arXiv:2304.05862v1 [math.RA] 12 Apr 2023

威廉姆斯猜想对流星图成立

L. G. CORDEIRO、E. GILLASPY、D. GONÇALVES 和 R. HAZRAT

摘要。流星图是一个由两个不相交的环以及连接这两个环的路径组成，且没有源点和汇点的连通图。我们证明，两个流星图移位等价，当且仅当它们强移位等价；当且仅当它们对应的 Leavitt 路代数分次 Morita 等价；当且仅当它们的分次 K-理论 K_0^{gr} 彼此 $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-模同构。因此，流星图的 Leavitt 路代数分次 Morita 等价，当且仅当它们的图 C^*-代数等变 Morita 等价。

1. 引言

有限型移位是符号动力系统理论中的核心对象；两个有限型移位之间的同构称为 共轭。在共轭意义下，每个有限型移位都来源于一个 本质图——即一个有限的连通有向图 E，且没有汇点或源点[23]。与图 X_E 相关联的移位空间 E 由 E中的双向无限路径集合以及将路径自然地向左平移构成。这称为边移位。

判断两个有限型移位 X_E， X_F 是否共轭通常是一个困难的问题，因为这需要了解 E 和 F 中所有可能的双向无限路径。在其开创性论文中，[26], Williams 引入了移位等价（SE）和强移位等价（SSE）的概念，这些概念更易于处理。Williams 在[26] 中证明，强移位等价完全刻画了共轭，并将 SSE 描述为由入分裂/出分裂及其逆变换所生成的等价关系。（我们将在下文第2.4节详细介绍这些变换。）

移位等价是比 SSE 更弱的等价关系，而且也更易于计算，正如 Krieger 在 [22] 中所证明的那样。Williams 最初在 [26] 中断言 SE $\iff$ SSE。一年后，他发现了证明 SE $\Longrightarrow$ SSE 的一个缺陷 [27], ，但直到 25 年后，Kim和 Roush 才在 [21] 中找到了 SE $\Longrightarrow$ SSE 的反例。

确定 SE 与 SSE 等价的平移类别仍是一个开放问题。即使对于 2×2 矩阵，例子也有很多 [23, 例 7.3.13]：这些矩阵

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k-1 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } B_k = \begin{pmatrix} 1 & k(k-1) \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

对于 $k \geq 1$ 是移位等价的，但目前仅知它们对于 $1 \leq k \leq 3$是强移位等价的。

SSE 和 SE 的概念在算子代数理论中有非常有趣的诠释，围绕这些概念的相关研究也在持续深入开展（参见 [10, 11] 及其中的参考文献）。

本文中，我们证明，对于流星图这一类图，SSE 与 SE 的概念相同。所谓流星图是由两个不相交的环以及连接这两个环的路径组成的连通本质图；参见下文定义 3.9 。我们使用的若干工具已广为人知，即

2010数学主题分类。 18B40,16D25。关键词与短语。 有向图，talented 幺半群，移位等价，分次 Grothendieck 群，Leavitt 路径代数，图 C^*-代数。

Williams 的图变换和 Krieger 的维数理论（§2.4）。我们的关键思路是通过 Leavitt 路代数理论，在符号动力系统与 talented 幺半群的概念之间架起桥梁 [20]，如下所示：若本质图 E 和 F 移位等价，则它们的 Krieger 维数群同构，$\Delta(E) \cong \Delta(F)$。已知 $\Delta(E) \cong K_0^{\mathrm{gr}}(L(E))$，后者是 Leavitt 路代数 $L(E)$ [4, 19]的分次 Grothendieck 群。因此，我们得到一个 $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-序同构 $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) \cong K_0^{\mathrm{gr}}(L(F))$。分次 Grothendieck 群的正锥可以仅根据底层图来描述，借助的正是 E的所谓 talented 幺半群 T_E。因此，由图的移位等价可得到一个 $\mathbb{Z}$-幺半群同构 $T_E \cong T_F$。这个同构使我们能够掌握幺半群中的元素（例如极小元素、原子等），进而掌握图的几何性质（圈的数量、长度等）。因此，仔细分析幺半群同构，就能证明 E 和 F 可以通过入分裂、出分裂及其逆变换相互转化。应用 Williams 定理，我们得出图 E 和 F 强移位等价，因此 $L(E)$ 与 $L(F)$ 分次 Morita 等价。这便得到流星图的 Williams 猜想（SE $\Leftrightarrow$ SSE）和分次分类猜想（$K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) \cong K_0^{\mathrm{gr}}(L(F)) \Leftrightarrow L(E)$ 与 $L(F)$ 分次 Morita 等价）。

本文的组织结构如下：第 2 节回顾本文所依赖的基本概念，例如 Γ-幺半群、幺半群 M_E、T_E 与有向图 E相关的出分裂/入分裂，以及 Krieger维数群。为了深入分析 talented 幺半群 T_E（它是一个 $\mathbb{Z}$-幺半群），第 3 节介绍了 Γ-阿基米德类这一概念，它适用于 Γ-幺半群。正如定理 3.11所证明的，流星图的 talented 幺半群具有特别良好的 $\mathbb{Z}$-阿基米德类结构；我们据此在第 4 节证明主要结果。利用与图相关联的 talented 幺半群以及本文前文建立的工具，我们通过 Williams 的入分裂和出分裂证明了定理 4.15，并由此表明流星图类在移位等价下封闭，且对这一类图而言，强移位等价（SSE）与移位等价（SE）相同。

2. 背景：幺半群、图与代数

2.1. 幺半群、 $\mathbb{Z}$-幺半群与序理想。半群是一个带有结合二元运算的集合。半群的子半群按通常方式定义：它们是对该运算封闭的非空子集。

幺半群是运算具有单位元的半群。幺半群的子幺半群是同时包含单位元的子半群。本文主要关注交换幺半群，即运算满足交换律的幺半群。在这种情况下，运算采用加法记号（符号为 $+$），单位元记作零（0）。若交换幺半群M 满足：$x + y = 0$ 属于 M 时必有 $x = y = 0$，则称其为锥形。若幺半群 M 满足：$x + a = y + a$ 属于 M 时必有 $x = y$，则称其为可消去的。

给定交换幺半群 M，我们通过规定当且仅当存在某个 $z \in M$ 使得 $y = x + z$ 时，在 M 上定义代数预序 $x \leq y$。如果 M 是锥形且可消去的，那么 $\leq$ 是偏序。反过来，如果 $\leq$ 是偏序，那么 M 是锥形的（但不一定可消去）。

一个 Γ-幺半群，其中 Γ 是阿贝尔群，由一个幺半群 M 组成，并配备了 Γ 通过幺半群同态给出的群作用。元素 $x \in M$ 在群元素 $\gamma \in \Gamma$ 的作用下的像记为 ${}^{\gamma}x$。本文中，我们研究 $\mathbb{Z}$-幺半群。

自然数集合记为 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$。在通常的加法运算下，它是由单个元素生成的自由幺半群。

本文中遇到的 $\mathbb{Z}$-幺半群之一如下。

定义 2.1. 设 k 为正整数。幺半群 $T = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{N}$，配备由 $1(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k) = (a_k, a_1 \ldots, a_{k-1})$ 定义的 $\mathbb{Z}$ 作用，称为秩为 k 的 $\mathbb{Z}$-循环幺半群。

2.2. 图及其相关幺半群。 A有向图 E（我们通常简称为图）由两个集合 E^0 和 E^1 组成，其元素分别称为顶点 和边，以及两个函数 s、r: $E^1 \to E^0$ 组成，分别称为源 映射和值域 映射。在本文中，我们关注行有限 图，即满足对所有 $v \in E^0$ 均有 $|s^{-1}(v)| < \infty$ 的图。

有向图 E 中的汇点 是满足 $|s^{-1}(v)| = 0$ 的顶点 $v \in E^0$；源点 是满足 $|r^{-1}v| = 0.$ 的顶点 $v \in E^0$。如果有向图 E 没有汇点或源点，则称其为本质图。本文将重点关注本质图。

设 E 是一个有向图。E 中的一个（有限）路径 是由边 $\alpha_i \in E^1$ 构成的字符串 $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$，满足对所有 i 均有 $r(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$。路径 $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 的长度 为 n，记作 $|\alpha|$。边上的源映射和值域映射可扩展到路径，具体如下

$$s(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = s(\alpha_1) \qquad \text{and} \qquad r(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = r(\alpha_n).$$

顶点被视为长度为 0 的路径，每个顶点都与其源和范围重合。

若顶点 v 是路径 α 中某条边的源或范围，则称其位于该路径上。位于 α 上的顶点集合记为 α^0。

若 s和 r在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$上的限制是单射，则称路径 $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$为简单路径。$E$ 中的圈是指长度至少为 1 的简单路径 α，且满足 $s(\alpha) = r(\alpha)$。

定义 2.2。设 E 为行有限图。我们将 F_E 定义为由 E^0生成的自由交换幺半群。E的图幺半群记为 M_E，它是 F_E 关于以下关系取商所得:

$$v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} r(e)$$

对每个不是汇点的 $v \in E^0$ 。

定义 M_E 的关系可以更具体地描述如下：首先，在 F_E 上定义关系$\to_1$ 如下：对于 $\sum_{i=1}^{n} v_i \in F_E$ 以及任意 $1 \le j \le n$，令

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \to_1 \sum_{i \neq j}^{n} v_i + \sum_{e \in s^{-1}(v_j)} r(e). \tag{1}$$

于是， M_E 是 F_E 对由 $\to_1$生成的同余 $\to$ 取商所得。确切地说， $\to$ 是 F_E 上包含 $\to_1$的最小自反、传递且可加的关系。该关系可以如下理解：若$x = \sum_i x_i$ 是 F_E的一个元素，我们可以让一个顶点 x_i “流动”，从而构造元素 $y_1 = \left(\sum_{j \neq i} x_j\right) + \sum_{e \in s^{-1}(x_i)} r(e)$，使得 $x \to y_1$。重复这一过程，并让 y_1 的一个顶点“流动”，我们便可构造另一个元素 $y_2 \in F_E$ ，使得 $y_1 \to y_2$。换言之，我们只需将 $\to_1$ 的定义应用于 F_E中元素表示里的顶点。根据 $\to$的定义，每个满足 $x \to y$ 的元素 $y \in F_E$ ，都可以通过以这种方式依次让 x 的顶点“流动”来构造。因此，下面的命题显而易见:

命题 2.3. 设 $x = \sum_i x_i$ 和 $y = \sum_j y_j$ 是 F_E中的元素，其中 $x_i, y_j \in E^0$。若 $x \to y$，则

(1) 对于每个 i，都存在 j，使得在 E 中存在一条从 x_i 到 y_j 的路径;
(2) 对于每个 j，都存在 i，使得在 E 中存在一条从 x_i 到 y_j 的路径。

根据上述命题，顶点 v 流向顶点 u，当且仅当 $v = u$，或者存在 $x \in F_E$，使得 u 是 x 的一个加项，并且 $v \to x$。

以下引理对本文余下部分至关重要，因为它使我们能够用 F_E 中较简单的关系 $\to$ 来表述 M_E 定义中的关系。

引理 2.4 ([3, 引理 4.2 和 4.3])。 设 E 为行有限图。

(1) （合流引理）若 $a, b \in F_E \setminus \{0\}$，则 $a = b$ 属于 M_E 当且仅当存在 $c \in F_E$，使得 $a \to c$ 且 $b \to c$。（注意，在此情形下，$a = b = c$ 属于 M_E。）(2) 若 $a = a_1 + a_2$ 且 $a \to b$ 属于 F_E，则存在 $b_1, b_2 \in F_E$，使得 $b = b_1 + b_2$、$a_1 \to b_1$ 且 $a_2 \to b_2$。

接下来我们定义*talented* 幺半群 T_E，它属于 E，据认为能够编码 Leavitt 路代数 $L_{\mathrm{k}}(E)$(参见猜想 2.7)，并且在本文后续部分充当符号动力系统与 Leavitt 路径代数理论之间的桥梁。

定义 2.5。 设 E 是行有限有向图。 E 的*talented* 幺半群 记作 T_E，它是由 $\{v(i) \mid v \in E^0, i \in \mathbb{Z}\}$ 生成的交换幺半群，并满足以下关系。

$$v(i) = \sum_{e \in s^{-1}(v)} r(e)(i+1)$$

对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，以及每个不是汇点的 $v \in E^0$。整数的加法群 $\mathbb{Z}$ 通过幺半群自同构作用于 T_E，作用方式为平移指标：对于每个 n、$i \in \mathbb{Z}$ 和 $v \in E^0$，定义 ${}^n v(i) = v(i+n)$，这扩展为 $\mathbb{Z}$ 在 T_E 上的作用。全文中，我们将 T_E 中的元素 $v(0)$ 记为 v。

