arXiv:2304.05923v1 [math.NT] 12 Apr 2023

与约数函数 $\sigma_a^{(N)}(n)$相关的广义 Lambert 级数的显式变换及其应用

SOUMYARUP BANERJEE、ATUL DIXIT 和 SHIVAJEE GUPTA

ABSTRACT. 设 $\sigma_a^{(N)}(n)=\sum_{d^N|n} d^a$。利用近期建立的 $\sigma_a^{(N)}(n)$ 的 Voronoï 求和公式，我们在 Re$(a) > -1$ 的条件下得到了广义 Lambert 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a^{(N)}(n)e^{-ny}$ 的一个显式变换，并通过解析延拓将其扩展到更广的区域。对于 $N = 1$，正如 Dorigoni 和 Kleinschmidt 最近的研究所示，这个 Lambert 级数在弦理论散射振幅中发挥着重要作用。这些变换揭示了若干恒等式—— $\zeta(2m+1)$ 的一个新推广，即 Ramanujan 公式；一个与扩展高阶 Herglotz 函数相关的恒等式；广义戴德金η变换；Wigert 变换等。这些结果均在本文中推导出来，从而得到了统一的证明。其中一个显式变换的特殊情形自然引导我们考虑带有"n^{2N-1}份 n^N"的广义幂分拆。本文还推导了其生成函数在 $q \to 1^-$ 时的渐近展开，从而推广了 Wright 关于平面分拆生成函数的结果。为得到这些变换，我们还需要若干新的中间结果，例如 Meijer G 函数的一个新约化公式，以及对 $\frac{\partial E_{2N,\beta}}{\partial\beta} z^{2N}\Big|_{\beta=1}$ 的一个近乎闭式的求值，其中 $E_{\alpha,\beta}(z)$ 是一个双变量米塔格-莱夫勒函数。

CONTENTS

1. 引言 2. 主要结果 6 3. 预备知识 10 4. 关于 Meijer G-函数和 ${}_\mu K_\nu^{(N)}(z,w)$ 的新结果 1 5. 主要变换的证明 1
16 5.1. 定理 2.1 的证明 16 5.2. 定理 2.3 的证明 17 6. 米塔格-莱夫勒函数导数的新结果 18 7. 定理 2.3 在 N 为奇数时的特殊情形 2 7.1. 关于 $\zeta(2m+1)$ 的 Ramanujan 公式的新推广 2 7.2. 一个涉及扩展高阶 1
Herglotz 函数的恒等式 24 7.3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2Nm-1+N}^{(N)}(n)e^{-ny}$ 30
的一个变换 8. "n^{2N-1} 个 n^N 的副本 " 的广义幂分拆渐近性 33 9. 定理 2.3 在 N 为偶数时的特殊情形 34 9.1. Wigert 公式的一个推广 34 9.2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-2Nm+N}^{(N)}(n)$
e^{-ny} 37 的一个变换 10. 广义戴德金 η 变换 38 11. 结束语 39 致 1
谢 40 参考文献 40 1

1. INTRODUCTION

朗伯级数是形如 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\,\frac{q^n}{1-q^n}$的级数，其中 $a(n)$ 是一个算术函数，且 q 是满足 $|q|<1$ 的复数。令 $q=e^{-y}$，其中 Re$(y) > 0$，则它们可写成等价形式 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {}^{a}(n)\,e^{ny}-1$。朗伯级数是数论中的核心对象。例如，当 $a(n) = n^k$，其中 $k \geq 3$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：11M06；次要分类号：33C10、11P82。*Keywords and phrases.* 关于 $\zeta(2m+1)$ 的 Ramanujan 公式、渐近展开、平面分拆、戴德金η变换、Meijer G 函数。

是奇整数时，这些朗伯级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{e^{ny}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_k(n)e^{-ny}$，其中 $\sigma_a(n):=\sum_{d|n}d^a$，本质上是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上的艾森斯坦级数。众所周知，艾森斯坦级数满足优美的模变换，是全模群上模形式的典型例子。

拉马努金 [37, 第 173 页，第 14 章，条目 21(i)], [36, 第 319–320 页，公式 (28)], [4, 第 275 页-276] 推导出了一个著名的变换，其中涉及黎曼ζ函数在奇正整数处的取值，即$\zeta(2m+1)$，以及上文给出的朗伯级数；具体来说，对于 $\mathrm{Re}(\alpha)$、$\mathrm{Re}(\beta)>0$，其中 $\alpha\beta=\pi^2$ 且 $m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$,

$$\alpha^{-m}\left\{\frac{1}{2}\zeta(2m+1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2m-1}}{e^{2\alpha n}-1}\right\}=(-\beta)^{-m}\left\{\frac{1}{2}\zeta(2m+1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2m-1}}{e^{2\beta n}-1}\right\}-2^{2m}\sum_{j=0}^{m+1}\frac{(-1)^jB_{2j}B_{2m+2-2j}}{(2j)!(2m+2-2j)!}\alpha^{m+1-j}\beta^j,\tag{1.1}$$

其中 B_j 为伯努利数，且当 $\mathrm{Re}(s)>1$时，$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$。Ramanujan 公式不仅涵盖了上述 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上艾森斯坦级数的变换，也涵盖了与之相关的艾希勒积分的变换。有关更多信息，请参阅文献 [8]。

奇数点ζ函数值的算术性质相当神秘。阿佩里证明了 $\zeta(3)$ 是无理数；就单个奇数点ζ函数值而言，这是迄今唯一确切的结果。祖迪林证明了 $\zeta(5)$、$\zeta(7)$、$\zeta(9)$ 或 $\zeta(11)$ 中至少有一个是无理数，这是关于其他奇数点ζ函数值的最佳进展。与此相比，欧拉公式给出了偶数点ζ函数值的表示，即

$$\zeta(2m)=(-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2m)!},\tag{1.2}$$

这立即确立了它们的超越性，因为 π 是超越的。

在 [36]，第 332 页底部，拉马努金考察了广义 Lambert 级数

$$\mathfrak{F}_{k,N}(y):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{e^{n^Ny}-1},\tag{1.3}$$

其中 N 是正整数，而 $k-N$ 是任意偶整数。然而，他没有给出关于 $\mathfrak{F}_{k,\,N}(y)$ 的任何变换。显然，$\mathfrak{F}_{k,\,1}(y)$ 是上述与 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上的艾森斯坦级数相关联的朗伯级数。

与此同时，Wigert [42, 第 8-9 页，公式 (1.5)] 推导出了一个关于 $\mathfrak{F}_{0,\,N}(y)$ 的精确变换，当 N 为偶数时成立，但当 N 为奇数时只能得到渐近公式。金光、谷川和吉本 [25, 定理 1] 获得了一个关于 $\mathfrak{F}_{N-2h,\,N}(y)$的变换，当 $N\in\mathbb{N}$ 和 $0<h\le N/2$时成立，并在后续工作中 [26,定理2.1] 又获得了另一个变换，当 $h\ge N/2$ 且 N 为偶数时成立。

第二作者和 Maji [18, 定理 11] 将金光、谷川和吉本的上述结果推广到了任意 $h\in\mathbb{Z}$ 和 $N\in\mathbb{N}$，从而给出了 Ramanujan 公式 (1.1) 的以下单参数推广（见 [18, 定理 12]）：

设 N 为奇正整数，且 α、$\beta>0$ 满足 $\alpha\beta^N=\pi^{N+1}$。那么对于任意非零整数 m,

$$\begin{aligned}&\alpha^{-\frac{2Nm}{N+1}}\left(\frac{1}{2}\zeta(2Nm+1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2Nm-1}}{\exp\left((2n)^N\alpha\right)-1}\right)\\&=\left(-\beta^{\frac{2N}{N+1}}\right)^{-m}\frac{2^{2m(N-1)}}{N}\left(\frac{1}{2}\zeta(2m+1)+(-1)^{\frac{N+3}{2}}\sum_{j=\frac{-(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(-1)^j\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2m-1}}{\exp\left((2n)^{\frac{1}{N}}\beta e^{\frac{i\pi j}{N}}\right)-1}\right)\\&\quad+(-1)^{m+\frac{N+3}{2}}2^{2Nm}\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{N+1}{2N}+m\right\rfloor}\frac{(-1)^jB_{2j}B_{N+1+2N(m-j)}}{(2j)!(N+1+2N(m-j))!}\alpha^{\frac{2j}{N+1}}\beta^{N+\frac{2N^2(m-j)}{N+1}}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

很容易看出，在上述恒等式中令 $N=1$，即可得到 (1.1)。最近，[41] 提出了一种基于“狄利克雷级数”卷积的新方法，用以证明 (1.4) 及其他类似恒等式。

注意，(1.3) 中的函数 $\mathfrak{F}_{k,\ N}(y)$ 可以写成如下形式

$$\mathfrak{F}_{k,N}(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_k^{(N)}(n)e^{-ny}, \tag{1.5}$$

