 在 H_i中有两条出边，矛盾。(b) C_1 和 C_2 共享一个顶点 x，但 $E(C_1)\cap E(C_2) = \emptyset$。见图 2(b)。同样根据观察 2，$x$ 最终会有两条出边，矛盾。(c) $V(C_1) = V(C_2)$且 $E(C_1) \cap E(C_2) \neq \emptyset$。只有当 C_1 和 C_2 仅相差一条平行边时，才会出现这种情况，如图 2(c)所示。根据观察 1，我们得出矛盾$\vec{}$ $\vec{}$，因为 C_1 和 C_2 不可能同时是有向环。(d) $V(C_1) \neq V(C_2)$且 $E(C_1)\cap E(C_2) \neq \emptyset$。不失一般性，假设存在一个顶点 $x \in V(C_1) \setminus V(C_2)$。必定存在两条不相交的路径 P_1和 P_2，连接 x 和 C_2，如图 2(d)所示。从 x出发，这两条路径的起始边不同。$\vec{}$ $\vec{}$根据观察 2， P_1 和 P_2 都应指向 C_2。这意味着 x 有两条出边，矛盾。

因此，我们可以得出结论： H_i 只包含一个环。

由引理2可推得， H_i 具有大小至少为 $|V(\frac{H_i}{k+1}| \geq \frac{|X_i|}{k+1})$ 的匹配。这就完成~~子定理~~ 2 的证明。 □

3 定理2的应用

在本节中，我们将展示定理 2 的应用。以下事实众所周知，并将在后续证明中使用。

事实 1. 设 $G = (V, E)$ 是一个图。以下陈述均成立。

- 如果 G 是一个二部平面图，那么 $|E| \leq 2|V| - 4$。

- 若 G 的森林度有界于 α，则 $|E| \leq \alpha|V|$。

作为定理 2 的一个应用，我们首先证明以下引理，它是证明定理 3 和定理 4 的共同基础。对于图 G，回顾一下， $L(G)$ 是 G 中局部优越顶点的集合，而 $H_t(G)$ 是 G 中度大于 t 的顶点集合。我们还定义 $L_t(G)$ 为 G 中度至多为 t 的局部优越顶点集合。换句话说，

$$L_t(G) = \{x \in L(G) : \deg(x) \leq t\}.$$

引理 3。设 $t \geq 2$ 是一个整数，且 $K_t(G) := L_t(G) \cup H_t(G)$。以下结论成立。

- 若 G 是一个平面图，则 $|K_2(G)| \leq 3\nu(G)$。
- 若 G 是一个森林度有界于 t的图，则 $|K_t(G)| \leq (t+1)\nu(G)$。

证明。假设 G 是一个森林度有界于 t的图或一个平面图，我们证明 $\mathsf{bind}(K_t(G)) \geq 1/t$。由此，结论可由定理 2 得出

固定 $t \geq 2$ 并考虑任意子集 $Z \subseteq K_t(G)$。设 $Z' = Z \setminus N(Z)$。我们证明$|N(Z')| \geq \frac{1}{t}|Z'|$。考虑二分图 $G' = (Z' \cup N(Z'),\ E')$。我们采用收费论证。若存在一个 $y \in N(Z')$，它在 Z'中至多有 t 个邻居，就将这些邻居分配给 y。我们从 G' 中移除 y及其邻居，并以此方式继续，直到 $N(Z')$ 中不再有顶点在 Z'中至多有t 个邻居。设 $G'' = (Z'' \cup N(Z'),\ E'')$为剩余图。首先注意到， $N(Z'')$ 中的所有顶点的度至少为 $t+1$。这意味着 $Z'' \subseteq H_t(G)$；否则，若对于某个 $i \leq t$存在 $x \in Z'' \cap L_i(G)$，它必定在 $N(Z'')$中有一个度至多为 $i \leq t$的邻点，这就产生矛盾。由于 $t \geq 2$ 和 G'' 是平面图或森林度有界于 t的图的子图，根据事实 1，我们有 $|E''| \leq t(|N(Z'')| + |Z''|)$。因此，我们有 $(t+1)|Z''| \leq |E''| \leq t(|N(Z'')| + |Z''|)$，这意味着 $|N(Z'')| \geq \frac{1}{t}|Z''|$。综上可得

