arXiv:2304.05888v1 [math.FA] 12 Apr 2023

反例：对称和贪婪基的等距理论

´ ´FERNANDO ALBIAC、JOSE L. ANSORENA、
OSCAR BLASCO、` ˆHUNG VIE.T CHU 和 TIMUR OIKHBERG

Abstract. 我们继续研究 [6] 中开启的工作，考察与贪婪基相关的性质在所涉及的常数取尖锐值（即等于 1）时的情形。本文的主要目标是给出一个带基的 Banach 空间示例，该基满足性质 (A)，但不是 1-抑制无条件的，从而解决 [2] 中的问题 4.4。具体而言，我们的构造表明，即使额外假设基是无条件且对称的，满足性质 (A) 的基也未必是 1-贪婪的。我们还给出了这一示例的有限维对应版本，并证明至少在有限维情形下，性质 (A) 不会传递到对偶空间。作为论证的一个推论，我们证明，对称基是无条件的，当且仅当它是全的，从而推广了对称 Schauder 基是无条件基这一著名结果。

1. Introduction

本文的研究源于对巴拿赫空间中相对于基的阈值贪婪算法最优性的分析。这种最优性体现在不同类型的类贪婪基的定义中所出现常数的尖锐性上。研究一般意义上的“等距”情形是有理据的，因为当某个适当的常数为 1 时，各种逼近算法都会平凡地收敛。相比之下，当这个常数严格大于 1 时，收敛性问题可能很难解决。我们举所谓的 X-贪婪算法为例：它对于 $L_p[0,1]$ 的归一化 Haar 基（其无条件常数

2020 年数学主题分类。41A65、46B15、46B45。关键词和短语。阈值贪婪算法、贪婪基、性质 (A)、抑制无条件基、对称基。F. Albiac 感谢西班牙科学与创新部通过项目 PID2019-107701GB-I00 对“算子、格与巴拿赫空间结构”的支持。伊利诺伊大学通过校园研究委员会的 23026 号资助，部分支持了 H. V. Chu 和 T. Oikhberg 的工作。1

严格大于 1）的收敛性仍是一个未解决的问题。关于这一问题的详情及最新进展，读者可参阅 $[8,10]$ 。

为便于读者查阅，下面我们概述最相关的概念；更多细节请参见 $[5,$ 第 $10]$节或近期专著$[4]$ 。

设 $\mathcal{B}=(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach空间 $\mathbb{X}$中的一族向量，其标量域为 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。假设

(B.1) $\mathcal{B}$ 是基完备的，即 $\mathcal{B}$ 的张成空间的闭包是整个空间 $\mathbb{X}$；(B.2) 存在一族（唯一的） $\mathcal{B}^*=(\boldsymbol{x}_n^*)_{n=1}^{\infty}$ ，属于 $\mathbb{X}^*$ 且与 $\mathcal{B}$双正交；以及 (B.3) $\sup_n\{\|\boldsymbol{x}_n\|,\|\boldsymbol{x}_n^*\|\}<\infty$。

本文中，这样的一族 $\mathcal{B}$ 称为 $\mathbb{X}$的基。满足 (B.1)、(B.2) 且为全的序列 $\mathcal{B}$ ，即 $\mathcal{B}^*$的张成空间在 $\mathbb{X}^*$中弱*-稠密，称为 Markushevich 基。Schauder 基是 Markushevich 基的一种特殊情形；不过我们强调，除非另有说明，我们不预先要求基具有全性。

向量 $x\in\mathbb{X}$ 关于基 $\mathcal{B}$ 的贪婪排序是一个单射

$$\rho\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

其像包含 x的支撑集,

$$\operatorname{supp}(x)=\{n\in\mathbb{N}\colon\boldsymbol{x}_n^*(x)\neq 0\},$$

并满足 $|\boldsymbol{x}_{\rho(i)}^*(x)|\geq|\boldsymbol{x}_{\rho(j)}^*(x)|$ ，若 $i\leq j$。如果序列 $(\boldsymbol{x}_n^*(x))_{n=1}^{\infty}$中有多个项具有相同的绝对值，那么 x 就有多个贪婪排序。为确保唯一性，我们对 ρ 附加一项假设：如果 $i<j$，那么要么 $|\boldsymbol{x}_{\rho(i)}^*(x)|>|\boldsymbol{x}_{\rho(j)}^*(x)|$ ，要么$|\boldsymbol{x}_{\rho(i)}^*(x)|=|\boldsymbol{x}_{\rho(j)}^*(x)|$ ，且 $\rho(i)<\rho(j)$。我们将这种排序称为 x的自然贪婪排序。按照这一约定， x 的第 m 个自然贪婪逼近为

$$\mathcal{G}_m(x)=\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{x}_{\rho(j)}^*(x)\boldsymbol{x}_{\rho(j)},\quad m\in\mathbb{N},\tag{1.1}$$

其中 ρ 是自然贪婪排序。阈值贪婪算法（简称 TGA）是由公式 (1.1) 给出的算子序列 $(\mathcal{G}_m)_{m=1}^{\infty}$ 。

为了保证在 $\mathbb{X}$ 中重构“信号”，从而使贪婪算法成为一种合理的近似方法，我们施加

如下温和条件：对于每个 $x \in \mathbb{X}$，$(\mathcal{G}_m(x))_{m=1}^{\infty}$ 都收敛到 x。Wojtaszczyk [14]（参见 [4, 定理 4.1]）证明了，这一条件等价于（非线性且无界）算子 $\mathcal{G}_m$ 的一致有界性，即

$$\|\mathcal{G}_m(x)\| \le C\,\|x\|, \quad x \in \mathbb{X},\, m \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

对于某个常数 $C \ge 1$。沿用 [12], 的说法，我们称这类基为 C-拟贪婪基。

为了评估贪婪算法的性能，将贪婪逼近的准确性与最佳可能逼近的准确性进行比较是很方便的。给定$x \in \mathbb{X}$ 和 $m \in \mathbb{N}$，我们考虑两种不同的理论逼近误差，

$$\sigma_m(x) = \inf\left\{\left\|x - \sum_{n\in A} \alpha_n\, \boldsymbol{x}_n\right\| : \alpha_n \in \mathbb{F},\, |A| \le m\right\},$$

and

$$\widetilde{\sigma}_m(x) = \inf\{\|x - S_A(x)\| : |A| \le m\},$$

其中 $S_A(x)= \sum_{n\in A} \boldsymbol{x}_n^*(x)\,\boldsymbol{x}_n$ 是到 $\{\boldsymbol{x}_n$ 的线性张成上的自然投影：$n \in A\}$。Konyagin 和Temlyakov [12] 将基定义为贪婪的，即 $\mathcal{G}_m(x)$ 本质上是使用基向量对 x的最佳 m 项逼近，也就是说，存在一个常数 $C \ge 1$ 使得

$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \le C\sigma_m(x), \quad x \in \mathbb{X},\, m \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

(1.3) 中的最小常数 C 是该基的贪婪常数，记为 C_g。如果 $C_g \le C$，则称 $\mathcal{B}$ 是 C-贪婪的。注意，如果 $C_g = 1$，那么对于所有 $x \in \mathbb{X}$ 和 $m \in \mathbb{N}$，都有 $\|x - \mathcal{G}_m(x)\| = \sigma_m(x)$，因此贪婪算法为每个$x \in \mathbb{X}$ 给出最佳的 m项逼近。

Konyagin 和 Temlyakov [12] 证明，贪婪基可以内在地刻画为具有民主性这一附加性质的无条件基，即存在常数 $\Delta \ge 1$ 使得

$$\|\mathbb{I}^A\| \le \Delta\,\|\mathbb{I}^B\|.$$

只要 $|A| = |B|$。这里，按照惯例，我们使用记号

$$\mathbb{I}^A = \mathbb{I}^A[\mathcal{B}, \mathbb{X}] = \sum_{n\in A} \boldsymbol{x}_n.$$

系数模为 1 的向量在贪婪逼近中也很重要。给定 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in A}$ 属于 $\mathbb{E} = \{\lambda \in \mathbb{F}\colon\ |\lambda| = 1\}$，我们定义

$$\mathbb{I}^{\varepsilon,A} = \mathbb{I}^{\varepsilon,A}[\mathcal{B}, \mathbb{X}] = \sum_{n\in A} \varepsilon_n\, \boldsymbol{x}_n.$$

还要回顾一下，基 $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ 是无条件的，如果对于 $x \in \mathbb{X}$，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_{\pi(i)}^{*}(x)\boldsymbol{x}_{\pi(i)}$ 对任意排列 π 的 $\mathbb{N}$ 都收敛到 x。众所周知，无条件这一性质等价于抑制无条件，这意味着存在一个常数 $K \geq 1$，使得

$$\|S_A(x)\| \leq K \|x\|, \quad A \subset \mathbb{N}, |A| < \infty, x \in \mathbb{X}. \tag{1.4}$$

(1.4) 中的最小常数 K 称为该基的抑制无条件常数，记作 K_s。如果 (1.4) 对某个常数 K 成立，我们就称 $\mathcal{B}$ 是 K-抑制无条件的。如果 $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ 是无条件的，那么它就是 C-格无条件的，也就是说，存在常数 $C \geq 1$ 使得

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n \boldsymbol{x}_n \right\| \leq C \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boldsymbol{x}_n \right\|, \quad (a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}, |b_n| \leq |a_n|. \tag{1.5}$$