其中，对于任意 $a\in\mathbb{C}$ 和 $N\in\mathbb{N}$,

$$\sigma_a^{(N)}(n):=\sum_{d^N|n}d^a \tag{1.6}$$

是 $\sigma_a(n)$ 的一种推广。它似乎最早由 Crum 在其著作中明确提出 [12]，尽管其特殊情形 $a=0$（记作 $d^{(N)}(n)$）早在很久以前就由 Wigert 研究过 [42]。Berndt、Roy、Zaharescu 和第二位作者的著作中也曾简要提及此函数 [7, 第 10 节2]。

广义约数函数 $\sigma_a^{(N)}(n)$ 出现在数学的各个领域。例如，考虑 Cohen 引入的广义拉马努金和 [11],，即

$$c_{\ell,N}(n):=\sum_{\substack{b=1\\(b,\ell^N)_N=1}}^{\ell^N}\exp\left(\frac{2\pi ibn}{\ell^N}\right),$$

其中，$(b,\ell^N)_N=1$ 表示不存在素数 p 使得 $p|\ell$ 且 $p^N|b$。与 $c_{\ell,N}(n)$ 相关联的狄利克雷级数满足 [11, 定理 4]（另见 [31, 第 163] 页）

$$\zeta(s)\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{c_{\ell,N}(n)}{\ell^s}=\sigma^{(N)}_{1-\frac{s}{N}}(n)$$

对于 $s>N$。这一结果的特殊情形 $N=1$ 归功于拉马努金 [35]。

此外，若 $p_k(n)$ 表示将整数 n 分拆为 k 次幂之和的分拆数，这通常称为阶数为 k 的幂分拆，那么在 Tenenbaum、Wu 和 Li [39, 方程 (2.4)] 运用鞍点法给出的 $p_k(n)$ 渐近展开的新证明中，会遇到广义 Lambert 级数 $\mathfrak{F}_{N,\ N}(y)$，其定义见 (1.5)。

最近，Zagier [48]，在研究幂分拆时，将 Dedekind eta 函数 $\eta(z):=e^{\frac{i\pi z}{12}}\prod(1-e^{2\pi inz})$（$\mathrm{Im}(z)>0$）所满足的模变换 $\eta(-1/z)=\sqrt{-iz}\eta(z)$ 推广，并证明$_{n=1}$广义 eta 函数 $\eta_s(z)$

$$\eta_s(z):=\exp\left(-\pi i\zeta(-s)z\right)\prod_{n=1}^{\infty}(1-\exp\left(2\pi in^sz\right))\quad(z\in\mathbb{H},s\in\mathbb{R}^+) \tag{1.7}$$

满足

$$\eta_N(-1/z)=(2\pi)^{(N-1)/2}\sqrt{-iz}\prod_{\substack{w\in\mathbb{H}\\w^N=\pm z}}\eta_{1/N}(w), \tag{1.8}$$

对 $N\in\mathbb{N}$ 成立。令 (1.7) 中的 $s=N$ 取相应值，再对所得恒等式两边取对数，即得到下文的 (10.2)，其中同样涉及函数 $\sigma_N^{(N)}(n)$。

Zagier 在 (1.7) 中定义的广义 eta 函数，以及他给出的变换 (1.8)，都以等价形式出现在 Ramanujan 遗失的笔记本第 330 页[1] [36]，尽管他还证明了两个涉及该函数的进一步结果[48, 定理 1, 3]。关于 Ramanujan 给出的 (1.8) 等价形式的证明，参见 [6, 第 234-238] 页。(1.8) 的情形 $N=2$ 由 Hardy 和 Ramanujan 在 [24] 中给出，但未附证明。Kr¨atzel [29] 又借助 Ramanujan 对 (1.8) 等价形式的推广，进一步推广了 (1.8)。在 §10 中，我们将证明，(1.8) 的对数导数不过是我们定理 2.5 中的特殊情形 $m=-1$，该情形由推论 2.6 给出。

除了研究 $\mathfrak{F}_{0,N}(y)$ 之外，Wigert [44] 还研究了广义偏 theta 函数$\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-n^Nx\right)$，并得到了它的一个变换。

Koshliakov [27] 得到了 Voronoı̈ 求和公式，适用于 $\sigma_0^{(N)}(n)$，或者等价地适用于 $d^{(N)}(n)$，尽管他并未说明自己如何证明其中一个关键的中间结果 [27, 公式（6）] usedin

[1]拉马努金给出了 $x>0$ 的广义 eta 函数的等价定义，但很容易将其扩展到 $\mathrm{Re}(x)>0$。

推导出他的公式。Koshliakov 的这一中间结果的推广，最近在 [19,定理 2.1] 中得到了证明。其证明颇为深奥，运用了线性微分方程理论中的唯一性定理，以及第二类斯特林数和初等对称多项式的性质。显然，这也严格证明了 Koshliakov 论文中的公式（6） [27]。接下来陈述 Koshliakov 关于 $\sigma_0^{(N)}(n)$ 的 Voronoï 求和公式。

设 $0<\alpha<\beta$ 和 $\alpha,\beta\notin\mathbb{Z}$。设 $N>1$ 为自然数。设 $f(x)$ 是定义在包含 $[\alpha,\beta]$ 的闭曲线内部的解析函数。那么

$$\sum_{\alpha<n<\beta}\sigma_0^{(N)}(n)f(n)=\int_\alpha^\beta\left(\zeta(N)+\frac{1}{N}\zeta\left(\frac{1}{N}\right)y^{1/N-1}\right)f(y)dy + 4(2\pi)^{1/N-1}\sum_{n=1}^{\infty}S_0^{(N)}(n)\int_\alpha^\beta H^{(N)}\left((2\pi)^{1+1/N}(ny)^{1/N}\right)y^{\frac{1}{N}-1}f(y)dy, \tag{1.9}$$

其中

$$S^{(N)}(n):=\sum_{d_1^N d_2=n}d_2^{\frac{1}{N}-1},\qquad H^{(N)}(x):=\int_0^\infty t^{-N}\cos(t^{-N})\cos(xt)\,dt.$$

在 Koshliakov 之前，Wigert [43, 公式（B）] 得到了关于 Riesz 和 $\sum_{n\le x}\sigma_0^{(N)}(n)(x-n)^p$ 的 Voronoï 求和公式，其中 $p>1$。最近，第二作者 Maji 和 Vatwani [19] 得到了关于 $\sigma_a^{(N)}(n)$ 的 Voronoï 求和公式，并包含测试函数 f，从而推广了 Koshliakov 的（1.9）。现给出这一结果。

设 $0<\alpha<\beta$ 和 $\alpha,\beta\notin\mathbb{Z}$。设 $N\in\mathbb{N}$ 和 $a\in\mathbb{C}$，其中 $-1<\mathrm{Re}(a)<N$ 且 $a\neq N-1$。定义

$$S_a^{(N)}(n):=\sum_{d_1^N d_2=n}d_2^{\frac{1+a}{N}-1} \tag{1.10}$$

并设 $f(x)$ 在包含 $[\alpha,\beta]$ 的闭合轮廓内解析。

$$\sum_{\alpha<n<\beta}\sigma_a^{(N)}(n)f(n)=\int_\alpha^\beta f(t)\left(\zeta(N-a)+\frac{1}{N}t^{\frac{1+a}{N}-1}\zeta\left(\frac{1+a}{N}\right)\right)dt + 2(2\pi)^{\frac{1+a}{N}-1}\sum_{n=1}^{\infty}S_a^{(N)}(n)\int_\alpha^\beta f(t)t^{\frac{1+a}{N}-1}H_a^{(N)}\left((2\pi)^{\frac{1}{N}+1}(nt)^{\frac{1}{N}}\right)dt,$$

其中[2]

$$H_a^{(N)}(x):=\int_0^\infty t^{a-N}\cos(xt)\cos\left(\frac{1}{t^N}\right)dt. \tag{1.11}$$

此外，如果 $a=N-1$，那么

$$\sum_{\alpha<n<\beta}\sigma_{N-1}^{(N)}(n)f(n)=\int_\alpha^\beta f(t)\left(\frac{(N+1)\gamma+\log(t)}{N}\right)dt + 2\sum_{n=1}^{\infty}S_{N-1}^{(N)}(n)\int_\alpha^\beta f(t)H_{N-1}^{(N)}\left((2\pi)^{\frac{1}{N}+1}(nt)^{\frac{1}{N}}\right)dt,$$

其中，γ 是欧拉常数。

当 $a=0$ 时，这给出 (1.9)。上述结果的以下“无穷”版本也见于 [19, 定理 2.4]。

[2]我们在此强调，记号 $H_a^{(N)}(x)$ *does not* 表示某函数 $H_a(x)$的 N 阶导数。使用这一记号是为了与 Wigert [42] 和 Koshliakov [27] 针对相关算术函数以及特殊函数所采用的记号保持一致。对于其他函数，本文也始终沿用这一记号。