图的 talented 幺半群也可以看作所谓的覆盖图 E的图幺半群，记作 $\overline{E}$：我们有 $\overline{E}^0 = E^0 \times \mathbb{Z}$, $\overline{E}^1 = E^1 \times \mathbb{Z}$，值域映射和源映射定义如下

$$s(e, i) = (s(e), i), \qquad r(e, i) = (r(e), i+1).$$

注意，图幺半群 $M_{\overline{E}}$ 具有自然的 $\mathbb{Z}$-作用，其作用由 ${}^n(v, i) = (v, i+n)$给出。以下定理使我们能够将 talented 幺半群 2.4 与 T_E 等同起来，从而对它应用合流引理 $M_{\overline{E}}$。

定理 2.6 ([20,引理 3.2])。 对应关系

$$T_E \longrightarrow M_{\overline{E}}$$
$$v(i) \longmapsto (v, i)$$

诱导出一个 $\mathbb{Z}$-幺半群同构。

[2]的引理 5.5 证明，由于 $\overline{E}$ 没有有向环，对于所有 $E.$，$M_{\overline{E}} = T_E$ 都是消去幺半群。

2.3. **Leavitt 路代数**。 设 $E = (E^0, E^1, r, s)$ 为一个有向图。可以将一个系数取自域 k 的代数 $L_{\mathrm{k}}(E)$ 与图 E相关联，该代数称为*Leavitt* 路代数。关于 Leavitt 路径代数的理论、它与 William Leavitt 所定义代数之间的关系，以及本文采用的所有标准术语，读者可参阅 Abrams、Ara 和 Siles Molina 的著作 [1] 。全文中，对于系数取自域 k 的有向图 E 所对应的 Leavitt 路代数，我们简记为 $L(E)$。

寻找 Leavitt 路代数分类的完备不变量是一项持续进行的工作。分次分类猜想（[18, 19], [1, §7.3.4]）大致预测，分次

格罗滕迪克群 K_0^{gr} 能够在分次同构意义下对有限图的 Leavitt 路代数进行分类。该猜想与 Williams 猜想密切相关（参见 §2.4）。

为了陈述分次分类猜想，我们首先回顾 Γ-分次环的分次 Grothendieck 群的定义。给定一个带单位元的 Γ-分次环 A 以及一个分次有限生成射影（右） A-模 P，令 $[P]$ 表示与 P分次同构的分次 A-模的类。则幺半群

$$\mathcal{V}^{\mathrm{gr}}(A) = \left\{ [P] \mid P \text{ is a graded finitely generated projective A-module} \right\} \tag{2}$$

具有一个 Γ模结构，定义如下：对于 $\gamma \in \Gamma$ 和 $[P] \in \mathcal{V}^{\mathrm{gr}}$（$A$），$\gamma.[P] = [P$（$\gamma$）$]$.

$\mathcal{V}^{\mathrm{gr}}(A)$ 的群完备化称为 分次 ***Grothendieck*** 群，记为K_0^{gr} (A)。 $\mathcal{V}^{\mathrm{gr}}(A)$ 上的 Γ-模结构在群 K_0^{gr} (A) 上诱导出一个 $\mathbb{Z}[\Gamma]$-模结构。特别地， $\mathbb{Z}$-分次环的分次 Grothendieck 群具有自然的 $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-模结构。

猜想 2.7。 [分次分类猜想]令 E 和 F 为有限图。则以下各项等价。

(1) Leavitt 路径代数 $L(E)$ 和 $L(F)$ 分次 Morita 等价，(2) C^*-代数 $C^*(E)$ 和 $C^*(F)$ 等变 Morita 等价，(3) 存在一个保序的 $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-模同构 $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) \to K_0^{\mathrm{gr}}(L(F))$，(4) talented 幺半群 T_E 和 T_F 是 $\mathbb{Z}$-同构的。

此外，如果 (4) 中群之间的同构或 (3) 中幺半群之间的同构是带基点的，即保留序单位，那么这些代数应当是（分次／规范不变）同构的（见[18]）。

有关分次分类猜想的研究，请参阅 [4, 5, 7, 6, 10, 15, 30] ；有关 C^*-代数的等变 Morita 等价，请参阅 [12, 16] 。

2.4. 符号动力系统。 Williams 在 [26] （另见 [23, §7]）中引入了矩阵的移位等价概念，旨在提供一种可计算的工具，用于判定两个有限型移位之间是否共轭。回顾一下，若存在非负矩阵R 和 S ，使得 $A = RS$ 和 $B = SR$成立，则称两个方形非负整数矩阵 A 和 B 初等移位等价，记作 $A \sim_{ES} B$。由初等移位等价生成的方形非负整数矩阵上的等价关系 $\sim_S$ 称为强移位等价。较弱的移位等价概念定义如下：若存在非负矩阵 R 和 S ，使得 $A^l = RS$ 和$B^l = SR$对某个 $l \in \mathbb{N}$ 成立，且 $AR = RB$ 和 $SA = BS$成立，则称非负整数矩阵 A 和B 移位等价 。

有向图 E 的邻接矩阵 $A_E \in M_{E^0}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 提供了符号动力系统与有向图之间的联系。根据定义，A_E 是一个方阵，且

$$A_E(v, w) = \left| \left(s^{-1}(v) \cap r^{-1}(w) \right) \right|.$$

反之，任意 $A \in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 都可以解释为一个图 E 带有$|E^0| = n$ 的邻接矩阵；对于所有 $1 \leq i$、$j \leq n$， E^1 恰好由从顶点 i 到顶点 j 的 $A(i, j)$ 条边组成。

将一个方形非负整数矩阵与其对应的图等同起来（并将图与其邻接矩阵等同起来），Williams 证明，两个矩阵 A 和 B 强移位等价，当且仅当可以通过某些图变换从 A 到达 B。我们在此回顾这些出分裂和入分裂图变换，因为全文都会用到它们。

操作 (I)：入分裂。

定义 2.8。 [13, 定义 6.3。20] 设 E 为一个有向图。对于每个满足 $r^{-1}(v) \neq \emptyset$ 的 $v \in E^0$，取 $r^{-1}(v)$ 的一个划分 $\left\{\mathscr{E}_1^v、\ldots\ldots、\mathscr{E}_{m(v)}^v\right\}$。我们如下构造一个新图 F。令

$$F^0 = \left\{v_i \mid v \in E^0, 1 \leq i \leq m(v)\right\} \cup \left\{v \mid r^{-1}(v) = \emptyset\right\}$$

$$F^1 = \left\{e_j \mid e \in E^1, 1 \leq j \leq m(s(e))\right\} \cup \left\{e \mid r^{-1}(s(e)) = \emptyset\right\},$$

并按如下方式定义源映射和值域映射：如果 $r^{-1}(s(e)) \neq \emptyset$，且 $e \in \mathscr{E}_i^{r(e)}$，则

$$s(e_j) = s(e)_j, \qquad r(e_j) = r(e)_i, \text{ for all } 1 \leq j \leq m(s(e)).$$

如果 $r^{-1}(s(e)) = \emptyset$，则令 $s(e)$ 为 e 的原始源，并令 $r(e) = r(e)_i$，其中 $e \in \mathscr{E}_i^{r(e)}$。

图 F 称为 E 的入分裂，反之称 E 为 F 的入合并图。我们称 F 是通过对 E 执行操作 *(I)*形成的。

操作 (O)：出分裂。 与入分裂和入合并图相对偶的概念称为出分裂 和出合并图。给定一个图 $E = (E^0, E^1, s, r)$，其转置图 定义为 $E^* = (E^0, E^1, r, s)$。

定义 2.9。 [1, 定义 6.3。23] 如果图 F 是图 E 的出分裂（出合并图），则 F^* 是 E^* 的入分裂（入合并图）；我们称 F 是通过对 E 执行操作 *(O)*得到的。

我们强调，在本文中，我们要求用于入分裂或出分裂的集合 $\mathscr{E}_v^i$ 非空。

现在我们已经定义了入分裂和出分裂，可以给出 Williams 结果的精确表述。回顾一下，[23, 定义 2.2.5] 与有向图 E 相关联的移位空间 X_E（等价地，与邻接矩阵 A_E 相关联的移位空间 X_{A_E}）由 E 中的无限路径$\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成，并配备自然的左移位。

定理 2.10 (Williams[26])。设 A 和 B 是两个方形非负整数矩阵，E 和 F 是两个本质图。

(1) X_A 与 X_B 共轭，当且仅当 A 与 B强移位等价（*SSE*）。
(2) X_E 与 X_F 共轭，当且仅当 E 可以通过一系列入分裂/出分裂及其逆操作从 F 得到。

关于此定理的证明，参见 [23,第 7]章。

尽管强移位等价刻画了有限型移位的共轭，但目前尚无通用算法可以判定 X_A和 X_B是否强移位等价，即使对于 2×2矩阵A, B. 也是如此。Krieger 已证明，较弱的移位等价概念更易于分析。在 [22],中，他提出了一个不变量，用于在移位等价意义下分类不可约有限型移位。令人惊讶的是，符号动力系统中的 Krieger维数群可以表示为 Leavitt 路代数的分次 Grothendieck 群。由于这一事实将成为我们解决流星图上的 Williams问题的关键，我们在此暂停一下，回顾这一联系的细节。

设 A 是一个非负整 $n \times n$ 矩阵。考虑自由有序阿贝尔群序列 $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n \to \cdots$，其中 $\mathbb{Z}^n$ 上的序由逐点方式定义（即正锥为 $\mathbb{N}^n$）。那么 A 在该序列上作为保序群同态作用，如下所示：

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{A} \cdots .$$

该系统的直接极限 $\Delta_A := \varinjlim_A \mathbb{Z}^n$，连同其正锥 Δ^+，以及由 A 在直接极限上诱导的自同态 δ_A： $\Delta_A \to \Delta_A$，构成了 Krieger 所考察的不变量，现称为*Krieger*维数群。沿用 [23], 的记法，我们将这个三元组记为$(\Delta_A,\ \Delta_A^+,\ \delta_A)$。

下述定理由Krieger证明（[22, 定理4.2], 另请参阅 [23, §7.5] ，其中给出了详细的代数处理）。

定理2.11。设 A 和 B 为两个方形非负整数矩阵。则， A 和 B 移位等价，当且仅当

$$(\Delta_A, \Delta_A^+, \delta_A) \cong (\Delta_B, \Delta_B^+, \delta_B).$$

Wagoner 注意到， δ_A 在 Δ_A 上诱导的结构使 Δ_A 成为一个 $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-模。这一事实在 [28, 29] 中得到了系统使用（另见 [9, §3]）。

令 E 为一个图，且 $L(E)$ 为其关联的 Leavitt 路代数。回顾一下，分次 Grothendieck 群 $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E))$ 具有自然的 $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$- 模结构。定理 2.12 表明，该 Leavitt 路代数的分次 Grothendieck 群与和 A_E^t（邻接矩阵的转置）相关联的有限型移位的 Krieger 维数群一致A_E:

$$\left(K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)), (K_0^{\mathrm{gr}}(L(E))^+\right) \cong (\Delta_{A^t}, \Delta_{A^t}^+).$$

这将建立 Leavitt 路径代数理论与符号动力系统之间的联系 [4, 19,17]。

定理 2.12。 设 E 是一个不含汇点的有限图，其邻接矩阵为 A。则存在一个 $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-模同构 ϕ： $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) \longrightarrow \Delta_{A^t}$，使得 $\phi(K_0^{\mathrm{gr}}(L(E))^+) = \Delta_{A^t}^+$。

容易看出，两个矩阵 A 和 B 移位等价，当且仅当 A^t 和 B^t 移位等价。结合定理 2.12 以及 Krieger维数群是移位等价的完备不变量这一事实，我们得到以下推论，该推论将在主定理 4.15中使用。

推论 2.13。 设 E 和 F 是不含汇点的有限图， A_E 和 A_F 分别是它们的邻接矩阵。则 A_E 与 A_F 移位等价，当且仅当存在一个保序的 $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-模同构，使得 $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) \cong K_0^{\mathrm{gr}}(L(F))$ 。

3. 阿基米德等价类

本节的目标是定理 3.11，该定理描述了流星图的 talented 幺半群中阿基米德等价类的结构。这一结构是我们在定理 4.15中证明流星图的移位等价蕴含强移位等价的关键要素。