我们用 K_l 表示 (1.5) 中的最优常数 C。

Dilworth 等人 [7] 通过对每个 x 和 m，比较用 $\mathcal{G}_m(x)$ 对 x 进行近似的误差与基于投影的最佳理论近似误差 $\widetilde{\sigma}_m(x)$，放宽了贪婪基的定义条件。他们将一个基称为 C-几乎贪婪基，$1 \leq C < \infty$，如果

$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\widetilde{\sigma}_m(x), \quad x \in \mathbb{X}, m \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

回到本文关注的最优性问题，可以很容易验证，如果 $\mathcal{B}$ 是希尔伯特空间的一组标准正交基，那么 $\mathcal{B}$ 是 1-贪婪的。然而，由于计算方面的困难，即使对于巴拿赫空间中众所周知的基，验证条件 (1.3) 也可能非常困难。为回答 Wojtaszczyk 提出的问题，作者在[15], 中找到了 [6] 以下刻画 1-贪婪基的定理，其思路与前述 Konyagin 和 Temlyakov 对贪婪基的刻画一致。

定理 1.1（[6, 定理 3.4]）。巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 中的一组基是 1-贪婪的，当且仅当它是 1-抑制无条件的并满足性质 (A)。

性质 (A) 是一种弱对称条件，最初于[6] 提出，并在 [2, 定义 3.1] 中推广为最大系数对称的概念。若存在常数 $C \geq 1$，使得基 $\mathcal{B}$ 满足

$$\|_{\mathbb{I}^{\varepsilon,A}} + f\| \leq C \|_{\mathbb{I}^{\varepsilon,B}} + f\| \tag{1.7}$$

对所有满足 $\max_n |\boldsymbol{x}_n^*(f)| \leq 1$ 的 $f \in \mathbb{X}$、所有满足 $|A| \leq |B| < \infty$ 且 $A \cap B = A \cap \text{supp}(f) = B \cap \text{supp}(f) = \emptyset$ 的 $A, B \subset \mathbb{N}$，以及所有 $\varepsilon \in \mathbb{E}^{A \cup B}$，均成立。如果在 (1.7) 中可以取 $C = 1$，则称 $\mathcal{B}$ 具有性质 (A)。

定理 1.1 对 1-贪婪基的简洁刻画，启发了贪婪基等距理论的进一步研究，并由此得到了以下关于 1-拟贪婪基和 1-几乎贪婪基的刻画：它们恰好分别由相同的要素刻画，但这些要素出现在不同的条件中。

定理 1.2 ([1, 定理 2.1])。Banach空间的一个基是 1-拟贪婪的，当且仅当它是 1-抑制无条件的。

定理 1.3 ([2, 定理 2.3])。Banach空间的一个基是 1-几乎贪婪的，当且仅当它满足性质 (A)。

由于几乎贪婪基尤其是拟贪婪基，人们可能会预期，当几乎贪婪常数达到最佳值时，这一蕴含关系仍然成立，即 1-几乎贪婪意味着 1-拟贪婪。结合定理 1.2 和 1.3，我们自然会提出以下问题，它探讨了刻画 1-贪婪基的两种性质是否存在重叠。

问题 1.4. 性质 (A) 是否蕴含无条件性，且常数为 $K_s = 1$(参见 [2, 问题 4.4])?

定理 1.2 有些出人意料，因为它将巴拿赫空间逼近理论中的非线性性质（拟贪婪性）与线性性质（例如无条件性）联系起来。此外，该定理还展示了等距性质如何改善基的定性行为。因此，自然会问几乎贪婪基是否也有同样的情形。

问题 1.5。是否存在具有性质 (A) 的条件基（见 [2,问题 4.4]）？

如果我们将注意力限制在无条件基上，对性质(A)与无条件性之间关系的研究就归结为确定性质 (A)是否蕴含该基的无条件常数的某个上界这一问题。

问题 1.6. 具有性质 (A) 的无条件基是否总是具有 $K_s = 1$?

注意到，对问题 1.5 或问题 1.6 的否定回答，也是否定回答问题 1.4。本文通过重新赋予空间 {v1} 范数，对问题 1.4

和问题 1.6 给出否定回答，使得标准单位向量基仍满足性质 (A)，并且关于 $K_s > 1$ 是无条件的。

定理 1.7（主定理）。存在一个基 $\mathcal{B}$，与 ℓ_1 的典范基等价，满足性质 (A)，但不是 1-抑制无条件的。此外，$\mathcal{B}$ 是 1-对称且 1-双民主的。

我们注意到，在本文的语境中，C-对称基 $1 \le C < \infty$ 指的是一个基 $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$，满足

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boldsymbol{x}_n \right\| \le C \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boldsymbol{x}_{\pi(n)} \right\|$$

对于任意标量序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$ 以及 $\mathbb{N}$ 的任意排列 π。回顾一下，如果一个基满足以下条件，就称其为 C-双民主：

$$\|_{\mathbb{I}^{\varepsilon,A}}[\mathcal{B}, \mathbb{X}]\| \, \|_{\mathbb{I}^{\delta,B}}[\mathcal{B}^*, \mathbb{X}^*]\| \le Cm$$

对于所有 A、$B \subset \mathbb{N}$，其中 $\max\{|A|, |B|\} \le m \in \mathbb{N}$，所有 $\varepsilon \in \mathbb{E}^A$，以及所有 $\delta \in \mathbb{E}^B$。请注意，1-双民主性并不意味着性质 (A)。事实上，令 $\boldsymbol{w} = (w_n)_{n=1}^{\infty}$ 为如下定义的权：对所有 $m \in \mathbb{N}$，$\sum_{n=1}^{m} w_n = \sqrt{m}$。那么，希尔伯特空间 ℓ_2 与洛伦兹序列空间 $d_1(\boldsymbol{w})$ 的 ℓ_2- 直和的典范基（经重新赋范后即空间 $\ell_{2,\,1}$）显然是 1- 双民主的，但不满足性质 (A)。实际上，[3, 命题 3.17] 给出了一个更“极端”的例子，即一个等距双民主但并非拟贪婪的基。根据 [4, 推论 5.8]，这个基具有最大系数的对称性。由定理 1.3 可知，无论如何重新赋范，都无法使 $\mathbb{X}$ 上的这个基满足性质 (A)。

将定理 1.7 与定理 1.1 结合，可得如下推论。

推论 1.8. 具有性质 (A) 的基不一定是 1-贪婪的，而 1-几乎贪婪的基不一定是 1- 拟贪婪的。

本文的结构如下。在第 2 节中，给定一个权 $\boldsymbol{w}$，我们构造一个空间 $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{w}}$，它将在后续论证中发挥核心作用；我们考察这些空间及其典范基的性质。在第 3 节中，我们对适当的 $\boldsymbol{w}$ 使用空间 $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{w}}$，构造一个证明定理 1.7 的例子。具体而言，我们给出典范 ℓ_1-基的一个 1-对称畸变，它具有性质 (A)，但并非 1-抑制无条件（见命题 3.4）。我们还讨论抑制无条件常数可能取到的值。

这一构造在以下意义下是“刚性的”：任何具有性质 (A)但不具备 1-抑制无条件性的 1-对称基，都必然等价于 ℓ_1-基（命题3.7）。在此过程中，我们证明了一个对称基是无条件的，当且仅当它是全的（推论 3.8）。

最后，在第 4 节中，我们将注意力转向有限维情形。我们对第 3 节中的方法加以修改，在 $\mathbb{R}^d$ 上构造一个配备某种范数的基，它具有性质 (A)，但并非 1-抑制无条件。我们还给出一个例子，表明至少对于有限维空间中的基，性质 (A) 并不保持对偶性。

2. Building bases with Property (A)

本节讨论这样的巴拿赫空间 $\mathbb{X}$：其中的单位向量系 $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_j)_{j=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ 的一个基。这意味着，$\mathbb{X} \subset \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$, c_{00} 是 $\mathbb{X}$的稠密子空间，坐标泛函 $\mathcal{E}^* = (\mathbf{e}_j^*)_{j=1}^{\infty}$对每个 $j \in \mathbb{N}$定义为 $\mathbf{e}_j^*(f) = a_j$对所有 $f = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}$成立，限制为 $\mathbb{X}$上的泛函，并且

$$\sup_j \{\max\{\|\mathbf{e}_j\|_{\mathbb{X}}, \|\mathbf{e}_j^*\|_{\mathbb{X}^*}\}\} < \infty.$$

给定这样的空间 $\mathbb{X}$ 和 $A \subset \mathbb{N}$ 有限，关于 $\mathcal{E}$ 的 A上的坐标投影是该映射在 $\mathbb{X}$ 上的延拓。

$$S_A \colon c_{00} \to c_{00}, \quad f \mapsto f\,\chi_A,$$

其中，χ_A 是 A的特征函数。给定 $\varepsilon \in \mathbb{E}^A$，我们令

$$\mathbb{I}^{\varepsilon,A} = \mathbb{I}^{\varepsilon,A}[\mathcal{E}, \mathbb{X}], \quad \overset{*}{\mathbb{I}}{}^{\varepsilon,A} = \mathbb{I}^{\varepsilon,A}[\mathcal{E}^*, \mathbb{X}^*.]$$

权将是一个非递增序列 $\boldsymbol{w} = (w_j)_{j=1}^{\infty}$，其元素为正标量并满足 $w_1 = 1$。我们不假设 $\lim_j w_j = 0$。恰恰相反，具有

$$\boldsymbol{w}_\infty := \lim_j w_j > 0.$$

对我们至关重要。我们将使用记号

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} w_j, \ n \in \mathbb{N},$$