$$\begin{aligned}
|N(Z)| &= |Z \setminus Z'| + |N(Z')| && \text{(by the definition of } Z') && (5)\\
&\geq |Z \setminus Z'| + \frac{1}{t}|Z' \setminus Z''| + |N(Z'')| && \text{(by the assignment procedure)} && (6)\\
&\geq |Z \setminus Z'| + \frac{1}{t}|Z' \setminus Z''| + \frac{1}{t}|Z''| && && (7)\\
&\geq \frac{1}{t}|Z \setminus Z'| + \frac{1}{t}|Z' \setminus Z''| + \frac{1}{t}|Z''| && && (8)\\
&\geq \frac{1}{t}|(Z \setminus Z') \cup (Z' \setminus Z'') \cup Z''| = \frac{1}{t}|Z|. && && (9)
\end{aligned}$$

This finishes the proof. □

定理 3的证明。不等式的左侧源于这样一个事实：对于每条边，至少有一个端点是局部优越顶点。对于右侧，我们注意到，对于任意正整数 t，$L(G) \subseteq K_t(G)$成立。因此， $|L(G)| \leq |K_t(G)|$，通过应用引理 3，我们得到所述结论。

□

在顶点到达模型中，本文提出一种随机流算法，使用 $O(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon^2})$ 空间来近似 $\nu(G)$ [7]。作者依据以下事实：对于平面图，$|L(G)| \leq 3.5\nu(G)$；对于 α-有界森林度图，$|L(G)| \leq (\alpha+2)\nu(G)$（采用不同的分析方法）。作者据此论证，该算法对于平面图和 α-有界森林度图的近似因子分别为 $3.5+\varepsilon$ 和 $\alpha+2+\varepsilon$。作为定理 3 的推论，我们可以改进文献 [7] 中所提出算法的近似因子界。因此，我们得到以下算法推论。

推论 1. 设 G 是一个阶为 n 的平面图。在顶点到达模型中，存在一种随机化数据流算法，可在 $3\pm\varepsilon$ 因子范围内近似 $\nu(G)$，并使用 $\tilde{O}(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon^2})$ 空间。对于森林度有界于 α 的图 G，存在一种算法，可在使用相同空间界的情况下，在 $1+\alpha\pm\varepsilon$ 因子范围内近似 $\nu(G)$。

我们通过给出用于求平面图匹配数的 3 因子近似算法的证明，结束本节。

定理4的证明。回顾一下，$S_t(G) = \{(u,v) \in E : \deg(u) \leq t$ 且 $\deg(v) \leq t\}$. 。首先，我们注意到 $\nu(G) \leq |S_t(G)| + |H_t(G)|$ 成立。为说明这一点，设 M 是 G 中的一个最大匹配。每条边 $e \in M$ 要么属于 $S_t(G)$，要么其某个端点属于 $H_t(G)$。这就推出了不等式的左侧。为证明右侧，设 G 是一个平面图。我们需要证明 $|S_2(G)| + |H_2(G)| \leq 3\nu(G)$。我们对边数进行归纳。显然，对于空图，该断言成立。假设 G 有一条浅边，即存在一条边 $uv \in S_2(G)$。此时，我们删除 u 和 v 上的所有边，得到另一个图 G'。由于 $\deg(u) \leq 2$ 且 $\deg(v) \leq 2$，删除 u 和 v 上的边后，集合 $S_2(G) \cup H_2(G)$ 至多损失 3 个元素。注意，删除边可能会产生一些新的浅边。尽管如此，我们仍可得出 $|S_2(G)| + |H_2(G)| \leq 3 + |S_2(G')| + |H_2(G')|$。根据归纳假设，有 $|S_2(G')|+|H_2(G')| \leq 3\nu(G')$。因此，我们有 $|S_2(G)|+|H_2(G)| \leq 3+3\nu(G')$。另一方面，$\nu(G) \geq \nu(G') + 1$。于是，我们得到 $|S_2(G)| + |H_2(G)| \leq 3 + 3(\nu(G) - 1) \leq 3\nu(G)$。现在，假设 G 没有浅边，即 $S_2(G) = \emptyset$。根据引理 3，有 $|L_2(G) \cup H_2(G)| \leq 3\nu(G)$。显然，$|H_2(G)| \leq 3\nu(G)$。因此，在这种情况下，我们得到 $|S_2(G)| + |H_2(G)| \leq 3\nu(G)$。证明完毕。