我们在第 3.2 节的定义 3.9中定义流星图；第 3.1 节则更一般地研究阿基米德等价类。

3.1. **talented 幺半群的阿基米德等价类**。设 M Γ-幺半群，其中 Γ 是阿贝尔群。由元素 $x \in M$ 生成的 Γ-序理想，是包含 x的最小 Γ-序理想 $\langle x \rangle$ 。具体而言，

$$\langle x \rangle = \left\{ y \in M \mid y \leq \sum_i \gamma_i x, \gamma_i \in \Gamma \right\}. \tag{3}$$

Γ-阿基米德等价关系 $\asymp$ 定义在 M 上：若 $\langle x\rangle = \langle y\rangle$.，则 $x \asymp y$。更明确地说，$x \asymp y$ 当且仅当存在 γ_1、……、γ_k 以及 α_1、……、$\alpha_{k'}$，它们都属于 Γ，使得

$$x \leq \sum_{i=1}^{k} \gamma_i y \quad \text{and} \quad y \leq \sum_{i=1}^{k'} \alpha_i x.$$

一个 $\asymp$-等价类被称为阿基米德类（ M的）。我们将 $\asymp$-等价类（ x ）记为 $[x]$。容易看出， $[x]$ 是一个 Γ-半群。

注意，如果 Γ 是平凡的，我们就得到幺半群的阿基米德等价类的标准定义[25, §13]。

例3.1。设 $M = \mathbb{N} \oplus \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$ 是一个带通常逐分量加法的幺半群。注意到， M 的阿基米德分量由8个半群组成，分别对应于原点、每条坐标轴以及三维空间中的每个平面。

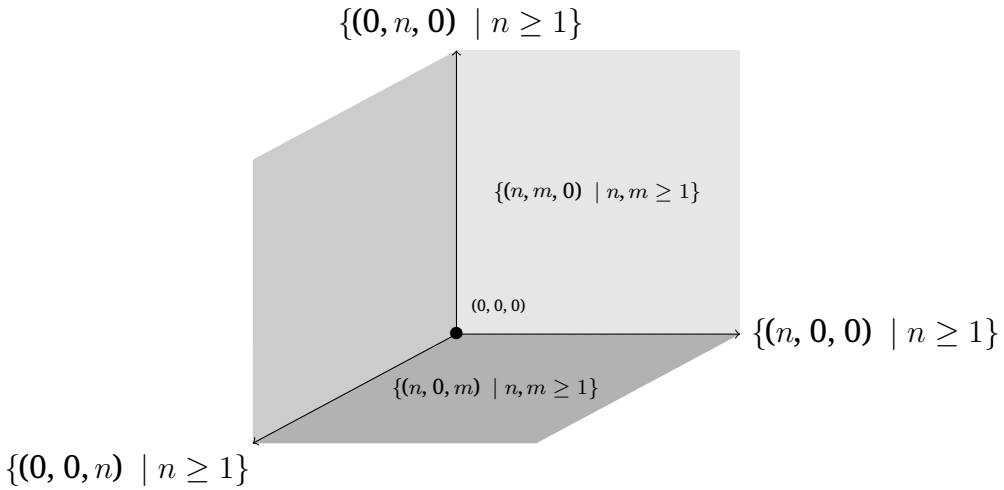


图 1. 幺半群 $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$ 的阿基米德等价类。其余的类 $\{(m, n, p) \mid m, n, p \geq 1\}$ 未在图中展示。

然而，将 M 视为一个 $\mathbb{Z}$秩为 3 的循环幺半群（参见定义 2.1），其阿基米德分量只有 0 和 $M\backslash 0$。

设 E 是一个有限图。我们的首要目标是用几何术语描述与 E 相关的幺半群的 $\mathbb{Z}$-阿基米德等价类。为此，我们先对E 的子集进行一种构造，它对应于在（1）中定义在 F_E 上的关系 $\to_1$ 。

给定一个子集 $A \subseteq E^0$，令

$$A^{1\to} = r(s^{-1}(A)) \cup \{a \in A \mid a \text{ is a sink}\}.$$

在本文中，我们也用 $A^{\to}$ 表示 $A^{1\to}$ 。对于 $n \geq 2$，我们定义 $A^{n\to} = (A^{(n-1)\to})^{1\to}$。最后，定义

$$R(A) = \bigcap_{n\geq 1} \left(\bigcup_{m\geq n} A^{m\to} \right).$$

换句话说， $R(A)$ 由所有可从 A 中某个点沿流到达的汇点，以及所有可从 A 中的点沿任意长路径流到达的点组成。

定义 3.2. 我们将上述集合 $R(A)$ 称为 $A \subseteq E^0$ 的叶集。我们用 $\mathscr{L}(E)$ 表示 E 的叶集族，即,

$$\mathscr{L}(E) := \{R(A) \mid A \subseteq E^0\}.$$

命题 3.3. 如果 $v \in A$，且在 E 中存在一条从 v 到位于圈 C 上的顶点 w 的路径 γ，那么 C 上的每个顶点都属于 $R(A)$。

证明。 注意，对于任意 $m \geq 0, w \in A^{(m\cdot|C|+|\gamma|)\rightarrow}$。因此 $w \in R(A)$。类似地，如果 z 是圈 C 上的另一个顶点，且沿圈从 w 到 z 的路径长度为 j，那么对所有 $m \geq 0$， $z \in A^{(m\cdot|C|+j+|\gamma|)\rightarrow}$。 □

我们的下一个目标是描述何时 $B = R(B)$。这个问题的答案取决于顶点集合是否为遗传的这一概念。

定义 3.4. 对于有向图 E，子集 $H \subseteq E^0$ 若满足 $r(s^{-1}(H)) \subseteq H$.，则称为遗传的

注意，遗传子集的交集也是遗传的。因此，对每个 B ofE^0，都对应一个遗传闭包，它是包含 B 的 E^0 的最小遗传子集。

Pr命题 3.5. 对于有限图 E 和 $B \subseteq E^0$，以下条件等价。 .

(1) $B = R(A)$ 对于某个 $A \subseteq E^0$,(2) $B = B^{\rightarrow}$,(3) B 是汇点和圈的并的遗传闭包,(4) $B = R(B)$.

证明。 首先注意，映射 $X \mapsto X^{\rightarrow}$ 保持集合包含关系。

(1)⇒(2) 假设 $B = R(A)$。若 $x \in B^{\rightarrow}$，则以下情况之一成立:

- x 是 B 的汇点（因此特别有 $x \in B$）。
- x 可以由 B中的某个点 b 通过流到达。但此时，这个 $b \in B = R$（A）不是汇点，因此从 A出发的、大小任意大的路径也可以流到它。将这些路径首尾相接，我们看到 $x \in R$（A） $= B$。反之，如果 $x \in B = R$（A），则以下情况之一成立:
- x 是汇点，因此 $x \in B^{\rightarrow}$。
- x 不是汇点。于是存在无穷多条路径 α_1、α_2、.....，它们都从 A 出发并在 x结束，且长度严格递增。设 x_n 为 α_n中紧接在x之前的顶点。由于 E^0 是有限的， E^0 中的某个点 y 会与 x_n 重合无穷多次n。因此，如有必要取子序列，我们可以假设所有 x_n 都等于 y。将每条 α_n 的最后一条边删去后得到的路径，将A 中的某个点连接到 y，且这些路径的长度任意大，因此我们得出 $y \in B = R$（A）。根据构造，我们有 $x \in r$（s^{-1}（y））$\subseteq r$（s^{-1}（B））$\subseteq B^{\rightarrow}$。

(2)⇒(3)令 L 为所有位于 B 中某个圈上的顶点集合。于是 $L \subseteq B$，因此$L^{\rightarrow} \subseteq B^{\rightarrow} = B$。迭代可得 $L^{m\rightarrow} \subseteq B$ 对所有 $m \geq 1$。 $\overline{L}$ 的遗传闭包L 是$\bigcup_{m\geq 1} L^{m\rightarrow}$，因此它包含于 B。

还需证明， B 中的任意非汇点 x 都属于 $\overline{L}$。如果 $x \in B^{\rightarrow}$不是汇点，那么存在一条边 e_1: $x_1 \rightarrow x_0 = x$，满足 $x_1 \in B$。但此时 x_1 也不是

汇点，因此存在一条边 e_2：$x_2 \to x_1$，满足 $x_2 \in B$。重复这一论证，我们得到一系列边

$$\cdots \to x_3 \to x_2 \to x_1 \to x_0 = x$$

与 $x_i \in B$。由于 E^0 是有限的，我们能够找到 $j > i > 1$ 使得 $x_j = x_i$，从而得到一个圈

$$x_j \to x_{j-1} \to \cdots x_{i+1} \to x_i = x_j$$

完全包含在 L 中，因此 $x_i \in L$ 和 x 按构造属于由 x_i 生成的遗传子集，该子集包含于 $\overline{L}$ 中。

(3)⇒(4) 在 (3) 的条件下，很明显 $B = B^{\to}$，因此可得 $B = R(B)$。

(4)⇒(1) 是平凡的。 □

接下来我们证明，并集的叶是各个叶的并集。

命题 3.6. 对于有限图 E 和 $A, B \subseteq E^0$，有 $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$.

证明。 显然， $R(A) \cup R(B) \subseteq R(A \cup B)$；反过来，由定义可知 $(A \cup B)^{\to} = A^{\to} \cup B^{\to}$. 。迭代可得 $(A \cup B)^{m\to} = A^{m\to} \cup B^{m\to}$，因此 $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$

. □

下一个定理指出，图 E 的叶集合对应于相应 talented 幺半群的阿基米德等价类。下面这个类似于函数支撑集的概念将会很有用：若元素 $x \in T_E$ 的表示 $x = \sum_{v \in A, n \in \mathbb{Z}} k_{n,v}({}^n v)$ 满足以下条件，则称其支撑于 $A \subseteq E^0$：对每个 $v \in A$，都存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $k_{n,v} \geq 1$。注意， T_E 中的任意非零元素都存在一个支撑于 E^0的某个非空子集上的表示。

定理 3.7. 设 E 是一个有限图， T_E 是其关联的 *talented* 幺半群。

(1) 设 $x \in T_E$。若

$$x = \sum_{v \in A, n \in \mathbb{Z}} k_{n,v}({}^n v) = \sum_{w \in B, m \in \mathbb{Z}} l_{m,w}({}^m w),$$

分别是由 A 和 B支撑的 x 的表示，则 $R(A) = R(B)$。我们将这个共同的叶集记为 $R(x)$。

(2) 任意 $x \in T_E$ 都可以写成 $R(x)$中顶点的平移之和，即

$$x = \sum_{v \in R(x), n \in \mathbb{Z}} k_{n,v}{}^n v,$$

其中 $k_{n,v} \in \mathbb{N}$。

(3) 对于 $x, y \in T_E$，当且仅当 $R(x) \subseteq R(y)$时，有 $x \in \langle y \rangle$ 。

(4) $\mathscr{L}(E)$ 与 T_E 的阿基米德等价类集合之间存在一个双射：叶集合 $A \in \mathscr{L}(E)$ 对应于阿基米德类 $\left[\sum_{a \in A} a\right]$，而 $x \in T_E$ 的阿基米德类 $[x]$ 对应于叶集合 $R(x)$。

证明。

(1) 根据合流引理，如果从 x 的两个不同表示出发，它们都能流向第三个表示。此外，对于任意集合 $A \subseteq E^0$，我们有 $R(A) = R(A^{\to})$。现在即可得出陈述 **(1)**。

(2) 我们从一个表示 $x = \sum_{v\in A,\ n\in\mathbb{Z}} k_{n,\ v}({}^n v)$ 出发，该表示的支撑集是 E^0 的子集 A。根据 T_E 的定义，我们得到

$$\begin{aligned} x &= \sum_{v\in A, n\in\mathbb{Z}} k_{n,v}({}^n v) = \sum_{\substack{v\in A,n\in\mathbb{Z}\\ v \text{ a sink}}} k_{n,v}({}^n v) + \sum_{\substack{v\in A,n\in\mathbb{Z}\\ v \text{ not a sink}}} \sum_{e\in s^{-1}(v)} k_{n,v}({}^{n+1} r(e)) \\ &= \sum_{v\in A^{\to}, m\in\mathbb{Z}} k'_{m,w}({}^m w), \end{aligned}$$

其中 $k'_{m,\ w}$ 是所有以下形式项的和：$k_{m,\ w}$（若 $w \in A$ 是汇点）以及形式为$k_{m-1,\ v}$的项，其中 $v \in s(r^{-1}(w)) \cap A$。根据假设，对于所有 $v \in A$，都存在 n，使得 $k_{n,\ v} \geq 1$；因此，对于所有 $w \in A^{\to}$，都存在 m，使得 $k'_{m,\ w} \geq 1$。也就是说，这是一个支撑在 $A^{\to}$上的 x 的表示。