$\boldsymbol{w}$ 所谓的原始权。请注意

$$w_j \le \frac{s_j}{j}, \quad j \in \mathbb{N},$$

and

$$\lim_n \frac{s_n}{n} = \boldsymbol{w}_\infty.$$

给定带有 $|E| = n < \infty$ 的 $E \subset \mathbb{N}$，我们用 $\Pi(E)$ 表示由从集合

$$\mathbb{N}_{>n} := \{j \in \mathbb{N} \colon j > n\}$$

到 $\mathbb{N} \setminus E$ 的所有双射构成的集合。对于 $f = (a_j)_{j=1}^\infty \in c_{00}$，我们使用以下记号

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_1(E; f) &= \frac{s_n}{n} \sum_{j \in E} |a_j|\,, \\
\boldsymbol{\Phi}_2(E; f) &= \sup_{\varphi \in \Pi(E)} \left| \sum_{j=n+1}^\infty a_{\varphi(j)} w_j \right|, \\
\boldsymbol{\Phi}(E; f) &= \boldsymbol{\Phi}_1(E; f) + \boldsymbol{\Phi}_2(E; f),
\end{aligned}$$

约定 $s_0 = 0$、 $s_0/0 = \infty$，任意空集上的求和为零，并且 $0 \cdot \infty = 0$。特别地， $\boldsymbol{\Phi}_1(\emptyset; f) = 0$。

现在，给定一个权 $\boldsymbol{w} = (w_j)_{j=1}^\infty$，我们定义

$$\|f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} = \sup_{\substack{E \subset \mathbb{N} \\ |E| < \infty}} \boldsymbol{\Phi}(E; f).$$

我们指出，就同构理论而言，如何组合 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_2$ 以得到 $\boldsymbol{\Phi}$ 并不重要。然而，从下文将要发展的等距观点来看，使用 ℓ_1-范数至关重要。

给定 $\mathbb{N}$ 的一个排列 $\pi \in \Pi := \Pi(\emptyset)$ 以及 $f = (a_j)_{j=1}^\infty$，令 $f_\pi = (a_{\pi(j)})_{j=1}^\infty$。若 $f \in c_0$，则存在唯一的非增序列 g，使得对于某个适当的 $\pi \in \Pi$，有 $g_\pi = |f|$。我们称 g 为 f 的非增重排。

让我们考虑与权 $\boldsymbol{w}$ 相关联的马尔钦凯维奇范数，

$$\|f\|_{m,\boldsymbol{w}} = \sup_{\substack{E \subset \mathbb{N} \\ |E| < \infty}} \boldsymbol{\Phi}_1(E; f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{s_n}{n} \sum_{j=1}^n b_j,$$

以及洛伦兹范数

$$\|f\|_{1,\boldsymbol{w}} = \sum_{j=1}^\infty b_j\, w_j,$$

其中 $(b_j)_{j=1}^\infty$ 是 $f \in c_0$ 的非增重排。注意，

$$\|_{\mathbb{I}^{\varepsilon,A}}\|_{m,\boldsymbol{w}} = \|_{\mathbb{I}^{\varepsilon,A}}\|_{1,\boldsymbol{w}} = s_n, \quad |A| = n < \infty,\, \varepsilon \in \mathbb{E}^A. \tag{2.1}$$

由所有满足 $\|f\|_{1,\boldsymbol{w}} < \infty$ 的 $f \in c_0$ 构成的 Banach空间记为 $d_1(\boldsymbol{w})$。

我们先记录$\|\cdot\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}$的一些性质。

引理 2.1. 设 $\boldsymbol{w}$ 为一个权。

(i) $\|f+g\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} \le \|f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} + \|g\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}$对所有 f和 $g \in c_{00}$均成立。(ii) $\|\lambda f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} = |\lambda|\,\|f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}$对所有 $\lambda \in \mathbb{F}$和 $f \in c_{00}$均成立。(iii) 对所有 $f \in c_{00}$、所有有限的 $E \subset \mathbb{N}$ 以及所有 $\pi \in \Pi$,

$$\boldsymbol{\Phi}_1(E; f_\pi) = \boldsymbol{\Phi}_1(\pi(E); f), \quad \boldsymbol{\Phi}_2(E; f_\pi) = \boldsymbol{\Phi}_2(\pi(E); f).$$

(iv) $\|f_\pi\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} = \|f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}$ 对所有 $f \in c_{00}$ 和所有 $\pi \in \Pi$均成立。(v) 若 $|f| \le g \in c_{00}$，则$\|f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} \le \|g\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}$。(vi) 若 $f \in c_{00}$ 非负且 $|E| = n$，则

$$\boldsymbol{\Phi}_2(E; f) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w_{k+n},$$

其中 $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ 是 $S_{\mathbb{N}\setminus E}(f)$ 的非增重排。(vii) 如果 $f = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}$ 的各分量在集合 E 的补集上具有恒定符号，且 $F \subset \mathbb{N} \setminus E$ 是 $S_{\mathbb{N}\setminus E}(f)$ 的贪婪集，那么

$$\boldsymbol{\Phi}(D; f) \le \boldsymbol{\Phi}(E \cup F; f)$$

对于每个满足 $|D| = |E| + |F|$的集合 $E \subset D \subset \mathbb{N}$。(viii) 如果 $f = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ 的各分量在贪婪集 E 的补集上具有恒定符号，那么

$$\boldsymbol{\Phi}(D; f) \le \boldsymbol{\Phi}(E; f)$$

对于每个有限集 $D \supseteq E$。(ix) $\|f\|_{\boldsymbol{D},\,\boldsymbol{w}} = \|f\|_{1,\,\boldsymbol{w}}$ 对于所有具有恒定符号的 $f \in c_{00}$。(x) $\|f\|_{m,\,\boldsymbol{w}} \le \|f\|_{\boldsymbol{D},\,\boldsymbol{w}} \le \|f\|_{1,\,\boldsymbol{w}}$对于所有 $f \in c_{00}$。(xi) $\|\mathbb{I}^{\varepsilon A}\|_{\boldsymbol{D},\,\boldsymbol{w}} = s_m$ 对于所有满足 $m = |A| < \infty$ 的 $A \subset \mathbb{N}$ 以及所有 $\varepsilon \in \mathbb{E}^A$。(xii) 如果 $f \in c_{00}$，那么

$$\left|\mathbb{I}^{*}_{\varepsilon,A}(f)\right| \le \|f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}\, m/s_m$$

对于所有 $A \subset \mathbb{N}$，其中 $m = |A| < \infty$，以及所有 $\varepsilon \in \mathbb{E}^A$。（xiii） $\|\mathrm{e}^j\|_{\boldsymbol{D},\,\boldsymbol{w}} = 1$ 对于所有 $j \in \mathbb{N}$。（xiv） $|\mathrm{e}^*_j(f)| \le \|f\|_{\boldsymbol{D},\,\boldsymbol{w}}$对于所有 $j \in \mathbb{N}$和 $f \in c_{00}$。

证明。(i)、(ii)、(iii)、(v) 以及 (x) 的左侧显然成立；(iv) 是 (iii) 的推论，而 (vi) 则由重排不等式得出。

我们证明 (vii)。不失一般性，我们假设 $D\cap F=\emptyset$。否则，我们将用 $E'=E\cup(D\cap F)$ 和 $F'=F\backslash(D\cap F)$ 替换 E 和 F。那么，$D\cap F'=\emptyset$、$E\cup F=E'\cup F'$ 和 F' 是 $S_{\mathbb{N}\backslash E'}(f)$ 的贪婪集。

取一个双射 $\sigma\colon F\to D\setminus E$。令 $n=|D|$。给定 $\varphi\in\Pi(D)$，令 $\psi\colon \mathbb{N}_{>n}\to\mathbb{N}\setminus(E\cup F)$ 为由下式定义的映射：若 $j\in G:=\varphi^{-1}(F)$，则 $\psi(j)=\sigma(\varphi(j))$；否则 $\psi(j)=\varphi(j)$。然后

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{\varphi(j)}w_j\right| &= \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{\psi(j)}w_j+\sum_{j\in G}\left(a_{\varphi(j)}-a_{\sigma(\varphi(j))}\right)w_j\right| \\
&\le \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{\psi(j)}w_j\right|+\sum_{j\in G}\left|a_{\varphi(j)}-a_{\sigma(\varphi(j))}\right|w_j \\
&\le \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{\psi(j)}w_j\right|+\frac{s_n}{n}\sum_{j\in G}\left|a_{\varphi(j)}-a_{\sigma(\varphi(j))}\right| \\
&= \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{\psi(j)}w_j\right|+\frac{s_n}{n}\sum_{j\in F}\left(|a_j|-\left|a_{\sigma(j)}\right|\right) \\
&= \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{\psi(j)}w_j\right|+\frac{s_n}{n}\left(\sum_{j\in F}|a_j|-\sum_{j\in D\setminus E}|a_j|\right) \\
&= \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{\psi(j)}w_j\right|+\mathbf{\Phi}_1(E\cup F;f)-\mathbf{\Phi}_1(D;f).
\end{aligned}$$

由于 $\psi\in\Pi(E\cup F)$，

$$\mathbf{\Phi}_2(D;f)\le\mathbf{\Phi}_2(E\cup F;f)+\mathbf{\Phi}_1(E\cup F;f)-\mathbf{\Phi}_1(D;f),$$