设 $N\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{C}$ 满足 $-1<\mathrm{Re}(a)<N$。设 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$，其中 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的施瓦茨函数空间，并令 $F(s)=\mathcal{M}(f)(s)$ 为 f 的梅林变换。那么，对于 $a\neq N-1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a^{(N)}(n)f(n)=-\frac{1}{2}\zeta(-a)f(0^+)+\zeta(N-a)\int_0^{\infty}f(y)dy+\frac{1}{N}F\left(\frac{1+a}{N}\right)\zeta\left(\frac{1+a}{N}\right)$$
$$+\frac{(2\pi)^{(N+1)\left(\frac{1+a}{N}\right)-a}}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}S_a^{(N)}(n)\int_0^{\infty}H_a^{(N)}\left((2\pi)^{1+\frac{1}{N}}(ny)^{\frac{1}{N}}\right)y^{\frac{1+a}{N}-1}f(y)\,dy. \tag{1.12}$$

此外，当 $a=N-1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{N-1}^{(N)}(n)f(n)=-\frac{1}{2}\zeta(1-N)f(0^+)+\int_0^{\infty}f(t)\left(\frac{(N+1)\gamma+\log(t)}{N}\right)dt$$
$$+4\sum_{n=1}^{\infty}S_{N-1}^{(N)}(n)\int_0^{\infty}H_{N-1}^{(N)}\left((2\pi)^{1+\frac{1}{N}}(ny)^{\frac{1}{N}}\right)f(y)\,dy.$$

在 [19, 节 4]中得到了核函数 $H_a^{(N)}(x)$ 的若干性质。对于 $N=1$，核函数 $H_a^{(N)}(x)$ 化为 K、Y 和 J 贝塞尔函数的组合，因此 (1.12) 给出了 $\sigma_a(n)$ 的 Voronoï 求和公式 [7, ；Guinand 在 [23, 式 (1)] 中给出了它的一个对称形式。第二作者、Kesarwani 和 Kumar [16, 最近利用这一版 Guinand 公式以及科什利亚科夫积分求值 [28, 的一个特殊情形]，得到了如下关于 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a(n)$ 的变换 e^{-ny}：对于任意满足 $\mathrm{Re}(a)>-1$ 且 $\mathrm{Re}(y)>0$ 的 $a\in\mathbb{C}$：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a(n)e^{-ny}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{1+a}\mathrm{cosec}\left(\frac{\pi a}{2}\right)+1\right)\zeta(-a)-\frac{1}{y}\zeta(1-a)$$
$$=\frac{2\pi}{y\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a(n)\left(\frac{(2\pi n)^{-a}}{\Gamma(1-a)}{}_1F_2\left(1;\frac{1-a}{2},1-\frac{a}{2};\frac{4\pi^4n^2}{y^2}\right)-\left(\frac{2\pi}{y}\right)^a\cosh\left(\frac{4\pi^2n}{y}\right)\right), \tag{1.13}$$

其中，${}_1F_2$-超几何函数定义见下文中的(3.7)。此外，他们还对上述结果进行了解析延拓，得到 [16, 定理 2.5] , 对于 $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$、$\mathrm{Re}(a)>-2m-3$ 以及 $\mathrm{Re}(y)>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a(n)e^{-ny}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{1+a}\mathrm{cosec}\left(\frac{\pi a}{2}\right)+1\right)\zeta(-a)-\frac{\zeta(1-a)}{y}$$
$$=\frac{2\sqrt{2\pi}}{y^{1+\frac{a}{2}}}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a(n)n^{-\frac{a}{2}}\left\{{}_{\frac{1}{2}}K_{\frac{a}{2}}\left(\frac{4\pi^2n}{y},0\right)-\frac{\pi2^{\frac{3}{2}+a}}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\left(\frac{4\pi^2n}{y}\right)^{-\frac{a}{2}-2}A_m\left(\frac{1}{2},\frac{a}{2},0;\frac{4\pi^2n}{y}\right)\right\}$$
$$-\frac{y(2\pi)^{-a-3}}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\sum_{k=0}^{m}\frac{\zeta(a+2k+2)\zeta(2k+2)}{\Gamma(-a-1-2k)}\left(\frac{4\pi^2}{y}\right)^{-2k}, \tag{1.14}$$

其中

$$A_m(\mu,\nu,w;z):=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{-\mu-w-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\mu+w+\frac{1}{2}+k\right)}{k!\Gamma\left(-\nu-\mu-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu-\mu-w-k\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-2k},$$

且 ${}_\mu K_\nu(z,w)$ 是他们针对 $\nu\in\mathbb{C}\backslash(\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ 定义的广义贝塞尔函数，$z,\mu,w\in\mathbb{C}$ 与 $\mu+w\neq-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},\cdots$ 满足

$${}_\mu K_\nu(z,w):=\frac{\pi z^w2^{\mu+\nu-1}}{\sin(\nu\pi)}\left\{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\frac{\Gamma(\mu+w+\frac{1}{2})}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(w+\frac{1}{2}-\nu)}{}_1F_2\left(\begin{matrix}\mu+w+\frac{1}{2}\\ w+\frac{1}{2}-\nu,1-\nu\end{matrix}\middle|\frac{z^2}{4}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(\mu+\nu+w+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(w+\frac{1}{2})}{}_1F_2\left(\begin{matrix}\mu+\nu+w+\frac{1}{2}\\ w+\frac{1}{2},1+\nu\end{matrix}\middle|\frac{z^2}{4}\right)\right\},$$

并且有 ${}_\mu K_0(z,w)=\lim_{\nu\to0}{}_\mu K_\nu(z,w)$。（注意，${}_{-\nu}K_\nu(z,w)=z^wK_\nu(z)$。）

值得注意的是，在他的第二本笔记本中， [37, 第 269] 页（另见 [5, 第 416]页），拉马努金得到了关于 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a(n)e^{-n\alpha}$ 的另一个恒等式，该式对任意满足 $\mathrm{Re}(a)>2$ 的 $a\in\mathbb{C}$ 都成立，且其中 $\alpha,\beta>0$ 满足 $\alpha\beta=4\pi^2$，即:

$$\begin{aligned}&\sqrt{\alpha^a}\left(\frac{\Gamma(a)\zeta(a)}{(2\pi)^a}+\cos\left(\frac{1}{2}\pi a\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{a-1}}{e^{\alpha n}-1}\right)\\&=\sqrt{\beta^a}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi a\right)\frac{\Gamma(a)\zeta(a)}{(2\pi)^a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{a-1}}{e^{\beta n}-1}-\sin\left(\frac{1}{2}\pi a\right)\mathrm{PV}\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{e^{2\pi x}-1}\cot\left(\frac{1}{2}\beta x\right)dx\right),\end{aligned}$$

其中，PV 表示柯西主值。

(1.13) 中的结果给出了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上艾森斯坦级数的变换公式。此外，其推广，即 (1.14)，不仅将拉马努金 公式 (1.1) 和 Dedekind eta 函数对数的模变换作为推论导出，而且还给出了关于 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2m}(n)e^{-ny}, m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 的新变换，所有这些都在 [16] 中推导出来。在 [16], 的工作之前，Wigert 已经获得了关于 $a=0$ 的相应变换，该变换也在 [16] 中由 (1.14) 导出。Dorigoni 和 Kleinschmidt[21, 公式 (2.43)] 使用超越级数的概念，考察了 (1.14) 在 a 为负偶整数时的特殊情形。

本文的主要目标是在 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a^{(N)}(n)e^{-ny}$的框架下推广(1.13)和(1.14)。这分别在定理 2.1和定理2.3中完成。定理 2.3 涉及广义贝塞尔函数 ${}_{\mu}K_{\nu}(z,w)$ 的一种新的推广形式，其在 $z\to\infty$ 时的渐近行为在定理 2.2 中得到了推导。

本文第二部分推导了定理 2.1 和定理 2.3 的若干重要特殊情形，并探讨了其中一些情形的有趣应用。这些特殊情形包括：对拉马努金关于 $\zeta(2m+1)$ 的公式（定理 2.5）作出新的推广；一个与扩展高阶 Herglotz 函数相关的恒等式，该恒等式最近由 [14] 得出（推论 7.1）；一个等价于广义戴德金η变换的恒等式（推论 2.6）；以及 Wigert 的一个变换（推论（9.1））。定理 2.1 的重要特殊情形 $a=2Nm-1+N$，见定理 2.7，自然引出了一个有趣的新概念——带有“n^{2N-1} 个 n^N 副本”的广义幂分拆。这些分拆的生成函数在 $q\to1^-$ 时的渐近展开见推论 2.9。Wright 关于平面分拆生成函数[46, 引理 1] 的相应结果，是这一结果的特殊情形 $N=1$ 。

上述定理 2.1 和定理 2.3 的特殊情形推广了 [16] 中的几乎所有结果，并且当 $N=1$时可化为后者。其中若干结果用到了定理 2.4；这是一项新结果，可将其中涉及的 Meijer G-函数化为若干 ${}_1F_q$ 和初等函数之和。