根据定义

$$R(x) = R(A) = \bigcap_{n\geq 1} \left(\bigcup_{m\geq n} A^{m\to} \right).$$

由于 E^0 是有限的，且上面的交集是递减的，因此被取交的集合序列最终稳定下来，也就是说，存在 M，使得对于所有 $n \geq M$，都有$\bigcup_{m\geq n} A^{m\to} = R(x)$。重复上一段中的过程，我们可以找到一个支撑在 $A^{M\to}$上的 x的表示，并且它满足所需性质。

(3) 若 $x \in \langle y\rangle$，则在 M_E 中，存在某个 $n \in \mathbb{N}$使得 $x \leq ny$。根据关于 E的合流引理，我们可以将 x 和 y 在 M_E 中写成以下形式

$$x = \sum_{v\in E^0} k(v)v \qquad \text{and} \qquad y = \sum_{v\in E^0} k'(v)v$$

其中 $0 \leq k(v) \leq k'(v)$。根据定义，

$$R(x) = R(\{v \mid k(v) \geq 1\})$$

对于 $R(y)$ 也同样如此，因此 $R(x) \subseteq R(y)$。

反之，假设 $R(x) \subseteq R(y)$。那么，任意 $v \in R(x) \subseteq R(y)$ 都有某个出现在 y 于 T_E 的表示中的顶点流入其中。也就是说，对于某个 $j \in \mathbb{Z}$，有 $v \leq {}^j y$。

因此，所有 $v \in R(x)$ 作为 T_E 的元素都属于 $\langle y\rangle$。进行平移和求和后，根据前一项，我们可以得出 $x \in \langle y\rangle$。

（4）根据前一项，x 的叶集仅取决于 x 的阿基米德类，因此映射 $[x] \mapsto R(x)$ 是良定义的。对于 $A \in \mathscr{L}(E)$，显然 $R(\sum_{a\in A} a) = R(A) = A$。

反之，令 $x \in T_E$ 和 $\overline{x} = \sum_{v\in R(x)} v$。我们需要证明 x 和 $\overline{x}$ 属于同一个阿基米德类。由（b）可知，x 可以写成顶点 ${}^i v$ 的平移之和，其中 $v \in R(x)$。由于 ${}^i v \leq {}^i \overline{x}$，每个 ${}^i v$ 都属于 $\langle \overline{x}\rangle$，因此它们的和 x 也属于 $\langle \overline{x}\rangle$。

另一方面，根据 $R(x)$ 的定义，任意 $v \in R(x)$ 都是由某个表示 x 的顶点流入的。这意味着，对于 $v \in R(x)$，我们有 $v \leq {}^i x$ for some$i$，因此 $v \in \langle x\rangle$。对 $v \in R(x)$ 求和可得 $\overline{x} \in \langle x\rangle$。□

现在，设 M 是一个原则上不带有 $\mathbb{Z}$-作用的幺半群。于是，将阿基米德等价类 M 定义为仿佛 M 被赋予了平凡的 $\mathbb{Z}$-作用：对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $x \in M$，均有 ${}^n x = x$。这尤其适用于行有限图 E 的图幺半群 M_E。由此得到以下推论。

推论 3.8。 对于有限图 E，映射

$$A \mapsto \sum_{a \in A} a$$

建立了 E 的叶集合与 M_E 的阿基米德等价类集合之间的双射。

证明。 我们使用定理 3.7 在 $\mathscr{L}(E)$ 与 T_E的阿基米德等价类集合之间的双射。注意映射 $T_E \to M_E$ 定义为

$$^{n}v \mapsto v \quad (v \in E^0, \quad n \in \mathbb{Z})$$

在.....的集合之间诱导双射 $\mathbb{Z}$-阿基米德等价类 T_E（具有其通常的 $\mathbb{Z}$-幺半群结构）以及 M_E（作为幺半群）。因此，定理3.7 中关于阿基米德等价类的几何刻画 M_E同样适用于□。

3.2. **流星图及其阿基米德类**。本节中，我们将阿基米德类的研究聚焦于流星图这一本文关注的对象。在定义流星图之前，回顾一下：每个顶点至多位于一个圈上的有向图称为不相交环图。显然，在这样的图中，任意两个不同的圈都没有公共顶点。对于图 E 中的圈 C_1、 C_2 ，若存在一条路径从 C_1 出发并在 C_2 结束，我们记作 $C_1 \Rightarrow C_2$ 。对于不相交环图类， $\Rightarrow$ 是一种自反、传递、反对称关系。

定义 3.9。 流星图 是一个连通的本质图 E ，由两个不相交的环C_0^E、 C_1^E以及连接这两个环的路径组成。

在流星图 E中，这两个环必然由 $C_0^E \Rightarrow C_1^E$关联。我们称 C_0^E为 E的源环 ，称 C_1^E为 E的汇环 。

流星图 E中的路径 $\alpha = p_0 p_1 \cdots p_n$称为迹 ，如果 $s\left(p_0\right) \in \left(C_0^E\right)^0$， $r\left(p_n\right) \in \left(C_1^E\right)^0$,且$s\left(p_i\right) \notin \left(C_0^E\right)^0 \cup \left(C_1^E\right)^0$对于 $1 \leq i \leq n$。对于迹 α，其内部 为 $p^0 \backslash \left(\left(C_0^E\right)^0 \cup \left(C_1^E\right)^0\right)$ 。注意，内部可能是空集。

下面的结果可以推广到具有不相交环的图，但我们将其写成流星图这一特殊情形，以此提示 talented 幺半群将在 4.15 中用于确立我们关于符号动力系统的主要结果。

命题 3.10. 设 E 为一个流星图，包含圈 C_0^E和 C_1^E，且满足 $C_0^E \Rightarrow C_1^E$。设v 和 w 分别为 C_0^E和 C_1^E上的顶点。那么对于任意元素 $x \in T_E$，存在 $j \in \mathbb{Z}$，使得 x 可以唯一地写成

$$\sum_{0 \leq i < p} a_i v(j-i) + \sum_{0 \leq i < q} b_i w(i),$$

其中 $|C_0^E| = p$, $|C_1^E| = q$ 和 $a_i, b_i \in \mathbb{N}$。

证明。 容易看出，我们可以写成

$$x = \sum_{i=0}^{n} c_i v(r_i) + \sum_{i=0}^{m} d_i w(s_i), \tag{4}$$

对于某些 c_i、 $d_i \in \mathbb{N}$ 和 r_i、 $s_i \in \mathbb{Z}$。此外，对于 E 的一条迹内部的任意顶点 z，存在 $j \in \mathbb{N}$，使得 $z(j) = w$。因此， $z = z(0) = w(-j)$。利用这一观察以及 the

鉴于 $C_0^E \Rightarrow C_1^E$和 $|C_0^E| = p$这一事实，我们得出结论：

$$v = v(p) + \sum_l e_l w(t_l), \tag{5}$$

其中 $e_l \in \mathbb{N}$ 且 $t_l \in \mathbb{Z}$。不妨设 r_n 是 $\{r_1, \ldots, r_n\}$中的最大整数。对于任意 i，记 $r_n - r_i = pl_i + r_i'$，其中 $0 \leq r_i' < p$。因此 $r_n - r_i' = r_i + pl_i$。反复使用（5），可将其写为

$$v(r_i) = v(r_i + pl_i) + \sum_l e_l' w(t_l') = v(r_n - r_i') + \sum_l e_l' w(t_l').$$

现在代入单位元（4），得到

$$x = \sum_{i=0}^{n} c_i v(r_n - r_i') + \sum_i d_i' w(s_i').$$

令 $j := r_n$，由于 $0 \leq r_i' < p$，我们可以写成

$$x = \sum_{0 \leq i < p} a_i v(j - i) + \sum_i d_i' w(s_i').$$

另一方面，由于 C_1^E 是一个无出口的 q 长度的圈，$w = w(q)$在 T_E中。因此，当 $s \equiv s'$ (模 q) 时，$w(s) = w(s')$。这使我们可以将 x 重新写为

$$x = \sum_{0 \leq i < p} a_i v(j - i) + \sum_{0 \leq i < q} b_i w(i).$$

现在我们证明这一表示是唯一的。假设我们还可以写成

$$x = \sum_{0 \leq i < p} a_i' v(j - i) + \sum_{0 \leq i < q} b_i' w(i).$$

我们将证明，对于所有 $0 \leq i < p$，$a_i = a_i'$；对于所有 $0 \leq i < q$，$b_i = b_i'$。

考虑由 $\mathbb{Z}$-序理想 $\langle w \rangle$ 生成的 w（参见方程（3））。事实 $v(j) \leq^p v(j)$，对于任意 $j \in \mathbb{Z}$，意味着 $v(j) \notin \langle w \rangle$。事实上，自然包含映射 $T_{C_0^E} \hookrightarrow T_E$ 下降为一个同构 $T_E/\langle w \rangle \cong T_{C_0^E}$。在这个商幺半群中，$x$ 的表示像为

$$\sum_{0 \leq i < p} a_i' v(j - i) = \sum_{0 \leq i < p} a_i v(j - i).$$

由于 $T_{C_0^E}$是一个循环幺半群（见定义2.1），因此 $a_i = a_i'$对所有 i均成立。由于 T_E 是可消的，我们可以从 x 的表示中去掉这些部分，从而得到

$$\sum_{0 \leq i < q} b_i w(i) = \sum_{0 \leq i < q} b_i' w(i) \in T_E. \tag{6}$$

由于该圈 C_1^E 包含 w 没有出口，顶点 $(C_1^E)^0$ 构成 E的遗传的子集。考虑幺半群 $T_{C_1^E}$。利用合流引理 2.4，以及 $(C_1^E)^0$ 是遗传的这一事实，很容易验证典范映射 $T_{C_1^E} \to T_E$ 是单射。因此，等式（6）也在 $T_{C_1^E}$中成立。然而幺半群 $T_{C_1^E}$是循环的，因此可得 $b_i = b_i'$对所有 i均成立。□

现在我们来到了本节的主要定理，该定理描述了流星图的阿基米德分量。

定理 3.11. 设 E 是一个流星图，其具有 $C_0^E \Rightarrow C_1^E$, $v \in (C_0^E)^0$, $w \in (C_1^E)^0$ 和 $p = |C_0^E|, q = |C_1^E|$。设 T_E 为相应的 *talented* 幺半群。那么， T_E 可以分解为其阿基米德 $\mathbb{Z}$-半群分量的不交并：

$$T_E = \{0\} \dot\cup [v] \dot\cup [w],$$

其中

$$[w] = \Big\{ \sum_{0 \le i \le q} k_i w(i) \mid k_i \in \mathbb{N}, \exists i \ s.t. \ k_i \neq 0 \Big\},$$

$$[v] = \Big\{ \sum_{i} l_i v(i) + \sum_{0 \le j \le q} k_j w(j) \mid l_i, k_j \in \mathbb{N}, \exists i \ s.t. \ l_i \neq 0 \Big\}.$$

证明。由定理 3.7(4)， $\mathscr{L}(E) = \{R(A) \mid A \subseteq E^0\}$ 与 T_E的阿基米德等价类之间存在双射。我们首先注意到，对于非空集合 $A \subseteq E^0$，若 $A \cap (C_0^E)^0 \neq \emptyset$，则 $R(A) = R(v) = E^0$；否则， $R(A) = R(w) = (C_1^E)^0$ 。为此，先假设 $z \in A \cap (C_0^E)^0 \neq \emptyset$。由命题 3.3， $(C_0^E)^0 \cup (C_1^E)^0 \subseteq R(z)$。若 w 是连接 C_0^E 和 C_1^E的一条迹上的顶点，则存在一条从 z 到 w的路径 γ。注意，对任意 $m \ge 0$， $w \in \{z\}^{(m \cdot p + |\gamma|)\rightarrow}$。因此， $w \in R(z)$也成立，从而 $R(z) = E^0$。由于 $R(z) \subseteq R(A)$，可得 $R(A) = E^0$。

另一方面，如果 $A \cap (C_0^E)^0 = \emptyset$，那么 A 中的所有元素都必须位于 C_0^E与 C_1^E之间的迹上，或位于（C_1^E）^{0}上。同样，命题 3.3 蕴含（C_1^E）$^0 \subseteq R$（A）。令 l 为 C_0^E与 C_1^E之间最长迹的长度。由于 $C_0 \Rightarrow C_1$，可知对于任意 $k \ge l$，都有 $A^{k\rightarrow} \subseteq (C_1^E)^0$,。因此， $R(A) \subseteq (C_1^E)^0$ 也成立；于是，如果 $A \cap (C_0^E)^0 = \emptyset$，则 $R(A) = (C_1^E)^0$。