正如所期望的那样。

考虑到 (vii)，只需证明 {viii} 在 D 是 f 的一个贪婪集的情况下成立。为此，通过归纳，只需考虑 $D\setminus E$ 是单元素集的情形。设 $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ 是 f 的非增重排。若 $n=|E|$，则 $(b_{n+j})_{j=1}^{\infty}$ 是 $S_{\mathbb{N}\backslash E}(f)$ 的非增重排，而$(b_{n+j+1})_{j=1}^{\infty}$ 是 $S_{\mathbb{N}\backslash D}(f)$ 的非增重排。由 (vi)，

$$\mathbf{\Phi}(E;f)=\frac{s_n}{n}\sum_{j=1}^{n}b_j+\sum_{j=n+1}^{\infty}b_jw_j,$$

$$\mathbf{\Phi}(D;f)=\frac{s_{n+1}}{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n+1}b_j\right)+\sum_{j=n+2}^{\infty}b_jw_j.$$

由于对于所有 $j=1,\ \ldots\ldots,\ n,\ \ s_{n+1}/(n+1)-s_n/n\le 0$ 和 $b_j\ge b_{n+1}$，

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}(D;f)-\mathbf{\Phi}(E;f)&=\left(\frac{s_{n+1}}{n+1}-\frac{s_n}{n}\right)\sum_{j=1}^{n}b_j+b_{n+1}\left(\frac{s_{n+1}}{n+1}-w_{n+1}\right)\\&\le b_{n+1}\left(n\left(\frac{s_{n+1}}{n+1}-\frac{s_n}{n}\right)+\frac{s_{n+1}}{n+1}-w_{n+1}\right)=0.\end{aligned}$$

(ix) 由 (vi) 和 (viii) 的组合得到。反过来，(x) 中的不等式右侧是结合 (v) 和 (ix) 的结果。由 (2.1) 可知，(xi) 是 (x) 的推论。由于范数的直接定义可得

$$\frac{s_m}{m}\left|{}_{\mathbb{I}}{}^{*}_{\varepsilon,A}(f)\right|\le\|f\|_{m,\boldsymbol{w}},\quad f\in c_{00},\,|A|=m,$$

(xii) 也由 (x) 得出。最后，(xiii) 是 (xi) 的一个特例，而 (xiv) 是 (xii) 的一个特例。□

结合引理 2.1 (i)、(ii)、(xi) 和 (xiv)，可知 $(c_{00},\|\cdot\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}})$ 是一个赋范空间，且单位向量系是其完备化的一个基。

定义 2.2。我们将 $(c_{00},\|\cdot\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}})$ 完备化后得到的序列空间定义为 $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{w}}$。

给定 $f=(a_j)_{j=1}^{\infty}\in c_{00}$，令

$$E_f=\{j\in\mathbb{N}:\ |a_j|=\|f\|_{\infty}\}.$$

引理 2.3. 设 $\boldsymbol{w}$ 为一个权，且 $f=(a_j)_{j=1}^{\infty}\in c_{00}$。则

$$\|f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}=\sup_{\substack{E_f\subset E\subset\mathbb{N}\\|E|<\infty}}\mathbf{\Phi}_1(E;f)+\mathbf{\Phi}_2(E;f).$$

证明。不失一般性，我们假设 $\|f\|_{\infty}=1$。只需证明，如果 $E\subset\mathbb{N}$ 满足 $n=|E|<\infty$ 和 $k\in E_f\setminus E$，那么

$$\mathbf{\Phi}_1(E;f)+\mathbf{\Phi}_2(E;f)\le\mathbf{\Phi}_1(E\cup\{k\};f)+\mathbf{\Phi}_2(E\cup\{k\};f).\qquad(2.2)$$

为此，我们选取 $\varphi\in\Pi(E)$。令 $p\in\mathbb{N}_{>n}$ 满足 $\varphi(p)=k$。令 $\psi\in\Pi(E\cup\{k\})$为如下映射：

$$\psi(j)=\begin{cases}\varphi(j) & \text{if } j\ne p,\\ \varphi(n+1) & \text{if } j=p.\end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{\varphi(j)}w_j - \sum_{j=n+2}^{\infty} a_{\psi(j)}w_j\right| &= \left|(w_{n+1}-w_p)a_{\varphi(n+1)} + w_p a_{\varphi(p)}\right| \\ &\leq w_{n+1} - w_p + w_p \\ &= w_{n+1}.\end{aligned}$$

因此,

$$\mathbf{\Phi}_2(E;f) \leq \mathbf{\Phi}_2(E\cup\{k\};f) + w_{n+1}. \tag{2.3}$$

反过来，由于映射

$$u \mapsto \frac{s_{n+1}}{n+1}(1+u) - \frac{s_n}{n}u, \quad u \geq 0,$$

是不递增的，并且 $S := \sum_{j\in E}|a_j| \leq n$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_1(E\cup\{k\};f) - \mathbf{\Phi}_1(E;f) &= \frac{s_{n+1}}{n+1}(1+S) - \frac{s_n}{n}S \\ &\geq \frac{s_{n+1}}{n+1}(1+n) - \frac{s_n}{n}n \\ &= w_{n+1}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

结合（2.3）和（2.4）可得（2.2）。 □

命题2.4。令 $\boldsymbol{w}$ 为一个权。则单位向量系$\boldsymbol{D_w}$ 具有性质 (A)，并且是等距双民主。

证明。由引理 2.1(xi) 和 (xii) 可得等距双民主性。结合引理 2.3 与引理 2.1(iii)，即可得到性质 (A)。

□

为了计算 $\boldsymbol{D_w}$ 中特定向量的范数，使用下面对引理 2.3 的改进会很方便。

引理 2.5. 设 $\boldsymbol{w}$ 是一个权，且 $f = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}$。那么

$$\|f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} = \sup_{E_f\subset E\subset \mathrm{supp}(f)} \mathbf{\Phi}_1(E;f) + \mathbf{\Phi}_2(E;f).$$

证明。只需证明不等式

$$\mathbf{\Phi}_1(E;f) + \mathbf{\Phi}_2(E;f) \leq \mathbf{\Phi}_1(E\setminus\{k\};f) + \mathbf{\Phi}_2(E\setminus\{k\};f).$$

对所有 $E \subset \mathbb{N}$ 满足 $n := |E| < \infty$ 以及所有 $k \in E \setminus \mathrm{supp}(f)$均成立。为此，取 $\varphi \in \Pi(E)$，并令 $\psi \in \Pi(E\setminus\{k\})$ 为由下式给出的映射

$$\psi(j) = \begin{cases} k & \text{if } j = n, \\ \varphi(j) & \text{if } j \geq n+1. \end{cases}$$

自 $x_k = 0$以来,

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{\varphi(j)} w_j = \sum_{j=n}^{\infty} a_{\psi(j)} w_j.$$

因此， $\mathbf{\Phi}_2(E;\ f) \leq \mathbf{\Phi}_2(E \setminus \{k\};\ f)$。由于 $\mathbf{\Phi}_1(E;\ f) \leq \mathbf{\Phi}_1(E \setminus \{k\};\ f)$，得证。□

3. The suppression unconditionality constant of bases with Property (A)

给定一个权 $\boldsymbol{w}$，记 $\boldsymbol{K_w}$ 为第 2 节中构造的 Banach空间 $\boldsymbol{D_w}$ 的单位向量系的抑制无条件常数。以下引理将有助于得到 $\boldsymbol{K_w}$的一个一致上界。

引理 3.1. 设 $\boldsymbol{w}$ 是一个权， $f \in c_{00}$，且 $A \subset \mathbb{N}$。则:

(i) 对某个有限的 $F \subset \mathbb{N}$， $\boldsymbol{w}_\infty \|f\|_1 \leq \mathbf{\Phi}_1(F;\ f)$，且 (ii) 对每个有限的 $E \subset \mathbb{N}$， $\mathbf{\Phi}_2(E;\ S_A(f)) \leq \mathbf{\Phi}_2(E;\ f) + \boldsymbol{w}_\infty \|S_{A^c}(f)\|_1$。

证明。为证明 (i)，我们选取 $F = \mathrm{supp}(f)$，并令 $n = |F|$。于是

$$\mathbf{\Phi}_1(F; f) = \frac{s_n}{n} \|f\|_1 \geq w_n \|f\|_1 \geq \boldsymbol{w}_\infty \|f\|_1 .$$

为证明 (ii)，我们选取 $\varphi \in \Pi(E)$。令 $n = |E|$,

$$B = \varphi^{-1}(\mathrm{supp}(f) \cap A), \quad \text{and} \quad D = \varphi^{-1}(\mathrm{supp}(f) \setminus A).$$

若 $\varphi^{-1}(\mathrm{supp}(f)) = \emptyset$，即 $\mathrm{supp}(f) \subset E$，则 $\mathbf{\Phi}_2(E;\ S_A(f)) = 0$，无需再证。假设 $\varphi^{-1}(\mathrm{supp}(f)) \neq \emptyset$；于是可令 $n_0 = \max\ \varphi^{-1}(\mathrm{supp}(f))$，并令 $m \in \mathbb{N}_{>n_0}$。选取集合 $D_1 \subset \mathbb{N}_{>m}$，使得 $|D_1| = |D|$，并取双射 $\pi : \mathbb{N}_{>n} \to \mathbb{N}_{>n}$，使得 $\pi(D) = D_1$、$\pi(D_1) = D$，且对 $j \notin D \cup D_1$， $\pi(j) = j$。现在考虑 $\sigma = \varphi \circ \pi$。由于 $D_1 \subset \mathbb{N}_{>m}$ 且 $\sigma(D_1) = \mathrm{supp}(f) \setminus A$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{\varphi(j)} \chi_A(\varphi(j)) w_j - \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{\sigma(j)} w_j \right| &= \left| \sum_{j \in B} a_{\varphi(j)} w_j - \sum_{j \in D_1 \cup B} a_{\sigma(j)} w_j \right| \\
&= \left| \sum_{j \in D_1} a_{\sigma(j)} w_j \right| \\
&\leq w_m \|S_{A^c}(f)\|_1 .
\end{aligned}$$