2. Main results

在陈述我们的结果之前，我们先定义本文中出现的某些特殊函数。首先介绍 Meijer G-函数 [33, 第 415 页，定义 16.17]。设 m、n、p、q为整数，且满足 $0\le m\le q$、$0\le n\le p$。设a_1、$\cdots$、a_p 以及 b_1、$\cdots$、b_q为复数，且对 $1\le i\le n$和 $1\le j\le m$，有 $a_i-b_j\notin\mathbb{N}$。则 Meijer G-函数定义为

$$G_{p,q}^{m,n}\left(\begin{matrix}a_1,\cdots,a_p\\ b_1,\cdots b_m;b_{m+1},\cdots,b_q\end{matrix}\middle|X\right):=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-w)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+w)X^w}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+w)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-w)}\,dw,\tag{2.1}$$

其中，L从 $-i\infty$ 延伸至 $+i\infty$，并将 $\Gamma(1-a_j+s)$ 的极点与 $\Gamma(b_j-s)$ 的极点分隔开。若 $p+q<2(m+n)$ 且 $|\arg(X)|<(m+n-\frac{p+q}{2})\pi$，则该积分绝对收敛。在 $p+q=2(m+n)$ 且 $\arg(X)=0$的情形下，若 $(\mathrm{Re}(w)+\frac{1}{2})(q-p)>\mathrm{Re}(\psi)+1$，则该积分绝对收敛，其中 $\psi=\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j$。本文将涉及的 Meijer G- 函数的一个特殊情形如下:

$${}_{\mu}K_{\nu}^{(N)}(z,w):=2^{\mu+\frac{2}{N}-1}\pi^{(1-N)\nu}z^{w+\nu-\frac{2}{N}}G_{1,\,2N+1}^{N+1,\,1}\left(\begin{matrix}1+\frac{1}{2N}-\mu-\nu-w\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2N}-\nu,\langle\frac{i}{N}\rangle_{i=1}^{N};1+\frac{1}{2N}-w,\langle1+\frac{3}{2N}-\frac{i}{N}\rangle_{i=2}^{N}\end{matrix}\middle|\frac{z^2}{4}\right).\tag{2.2}$$

容易验证， ${}_{\mu}K_{\nu}^{(1)}(z,w)$ 可化为近期在 [16, 式（1.17）] 中研究的广义第二类修正贝塞尔函数。

现在我们可以陈述我们的第一个结果了。

定理2.1。令 $N\in\mathbb{N}$。令 $\sigma_a^{(N)}(n)$定义于 (1.6) 中。对于任意复数 a，满足 $\mathrm{Re}(a)>-1$ 且 $\mathrm{Re}(y)>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a^{(N)}(n)e^{-ny}=-\frac{\zeta(-a)}{2}+\frac{\zeta(N-a)}{y}+\frac{1}{N}\frac{\Gamma\left(\frac{1+a}{N}\right)\zeta\left(\frac{1+a}{N}\right)}{y^{\frac{1+a}{N}}}$$
$$+\frac{N^{3/2}}{\pi^{5/2}}\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{\frac{a-1}{N}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_a^{(N)}(n)}{n^{2/N}}G^{N+1,\,1}_{1,\,2N+1}\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}\\ \frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N},\langle\frac{i}{N}\rangle;\langle 1+\frac{3}{2N}-\frac{i}{N}\rangle\end{matrix}\middle|\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right),\qquad(2.3)$$

其中，此处及下文中，[3], $\langle\cdot\rangle$ 表示由满足 $1\le i\le N$的 i 构成的 N 项序列。

等价地，利用 (2.2),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a^{(N)}(n)e^{-ny}+\frac{\zeta(-a)}{2}-\frac{\zeta(N-a)}{y}-\frac{1}{N}\frac{\Gamma\left(\frac{1+a}{N}\right)\zeta\left(\frac{1+a}{N}\right)}{y^{\frac{1+a}{N}}}=\frac{2(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}}N^{\frac{a-1}{2}}}{y^{\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_a^{(N)}(n)}{n^{\frac{a}{2N}}}{}_{\frac{1}{2}}K^{(N)}_{\frac{a}{2N}}\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right).\qquad(2.4)$$

当 $N=1$时，上述结果给出了 [16] 中的定理 2.4 这一特殊情形。上述定理可以在更大的 a复平面区域内作解析延拓。这需要以下关于 ${}_{\mu}K_{\nu}^{(N)}(z,w)$在 z取较大值时的渐近公式。

定理 2.2。设 ${}_{\mu}K_{\nu}^{(N)}(z,w)$由 (2.2) 定义，其中 $|\arg(z)|\le\rho\pi-\delta$ 且 $\rho>0$, $\delta\ge 0$。设 $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。当 $z\to\infty$时,

$${}_{\mu}K_{\nu}^{(N)}(z,w)=\frac{2^{3\mu+2\nu+2w+\frac{1}{N}-1}\pi^{(1-N)\nu-N}}{z^{2\mu+\nu+w+\frac{1}{N}}}\sin(\pi(\mu+\nu))\prod_{i=2}^{N}\sin\left(\pi\left(\mu+\nu+w-\frac{i-1}{N}\right)\right)$$
$$\times\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{k(N+1)+N}}{k!}\prod_{i=1}^{2N-1}\Gamma\left(\frac{i}{2N}+\mu+\nu+w+k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+w+k\right)\Gamma\left(1+\mu+\nu+k\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2k}$$
$$+\mathcal{O}\left(z^{-2m-2-\frac{1}{N}-2\mu-\nu-w}\right).\qquad(2.5)$$

利用上述结果，我们得到定理 2.1 对任意复数值 a的解析延拓。以下定理给出了这一结果，其中 [16] 中的定理 2.5 是 $N=1$这一特殊情形。

定理 2.3. 设 $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 且 $\mathrm{Re}(y)>0$。对于 $\mathrm{Re}(a)>-(2m+2)N-1$, $N\in\mathbb{N}$，有如下恒等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a^{(N)}(n)e^{-ny}+\frac{\zeta(-a)}{2}-\frac{\zeta(N-a)}{y}-\frac{1}{N}\frac{\Gamma\left(\frac{1+a}{N}\right)\zeta\left(\frac{1+a}{N}\right)}{y^{\frac{1+a}{N}}}$$
$$=\frac{2(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}}N^{\frac{a-1}{2}}}{y^{\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_a^{(N)}(n)}{n^{\frac{a}{2N}}}\left[{}_{\frac{1}{2}}K^{(N)}_{\frac{a}{2N}}\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)-\frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}}\pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}}C_{m,N}\left(\frac{1}{2},\frac{a}{2N},0,\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\right]$$
$$+\frac{y}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^k\zeta(-2kN-N-a)\zeta(2k+2),\qquad(2.6)$$

其中

$$C_{m,N}(\mu,\nu,w;z):=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{k(N+1)+N}}{k!}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+w+k\right)\Gamma\left(1+\mu+\nu+k\right)\prod_{i=1}^{2N-1}\Gamma\left(\frac{i}{2N}+\mu+\nu+w+k\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2k}.\qquad(2.7)$$

注 1. 利用下文的 (3.3)，可得

$$C_{m,N}(\mu,\nu,w;z)=\frac{(2\pi)^{N-\frac{1}{2}}}{(2N)^{\frac{1}{2}+2N(\mu+\nu+w)}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{k(N+1)+N}}{k!}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+w+k\right)\Gamma\left(1+\mu+\nu+k\right)}{\Gamma\left(1+\mu+\nu+w+k\right)}$$

[3]每当序列 $\langle\cdot\rangle$ 的项数为 M， $M\ne N$ 时，我们明确写作 $\langle\cdot\rangle|_{i=1}^{M}$。

$$\times \frac{\Gamma(1+2N(\mu+\nu+w+k))}{(2N)^{2Nk}}\left(\frac{z}{2}\right)^{-2k}. \tag{2.8}$$

我们的下一个结果将定理 2.1 中出现的 Meijer G 函数化简为初等函数与广义超几何函数 ${}_1F_{2N}$ 之和。这将有助于证明定理 2.3 的特殊情形。为此，首先定义 b 为

$$b = b(N) := \begin{cases} 0, \text{ if } N \text{ is odd}, \\ 1, \text{ if } N \text{ is even}. \end{cases} \tag{2.9}$$

对于 $k \in \mathbb{N}$，定义

$$\mathscr{E}_{a,N,z}(k,b) := (-1)^k \exp\left(2Ne^{\frac{\pi i(2k+b)}{2N}} z^{\frac{1}{2N}} + \frac{\pi i(2k+b)(a+1)}{2N}\right). \tag{2.10}$$