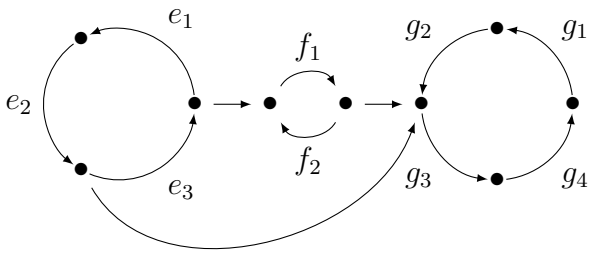
现在，由定理 3.7(4)，我们得到 的阿基米德等价类由 $[v]$ 和$[w]$ 给出（以及 $\{0\}$，对应于空集）。这就给出了该定理的第一部分。和 $[v]$ 的描述由命题3.10得出。 □

4. 流星图的动力学

本节中，我们研究流星图在入分裂和出分裂图变换下的行为，并证明主要结果——定理 4.15。首先给出以下定义，以便用不同方式描述流星图。

定义 4.1。有向图 E 中的一个圈 α 称为源环，若对所有 $v \in \alpha^0$，均有 $|r^{-1}(v)| = 1$ 。汇环类似地定义为满足对所有 $v \in \alpha^0$，均有 $|s^{-1}(v)| = 1$ 的圈 α 。

例 4.2. 下图是一个含有不相交环的图，由三个圈组成： $e_1e_2e_3$是一个源环； $g_1g_2g_3g_4$ 是一个汇环； f_1f_2 既不是源环也不是汇环。



接下来，我们观察到，流星图这一类在移位等价这一概念下是封闭的（见第 2.4 节），这一结论用到了推论 2.13。为了证明这个命题，我们需要先给出几个定义。

定义 4.3. 设 E 为一个有向图。若子集 $H \leq E^0$ 满足： $r(s^{-1}(v)) \subseteq H$蕴含 $v \in H$，则称其为饱和的。给定集合 $X \subseteq E^0$，其饱和闭包 ΣX 是包含 X的最小遗传饱和子集。

容易证明 [20, 引理 2.2] ：若 $H \leq E^0$ 是遗传且饱和的，并令$E\backslash H$表示图 $(E^0\backslash H, \{e \in E^1 : r(e) \notin H\}, r_E, s_E)$，则 $T_E/\langle H\rangle \cong T_{E\backslash H}$。此外，对于任意$X \subseteq E^0$，我们有 $\langle X\rangle = \langle \Sigma X\rangle$ 作为 T_E的理想。

对于 Γ-幺半群 M，回忆[20] 中的定义：若存在一个 $0 \neq \alpha \in \Gamma$使得 ${}^{\alpha}a = a$，则称元素 $0 \neq a \in M$ 为周期的。若 $a \in M$ 不是周期的，则称其为非周期的。我们用 $O(a)$表示 Γ 在元素 a 上的作用轨道，因此 $O(a) = \{{}^{\alpha}a \mid \alpha \in \Gamma\}$。此外，在一个锥形且可消去的$\Gamma$-幺半群 M中，若 $0 \neq b \leq a$ 则 $a = b$，我们称元素 a 为极小的。

在以下命题中，我们将使用图 E 中无出口的圈的集合与 talented幺半群 T_E 中最小周期元素的轨道一一对应，[20,引理 5.6]。

命题 4.4. 设 E 和 F 是移位等价的本质图。那么， E 是流星图，当且仅当 F 是流星图。

证明。由于 E 和 F 移位等价，根据推论 2.13，存在一个保序的 $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-模同构 $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) \cong K_0^{\mathrm{gr}}(L(F))$。由于分次 Grothendieck 群 $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E))$的正锥与 talented 幺半群 T_E $\mathbb{Z}$-同构（见 [20]），因此存在一个$\mathbb{Z}$-幺半群同构 $\phi : T_E \to T_F$。令 E 为一个具有源环 C_0^E和汇环 C_1^E的流星图。令 $w_E \in (C_1^E)^0$。则 w_E 是 T_E中的一个最小周期元素，即 ${}^{q}w_E = w_E$，其中$|C_1^E| = q$. 由此可知， $\phi(w_E)$ 是 T_F中的一个最小周期元素。因此，对于某个在 F 中无出口的圈上的顶点 w_F 以及某个 $i \in \mathbb{N}$，有 $\phi(w_E) = {}^{i}w_F$。将这个无出口的圈称为 C_1^F。令 $\langle w_E\rangle$为由 w_E生成的 $\mathbb{Z}$-序理想。我们有 $\phi(\langle w_E\rangle) = \langle w_F\rangle$。因此，将同构$\phi$ 传递到商上，我们得到诱导的 $\mathbb{Z}$-幺半群同构$\overline{\phi}$ ： $T_E/\langle w_E\rangle \to T_F/\langle w_F\rangle$。但是 $T_E/\langle w_E\rangle \cong T_E\backslash\Sigma\{w_E\}$。由于 E 是一个流星图， $E\backslash\Sigma\{w_E\} \cong C_0^E$是一个无出口的圈。因此$T_E/\langle w_E\rangle$ 是一个 $\mathbb{Z}$-循环幺半群，因而 $T_F/\langle w_F\rangle$也是如此。因此， $F\backslash\Sigma\{w_F\}$由一个无出口的圈组成，将其称为 C_0^F。这意味着 F 恰好包含两个不相交的环 C_0^F和 C_1^F。由于我们假设 F 是本质的，因而是连通的，我们得出 F 是一个流星图。□

接下来，我们将证明，任何流星图都可以仅通过入分裂、出分裂以及入合并和出合并，转化为一个流星图，其中所有迹都具有相同的源，且恰好由一条边组成。下面将形式化定义相关概念。

定义 4.5. 如果流星图 E 的所有迹都恰好由一条边组成，则称其处于准正规形 。如果流星图 E 处于准正规形，且 E的所有迹具有相同的源，则称其处于标准形 。

命题 4.6.任何流星图都可以仅通过入分裂、出分裂以及入合并和出合并，转化为一个处于标准形的流星图。

证明。考虑任意一个流星图 E。首先，使用前文提到的图变换，将 E 变换为另一个流星图——使得不同迹的内部彼此不相交。

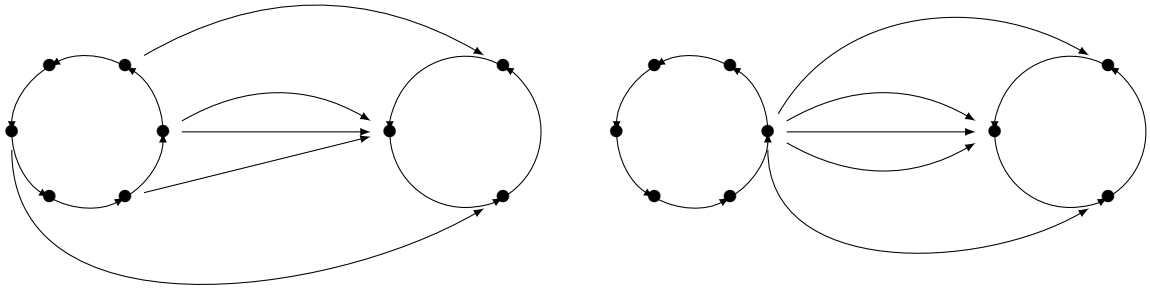


图 2。分别为处于准标准形（而非标准形）的图和处于标准形的图。



图 3。多源处的出分裂

假设存在不同的迹 E，其内部相交。也就是说，存在某个顶点u 位于某条迹的内部，同时是多于一条边的源或终点。假设前一种情况成立，我们暂时将这样的顶点称为“多源顶点”。在 u 处进行出分裂，并将从该顶点出发的边分开，我们得到新的顶点 u_1、u_2.....，其中每个顶点都只作为一条边的源点。见图 3。

这个新图中的迹与原图中的迹具有相同的长度。这个新图中的多源顶点与原图中的相同，但不包括 u；此外，$s(r^{-1}(u))$ 中的所有顶点现在都是多源顶点。因此，在所有多源点处进行出分裂，从最靠近汇环的点开始，向更靠近源环的点移动，就可以消除所有这些多源点。通过这种方式，我们可以将原图转换为这样一个图：迹的内部中的所有顶点都只作为一条边的源。

然后，我们在一条迹的内部进行入分裂（使用每个集合恰好包含一条边的划分），并进一步将图转换为这样一种形式：迹内部的每个顶点恰好是一条边的终点。通过这种方式，所得图中的迹具有互不相交的内部。示例见图4 。

现在，设 v 是源环上的一个顶点，也是某条迹的源点。将 $s^{-1}(v)$ 沿着该迹，将恰好最靠近源点的那条边分离出来进行出分裂，等同于使该迹的源点沿源环回退一步，并将该迹的长度增加一条边。见下方图5 。

这样一来，可以沿着源环移动各条迹的源点，但代价是迹的长度会增加。当然，也可以进行相反的操作（通过出合并）来缩短一条迹。

因此，我们可以安排这些迹，使每条迹都以同一个顶点 v_E 为源。

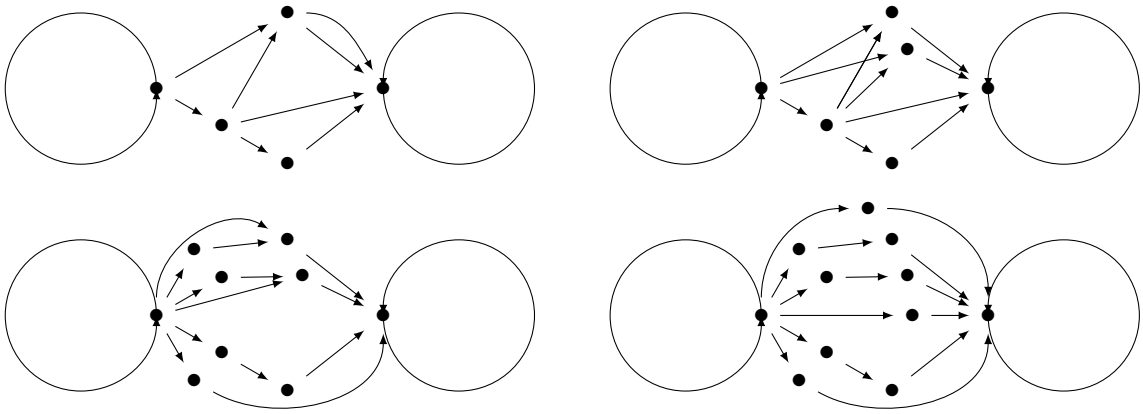


图 4. 对内部顶点进行出分裂，从最靠近汇环的顶点开始向左进行，随后沿相反方向进行入分裂。简而言之，此过程将每条原始迹转换为一条新的迹，其源、终点和长度均相同，但这些新迹的内部两两不相交。

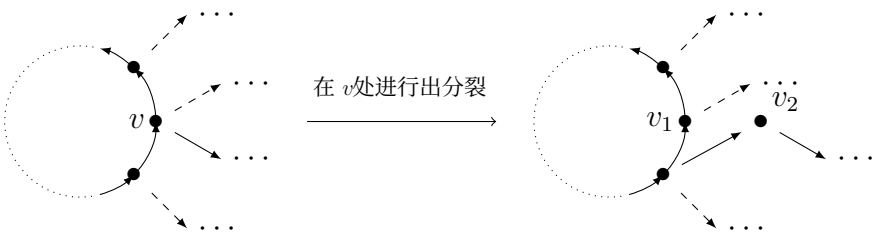


图 5. 在源环的一个顶点处进行出分裂。虚线箭头表示可能存在也可能不存在的迹，但无论如何，图变换都不会改变它们。

对汇环也可以采用类似的步骤（通过入分裂）。因此，通过在汇环处进行入合并，我们可以缩短这些迹，但代价是将它们的取值范围沿汇环向后移动，最终使所有迹都只含一条边。

简而言之：从流星图 E 开始，我们可以对其中的迹进行入分裂和出分裂，从而得到另一个迹彼此不相交的流星图。接着，我们可以对源环的顶点进行出分裂，使所有迹具有相同的源。再对汇环的顶点进行入合并，就能使所有迹的长度都为 1。□