应用三角不等式，并令 m 趋于无穷大，我们得到

$$\left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{\varphi(j)} \chi_A(\varphi(j)) w_j \right| \leq \mathbf{\Phi}_2(E; f) + \boldsymbol{w}_\infty \|S_{A^c}(f)\|_1 ,$$

因此 (ii) 成立。 □

命题3.2。设 $\boldsymbol{w}$ 为一个权。则 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{w}} \leq 2$。此外，若 $\boldsymbol{w}_\infty = 0$，则 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{w}} = 1$。

证明。取 $f \in c_{00}$ 和 $A \subset \mathbb{N}$。令 F 如引理3.1(i)中相对于向量 $S_{A^c}(f)$ 所述。给定有限的 $E \subset \mathbb{N}$，引理 3.1(ii) 得出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(E; S_A(f)) &\leq \boldsymbol{\Phi}_1(E; S_A(f)) + \boldsymbol{\Phi}_2(E; f) + \boldsymbol{w}_\infty \left\|S_{A^c}(f)\right\|_1 \\ &\leq \boldsymbol{\Phi}_1(E; S_A(f)) + \boldsymbol{\Phi}_2(E; f) + \boldsymbol{\Phi}_1(F; S_{A^c}(f)) \\ &\leq \boldsymbol{\Phi}_1(E; f) + \boldsymbol{\Phi}_2(E; f) + \boldsymbol{\Phi}_1(F; f) \\ &\leq \boldsymbol{\Phi}(E; f) + \boldsymbol{\Phi}(F; f).\end{aligned}$$

此外，如果 $\boldsymbol{w}_\infty = 0$ 项 $\boldsymbol{\Phi}(F, f)$，则可以省略。 □

在进一步讨论之前，我们先停下来，为 $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{w}}$给出一个漂亮的等价范数。

命题3.3. 如果 $\boldsymbol{w}$ 是一个权，则 $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{w}} = d_1(\boldsymbol{w})$。定量地，

$$\|f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} \leq \|f\|_{1,\boldsymbol{w}} \leq C \|f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}, \quad f \in c_{00},$$

其中，若 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，则 $C = 4$；若 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$，则 $C = 8$。此外，当 $\boldsymbol{w}_\infty = 0$ 时，我们可以取：若 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，则 $C = 2$；若 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$，则 $C = 4$。

证明。令：若 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，则 $\Upsilon = 2$；若 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$，则 $\Upsilon = 4$。此外，令：若$\boldsymbol{w}_\infty = 0$，则 $K = 1$；若 $\boldsymbol{w}_\infty > 0$，则 $K = 2$。左侧不等式由引理 2.1(x) 得出。为证明右侧不等式，取 $f \in c_{00}$。由引理 2.1(ix)，

$$\begin{aligned}\|f\|_{1,\boldsymbol{w}} &\leq \left\|\Re^+(f)\right\|_{1,\boldsymbol{w}} + \left\|\Re^-(f)\right\|_{1,\boldsymbol{w}} + \left\|\Im^+(f)\right\|_{1,\boldsymbol{w}} + \left\|\Im^-(f)\right\|_{1,\boldsymbol{w}} \\ &= \left\|\Re^+(f)\right\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} + \left\|\Re^-(f)\right\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} + \left\|\Im^+(f)\right\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} + \left\|\Im^-(f)\right\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} \\ &\leq K\Upsilon \|f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}.\end{aligned}$$ □

鉴于命题 3.2，为了找到虽具有性质 (A) 却不是 1-抑制无条件的基，我们必须考察 $\boldsymbol{w}_\infty > 0$ 的情形。在这种情况下，由命题 3.3，$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{w}} = d_1(\boldsymbol{w}) = \ell_1$，差一个等价范数。其实，不引用这一结果也能得出这个结论。事实上，

$$\boldsymbol{w}_\infty \|f\|_1 \leq \|f\|_{m,\boldsymbol{w}} \leq \|f\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} \leq \|f\|_{1,\boldsymbol{w}} \leq \|f\|_1$$

对所有 $f \in c_{00}$。这些关于 $\|\cdot\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}$ 的估计表明，$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{w}}$ 的单位向量系的无条件常数不超过 $1/\boldsymbol{w}_\infty$。

因此，由命题 3.2,

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{w}} \leq \min\left\{2, \frac{1}{\boldsymbol{w}_\infty}\right\}.$$

只要证明，对于某个合适的权 $\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{w}} > 1$，定理 1.7 即可推出。

命题 3.4. 对每个 $K < 3/2$，都存在一个权 $\boldsymbol{w}$，使得 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{w}} \geq K$。

证明. 固定 $\omega \in (0, 1)$，并考虑权

$$\boldsymbol{w} = (1, \omega, \omega, \ldots).$$

我们将通过比较向量的范数来估计 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{w}}$

$$f_{n,\omega} = \mathbf{e}_1 + \omega_{\mathbb{I}^{A_n}}, \quad \text{and} \quad g_{n,\omega} = \mathbf{e}_1 + \omega_{\mathbb{I}^{A_n}} - \omega_{\mathbb{I}^{B_n}},$$

其中 $A_n = \mathbb{N} \cap [2, n+1]$ 且 $B_n = \mathbb{N} \cap [n+2, 2n+1]$。由引理 2.1(ix),

$$\|f_{n,\omega}\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} = 1 + n\omega^2.$$

根据引理 2.5，要计算 $\|g_{n,\,\omega}\|$ 我们只需考虑 $\{1\} \subset E \subset \{1\} \cup A_n \cup B_n$ 的情形。我们有

$$\boldsymbol{\Phi}_1(g_{n,\omega}; E) = \frac{(1 + \omega(2n - a - b))^2}{2n + 1 - a - b}, \quad \boldsymbol{\Phi}_2(g_{n,\omega}; E) = |a - b|\,\omega^2,$$

其中 $a = |A_n \setminus E|$ 和 $b = |B_n \setminus E|$。因此，对于固定的 $a + b$，当 a 取到其最小值时，$\boldsymbol{\Phi}(g_{n,\,\omega};\ E)$ 达到最大值。因此，结合引理 2.3 和引理 2.1(iii) 可得

$$\|g_{n,\omega}\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} = \sup_{0 \leq k \leq 2n} \boldsymbol{\Phi}(g_{n,\omega}; E_k),$$

其中 $E_k = [1, k+1] \cap \mathbb{N}$。此外，如果 a_k 和 b_k 是上文定义的、与集合 $E = E_k$ 对应的整数 a 和 b，那么对于所有 $k = 0, \ldots, n$，都有 $a_k = n - k$ 和 $b_k = n$。由引理 2.1(viii),

$$\|g_{n,\omega}\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} = \sup_{0 \leq k \leq n} \boldsymbol{\Phi}(g_{n,\omega}; E_k) = \sup_{0 \leq k \leq n} \alpha(\omega, k),$$

其中

$$\alpha(\omega, t) = \frac{(1 + \omega t)^2}{t + 1} + \omega^2 t, \quad 0 \leq t \leq n.$$

该表达式

$$\alpha(\omega, t) = \frac{(1 - \omega)^2}{1 + t} + 2\omega^2 t + 2\omega - \omega^2$$

表明函数 $\alpha(\omega,\cdot)$ 是凸函数，因此 $0 \le t \le n$ 的最大值$\alpha(\omega,t)$ 必在端点 $t = 0$ 或端点 $t = n$ 处取得。因此，

$$\|g_{n,\omega}\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} = \max\left\{1, \frac{(1+n\omega)^2}{n+1} + n\omega^2\right\}.$$

由此可得

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{w}} \ge \delta(n,\omega) := \frac{\|f_{n,\boldsymbol{w}}\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}}{\|g_{n,\boldsymbol{w}}\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}} = \min\left\{\beta(n,\omega), \gamma(n,\omega)\right\},$$

其中

$$\beta(n,\omega) = 1 + n\omega^2, \quad \gamma(n,\omega) = \frac{1+n\omega^2}{n\omega^2 + (1+n\omega)^2/(n+1)}.$$

对于 n 固定，函数 $\beta(n,\omega)$，$0 \le \omega \le 1$，从 1 增加到$1+n$，而函数 $\gamma(n,\omega)$，$0 \le \omega \le 1$，从 $n+1$ 减少到 $(1+n)/(1+2n)$。因此，$\delta(n,\omega)$在唯一满足条件的点 $\omega = \omega_n \in (0,1)$处取得最大值

$$\beta(n,\omega) = \gamma(n,\omega).$$

我们推断，ω_n 是二阶多项式$\omega \mapsto (2n+1)\omega^2 + 2\omega - 1$的正根，即

$$\omega_n = \frac{-1+\sqrt{2n+2}}{2n+1} = \frac{1}{1+\sqrt{2n+2}}.$$

综上，权 $\boldsymbol{w} = (1, \omega_n, \omega_n, \ldots)$满足

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{w}} \ge K_n := 1 + n\omega_n^2 = 1 + (1-2\omega_n)\frac{n}{2n+1}.$$