定理 2.4。设 $a, z \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$。那么

$$\begin{aligned} &G^{N+1,\,1}_{1,\,2N+1}\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N} \\ \frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}, \langle\frac{i}{N}\rangle; \langle 1+\frac{3}{2N}-\frac{i}{N}\rangle \end{matrix}\middle| z\right) \\ &= \frac{N^{N-a-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-N+a}{2}\right) z^{\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}}}{\Gamma\left(\frac{N-a}{2}\right)} {}_1F_{2N}\left(\begin{matrix} 1 \\ \langle\frac{1}{2}-\frac{a+1}{2N}+\frac{i}{2N}\rangle_{i=1}^{2N} \end{matrix}\middle| (-1)^{N+1}z\right) + A_{a,N}(z), \end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 $A_{a,N}(z)$ 由下式给出

$$A_{a,N}(z) := \frac{(-1)^{\frac{N+1}{2}} z^{\frac{1}{N}}}{2\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\sqrt{\frac{\pi}{N}}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \mathscr{E}_{a,N,z}(k,0) + \sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{\frac{3N-1}{2}} e^{-\pi i a}\mathscr{E}_{a,N,z}(k,0) + \sum_{k=\frac{3N+1}{2}}^{2N-1} e^{-2\pi i a}\mathscr{E}_{a,N,z}(k,0)\right], \tag{2.12}$$

当 N 为奇数时，并且通过

$$A_{a,N}(z) := \frac{(-1)^{\frac{N+1}{2}} z^{\frac{1}{N}}}{2\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\sqrt{\frac{\pi}{N}}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathscr{E}_{a,N,z}(k,1) - \sum_{k=\frac{N}{2}}^{\frac{3N}{2}-1} e^{-\pi i a}\mathscr{E}_{a,N,z}(k,1) + \sum_{k=\frac{3N}{2}}^{2N-1} e^{-2\pi i a}\mathscr{E}_{a,N,z}(k,1)\right], \tag{2.13}$$

对于 N 为偶数的
情形。

现在我们给出定理 2.1 和定理 2.3 的一些重要特殊情形。我们首先介绍定理 2.3 的特殊情形 $a = -2Nm - N$，它给出了 Ramanujan 公式关于 $\zeta(2m+1)$ 的一个新推广，即 (1.1)。

定理 2.5. 设 N 为奇正整数，且 $\alpha, \beta > 0$ 满足 $\alpha\beta^N = \pi^{N+1}$。那么对于任意非零整数 m,

$$\begin{aligned} &\alpha^{-\left(\frac{2Nm+N-1}{N+1}\right)}\left(\frac{1}{2}\zeta(2Nm+N) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2Nm-N}}{\exp\left((2n)^N\alpha\right)-1}\right) \\ &= (-1)^m\beta^{-\left(\frac{2Nm+N-1}{N+1}\right)}\frac{2^{(N-1)(2m+1-\frac{1}{N})}}{N}\left(\frac{1}{2}\frac{\zeta\left(2m+2-\frac{1}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)} + \sum_{j=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{\frac{\pi i j}{N}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2m-2+\frac{1}{N}}}{\exp\left((2n)^{\frac{1}{N}}\beta e^{\frac{i\pi j}{N}}\right)-1}\right) \\ &\quad + (-1)^m 2^{2Nm+N-1}\sum_{j=0}^{m+1}\frac{(-1)^j B_{2j}B_{2N(m-j+1)}}{(2j)!(2N(m-j+1))!}\alpha^{\frac{2j}{N+1}}\beta^{\frac{2N^2(m-j+1)}{N+1}}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

恒等式 (1.8) 等价于上述定理在 N 为奇数时的特殊情形 $m = -1$。当 N 为偶数时，可在下文的 (9.7) 中令 $m = 0$ 推导得出。参见 §10。

定理 2.6。设 $N \in \mathbb{N}$ 和 b 由 (2.9) 定义。则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_N^{(N)}(n)e^{-ny} + \frac{1}{2}\zeta(-N) = -\frac{1}{2y} - \frac{1}{2N\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)}\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{1+\frac{1}{N}}\zeta\left(-\frac{1}{N}\right)$$

$$-\frac{1}{N}\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{1+\frac{1}{N}}\sum_{j=-\frac{(N-1+b)}{2}}^{\frac{N-1-b}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{N}}e^{\frac{i\pi(2j+b)}{2N}}}{\exp\left(2\pi e^{\frac{i\pi(2j+b)}{2N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right)-1}. \tag{2.15}$$

整数 n 的平面分拆是第四象限中的一个非负整数二维数组，满足沿行和列非递增的条件。令 $\mathbb{P}(n)$ 表示 n 的平面分拆数。则对于 $|q|<1$， $\mathbb{P}(n)$ 的生成函数由 [1, 第 184 页，公式 (11.2.15)] 给出。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(n)q^n=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)^n}. \tag{2.16}$$

显然，上述无穷乘积也生成 $\mathscr{P}(n)$，即满足以下条件的整数分拆数：某个部分 n 出现 n 个副本（或者说，有 n 种不同颜色）。事实上，Chaundy [10] 建立了整数的平面分拆集合与该整数的分拆集合之间的双射，后者的分拆包含“n 个 n 的副本”。

∞在我们的研究中，我们会用到广义无穷乘积 $\prod_{n=1}\frac{1}{\left(1-q^{n^N}\right)^{n^{2N-1}}}$ 的对数导数，

其中 $N\in\mathbb{N}$。显然，该乘积生成包含“n^{2N-1} 个 n^N 的副本”的幂分拆数。令

$$F_N(q):=\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{P}_N(n)q^n=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-q^{n^N}\right)^{n^{2N-1}}}. \tag{2.17}$$

注意，对于 $N>1$， $F_N(q)$ 的系数 $\mathscr{P}_N(n)$ 中存在大量重复。例如，当 $N=3$ 时， $\mathscr{P}_N(n)=1$ 对于 $1\le n\le 7$； $\mathscr{P}_N(n)=33$ 对于 $8\le n\le 15$； $\mathscr{P}_N(n)=561$ 对于 $16\le n\le 23$，以及$\mathscr{P}_N(n)=6545$ 对于 $24\le n\le 26$，等等。事实上，出现这种情况是因为这些分拆中可能出现的部分只有 13、23、33、$\cdots$。然而，这些部分 13、23、33、$\cdots$ 分别以 15、25、35、$\cdots$ 个副本出现。我们特别计算 $\mathscr{P}_3(24)$。注意， $\mathscr{P}_3(24)$ 所计数的 24 的分拆只有$\underbrace{1+1+\cdots+1}$、$8+\underbrace{1+1+\cdots+1}$、$8+8+\underbrace{1+1+\cdots+1}$ 和 $8+8+8$。但我们有 32 个不同的 8 的副本。24 乘以 16 再乘以 8

由于副本的顺序无关紧要，我们有

$$\mathscr{P}_3(24)=1+\binom{32}{1}+\left\{\binom{32}{2}+\binom{32}{1}\right\}+\left\{\binom{32}{3}+2\binom{32}{2}+\binom{32}{1}\right\}=6545.$$

研究受限分拆函数的生成函数在 $q\to 1^-$ 或 q 趋近于单位圆盘内其他单位根时的渐近行为，总是很有价值。例如，Wright [46, 引理 1]求出了式 (2.16) 中出现的 $\mathbb{P}(n)$ 的生成函数在 $q\to 1^-$时的渐近估计。他通过冗长而复杂的计算推导出了这一结果 [46, 第 180-184] 页。最近， [17]给出了 Wright 结果的一个简短直接证明。

最近，Bridges、Brindle、Bringmann 和 Franke [9] 研究了由无穷乘积 $\prod(1-q^n)^{-f(n)}$生成的分拆∞函数的渐近行为，其中 $f(n)$ 是一个算术函数，其狄利克雷$_{n=1}$级数满足某些条件。参见 [9]中的定理 1.4 和 4.4。虽然平面分拆生成函数属于他们研究的范围，但我们在式 (2.17) 中考虑的无穷乘积并不属于。

接下来，我们将得到 $F_N(q)$ 的渐近估计，从而推广 Wright 关于奇数N的结果。为此，对（2.17）中的无穷乘积应用算子 $q\frac{d}{dq}$，得到

$$q\frac{d}{dq}\log\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-q^{n^N}\right)^{n^{2N-1}}}\right)=-q\frac{d}{dq}\sum_{n=1}^{\infty}n^{2N-1}\log\left(1-q^{n^N}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3N-1}q^{n^N}}{1-q^{n^N}}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{3N-1}^{(N)}(n)q^n. \tag{2.18}$$

最右端的级数是下述变换左端所出现级数的特殊情形 $m=1$，而该变换又是定理 2.1 的特殊情形。不过，在陈述该变换之前，我们需要定义双曲正弦积分 Shi(z) 和双曲余弦积分 Chi(z)，其定义见 [33, 第 150 页，公式 (6.2.15) 、 (6.2.16)]

$$\mathrm{Shi}(z):=\int_0^z\frac{\sinh(t)}{t}\,dt,\quad \mathrm{Chi}(z):=\gamma+\log(z)+\int_0^z\frac{\cosh(t)-1}{t}\,dt.$$

为简洁起见，我们采用如下记号

$$(\sinh \mathrm{Shi} - \cosh \mathrm{Chi})(z) := \sinh(z)\,\mathrm{Shi}(z) - \cosh(z)\,\mathrm{Chi}(z) \tag{2.19}$$