□

4 总结

读者可能会想知道，在绑定数的定义中排除满足 S 其中 $N(S) = V(S)$ 的子集，其依据是什么。之所以作此排除，是因为这样可以使绑定数的取值范围更广。若不作此排除，绑定数将被限制在 $[0,1]$, 的范围内；而按照当前定义，绑定数最高可达 $n-1$，这一数值在完全图 K_n 中出现。Woodall [10], 尤其给出了关于绑定数大于 1 的图的有趣结果。例如，他证明了每个绑定数至少为 $\frac{3}{2}$ 的图都具有一个哈密顿回路。此外，请注意，对于绑定数处于 $[0,\frac{1}{2}]$, 范围内的 $X \subseteq V(G)$, 我们可以将这一排除从定义中删除，而不会产生任何不良影响。不过，为了避免引入新的定义并保持一致性，我们仍采用 Woodall 所定义的绑定数。

定理 2是紧的。作为一个简单的见证，考虑一个星图 S_k，其上有 $k+1$ 个顶点。其最大匹配的大小为 $\frac{k+1}{k+1} = 1$，而 S_k 的绑定数为 $\frac{1}{k}$。此外可以看出，

该陈述在 $k = 1$的情况下不成立。考虑奇环C_n作为反例。 C_n 的绑定数为1，而 C_n 中的匹配大小小于 $\frac{n}{2}$。

为定理4提供的相同证明也适用于森林度为2的图。人们很容易猜想，当 G 是一个森林度有界于 t的图时， $|S_t(G)| + |H_t(G)| \leq (t+1)\nu(G)$。遗憾的是，定理4的归纳证明无法推广到 $t \geq 3$的情形。然而，我们知道，当 $t = 1$ （即， G 是一个森林）时， $|S_1(G)| + |H_1(G)| \leq 2\nu(G)$这一陈述是正确的。要看出这一点，请注意，孤立边属于任何最大匹配。此外，已知 [4]在一棵树中，非叶节点的数量至多是最大匹配大小的两倍。这就证明了该陈述对森林成立。

参考文献

[1] Claude Berge. 关于图的最大匹配，《巴黎科学院院报》，巴黎，247:258–259，1958。[2] Therese Biedl，快速寻找平面图中的大匹配，CoRR，abs/1902.07812，2019。网址：http://arxiv.org/abs/1902.07812，arXiv:1902.07812。[3] Therese C. Biedl、Erik D. Demaine、Christian A. Duncan、Rudolf Fleischer 和 Stephen G. Kobourov，极大匹配与最大匹配的紧确界，《离散数学》，285(1-3):7–15，2004。doi:10.1016/j.disc.2004.05.003。[4] Marc Bury、Elena Grigorescu、Andrew McGregor、Morteza Monemizadeh、Chris Schwiegelshohn、Sofya Vorotnikova 和 Samson Zhou，匹配估计的结构性结果及其在流式处理中的应用，《算法学》，81(1):367–392，2019。doi:10.1007/s00453-018-0449-y。[5] Hossein Esfandiari、Mohammad Taghi Hajiaghayi、Vahid Liaghat、Morteza Monemizadeh 和 Krzysztof Onak，平面图及更广泛图类中估计匹配大小的流式算法，载于 Piotr Indyk（编），第二十六届ACM-SIAM离散算法年会论文集，SODA 2015，美国加利福尼亚州圣迭戈，2015年1月4日至6日，第1217–1233页。工业与应用数学学会，2015。doi:10.1137/1.9781611973730.81。[6] Philip Hall，关于子集的代表元，《伦敦数学学会杂志》，10:26—30，1935。[7] Hossein Jowhari，一种用于低森林度图中匹配大小的估计量及其两个应用，《组合优化杂志》，45(1):21，2023。doi:10.1007/s10878-022-00929-z。[8] Takao Nishizeki 和 Ilker Baybars，平面图最大匹配基数的下界，《离散数学》，28(3):255–267，1979。doi:10.1016/0012-365X(79)90133-X。[9] Douglas B. West，《图论导论》，第二版，普伦蒂斯·霍尔公司，上萨德尔河镇，新泽西州，2001。[10] D.R. Woodall，图的绑定数及其安德森数，《组合理论杂志B辑》，15(3):225–255，1973。doi:10.1016/0095-8956(73)90038-5。