当 $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ 从 $w_1 = 1/3$ 递减至零时，$(K_n)_{n=1}^{\infty}$ 从$K_1 = 10/9$ 递增至 $3/2$。□

注 3.5. 既然我们知道存在一个 Banach空间 $\mathbb{X}$，其基$\mathcal{B} = (\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ 具有性质 (A)，并且 $K_s > 1$，那么可以进一步问，这个不等式是否也适用于支撑集较小的向量。容易验证，若 $g \in \mathbb{X}$ 的支撑集基数至多为 2，则对任意集合 A，都有$\|S_A(g)\| \le \|g\|$。这是因为，若 $g = a\,\boldsymbol{x}_k + b\,\boldsymbol{x}_n$满足 $k \ne n$ 且 $|a| \le |b|$，则根据性质 (A)，有 $\|g\| = \|-a\boldsymbol{x}_k + b\boldsymbol{x}_n\|$。因此，由三角不等式，

$$\|g\| \ge \|b\,\boldsymbol{x}_n\| = |b|\,\|\boldsymbol{x}_n\| \ge |a|\,\|\boldsymbol{x}_k\| = \|a\,\boldsymbol{x}_k\|.$$

相比之下，可以在支撑于三个元素的向量上见证不等式 $K_s > 1$。事实上，命题 3.4 的证明给出$g \in D_{\boldsymbol{w}}$和 $A \subset \mathbb{N}$，其中 $|\mathrm{supp}(g)| = 3$ 以及 $\|S_A(g)\| / \|g\| \ge 10/9$。我们

我们不知道这是否为最优。不过，如果将范围限制在 $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{w}}$ 空间及其元素 $g = g_a = \mathsf{e}_1 + a\mathsf{e}_2 - a\mathsf{e}_3, 0 < a < 1$ 上，则确实如此。事实上，令 $f_a = \mathsf{e}_1 + a\mathsf{e}_2,$，我们可以证明，当 a 遍历 (0, 1)，且$\boldsymbol{w}$ 遍历所有可能的权时，比值 $\|f_a\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}} / \|g_a\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}$ 的最大值为 $10/9$，并且在 $a = 1/3$ 和 $\boldsymbol{w} = (1, 1/3, 1/3, 1/3, \dots)$ 时取到。

用于证明命题 3.4 的例子是“紧致的”，因为不等价于标准 ℓ_1-基的 1-对称 Markushevich 基都是 1-抑制无条件的。下面的命题 3.7 证实了这一论断。在陈述该命题之前，我们提醒读者，尽管对称 Schauder 基总是无条件的（例如，见 [13, 第 3.a 节]），但也存在非无条件的对称基（见下文例 3.9）。一个标准论证表明，对称基是某个 C-对称基（例如，见 [5, 引理 9.2 的证明2]），因此对空间作适当的重新赋范后，它就是 1-对称的。我们还可推得，任意对称基都是半归一化的。由于对称性在对偶化下保持良好，任意对称基都满足 (B.3)。对称基的另一项重要性质，在我们这个更一般的框架中依然成立，即平均投影的有界性（例如，见 [13, 命题 3.a.4]）。

给定 $a \in \mathbb{F}$，其符号为数值 $\operatorname{sign}(a) = a/|a| \in \mathbb{E}$，约定 $\operatorname{sign}(0) = 1$。

引理 3.6. 设 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach空间 $\mathbb{X}$ 的一个 1-对称基。若 $\mathcal{B}$ 不是无条件的，则对每个 $\delta > 0$，都存在 $\lambda \in \mathbb{E}$ 和 $m \in \mathbb{N}$，使得

$$N(A, B, \lambda) := \left\| \frac{\mathbb{I}_A}{\|\mathbb{I}_A\|} - \lambda \frac{\mathbb{I}_B}{\|\mathbb{I}_B\|} \right\| \le \delta \tag{3.1}$$

对于任意两个互不相交且基数至少为 m 的有限集合 A、$B \subset \mathbb{N}$。

证明。固定 $0 < \varepsilon < 1/2$，使得

$$\frac{4\varepsilon(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)} \le \delta.$$

由其不具备无条件性可知，存在支撑有限且互不相交的向量 f 和 g，使得 $\|f\| = 1$、$\|f + g\| \le \varepsilon$。令 α 和 β 分别为 f 和 g 的系数和的符号。取 $A \supset A_0 := \operatorname{supp}(f)$ 和 $B \supset B_0 := \operatorname{supp}(g)$，使二者互不相交，并令

$$f_0 = \operatorname{Ave}(f, A)\mathbb{I}_A, \quad g_0 = \operatorname{Ave}(g, B)\mathbb{I}_B.$$

由于平均投影是压缩的，[13, 命题 3.a.4]$\|f + g_0\| \le \varepsilon$ 以及 $\|f_0 + g_0\| \le \varepsilon$。前一个不等式意味着 $1 - \varepsilon \le$

$\|g_0\| \le 1+\varepsilon$ 而后者意味着 $1-2\varepsilon \le \|f_0\| \le 1+2\varepsilon$。该恒等式

$$\frac{\alpha \mathbb{1}_A}{\|\mathbb{1}_A\|} + \frac{\beta \mathbb{1}_B}{\|\mathbb{1}_B\|} = \frac{f_0}{\|f_0\|} + \frac{g_0}{\|g_0\|} = \frac{\|g_0\| - \|f_0\|}{\|f_0\|\,\|g_0\|} f_0 + \frac{f_0+g_0}{\|g_0\|}$$

得到不等式

$$\left\| \alpha \frac{\mathbb{1}_A}{\|\mathbb{1}_A\|} + \beta \frac{\mathbb{1}_B}{\|\mathbb{1}_B\|} \right\| \le \frac{3\varepsilon(1+2\varepsilon)}{(1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{4\varepsilon(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)} \le \delta,$$

因此， A 和 B 满足带有 $\lambda = -\alpha^{-1}\beta$的 (3.1)。由于该基是 1-对称的， $N(A,B,\lambda)$ 仅取决于 $|A|$、 $|B|$和 λ，前提是 A和 B 互不相交。因此，对于 $\mathbb{N}$ 中基数有限且至少为 $m := \max\{|A_0|, |B_0|\}$的 A 和 B 这两个互不相交的子集，(3.1) 仍然成立。□

命题 3.7. 设 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach空间 $\mathbb{X}$ 中的一个 1-对称全基，但它不是 1-抑制无条件的。那么$\mathcal{B}$ 等价于典范的 ℓ_1-基。

证明。设 $\mathcal{B}$ 是一个非 1-抑制无条件的 1-对称基。首先注意到， $\mathcal{B}$ 不可能是弱零的。事实上，假设它是弱零的。由于 $\mathcal{B}$ 不是 1-抑制无条件的，我们可以找到支撑有限且互不相交的向量 x 和 y，使得 $\|x\| > \|x+y\|$。对于每个 $p \in \mathbb{N}$，令 y_p 为 y向右平移 p位所得的向量，即，

$$y_p = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_n^*(y)\boldsymbol{x}_{n+p}.$$

由于 y_p 是弱零列，$\lim_p (x+y_p) = x$ 弱收敛。因此，

$$\|x\| \le \limsup_p \|x+y_p\|.$$

当 p足够大时， x 和 y_p 的支集互不相交，因此根据对称性，$\|x+y\| = \|x+y_p\|$。综上，我们得到

$$\|x\| \le \|x+y\|,$$

矛盾。

因此，存在 $\mathcal{B}$的一个子列 $\mathcal{B}_0 := (\boldsymbol{x}_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ 、一个满足 $\|x^*\| = 1$的线性泛函 $x^* \in \mathbb{X}^*$，以及 $\alpha > 0$，使得

$$\Re(x^*(\boldsymbol{x}_{n_i})) \ge \alpha, \quad i \in \mathbb{N}.$$

那么，对于任意非负标量序列 $(a_i)_{i=1}^{\infty}$，我们有

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \boldsymbol{x}_{n_i} \right\| \ge \Re\left(x^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \boldsymbol{x}_{n_i} \right) \right) \ge \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i. \tag{3.2}$$

反设 $\mathcal{B}$ 不是无条件基。取 $(\delta_k)_{k=1}^{\infty} \in (0,\infty)$，使得 $\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k < \infty$。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $m_k = m(\delta_k) \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda_k = \lambda(\delta_k) \in \mathbb{E}$ 为引理 3.6 给出的数。设 $m_0 = 1$，并取一个由 $\mathbb{N}$ 的两两不相交子集构成的序列 $(A_k)_{k=1}^{\infty}$，满足 $\max\{m_k, m_{k-1}\} \le |A_k| < \infty$。于是我们有

$$\left\| \frac{\mathbb{I}^{A_k}}{\|\mathbb{I}^{A_k}\|} - \lambda_k \frac{\mathbb{I}^{A_{k+1}}}{\|\mathbb{I}^{A_{k+1}}\|} \right\| \le \delta_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

由此可知，序列 $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ 定义为

$$h_k = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \lambda_i \right) \frac{\mathbb{I}^{A_k}}{\|\mathbb{I}^{A_k}\|}, \quad k \in \mathbb{N},$$