以下结果是上述证明的推论。

推论 4.7。 如果 E 是流星图，那么入分裂或出分裂 E 会保持 E的圈长度不变。特别地，入分裂、出分裂和合并会将流星图变为流星图。

证明。 在迹内部的顶点处进行入分裂或出分裂，不会影响 E的各个圈上任何边的源或范围。此外，不能在源环上的顶点处进行非平凡入分裂，也不能在汇环上的顶点处进行非平凡出分裂。因此，设我们在汇环上的顶点 v 处进行了入分裂。不妨设 $\mathscr{E}_1$ 包含从$C_1^E \cap r^{-1}(v)$出发的单条边 e 。入分裂图中存在唯一的汇环，它由将 C_1^E中的 e 替换为 e_1 ，并将e中的 $v = r$替换为 v_1而得到。类似地，在顶点 $v \in C_0^E$处进行出分裂会将 C_0^E变为恰好一个新圈，其长度与 C_0^E相同。□

推论 4.8。 对于任意流星图 E，存在一个处于标准形的流星图 N_E，满足$T_E \cong T_{N_E}$。

证明。 由于流星图是有限的且没有汇点，[13, 定理 4.4 和 4.7]表明入分裂和出分裂（因此也包括入合并和出合并）保持 talented 幺半群不变。因此，该推论由命题 4.6 得出。□

由入分裂诱导的 talented 幺半群同构不保持序单位。然而，我们有以下结果。

命题 4.9。 如果 E 是一个流星图，使得迹的内部中的每个顶点 u 都有 $|r^{-1}（u）| = 1$，那么我们可以仅使用出分裂和 -合并将 E 转换为准正规形的流星图 N_E。因此， $T_E \cong T_{N_E}$ 通过保持序单位的分次同构。

证明。 与命题 4.6证明的第一步一样，我们可以将 E 转换为一个流星图，其中 $|s^{-1}(u)| = 1$ 对所有位于一条迹内部的顶点 u 都成立。由于 $|r^{-1}(u)| = 1$ 对所有这类顶点都成立，根据假设，我们得出 E 的各条迹（的内部）彼此不相交。

如果源环 $C_0^E$of E 上的顶点 v 是迹的源，则在 v 处进行出分裂（通过一种将迹的第一条边与其他任何出边分开的划分），会使该迹的源沿 C_0^E向后移动一步，并使迹的长度增加一条边。因此，我们可以使用出合并，将 E 的所有迹缩短至长度为 1，但代价是允许它们的源位于 C_0^E 上的任意顶点。

由于出分裂（因此出合并）保持talented幺半群的序单位，根据[13, 定理 4。7], 结果得出。□

固定流星图 E的汇环中的一个顶点 w_E。根据 [20, 引理 5.6]， w_E 是一个极小周期元。事实上，我们还可以说得更多。

定义 4.10。 幺半群 $\mathbb{Z}$中的一个 Γ-极小 元 M 是一个非零元 $y \in M$，满足对于所有非零的 $x \in M$，都存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 ${}^m x \geq y$。

显然，若 y 是 Γ-极小的，那么对于任意 $n \in \mathbb{Z}$， ${}^n y$也是 Γ-极小的。一个 Γ-幺半群 M 可能有多个 Γ-极小元。不过，如果这些极小元在轨道意义下相同，我们就称 M 有唯一的 Γ-极小元。更正式地说，若 y 是 Γ-极小的，并且对于任意 Γ-极小元 x，都有$O(x) = O(y)$，则称 y 是 M 的唯一 Γ-极小元。

固定流星图 E的汇环中的一个顶点 w_E。以下引理证明， w_E是流星图的唯一极小元。

引理 4.11。 设 E 是一个流星图，并固定顶点 $v_E \in C_0^E$和 $w_E \in C_1^E$。那么 w_E 是 T_E的唯一最小元素，如定义 *4.10*中所述。

证明。给定一个非零元素 $x \in T_E$，写作$x = \sum_i c_i {}^{r_i} v_E + \sum_j d_j {}^{s_j} w_E$with $c_i, d_j \in \mathbb{N}$（见命题3.11）。如果某个 d_j isnonzero，则 $x \geq {}^{s_j} w_E$。如果对于所有 j都有 $d_j = 0$，则至少有一个 c_i is nonzero。令 n 为 E 中一条路径 P 的长度，其中 $s（P） = v_E$ 且 $r（P） = w_E$。那么存在$y \in T_E$ 使得 ${}^{r_i} v_E（n） = {}^{r_i} w_E + y$。也就是说， ${}^{r_i} v_E \geq {}^{r_i - n} w_E$，因此 $x \geq {}^{r_i - n} w_E.$。于是，${}^m x \geq {}^0 w_E$，其中 $m = n - r_i$。

为证明 w_E唯一，取 $y \neq {}^n w_E$。也就是说，我们有 $y = \sum_i c_i {}^{r_i} v_E + \sum_j d_j {}^{s_j} w_E$，其中要么某个 c_i 非零，要么 $j \geq 2$。若有 $j \geq 2$，则不存在满足 ${}^m w_E \geq y$的 $m \in \mathbb{Z}$，因为 w_E 只位于一个圈上。若对某个 i有 $c_i \neq 0$，且存在 $m \in \mathbb{Z}, x \in T_E$ 使得

${}^{m}w_E = y + x$，那么我们再次得到矛盾，因为任意 ${}^{r_i}v_E$ 流都将包含某个 k对应的 ${}^{k}v_E$。□

现在我们在流星图上引入一种等价关系，这将使我们能够证明流星图的移位等价蕴含强移位等价。

设 E 是一个流星图。我们分别用 p^E 和 q^E 表示 E 的源圈和汇环的长度。我们记

$$\mathsf{p}_E = \gcd(p^E, q^E)$$

并将这个数称为周期的 E。推论4.7 特别告诉我们，入分裂、出分裂以及合并都会保持流星图的周期。

给定顶点 $v^E \in C_0^E$和 $w_E \in C_1^E$，我们称三元组 (E, v^E, w^E)为一个带基点流星图。我们将 $\mathbb{Z}/\mathsf{p}_E$表示为模 p_E 的整数环。给定 $n \in \mathbb{Z}/\mathsf{p}_E$，令 $N_E(n, v^E, w^E)$ 表示满足以下条件的 E 的迹 α 数量：

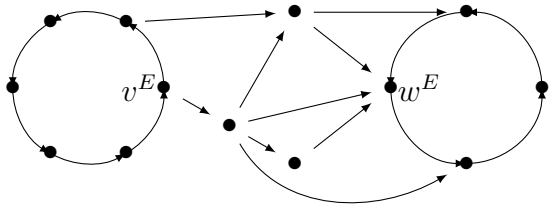
$$|v^E s(\alpha)| + |\alpha| + |r(\alpha)w^E| = n \bmod \mathsf{p}_E,$$

其中 $|v^E s(\alpha)|$是从 v^E 到 $s(\alpha)$ 的最短路径长度，$|r(\alpha)w^E|$也同样如此。换句话说，上述方程的左侧就是从v^E 到 w^E 且包含 α 的最短路径长度。

对于带基点流星图 (E, v^E, w^E) 和 (F, v^F, w^F)，若它们的源环和汇环长度相等，特别是周期相同，均为 $\mathsf{p} := \mathsf{p}_E = \mathsf{p}_F$，我们定义一个关系

$$(E, v^E, w^E) \approx (F, v^F, w^F) \iff \begin{array}{l} q^E = q^F, \quad p^E = p^F \text{ and there exists} \\ t \in \mathbb{Z}/\mathsf{p} \text{ such that for all } n \in \mathbb{Z}/\mathsf{p}, \\ N_E(n+t, v^E, w^E) = N_F(n, v^F, w^F) \end{array} \tag{7}$$

例 4.12。 考虑下面的带基点流星图 E：



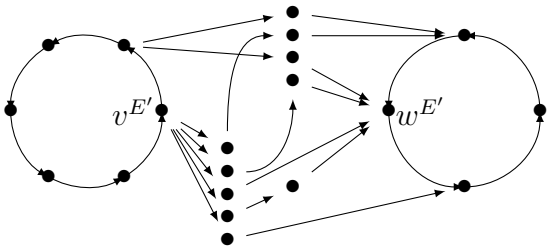
在这种情况下，E 的周期为 $\mathsf{p}_E =$ 最大公约数$(6, 4) = 2$，因此 $\mathbb{Z}/\mathsf{p}_E = \{0, 1\}$。

要得到一个更简单且与 $\approx$等价的流星图 E，我们需要确定数值$N_E(0) := N_E(0, v^E, w^E)$和 $N_E(1) := N_E(1, v^E, w^E)$。为此，我们需要沿着每条可能的迹，通过简单路径将 v^E连接到 w^E，并检查这条路径的长度（这将给出方程（4）左边的值），然后统计这些长度中偶数和奇数各有多少（即 $= 0$ 或 $1 \bmod p_E$，如方程（4）右边所示）。

为了简化这一过程，我们可以完全按照图4中的相同步骤进行，这一过程会在保留各迹的源点、范围和长度的同时将它们“分开”。（命题 4.13第 (2) 项的证明中也重复了这一论证。）所得的图 E' 是

这样一来，就更容易统计连接 $v^{E'}$和 $w^{E'}$ 、长度各不相同的简单路径的数量：

- 长度 2：1
- 长度 3：3



- 长度 4：2
- 长度 5: 1

因此，$N_E(0) = 3$ 和 $N_E(1) = 4$。

因此，要构造一个与 E等价的更简单的图，我们可以从相同的汇点环和源环开始，只需添加3条偶数长度的迹和4条奇数长度的迹。例如，考虑图6中的 F 和 F'：

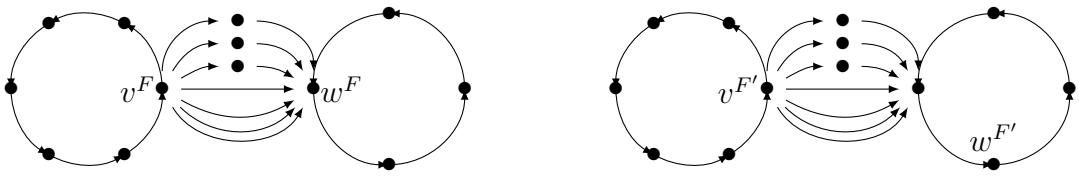


图6。图 F 在左侧，F' 在右侧。

由上一段可知，$F \approx E$。图 F' 是通过将选定顶点w^F 沿着汇环移动一步得到的，这使得连接选定顶点的所有最短路径的长度增加了1。因此，我们也有 $F' \approx F$，在方程（7）中取 $t = 1$。

命题 4.13。如上所述，关系 $\approx$ 是周期为 p 的流星图类上的等价关系。此外：

(1) 任何两个底层图相同的带基点流星图 (E, v_1^E, w_1^E) 和 (E, v_2^E, w_2^E) E 在关系 $\approx$ 下属于同一个等价类。(2) 如果 F 是通过对流星图 E 执行入分裂、出分裂及合并得到的，那么底层图分别为 E 和 F 的任意带基点图，在关系 $\approx$ 下都属于同一个等价类。

证明。稍加思考便可发现，$\approx$ 是传递的、对称的且自反的。

(1) 假设 v_2^E 是 C_0^E 中紧接在 v_1^E 后面的顶点，并且 $w_1^E = w_2^E$（我们简称为 w^E）。为了证明 $(E, v_1^E, w^E) \approx (E, v_2^E, w^E)$，注意，对于 E 的一条迹 α：

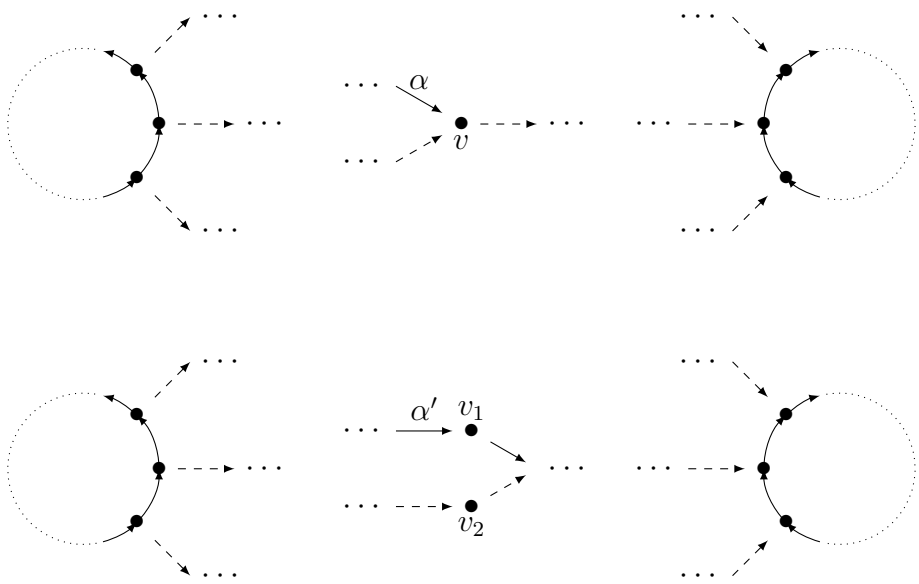
- 如果 $s(\alpha) \neq v_1^E$，那么从 v_2^E到 w^E 经过 α 的最短路径与从 v_1^E到 w^E的路径相同，但第一条边除外。
- 若 $s(\alpha) = v_1^E$，那么要获得从 v_2^E到 w^E 且经过 α的最短路径，我们必须将从 v_1^E到 w^E 的路径与圈 c_0^E内从 v_2^E到 v_1^E的路径连接起来，这会使其长度增加 $p_0^E - 1$；在模 p_E意义下，这等同于减去 1（因为 p_E 整除 p^E）。