在下文中始终如此。

定理 2.7. 设 N 为一个奇正数。对于一个正整数 m,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2Nm-1+N}^{(N)}(n)e^{-ny} &+ \frac{B_{2Nm}}{2Nmy} - \frac{(2m)!\zeta(2m+1)}{Ny^{2m+1}}\\ &= \frac{2(-1)^m}{\pi}\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{2m+1}\sum_{n=1}^{\infty}S_{2Nm-1+N}^{(N)}(n)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(\sinh \mathrm{Shi} - \cosh \mathrm{Chi})\left(\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi i k}{N}}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{j=1}^{m}(2Nj-1)!\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{-2j}\right].\end{aligned} \tag{2.20}$$

利用定理 2.7，我们现在得到一个中间结果，朝着求出当 $q \to 1^-$ 时 $F_N(q)$ 的渐近估计这一目标迈进。

定理 2.8. 设 $m \in \mathbb{N}$，且 N 为正奇整数。当 $y \to 0$ 属于 $|\arg\, y| < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2Nm-1+N}^{(N)}(n)e^{-ny} &= \frac{(2m)!\zeta(2m+1)}{Ny^{2m+1}} - \frac{B_{2Nm}}{2Nmy} - (-1)^m\frac{4}{(2\pi)^{2Nm}}\\ &\quad\times\sum_{j=1}^{r+1}\frac{\Gamma(2Nm+2Nj)\zeta(2Nm+2Nj)\zeta(2j)}{(2\pi)^{2j(N+1)}}y^{2j-1} + O(y^{2r+3}).\end{aligned}$$

设 $q = e^{-y}$，其中 $\mathrm{Re}(y) > 0$。这意味着

推论 2.9. 设 N 是奇正整数。当 $q \to 1^-$,

$$F_N(q) = e^c(\log q)^{\frac{B_{2N}}{2N}}\exp\left(\frac{\zeta(3)}{N\log^2 q}\right)\exp\left(-\sum_{j=1}^{r+1}\delta_j(\log q)^{2j}\right)\left(1 + O_r\left((\log q)^{2r+4}\right)\right),$$

其中 c 是一个常数， B_{2N} 是伯努利数，并且

$$\delta_j := \frac{2\,\Gamma(2N+2Nj)\,\zeta(2N+2Nj)\,\zeta(2j)}{(2\pi)^{2Nj}\left((2\pi)^{N+1}\right)^{2j}}.$$

令上述结果中的 $N = 1$ ，我们重新得到 Wright 的渐近估计，尽管未明确确定 c。Wright 证明了 $c = 2\int_0^{\infty} y\log(y)\frac{}{e^{2\pi y}-1}\,dy$。

当 N 为偶数正整数时，我们还得到了定理 2.3 的特殊情形 $a = -2Nm$ 。这推广了 Wigert 的一个公式 [42, 第 8–9 页，公式 (1.5)], ，并首次见于 [18, 定理 1.5]。参见推论 9.1。由定理 2.3 可得的另一项关于偶数 N 的新结果是当 $a = -2Nm+N$ 时的情形，见 (9.7)。如第 9.2 节所示，该结果也可以通过对 [15, 定理 2.12] 中的一个结果求导得到。

因此，本文的目标之一不仅是给出由定理2.1 和定理2.3 得出的新推论，还要为文献中的若干各不相同的结果提供统一的证明。

3. Preliminaries

倍增 n 和伽马函数的反射公式由 [38, 第 3]章给出。

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s), \tag{3.1}$$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad (s \notin \mathbb{Z}). \tag{3.2}$$

高斯乘法公式 [38, 第 52] 页给出如下： $m \in \mathbb{N}$， $m > 1$，即 人人中彩票

$$\prod_{k=1}^{m} \Gamma\left(z + \frac{k-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} m^{\frac{1}{2}-mz} \Gamma(mz). \tag{3.3}$$

下述极限可利用 (3.1) 和 (3.2) 得到，在我们的分析中将频繁用到。

$$\lim_{a \to -(2\ell+1)} \Gamma(a) \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right) = \frac{(-1)^{\ell+1}\pi}{2(2\ell+1)!} \qquad (\ell \geq 0). \tag{3.4}$$

$\zeta(s)$ 的函数方程的非对称形式为 [13, p. 73, Equation (4)]

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right). \tag{3.5}$$

我们需要 [34, Formula 7.18.1.1, p. 615]

$${}_1F_q\left(1; \frac{m+1}{q}, \frac{m+2}{q}, \cdots \frac{m+q}{q}; z\right) = \frac{m!}{q^{m+1}z^{m/q}} \left[\sum_{k=0}^{q-1} \frac{e^{q\,\theta_k z^{1/q}}}{\theta_k^m} - q^{m+1} \sum_{k=1}^{[m/q]} \frac{z^{m/q-k}}{q^{qk}(m-qk)!}\right], \tag{3.6}$$

where $\theta_k = e^{2k\pi i/q}$。这里，对于 $q \in \mathbb{N}$， ${}_1F_q$-超几何函数定义为

$${}_1F_q\left(a; b_1, b_2, \cdots, b_q \middle| z\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \cdots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{3.7}$$

其中 $(a)_n := \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ 为阶乘升幂。

4. New results on Meijer G-function and ${}_\mu K_\nu^{(N)}(z,w)$

下述引理 [15, Lemma 4.3] 将用于定理 2.4 的证明。

引理 4.1. 设 $z \in \mathbb{C}$ 和 $N \in \mathbb{N}$。则

$$\frac{\sin(Nz)}{\sin(z)} = \sum_{j=-(N-1)}^{N-1}{}'' \exp(ijz),$$

其中，此处及下文中，记号 $\sum''$ 表示对值 $j = -(N-1), -(N-3), \ldots, N-3, N-1$ 求和。因此，

$$\frac{\cos(Nz)}{\cos(z)} = (-1)^{\frac{N-1}{2}} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1}{}'' i^j \exp(-ijz) \quad (\text{for } N \text{ odd}), \tag{4.1}$$

$$\frac{\sin(Nz)}{\cos(z)} = (-1)^{\frac{N}{2}} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1}{}'' i^j \exp(ijz) \quad (\text{for } N \text{ even}).$$

现在我们可以证明定理 2.1 中出现的 Meijer G-函数的约化公式。

定理 2.4 的证明。利用 Slater 定理 [30, 第 145], 页的公式 7，我们首先将 Meijer G 函数改写为以下形式。

$$G^{N+1,\,1}_{1,\,2N+1}\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} + \frac{1-a}{2N} \\ \frac{1}{2} + \frac{1-a}{2N}, \langle \frac{i}{N} \rangle; \langle 1 + \frac{3}{2N} - \frac{i}{N} \rangle \end{matrix} \middle| z\right)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{N} \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{2i+a-1}{2N}\right) z^{\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}}}{\prod_{i=1}^{N} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{2i-a-2}{2N}\right)} {}_1F_{2N}\left(\begin{matrix} 1 \\ \langle \frac{3}{2} + \frac{1-a-2i}{2N} \rangle_{i=1}^{N}, \langle \frac{1}{2} + \frac{2i-a-2}{2N} \rangle_{i=1}^{N} \end{matrix} \middle| (-1)^{N+1} z\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\Gamma\left(\frac{i-j}{N}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}-\frac{j}{N}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{j}{N}-\frac{1-a}{2N}\right)z^{j/N}}{\prod\limits_{i=1}^{N}\Gamma\left(\frac{j+i}{N}-\frac{3}{2N}\right)}{}_1F_{2N}\left(\left.\begin{matrix}1\\ \left\langle 1-\frac{i-j}{N}\right\rangle_{i=1}^{N},\left\langle\frac{i+j}{N}-\frac{3}{2N}\right\rangle_{i=1}^{N}\end{matrix}\right|(-1)^{N+1}z\right) \tag{4.2}$$

注意，上述有限和中出现的 ${}_1F_{2N}$ 实际上是一个 ${}_0F_{2N-1}$。不过，我们将其写成这种形式，以便稍后使用 (3.6)。

高斯乘法公式 (3.3) 将 (4.2) 中第一个表达式里的 Gamma 因子化简为

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{N}\Gamma\left(-\frac{1}{2}+\frac{2i+a-1}{2N}\right)&=(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}N^{\frac{N-a}{2}}\Gamma\left(\frac{1-N+a}{2}\right),\\ \prod_{i=1}^{N}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{2i-a-2}{2N}\right)&=(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}N^{\frac{1-N+a}{2}}\Gamma\left(\frac{N-a}{2}\right)\end{aligned} \tag{4.3}$$