是柯西序列且不收敛于零。由于 $\lim_k \boldsymbol{x}_n^*(h_k) = 0$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}$ 不是全基。这个矛盾表明 $\mathcal{B}$ 是无条件的。因此，根据(3.2)，$\mathcal{B}_0$ 等价于典范的ℓ_1-基。由于无条件对称基是子对称的（见[13, 命题3.a.3]），$\mathcal{B}$ 也等价于典范的 ℓ_1-基。

□

我们利用对称基（不一定是 Schauder 基）的分析，将上述对称 Schauder 基是无条件基这一经典结果加以推广。

推论3.8.给定Banach空间 $\mathbb{X}$ 的一个对称基 $\mathcal{B}$，以下各项等价

(i) $\mathcal{B}$ 是无条件基。(ii) $\mathcal{B}$ 是双民主基。
(iii) $\mathcal{B}$ 是超民主基。(iv) $\mathcal{B}$ 对常数系数是无条件的。(v) $\mathcal{B}$ 是马尔库舍维奇基。

证明。利用 [13, 命题 3.a.6]，(i) 推出 (ii)。根据 [4, 第 5],(ii) 推出 (iii)，而 (iii) 推出 (iv)。为证明 (iv) $\Rightarrow$ (i)，假设 (i) 不成立。通过重新赋范，可以假设 $\mathcal{B}$ 是 1-对称的。给定$\delta > 0$，利用引理 3.6 选取 $\lambda \in \mathbb{E}$，以及 A和 B 中 $\mathbb{N}$的两个不相交子集，使得 $|A| = |B| < \infty$ 且 $N(A, B, \lambda) \le \delta$。由于 1-对称性，$\|\mathbb{I}^A\| = \|\mathbb{I}^B\|$，

$$\|\mathbb{I}^A - \lambda \mathbb{I}^B\| \le \delta \|\mathbb{I}^A\|.$$

因此，(iv) 也不成立。

显然，(i) 蕴含 (v)。最后，若 (v) 成立，根据命题 3.7，$\mathcal{B}$要么是 1-抑制无条件的，要么等价于 ℓ_1 的单位向量系。在这两种情况下，(i) 都成立。□

例 3.9。这里给出一个 1-对称基的例子，它不是无条件基（因此根据推论 3.8，它也不是全的）。

设 $\boldsymbol{w}=(w_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一个权。对于 $f=(a_n)_{n=1}^{\infty}\in c_{00}$，令

$$\|f\|=\mathbf{\Phi}_2(\emptyset;f)=\sup_{\varphi\in\Pi}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{\varphi(j)}w_j\right|. \tag{3.3}$$

显然，$\|\cdot\|$ 是一个半范数，对所有 $f\in c_{00}$，它满足 $\max\{\|\Re(f)\|,\|\Im(f)\|\}\le\|f\|$。此外，如果 $f=(a_j)_{j=1}^{\infty}$ 是实值的，

$$\|f\|=\max\left\{\Psi(f),\Psi(-f)\right\},$$

其中

$$\Psi(f)=\sum_{n=1}^{\infty}b_j^+w_j-\boldsymbol{w}_\infty\sum_{n=1}^{\infty}b_j^-,$$

且 $(b_j^+)_{j=1}^{\infty}$ 和 $(b_j^-)_{j=1}^{\infty}$ 分别表示f^+ 和 f^-的非增重排。于是，

$$\Theta(f):=\sum_{j=1}^{\infty}(b_j^++b_j^-)(w_j-\boldsymbol{w}_\infty)=\Psi(f)+\Psi(-f)\le 2\|f\|.$$

这样，如果 $\boldsymbol{w}$ 不是常数，

$$|a_m|\le b_1^++b_1^-\le\frac{\Theta(f)}{1-\boldsymbol{w}_\infty}\le\frac{2}{1-\boldsymbol{w}_\infty}\|f\|,\quad m\in\mathbb{N}.$$

因此，即使 $f=(a_j)_{j=1}^{\infty}$ 不是实值的，

$$|a_m|\le\frac{2}{1-\boldsymbol{w}_\infty}\left\|\Re\left(\frac{f}{\operatorname{sign}(a_m)}\right)\right\|\le\frac{2}{1-\boldsymbol{w}_\infty}\|f\|,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{3.4}$$

我们推得，$\|\cdot\|$是 c_{00} 上的一个范数，其完备化是一个 Banach空间，记作 $\mathbb{X}$；其单位向量系（记作$(\mathsf{e}_j)_{j=1}^{\infty}=\mathcal{E}$）是 1-对称的。根据 $\|\cdot\|$ 的定义，我们看到，对于所有 m，$\|\mathsf{e}_m\|=1$；而由 (3.4) 可知，双正交泛函满足 $\|\mathsf{e}_m^*\|\le 2/(1-\boldsymbol{w}_\infty)$。

如果 $\boldsymbol{w}_\infty=0$,

$$\frac{1}{2}\|f\|_{1,\boldsymbol{w}}\le\frac{1}{2}\Theta(f)\le\|f\|\le\|f\|_{1,\boldsymbol{w}}$$

对于所有实值的 $f\in c_{00}$。这为我们给出了$d_{1,\,\boldsymbol{w}}$的一种重新赋范。

下面证明，若 $\boldsymbol{w}_\infty>0$, $\mathcal{E}$ 不是常系数无条件的（简称 UCC）。令 $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 $\boldsymbol{w}$ 的原始权。设 $\varepsilon=((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$，并且对每个 $m\in\mathbb{N}$，$A_m=\{j\in\mathbb{N}\colon\ j\le 2m\}$。若 $\mathcal{E}$是 UCC，则存在常数 $C\in[1,\infty)$ 使得

$$s_{2m}=\|\mathbb{I}_{A_m}\|\le C\,\|\mathbb{I}_{\varepsilon,A_m}\|=C(s_m-m\boldsymbol{w}_\infty).$$

因此，若对所有 $n \in \mathbb{N}$均设 $t_n = s_n/n$，

$$2t_{2m} \le C(t_m - \boldsymbol{w}_\infty), \quad m \in \mathbb{N}.$$

由于 $\lim_m t_m = \boldsymbol{w}_\infty$，我们得到了荒谬的结论 $2\boldsymbol{w}_\infty \le 0$。

研究具有性质 (A) 的基的格无条件常数也很有意义。任何 1-贪婪基都是 1-抑制无条件的，因此对于实巴拿赫空间而言是 2-格无条件的。反过来，[9, 定理 4.1]表明常数 2 是最优的，即存在一个 1-贪婪基，对任意 $C \le 2$ 都不是 C-格无条件的。根据命题 3.3，命题 3.4 的证明中构造的基是 2-抑制无条件的，因此是 4-无条件的。

另一方面，取 $\boldsymbol{w} = (1, w_n, w_n, \ldots)$，并比较

$\boldsymbol{D}_n = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{w}}$ $g_n = {}_1 + w_n \mathbb{I}^{A_n} - \mathbb{I}^{B_n}$ $h_n = {}_1 + w_n \mathbb{I}^{A_n} +$ 中 e ( ) 和 $\mathbb{I}^{B_n}$ e ( ) 的范数，其中 w_n A_n B_n $3\,4$, 和 如命题 的证明中所述。我们看到，$\boldsymbol{D}_n$ 的单位向量系的无条件常数至少为

$$\frac{\|h_n\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}}{\|g_n\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}} = 1 + 2nw_n^2 = 1 + (1 - 2\omega_n)\frac{2n}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2^-.$$

因此，对每个 $s < 2$，都存在一个足够大的 n，使得 $\boldsymbol{D}_n$ 的典范基的无条件常数大于 s。我们不知道 2 和我们得到的无条件常数上界（即 4）哪一个更接近其实际值。

问题3.10. 具有性质 (A) 的无条件基是否总有 $K_l \le 2$? 是否有 $K_s \le 2$? 是否对某个普适常数 D 有 $K_s \le D$？

4. Remarks on Property (A) in the finite dimensional case

性质 (A) 与任何其他类贪婪性质一样，也可以经过显而易见的调整，定义在有限维空间中的基上。

如果一个基具有性质 (A)，那么它的任意（有限或无限）子基也具有这一性质。然而，与其他类贪婪性质不同，即使各个加项的基本函数相同，性质 (A) 也不会传递到直和。因此，如何由具有性质 (A) 的有限基构造出具有性质 (A) 的无限基，绝非显而易见。在这方面，值得一提的是，我们可以从无限维结果推导出有限维结果。

命题 4.1。对于每个 $d \in \mathbb{N}$、 $d \geq 2$，都存在一个 d 维巴拿赫空间，其基满足性质 (A)，且抑制无条件常数为 $K_s \geq 10/9$。

事实上，对于 $d \geq 3$，我们考虑带有如下范数的 $\mathbb{R}^d$

$$\|x\|_d = \|J_d(x)\|_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{w}}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

其中 $\boldsymbol{w} = (1, 1/3, 1/3, \ldots)$，且 J_d: $\mathbb{R}^d \to c_{00}$ 是自然嵌入。在这种情况下，由引理 2.5，

$$\left\|(a_j)_{j=1}^d\right\|_d = \max\left\{\frac{n+2}{3n}\sum_{j=1}^n \left|a_{\pi(j)}\right| + \frac{1}{3}\left|\sum_{j=n+1}^d a_{\pi(j)}\right|\right\},$$

其中最大值取遍 $n = 1$、...、 d 以及 $\{1, \ldots, d\}$ 的所有排列π。命题 3.4 的证明表明 $K_s \geq 10/9$。