无论如何，我们得出结论：对于任意 $n \in \mathbb{Z}/\mathrm{p}_E$, $N_E(n, v_1^E, w^E) = N_E(n-1, v_2^E, w^E)$，因此 $(E, v_1^E, w^E) \approx (E, v_2^E, w^E)$，只要 v_2^E 是 C_0^E 中紧接在 v_1^E 后面的点。由于 $\approx$ 是传递的，并且沿着圈移动可以从 C_0^E 中任意一个顶点到达其他任意顶点，因此对于任意 $v_1^E, v_2^E \in C_0^E$，我们有 $(E, v_1^E, w^E) \approx (E, v_2^E, w^E)$。

类似的论证允许我们更改 w^E 中的顶点并保持 $\approx$-类，这就完成了该项的证明。

(2) 分别在 E 的源环和汇环中固定顶点 v^E 和 w^E。

如果图 F 是通过对 E 中属于迹内部的顶点 v 进行入分裂得到的，那么每条经过 v 的迹 α 都将对应于 F 中的一条长度相同的迹 α'，而 C_0^E的选定点 v^E 和 C_1^E的选定点 w^E 将保持不变，所有其他迹也一样：



以这种方式，

$$N_E(n, v^E, w^E) = N_F(n, v^E, w^E).$$

类似地，在迹内部的顶点处进行出分裂会保持迹的数量和长度，因此在这些顶点处进行出分裂也会保持 $\approx$-等价类。

如果我们在汇环中的顶点 v 进行一次入分裂，那么任何经过 α 的迹 v都会变为一条长度为 α' 的迹 $|\alpha|+1$，其值域沿汇环移动一步，而所有其他迹保持不变（见图5）。因此，

$$|\alpha| + |v^E s(\alpha)| + |r(\alpha) w^E| = |\alpha'| + |v^E s(\alpha')| + |r(\alpha') w^E| \mod q^E$$

（采用与条目 (1) 相同的论证，考虑 $r(\alpha)$ 等于 w^E 与不等于 w^E 两种情况），因此该等式模 p_E 也成立。同样，对于所有 $n \in \mathbb{Z}/\mathrm{p}_E$，我们得到 $N_E(n, v^E, w^E) = N_F(n, v^E, w^E)$。

源环中顶点处的出分裂可用类似方法处理。不允许对源环进行入分裂，也不允许对汇环进行出分裂，因为源环中的所有顶点都有 $|r^{-1}(v)| = 1$，而汇环中的顶点有 $|s^{-1}(v)| = 1$。此外，条目 (1) 表明，为了保持 $\approx$-类，我们无需保留圈上的选定点。

因此，入分裂和出分裂保持 $\approx$-类。由于合并是分裂的逆过程，它们也保持 $\approx$-类。$\approx$ 的传递性给出了所需结果。□

因此，任意带基点流星图的 $\approx$-类都不依赖于基点的选取，而仅取决于底层图本身。由此得到关系

$$E \approx F \iff \text{对于某些（等价地说，任意）} \ v^E \in C_0^E、\ w^E \in C_1^E、\ v^F \in C_0^F、\ w^F \in C_1^F \text{ 的选择}, \\ \text{we have } (E, v^E, w^E) \approx (F, v^F, w^F).$$

我们的目标是证明，“几何” $\approx$ 等价关系能够对流星图的 Leavitt 路径代数按分次 Morita 等价进行分类。

命题4.14。设 E 和 F 是流星图。如果 $E \approx F$，那么存在一系列入分裂、出分裂和合并，将 E 转换为 F。

证明。我们首先指出，在源环有 p 条边、汇环有 q 条边的流星图中，可以使用入分裂、出分裂、入合并和出合并，将任意一条迹延长或缩短 $\mathrm{p}_E :=$ 最大公约数(p,q) 条边。根据贝祖定理，存在正整数 $\widetilde{p}, \widetilde{q}$ 和 N，使得$\widetilde{p}p + \widetilde{q}q = \mathrm{p}_E + Np$。因此，可以通过以下方式使用入分裂、出分裂和合并操作，将一条迹延长 p_E 条边：

(i) 通过在源汇环处进行出分裂，将迹延长 $\widetilde{p}$ 次，每次增加 p 条边 e.

(ii) 通过在汇环处进行入分裂，将迹延长 $\widetilde{q}$ 次，每次增加 q 条边。

(iii) 通过出合并，将迹缩短 N 次，每次减少 p 条边。

由此可知，我们也可以通过在上述论证中使用合并而非分裂（反之亦然），将任意一条从 v_E 到 w_E 的路径缩短 p_E 条边。

若 $E \approx F$，则有 $\mathrm{p}_E = \mathrm{p}_F =: \mathrm{p}$。此外，通过运用上述过程，反复将 E 和 F 中的迹延长或缩短 p 条边，我们可以假设存在 $t \in \mathbb{Z}/\mathrm{p}$，使得对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，从 v^E 到 w^E 的长度为 $n+t$ 的最短路径数量，恰好等于从 v^F 到 w^F 的长度为 n 的路径数量。

此外，若 $E \approx F$，则根据命题 4.6 和 4.13，我们可以假设 E、F 处于标准形，并且 E（分别为 F）的所有迹均以 v_E（分别以 v_F）为源。沿汇环从 $w_E =$开始向后为顶点编号：w_0^E；假设有 k_n^E 条迹的值域为w_n^E（类似地，有 k_n^F 条迹的值域为 w_n^F）。也就是说，对于所有 n，存在 k_n^E 条从 v^E 到 w^E、长度为 $n+1$ 的路径；在 F 中也类似。因此，按照上一段所示选择 t 后，我们有

$$k_{n+t}^E = k_n^F \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}/\mathrm{p}.$$

因此，将 v_E 映射到 v_F（并且对于所有 n，将 v_n^E 映射到 v_n^F），并将 w_n^E 映射到 w_{n-t}^F 的映射，在（E 和 F的标准形）之间诱导出一个同构。□

现在我们可以陈述主要定理了。

定理 4.15。设 E 和 F 是本质图，其中 E 是流星图。则以下命题等价。

(1) *Leavitt* 路径代数 $L(E)$ 与 $L(F)$ 分次 *Morita* 等价，(2) 存在保序的 $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-模同构 $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) \to K_0^{\mathrm{gr}}(L(F))$，(3) *talented* 幺半群 T_E 与 T_F 是 $\mathbb{Z}$-同构的，(4) 图 E 与 F 移位等价，(5) 图 E 与 F 强移位等价。

证明。

(1)⇒(2)源自分次Morita 理论：分次 Morita 等价产生可逆双模，而后者进而在分次 K_0 （见[17, 定理 2.3。7]）。

(2)⇔(3)根据 [20] 分次 Grothendieck群 $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E))$ 的正锥是 $\mathcal{V}^{\mathrm{gr}}(L(E))$，且$\mathcal{V}^{\mathrm{gr}}(L(E)) \cong T_E$。这意味着等价性。

(3)⇔(4) 这由推论 2.13 以及 (2)⇔(3).

(4)⇒(5) 如果 E 和 F 移位等价，那么根据命题 4.4, F 也是一个流星图；并且根据 (3) 和 (4) 的等价性，它们的 talented 幺半群同构。设 $\varphi\colon T_E \to T_F$ 是一个同构。分别用 p_E 和 q_E 表示 E 的源环和汇环的长度；类似地，用 p_F 和 q_F 表示 F的源环和汇环的长度。由推论 4.8，我们可以假设 E 和 F 是标准形的流星图（只有连接两个圈的边）。事实上，我们假设 E 中的所有迹都以 v_E为源，而 F中的所有迹都以 v_F为源。于是，引理 4.11 推出 $\varphi({}^0w_E) = {}^r w_F$，其中某个 $0 \le r \le q_F - 1$。由于 $q_E \in \mathbb{N}$ 是满足 ${}^{q_E}w_E = w_E$的最小正整数，类似地， q_F 是满足 ${}^{q_F}w_F = w_F$的最小正整数，因此可得 $q_E = q_F =: q$。

现在，考虑 T_F 对序理想 $\langle w_F\rangle = \{{}^i w_F$ 取商： $0 \le i \le q-1\}$。注意，对于源环上的任意顶点 v， $v \notin \langle w_F\rangle$，因此 $T_F/\langle w_F\rangle \cong T_{C_0^F} \cong \bigoplus_{k=0}^{p_F-1} \mathbb{N}.$。类似地， $T_E/\langle w_E\rangle$ 是秩为 p_E 的 $\mathbb{Z}$-循环幺半群。由于这两个幺半群同构， $p_E = p_F =: p$。

接下来，我们证明

$$\varphi(v_E) = {}^i v_F + \sum_{j=1}^{q} \ell_j({}^j w_F), \tag{8}$$

对于某些 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $\ell_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。

假设 $\varphi(v_E) = \sum_{i=0}^{n} c_i v_F(r_i) + \sum_{i=1}^{m} d_i w_F(s_i)$。由于 φ 诱导了一个同构$\overline{\varphi}$: $T_E/\langle w_E\rangle \to T_F/\langle w_F\rangle$，取商后可得 $\overline{\varphi}(v_E) = \sum_{i=0}^{n} c_i v_F(r_i)$。由于$v_E$ 是 $T_E/\langle w_E\rangle$中的一个极小元，因此 $n = 0$ 且 $c_0 = 1$。由此得到恒等式 (8)。

注意，对于固定的 $i \in \mathbb{Z}$，由 $x \mapsto {}^{-i}x$ 给出的映射 $T_F \to T_F$ 是一个 $\mathbb{Z}$-同构。与该映射复合后，我们可以假设 $\varphi(v_E) = v_F + \sum_{j=1}^{q} \ell_j({}^j w_F)$。

回顾一下，$T_E = M_{\overline{E}}$ 是.....的归纳极限

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{N}^{p+q} \xrightarrow{A_E} \mathbb{N}^{p+q} \xrightarrow{A_E} \mathbb{N}^{p+q} \longrightarrow \cdots,$$

其中 A_E 表示 E的邻接矩阵。此外，由于 $A_E = \begin{pmatrix} C_p & * \\ 0 & C_q \end{pmatrix}$，其中

$$C_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \cdots \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \end{pmatrix}$$

表示长度为 k 的圈的邻接矩阵，矩阵 A_E 可逆（因为源环和汇环的长度至少为 1）。结合合流引理，这意味着与归纳极限相关的典范包含映射 $\iota_E^n\colon \mathbb{N}^{p+q} \to T_E$

都是单射。由于 $\mathbb{N}^{p+q}$ 中 $\mathbb{N}$ 的副本表示 E 的顶点，这些包含通过公式与 $\mathbb{Z}$ 作用相关联。

$$\alpha_1 \circ \iota_E^n = \iota_E^{n+1}, \tag{9}$$

其中 $\alpha_1 : T_E \to T_E$ 表示 $1 \in \mathbb{Z}$的作用。对于图 F，也有类似的结论。

C选取足够大的 n，使得 $\operatorname{im} \iota_F^n \supseteq \operatorname{im} \varphi \circ \iota_E^0$，即可得到一个单射映射

$$C := (\iota_F^n)^{-1} \circ \varphi \circ (\iota_E^0) : \mathbb{N}^{p+q} \to \mathbb{N}^{p+q}.$$

（在上述方程中，我们隐式地将 φ 和 ι_F^n 的陪域限制为 ι_F^n 的像。）让我们证明 $CA_E = A_F C$。一方面，

$$\begin{aligned}
\iota_F^{n+1} \circ C \circ A_E &= \iota_F^{n+1} \circ (\iota_F^n)^{-1} \circ \varphi \circ (\iota_E^0) \circ A_E \\
&= \alpha_1 \iota_F^n \circ (\iota_F^n)^{-1} \circ \varphi \circ (\iota_E^0) \circ A_E && \text{(Equation (9))} \\
&= \alpha_1 \circ \varphi \circ (\iota_E^0) \circ A_E \\
&= \varphi \circ \alpha_1 \circ (\iota_E^0) \circ A_E && (\varphi \text{ a } \mathbb{Z}\text{-isomorphism}) \\
&= \varphi \circ (\iota_E^1) \circ A_E && \text{(Equation (9))} \\
&= \varphi \circ (\iota_E^0). && (T_E \text{ is a direct limit})
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
\iota_F^{n+1} \circ A_F \circ C &= \iota_F^{n+1} \circ A_F \circ (\iota_F^n)^{-1} \circ \varphi \circ \iota_E^0 \\
&= \iota_F^n \circ (\iota_F^n)^{-1} \circ \varphi \circ \iota_E^0. && (T_F \text{ as a direct limit}) \\
&= \varphi \circ \iota_E^0
\end{aligned}$$

这表明 $\iota_F^{n+1} \circ C \circ A_E = \varphi \circ \iota_E^0 = \iota_F^{n+1} \circ A_F \circ C$。由于 ι_F^{n+1} 是单射，我们得出结论：

$$CA_E = A_F C. \tag{10}$$

现在，由于 C 由 φ诱导而来，关于 $\varphi(v_E)$ 和 $\varphi(w_E)$ 的上述事实反映在 C中。也就是说，

$$C = \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & \tilde{C}_r \end{pmatrix},$$

其中 $\tilde{C}_r = (C_q)^r = \sum_{i=1}^{q} E_{i,\ r+i \bmod q}$ 表示这样一个事实：$\varphi({}^0 w_E) = {}^r w_F$.