类似地，(4.2) 中第二个表达式里的伽马因子可化简为

$$\begin{aligned}&\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\Gamma\left(\frac{i-j}{N}\right)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{\Gamma\left(\frac{i-j}{N}+1\right)}{\frac{i-j}{N}}=\frac{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}N^{-\frac{1}{2}-N+j}\Gamma(N+1-j)}{\prod\limits_{i=1}^{j-1}\frac{i-j}{N}\prod\limits_{i=j+1}^{N}\frac{i-j}{N}}=\frac{(-1)^{j-1}(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}N^{j-\frac{3}{2}}}{\Gamma(j)},\\ &\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}-\frac{j}{N}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{j}{N}-\frac{1-a}{2N}\right)=\frac{\pi}{\cos\left(\pi\left(\frac{j}{N}+\frac{a-1}{2N}\right)\right)},\\ &\prod_{i=1}^{N}\Gamma\left(\frac{j+i}{N}-\frac{3}{2N}\right)=(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}N^{1-j}\Gamma\left(j-\frac{1}{2}\right),\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中，第一个等式用到了伽马函数的函数方程 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 以及 (3.3)，第二个等式用到了反射公式 (3.2)，最后一个等式再次用到了 (3.3)。将 (4.3) 和 (4.4) 中的伽马因子代入 (4.2)，得到

$$\begin{aligned}&G^{N+1,\,1}_{1,\,2N+1}\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}\\ \frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N},\langle\frac{i}{N}\rangle;\langle 1+\frac{3}{2N}-\frac{i}{N}\rangle\end{matrix}\right|z\right)\\ &=N^{N-a-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-N+a}{2}\right)z^{\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}}}{\Gamma\left(\frac{N-a}{2}\right)}{}_1F_{2N}\left(\left.\begin{matrix}1\\ \langle\frac{3}{2}+\frac{1-a-2i}{2N}\rangle_{i=1}^{N},\langle\frac{1}{2}+\frac{2i-a-2}{2N}\rangle_{i=1}^{N}\end{matrix}\right|(-1)^{N+1}z\right)\\ &+\sum_{j=1}^{N}\frac{(-1)^{j-1}\pi N^{2j-\frac{5}{2}}z^{j/N}}{\Gamma(j)\Gamma(j-\frac{1}{2})\cos\pi\left(\frac{j}{N}+\frac{a-1}{2N}\right)}{}_1F_{2N}\left(\left.\begin{matrix}1\\ \left\langle 1-\frac{i-j}{N}\right\rangle_{i=1}^{N},\left\langle\frac{i+j}{N}-\frac{3}{2N}\right\rangle_{i=1}^{N}\end{matrix}\right|(-1)^{N+1}z\right).\end{aligned}$$

合并超几何函数中的序列，并在最后一个表达式中应用倍增公式 (3.1)，上述方程化简为

$$\begin{aligned}&G^{N+1,\,1}_{1,\,2N+1}\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}\\ \frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N},\langle\frac{i}{N}\rangle;\langle 1+\frac{3}{2N}-\frac{i}{N}\rangle\end{matrix}\right|z\right)\\ &=\frac{N^{N-a-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-N+a}{2}\right)z^{\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}}}{\Gamma\left(\frac{N-a}{2}\right)}\,{}_1F_{2N}\left(\left.\begin{matrix}1\\ \langle\frac{1}{2}-\frac{a+1}{2N}+\frac{i}{2N}\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\right|(-1)^{N+1}z\right)\\ &+\sum_{j=1}^{N}\frac{(-1)^{j-1}(2N)^{2j-2}(\pi/N)^{1/2}z^{j/N}}{\Gamma(2j-1)\cos\pi\left(\frac{j}{N}+\frac{a-1}{2N}\right)}\,{}_1F_{2N}\left(\left.\begin{matrix}1\\ \left\langle\frac{j-1}{N}+\frac{i}{2N}\right\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\right|(-1)^{N+1}z\right).\end{aligned} \tag{4.5}$$

令 T_1 表示上述方程中关于 j 的有限和。我们根据 N的奇偶性分两种情况对其进行求值。

情况 1：我们首先考虑 N 为奇数的情形。对项 T_1中涉及的超几何函数应用 (3.6)，可得

$$ {}_1F_{2N}\left(\left.\begin{matrix}1\\ \left\langle \frac{j-1}{N}+\frac{i}{2N}\right\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\right| z\right)=\frac{(2j-2)!}{(2N)^{2j-1}z^{\frac{j-1}{N}}}\sum_{k=0}^{2N-1}\frac{\exp\left(2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}z^{\frac{1}{2N}}\right)}{\exp\left(\frac{2\pi ik(j-1)}{N}\right)} $$

使得

$$ \begin{aligned} T_1&=\frac{\sqrt{\pi}z^{1/N}}{2N^{3/2}}\sum_{j=1}^{N}\frac{(-1)^{j-1}}{\cos\pi\left(\frac{j}{N}+\frac{a-1}{2N}\right)}\sum_{k=0}^{2N-1}\frac{\exp\left(2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}z^{\frac{1}{2N}}\right)}{\exp\left(\frac{2\pi ik(j-1)}{N}\right)}\\ &=\frac{\sqrt{\pi}z^{1/N}}{2N^{3/2}}\sum_{k=0}^{2N-1}\exp\left(2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}z^{\frac{1}{2N}}\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{(-1)^{j}e^{\frac{2\pi ikj}{N}}}{\cos\left(\pi\left(\frac{a+1}{2N}-\frac{j}{N}\right)\right)}, \end{aligned} \tag{4.6} $$

其中，在最后一步交换求和次序后，我们用 $N+1-j$ 代换了 j。下一步是计算该求和

$$ S:=\sum_{j=1}^{N}\frac{(-1)^{j}e^{\frac{2\pi ikj}{N}}}{\cos\pi\left(\left(\frac{a+1}{2N}-\frac{j}{N}\right)\right)}. $$

利用 $\cos\left(\pi\left(\frac{a+1}{2}-j\right)\right)=(-1)^{j+1}\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)$ 这一事实，可以看出，

$$ S=-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\sum_{j=1}^{N}e^{\frac{2\pi ikj}{N}}\frac{\cos\left(N\pi\left(\frac{a+1}{2N}-\frac{j}{N}\right)\right)}{\cos\left(\pi\left(\frac{a+1}{2N}-\frac{j}{N}\right)\right)} $$

接下来，我们应用奇数 N 的引理 4.1 的结果，将上述和写成

$$ S=\frac{(-1)^{\frac{N+1}{2}}}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\sum_{j=1}^{N}e^{\frac{2\pi ikj}{N}}\sum_{\ell=-(N-1)}^{N-1}{}''\ i^{\ell}e^{-i\ell\pi\left(\frac{a+1}{2N}-\frac{j}{N}\right)}. $$

将 ℓ 替换为 2ℓ 并交换求和次序，我们得到

$$ \begin{aligned} S&=\frac{(-1)^{\frac{N+1}{2}}}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\sum_{\ell=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(-1)^{\ell}e^{-\frac{\pi i\ell(a+1)}{N}}\sum_{j=1}^{N}e^{\frac{2\pi ij(k+\ell)}{N}}\\ &=\frac{(-1)^{k+\frac{N+1}{2}}}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}e^{\frac{\pi ik(a+1)}{N}}\sum_{\ell=k-\frac{N-1}{2}}^{k+\frac{N-1}{2}}(-1)^{\ell}e^{-\frac{\pi i\ell(a+1)}{N}}\sum_{j=1}^{N}e^{\frac{2\pi ij\ell}{N}}, \end{aligned} $$

其中，在最后一步中，我们将 ℓ 替换为 $\ell-k$。在最后一个关于 j 的求和中应用 [3, 定理 8.1，第 158] 页，得到

$$ S=\frac{(-1)^{k+\frac{N+1}{2}}N}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}e^{\frac{\pi ik(a+1)}{N}}\sum_{\substack{\ell=k-\frac{N-1}{2}\\ N|\ell}}^{k+\frac{N-1}{2}}(-1)^{\ell}e^{-\frac{\pi i\ell(a+1)}{N}}. \tag{4.7} $$

接下来，将 (4.7) 代入 (4.6)，得到

$$ T_1=\frac{\sqrt{\pi}z^{1/N}}{2\sqrt{N}}\frac{(-1)^{\frac{N+1}{2}}}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^{k}\exp\left(2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}z^{\frac{1}{2N}}+\frac{\pi ik(a+1)}{N}\right)\sum_{\substack{\ell=k-\frac{N-1}{2}\\ N|\ell}}^{k+\frac{N-1}{2}}(-1)^{\ell}e^{-\frac{\pi i\ell(a+1)}{N}}. $$

由于对 k 的求和范围是从 0 到 $2N-1$，$N\mid\ell$ 意味着 ℓ 对于 $N=1$ 只能取 0 或 N，而对于 $N>1$ 只能取 0、N 或 $2N$。因此可得 $T_1=A_{a,N}(z)$，其中 $A_{a,N}(z)$ 定义见 (2.12)。结合 (4.5)，这就证明了 N 为奇数时 (2.11) 成立。

情形 2：在此情形下，我们计算 N 为偶数时的和 T_2。类似于 N 为奇数时的情形进行推导，并对项 T_1 中涉及的超几何函数应用 [34, 公式 7.18.1.1，第 517] 页，可得

$$T_1 = \frac{\sqrt{\pi} z^{1/N}}{2N^{3/2}} \sum_{k=0}^{2N-1} \exp\left(2Ne^{\frac{\pi i k}{N}}(-z)^{\frac{1}{2N}}\right) \sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j+\frac{j}{N}} e^{\frac{2\pi i k j}{N}}}{\cos\left(\pi\left(\frac{a+1}{2N} - \frac{j}{N}\right)\right)}.$$