当 $d = 2$ 时，性质 (A) 不提供任何信息（除归一化之外）；因此，我们不期望达到 1-抑制无条件性。例如，固定 $\alpha \in (0, 1)$，并设

$$\|a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2\| = \max\left\{\alpha\left|a_1\right|, \alpha\left|a_2\right|, \left|a_1 + a_2\right|\right\}.$$

由此得到的赋范空间的单位球是一个六边形，其顶点为 $\pm(-\alpha^{-1}, \alpha^{-1})$、 $\pm(1 - \alpha^{-1}, \alpha^{-1})$ 和 $\pm(\alpha^{-1}, 1 - \alpha^{-1})$。于是

$$\|\alpha^{-1}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)\| = 1, \quad \text{but} \quad \|\alpha^{-1}\mathbf{e}_1\| = \alpha^{-1},$$

因此，抑制无条件常数至少为 α^{-1}。

最后，我们证明在有限维情形下，性质 (A) 不会传递到对偶基。我们不知道这一结论在无限维空间中是否仍成立。

命题 4.2。对于 $d \geq 3$，空间 $\mathbb{R}^d$ 存在一个范数 $\|\cdot\|$，使得：

(1) 单位向量系 $\mathcal{E} = (\mathbf{e}j)_{j=1}^d$ 及其对偶基 $\mathcal{E}^* = (\mathbf{e}_j^*)_{j=1}^d$ 均为归一化的且是 1-对称的。(2) 基 $\mathcal{E}$ 具有性质 (A)。(3) 对偶基 $\mathcal{E}^*$ 不具有性质 (A)。

事实上，证明表明，对于 $A = \{1, \ldots, d-1\}$，存在 ε、 $\delta \in \mathbb{E}^A$，使得 $\left\|\mathbb{I}^*_{\varepsilon,\ A}\right\| \neq \left\|\mathbb{I}^*_{\delta,\ A}\right\|$。

证明。对于 $(a_j)_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d$ 我们定义

$$\left\|(a_j)_{j=1}^d\right\| = \left\|\sum_{j=1}^d a_j\,\mathbf{e}_j\right\| := \sup_{\pi\in\Pi_d}\left\{\left|a_{\pi(1)} + \frac{a_{\pi(d)}}{3}\right| + \sum_{j=2}^{d-1}\left|a_{\pi(j)}\right|\right\}, \quad (4.1)$$

其中， Π_d 表示由 $\{1,\dots,d\}$的所有排列组成的集合。显然， $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}^*$ 都是 1-对称的。此外，

$$\sup_j |a_j| \le \left\| \sum_{j=1}^d a_j \, \mathbf{e}_j \right\| \le \sum_{j=1}^d |a_j| \,,$$

因此，基 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}^*$ 都是标准化的。如果某些系数 a_j 等于 0，那么 $\left\| \sum_{j=1}^d a_j \, \mathbf{e}_j \right\| = \sum_{j=1}^d |a_j|$，且基 $\mathcal{E}$ 具有性质 (A)。我们将通过证明这些泛函

$$h^* = \mathbf{e}_1^* - \sum_{i=2}^{d-1} \mathbf{e}_j^*, \quad g^* = \sum_{j=1}^{d-1} \mathbf{e}_j^*$$

满足 $\|h^*\| \le 1 < \|g^*\|$来完成证明。这将证明基 $\mathcal{E}^*$ 不是 1-超民主的，因此不满足性质 (A)。这里，如果对于所有 ε、$\delta \in \mathbb{E}$ 以及所有满足 $|A| = |B|$ 的 A、 $B \subset \mathbb{N}$，都有$\left\| \mathbb{I}^*_{\varepsilon,\ A} \right\| = \left\| \mathbb{I}^*_{\delta,\ B} \right\|$，则称一个基是 1- 超民主的。

为了估计 h^* 的范数，注意到

$$\|f\| = \sup_{f^* \in \mathcal{F}} |f^*(f)| \,, \quad f \in \mathbb{R}^d,$$

其中 $\mathcal{F}$ 由所有形如以下形式的泛函组成

$$\varepsilon_1 \left(\mathbf{e}^*_{\pi(1)} + \frac{\mathbf{e}^*_{\pi(d)}}{3} \right) + \sum_{j=2}^{d-1} \varepsilon_j \, \mathbf{e}^*_{\pi(j)}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_j)_{j=1}^{d-1} \in \mathbb{E}^{d-1}, \, \pi \in \Pi_d.$$

因此，对所有 $f^* \in \mathcal{F}$ 均有 $\|f^*\| \le 1$。恒等式

$$h^* = \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{e}_1^* + \frac{\mathbf{e}_d^*}{3} - \sum_{j=2}^{d-1} \mathbf{e}_j^* \right) + \left(-\mathbf{e}_{d-1}^* - \frac{\mathbf{e}_d^*}{3} + \mathbf{e}_1^* - \sum_{j=2}^{d-2} \mathbf{e}_j^* \right) \right),$$

表明泛函 h^* 属于 $\mathcal{F}$ 的凸包，因此$\|h^*\| \le 1$。为了估计 g^* 的范数，我们将其作用于

$$g = \sum_{j=1}^{d-1} \mathbf{e}_j - \frac{\mathbf{e}_d}{2}.$$

作为 $g^*(g) = d-1$，只需证明 $\|g\| < d-1$。给定 $\pi \in \Pi_d$，我们根据是否$\pi(d) = d$，计算（4.1）右侧的数值。在前一种情况下，计算结果为

$$\left| 1 - \frac{1}{6} \right| + (d-2) = d - 1 - \frac{1}{6},$$

而在后一种情况下，它会产生

$$\left|1+\frac{1}{3}\right|+(d-3)+\frac{1}{2}=d-1-\frac{1}{6}.$$

因此， $\|g\|=d-7/6<d-1$ 正如所需。 □

References

[1] F.Albiac 和J. L. Ansorena，1-准贪婪基的刻画，《逼近理论杂志》201(2016)，7–12。[2] F.Albiac和 J.L. Ansorena，1-几乎贪婪基的刻画，《康普顿斯数学评论》30 (2017)，第 1 期，13–24。[3] F. Albiac、J.L. Ansorena、M.Berasategui、P.M. Bern´a 和S.Lassalle，双民主基及其与其他贪婪型基的联系，《构造逼近》57 (2023)，第 1 期，125–160。[4] F.Albiac、J. L. Ansorena、P.M. Bern´a和 P. Wojtaszczyk，拟巴拿赫空间中双正交系的贪婪逼近，《数学论文集》560 (2021)，88。[5] F. Albiac 和 N.J. Kalton，巴拿赫空间理论专题，第2版，《数学研究生教材》第 233 卷，Springer， [Cham], 2016。Gilles Godefroy 作序。[6] F.Albiac和P. Wojtaszczyk，1-贪婪基的刻画，《逼近理论杂志》138 (2006)，第 1 期，65–86。[7] S.J. Dilworth、N.J. Kalton、D. Kutzarova 和V.N. Temlyakov，阈值贪婪算法、贪婪基与对偶性，《构造逼近》19 (2003)，第4期，575–597。[8] S. J. Dilworth、E.Odell、Th. Schlumprecht和A.Zs´ak，关于哈尔基初始区段的贪婪算法的收敛性，《剑桥哲学学会数学论文集》148 (2010)，第3期，519–529。[9] S. J. Dilworth、E.Odell、T h.Schlumprecht和 A.Zs´ak，1-贪婪基的重新赋范与对称性，《逼近理论杂志》163 (2011)，第 9期，1049–1075。[10] E.D. Livshits，关于空间 L_p(0,1)中哈尔系上的一种贪婪算法的收敛性，《数学文集》201 (2010)，第2 期，95–130（俄文，附俄文摘要）；英文译本，《数学文集》201 (2010)，第 1–2 期，253–288。[11] P. H´ajek、V. Montesinos、J.Vanderwerff和V. Zizler，巴拿赫空间中的双正交系，《加拿大数学丛书》/加拿大数学会数学著作，第26 卷，Springer，纽约，2008。MR2359536[12] S. V.Konyagin和V.N.Temlyakov，关于巴拿赫空间中的贪婪逼近的评注，《东部逼近杂志》5 (1999)，第 3 期，365–379。[13] J.Lindenstrauss 和 L. Tzafriri，经典巴拿赫空间。I，《数学及其交叉领域成果》第92 卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，1977。序列空间。[14] P.Wojtaszczyk，一般双正交系的贪婪算法，《逼近理论杂志》107 (2000)，第2期，293–314。[15] ———, 巴拿赫空间中的贪婪型基，《函数构造理论》，DARBA，索非亚，2003，第 136–155 页。

Department of Mathematics, Statistics, and Computer Sciencies–InaMat2, Universidad Pública de Navarra, Campus de Arrosadía, Pam-plona, 31006 Spain

电子邮件地址：fernando.albiac@unavarra.es

Department of Mathematics and Computer Sciences, Universidad de La Rioja, Logroño, 26004 Spain
电子邮件地址：joseluis.ansorena@unirioja.es

Department of Mathematical Analysis, Universidad de Valencia, Burjassot, 46100 Spain
电子邮件地址：oscar.blasco@uv.es

Department of Mathematics, University of Illinois Urbana-Champaign, Urbana, IL 61820, USA
电子邮件地址: hungchu2@illinois.edu

Department of Mathematics, University of Illinois Urbana-Champaign, Urbana, IL 61820, USA
电子邮件地址: oikhberg@illinois.edu