利用这两个事实，我们现在来分析 B的结构。对于每个 $1 \le j \le q$，记 k_j^E为以 v_E 为源、以（与 ${}^j w_E$在汇点圈上等价的顶点）为范围的边数，类似地记 F。那么，A_E中的右上块 $*$至多有一行非零（第一行）：$(k_q^E\ k_1^E\ k_2^E \cdots k_{q-1}^E)$。

Not ˜意到，方程（10）蕴含 $C_p B + *_F C_r = *_E + BC_q$，因此 y

$$\begin{aligned}
&B_{2,j} + k_{j-r-1}^F = k_{j-1}^E + B_{1,j-1} && \text{for } 1 \le j \le q; \\
&B_{i+1,j} = B_{i,j-1} && \text{for } 2 \le i \le p-1, 1 \le j \le q; \\
&B_{1,j} = B_{p,j-1} && \text{for } 1 \le j \le q.
\end{aligned}$$

我们得出结论，对于任意 $1 \le j \le q$，都有

$$\begin{aligned}
B_{p,j-1} = B_{1,j} = B_{2,j+1} + k_{j-r}^F - k_j^E = B_{3,j+2} + k_{j-r}^F - k_j^E = \cdots \\
\cdots = B_{p,j+p-1} + k_{j-r}^F - k_j^E,
\end{aligned}$$

其中，指标上的加法是模 q 运算。

对 $B_{p,j+p-1}$ 应用相同的逻辑，我们得到

$$B_{p,j-1} = B_{p,j+2p-1} + k^F_{j-r} - k^E_j + k^F_{j+p-r} - k^E_{j+p}.$$

现在，写作 $g =$最大公约数(p,q)，并写作 $p = cg, q = dg$，其中 最大公约数$(c,d) = 1$。接着。

$$B_{p,j-1} = B_{p,j+cq-1} = B_{p,j+dp-1}.$$

由上述计算可知，我们必定有

$$\sum_{n=0}^{d-1} k^F_{np+j-r} = \sum_{n=0}^{d-1} k^E_{j+np}. \tag{11}$$

注意，对于任意 n，都有 $np = ncg \equiv 0 \mathrm{mod}\ g$。由于指标上的加法是模 q 进行的，我们得出结论：右侧的和恰好是 E 中长度为 j （模 g）的路径数，而左侧的和恰好是 F 中长度为 $j-r$ （模 g）的路径数。

因此，对于满足 $T_E \cong_{\mathbb{Z}} T_F$ 的任何流星图，条件（7）必须成立（其中$t = -r$）。根据命题 4.14， E 可以通过入分裂、出分裂和合并转换为 F。现在，定理 2.10 表明，图 E 和 F 是强移位等价的。

(5)⇒由于 E 与 F强移位等价，因此存在一系列出分裂、入分裂及其逆变换，即出合并和入合并（定理 2.10），将 E 变换为 F。根据 [19, 命题 15] 可知 $L(E)$ 与 $L(F)$ 分次 Morita 等价。□

将我们的结果与文献中几个已确立的结果结合起来后，我们现在可以将流星图这一类中的代数和算子代数的 Morita 理论概念联系起来。这一结果与关于Leavitt 路径代数的 Morita 理论与图 C^*-代数之间关系的问题有关（参见 [1, §5.6] 和 [14, 定理 14.7]）。

对于我们的最终结果，我们使用 C^*-代数[24]的等变 K-理论 $K_0^{\mathbb{T}}$。对于有限图E，存在 $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-模的典范序同构

$$K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) \cong K_0(L(E \times \mathbb{Z})) \cong K_0(C^*(E \times \mathbb{Z})) \cong K_0^{\mathbb{T}}(C^*(E)), \tag{12}$$

其中 $E \times \mathbb{Z}$ 是 E的覆盖图。上述同构已在文献中的多个地方得到确立（例如参见 [18, 第 275], [15, 定理 A 的证明]）。

推论 4.16. 设 E 和 F 是本质图，其中 E 是流星图。当且仅当图 C^*-代数$C^*(E)$ 和 $C^*(F)$ 等变 *Morita* 等价时，*Leavitt* 路代数 $L(E)$ 和 $L(F)$ 分次 *Morita* 等价。

证明。假设 Leavitt 路代数 $L(E)$ 和 $L(F)$ 分次 Morita 等价。根据定理 4.15， F 也是一个流星图，并且 E 和 F 强移位等价。于是，根据 [8, 定理 3.2], ，我们用于将 E 转换为 F 的入分裂和出分裂，在 $C^*(E)$ 和 $C^*(F)$ 之间给出 Morita 等价。此外， [16, 定理 3.4] 保证了该等价是等变的。

反过来，假设图 C^*-代数 $C^*(E)$ 和 $C^*(F)$ 等变莫里塔等价。那么，作为有序的 $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$-模，$K_0^{\mathbb{T}}(C^*(E)) \cong K_0^{\mathbb{T}}(C^*(F))$（见 [12, 第 297] 页和 [24,命题 2.9.1]）。由 (12) 可得 $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) \cong K_0^{\mathrm{gr}}(L(F))$。再由定理 4.15 可知，Leavitt 路代数 $L(E)$ 和 $L(F)$ 分次 Morita 等价，证毕。□

致谢。我们感谢 Efren Ruiz 为推论4.16提供参考文献。本文源于我们在 Oberwolfach 数学研究所的一次双人研究访问。E. Gillaspy 部分受到美国国家科学基金会资助项目 DMS-1800749 的支持。D. Gonçalves 部分受到巴西圣卡塔琳娜州研究与创新支持基金会（FAPESC）、国家科学技术发展委员会（CNPq）以及 Capes-PrInt 资助项目 88881.310538/2018-01 的支持。R. Hazrat 感谢澳大利亚研究理事会资助项目 DP230103184。

参考文献

[1] G. Abrams、P.Ara、M.SilesMolina，《Leavitt路径代数》，《数学讲义》2191，Springer，2017。[2] P. Ara、R. Hazrat、H. Li、A.Sims，《分次Steinberg代数及其表示》，《代数与数论》12（2018），第1期，131–172。[3] P. Ara、M.A. Moreno、E. Pardo，图代数的非稳定 K-理论，《代数表示理论》10（2007），第2期，157–178。[4] P.Ara、E. Pardo，迈向Leavitt 路代数之间分次同构的K-理论刻画，《K-理论杂志》14（2014），第2期，203–245。[5] G. Arnone，Leavitt路代数的分次Grothendieck群之间的提升态射，arXiv:2206.06759。[6]G. Arnone、G.Cortiñas，分次 K-理论与 Leavitt 路代数，《代数结合数学杂志》（2022）。https://doi.org/10.1007/s10801-022-01184-5[7] G. Arnone、G. Cortiñas，Leavitt 代数及其 Cuntz 拼接之间不存在分次单位同态，《代数及其应用杂志》22（2023），第4期。[8] T. Bates、D. Pask，图代数的流等价，《遍历理论与动力系统》24（2004），第2期，367–382。[9] M. Boyle，符号动力系统与矩阵，《线性代数中的组合与图论问题》（《数学与应用中的 IMA 卷》50）。R. Brualdi、S. Friedland和 V.Klee 编。Springer，1993，1–38。[10] T.M.Carlsen和 J. Rout，图 C^*-代数的保持对角的规范不变同构，《泛函分析杂志》273(9)（2017），2981–2993。[11] T.M. Carlsen、A. Dor-On 和S.Eilers，通过Cuntz–Krieger 代数研究移位等价，预印本[12] F.Combes，交叉积与Morita 等价，《伦敦数学学会学报》49（1984），第2期，289–306。[13] L. Cordeiro、D. Gonçalves、R. Hazrat，有向图的 talented 幺半群及其在图代数中的应用，《伊比利亚美洲数学杂志》38（2022），第1期，223–256。[14] S. Eilers、G. Restorff、E. Ruiz和 A.P.W.Sørensen，单位图 C^*-代数的完整分类：几何型与强型，《杜克数学杂志》170（2021）2421–2517。[15] S. Eilers、E. Ruiz、A.Sims，放大图 C^*-代数II：重构，《美国数学学会会刊 B 辑》9（2022），297–310。[16] S.Eilers、E. Ruiz，图 C^*-代数保持结构同构的精化移动，arXiv:1908.3714。[17] R.Hazrat，分次环与分次 Grothendieck群，《伦敦数学学会数学讲义丛书》第435卷。剑桥大学出版社，剑桥，2016。[18] R. Hazrat，分次 Grothendieck群与 Leavitt路代数的分类，《数学年刊》355（2013）273–325。[19] R. Hazrat，Leavitt路代数的动力学，《代数杂志》384（2013）242–266。[20] R. Hazrat、H.Li，Leavitt路代数的talented幺半群，《代数杂志》547（2020）430–455。[21] K.H. Kim 和F.W. Roush，不可约子移位上的 Williams猜想是错误的，《数学年刊》（第2辑）149（1999），545–558。[22] W.Krieger，关于维数函数与拓扑Markov链，《数学发明》56（1980），239–250。[23] D.Lind 和B. Marcus，《符号动力系统与编码导论》，剑桥大学出版社，1995。[24] N. Christopher Phillips，群作用于 C^* -代数的等变 K-理论与自由性，《数学讲义》1274卷，Springer-Verlag，柏林，1987，[25] J.C. Rosales、P.A. García-Sanchez，《有限生成交换幺半群》。Nova SciencePublishers, Inc.，美国纽约州康马克，1999[26] R.F. Williams 有限型子移位的分类，《数学年刊》98（第2辑）（1973），120–153。[27] R.F.Williams 勘误：有限型子移位的分类，《数学年刊》（第2辑）99（1974），380–381。

[28] J.B. Wagoner,马尔可夫划分与 K_2，Publ. Math. IHES **65** (1987), 91–129.[29] J.B. Wagoner,拓扑马尔可夫链、 C^*代数以及 K_2，Adv. in Math. **71** (1988), no. 2, 133–185.[30]L. Vas，函子 K_0^{gr} 是满的且仅弱忠实，Algebr RepresentTheor (2023)。https://doi.org/10.1007/s10468-023-10199-w

Luiz Gustavo Cordeiro：巴西圣卡塔琳娜州若因维利联邦圣卡塔琳娜大学（UFSC）移动工程系

电子邮箱地址：luiz.cordeiro@ufsc.br

Elizabeth Gillaspy：美国蒙大拿大学数学科学系电子邮箱地址：
elizabeth.gillaspy@mso.umt.edu

Daniel Gonçalves：巴西圣卡塔琳娜州弗洛里亚诺波利斯联邦圣卡塔琳娜大学（UFSC）数学系电子邮箱地址：daemig@gmail.com

Roozbeh Hazrat：澳大利亚西悉尼大学数学与数据科学研究中心

电子邮箱地址：r.hazrat@westernsydney.edu.au