总和

$$S := \sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j+\frac{j}{N}} e^{\frac{2\pi i k j}{N}}}{\cos\left(\pi\left(\frac{a+1}{2N} - \frac{j}{N}\right)\right)}$$

可以像之前一样进行计算。首先，我们将该和式写成

$$S = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j/N} e^{\frac{2\pi i k j}{N}} \frac{\sin\left(N\pi\left(\frac{a+1}{2N} - \frac{j}{N}\right)\right)}{\cos\left(\pi\left(\frac{a+1}{2N} - \frac{j}{N}\right)\right)}$$

利用 $\sin\left(N\pi\left(\frac{a+1}{2N} - \frac{j}{N}\right)\right) = (-1)^j \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)$ 这一事实。接下来，我们对因子 $\sin(N\pi(\frac{a+1}{2N} - \frac{j}{N}))\cos(\pi(\frac{a+1}{2N} - \frac{j}{N}))$ 应用偶数 N 的引理 4.1，并按照前一种情形中的类似步骤，得到 (2.11)，其中 $A_{a,N}(z)$ 定义于 (2.13) 中。□

注 2. 令定理 2.4 中的 $N = 1$，并使用公式 [13, 第 73] 页。

$$\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = \pi^{-1/2} 2^{1-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \tag{4.8}$$

结果见于

$$G^{2,\,1}_{1,\,3}\left(\begin{matrix} 1-\frac{a}{2} \\ 1-\frac{a}{2}, 1; \frac{3}{2} \end{matrix}\middle| z\right) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{1-a} \Gamma(a) \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right) z^{1-\frac{a}{2}} {}_1F_2\left(\begin{matrix} 1 \\ \frac{1-a}{2}, 1-\frac{a}{2} \end{matrix}\middle| z\right) - \frac{z\sqrt{\pi}}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \cosh(2\sqrt{z}), \tag{4.9}$$

而令定理 2.4 中的 $N = 2$，并利用 (4.8)，可得

$$\begin{aligned} G^{3,\,1}_{1,\,5}\left(\begin{matrix} \frac{3-a}{4} \\ \frac{3-a}{4}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \end{matrix}\middle| z\right) &= 2^{\frac{7}{2}-2a} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(a-1) \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) z^{\frac{3-a}{4}} {}_1F_4\left(\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{a}{4}, \frac{3}{4}-\frac{a}{4}, 1-\frac{a}{4}, \frac{5}{4}-\frac{a}{4} \end{matrix}\middle| -z\right) \\ &+ \frac{(-1)^{3/2}\sqrt{\pi z}}{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \left[\exp\left(4e^{\frac{\pi i}{4}} z^{\frac{1}{4}} + \frac{\pi i(a+1)}{4}\right) + e^{-\pi i a} \left\{ \exp\left(4e^{\frac{3\pi i}{4}} z^{\frac{1}{4}} + \frac{3\pi i(a+1)}{4}\right) \right.\right. \\ &\left.\left. - \exp\left(4e^{\frac{5\pi i}{4}} z^{\frac{1}{4}} + \frac{5\pi i(a+1)}{4}\right) \right\} - e^{-2\pi i a} \exp\left(4e^{\frac{7\pi i}{4}} z^{\frac{1}{4}} + \frac{7\pi i(a+1)}{4}\right) \right]. \end{aligned}$$

我们注意到，(4.9) 正是 es 本质上出现在 (1.13 右侧级数的求和项中).

现在我们推导定理 2.2，这将有助于证明定理 2.3。

定理 2.2 的证明。定义 ${}_\mu K_\nu^{(N)}(z, w)$ 中的 Meijer G-函数满足 $1 \le n \le p < q$, $1 \le m \le q$，以及条件

$$\begin{aligned} &a_j - b_h \neq 1, 2, 3, \cdots \quad \text{for } j = 1, 2, \cdots, n, \text{ and } \ h = 1, 2, \cdots, m; \\ &a_j - a_t \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \quad \text{for } j, t = 1, 2, \cdots, n, \text{ and } j \neq t, \end{aligned}$$

以及 $|\arg(z)| \le \rho\pi - \delta$，其中 $\rho > 0$, $\delta \ge 0$。然后由 [30, 第 179 页定理 2], , 令 $|z| \to \infty$, 可得

$$G^{m,n}_{p,q}\left(\begin{matrix} a_1, \cdots, a_p \\ b_1, \cdots b_m; b_{m+1}, \cdots, b_q \end{matrix}\middle| z\right) \sim \sum_{j=1}^{n} \exp\left(-i\pi(\nu+1)a_j\right) \Delta_q^{m,n}(j) E_{p,q}\left(z \exp(i\pi(\nu+1)) \| a_j\right). \tag{4.10}$$

where $\nu := q-m-n$, $\Delta_q^{m,n}(j) := (-1)^{\nu+1}\frac{\prod_{\ell=1,\ell\neq j}^{n}\Gamma(a_j-a_\ell)\Gamma(1+a_\ell-a_j)}{\prod_{\ell=m+1}^{q}\Gamma(a_j-b_\ell)\Gamma(1+b_\ell-a_j)}$ and

$$E_{p,q}(z\|a_j) := z^{a_j-1}\frac{\prod_{l=1}^{q}\Gamma(1+b_l-a_j)}{\prod_{l=1}^{p}\Gamma(1+a_l-a_j)}{}_qF_{p-1}\left(\begin{matrix}1+b_1-a_j,\cdots,1+b_q-a_j\\1+a_1-a_j,\cdots,1+a_{j-1}-a_j,1+a_{j+1}-a_j,\cdots,1+a_p-a_j\end{matrix}\middle|-\frac{1}{z}\right)$$

特别地，在上述结果中代入 $m=N+1$, $n=p=1$, $q=2N+1$, $a_1=1-\mu-\nu-w+\frac{1}{2N}$ 和 $\langle b_\ell\rangle_{\ell=1}^{2N+1}=\left\{\left\langle\frac{j}{N}\right\rangle_{j=1}^{N},\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}-\nu,1+\frac{1}{2N}-w,\left\langle1+\frac{3}{2N}-\frac{j}{N}\right\rangle_{j=2}^{N}\right\}$，并用 $\frac{z^2}{4}$ 替换 z，即可得到

$$\Delta_q^{m,n}(j)=\frac{(-1)^N}{\left(\Gamma(-\mu-\nu)\prod_{i=2}^{N}\Gamma(\frac{i-1}{N}-\mu-\nu-w)\right)\left(\Gamma(1+\mu+\nu)\prod_{i=2}^{N}\Gamma(1-\frac{i-1}{N}+\mu+\nu+w)\right)} \tag{4.11}$$

and

$$\begin{aligned}
&E_{p,q}\left(\frac{z^2}{4}\exp(i\pi N)\|a_1\right)\\
&=\left(\tfrac{z^2}{4}e^{i\pi N}\right)^{a_1-1}\prod_{i=1}^{N}\Gamma\left(1+\tfrac{i}{N}-a_1\right)\Gamma\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2N}-\nu-a_1\right)\Gamma\left(2+\tfrac{1}{2N}-w-a_1\right)\prod_{i=2}^{N}\Gamma\left(2+\tfrac{3}{2N}-\tfrac{i}{N}-a_1\right)\\
&\quad\times{}_{2N+1}F_0\left(\left\langle1+\tfrac{i}{N}-a_1\right\rangle_{i=1}^{N},1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2N}-\nu-a_1,2+\tfrac{1}{2N}-w-a_1,\left\langle2+\tfrac{3}{2N}-\tfrac{i}{N}-a_1\right\rangle_{i=2}^{N};-\middle|\tfrac{-4}{z^2}e^{-i\pi N}\right)\\
&=\left(\tfrac{z^2}{4}e^{i\pi N}\right)^{a_1-1}\prod_{i=1}^{N}\Gamma\left(\tfrac{2i-1}{2N}+\mu+\nu+w\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\mu+w\right)\Gamma\left(1+\mu+\nu\right)\prod_{i=2}^{N}\Gamma\left(1-\tfrac{i-1}{N}+\mu+\nu+w\right)\sum_{k=0}^{m}\tfrac{(-1)^k}{k!}\\
&\quad\times\prod_{i=1}^{N}\left(\tfrac{2i-1}{2N}+\mu+\nu+w\right)_k\left(\tfrac{1}{2}+\mu+w\right)_k\left(1+\mu+\nu\right)_k\prod_{i=2}^{N}\left(1-\tfrac{i-1}{N}+\mu+\nu+w\right)_k\left(\tfrac{4}{z^2}\right)^k e^{-i\pi kN}+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{z^{2m+4-2a}}\right).
\end{aligned}\tag{4.12}$$

因此，将 (4.11) 和 (4.12) 代入 (4.10)，可得当 $z\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}
&G_{1\ 2N+1}^{N+1\ 1}\left(\begin{matrix}1+\frac{1}{2N}-\mu-\nu-w\\\langle\frac{i}{N}\rangle_{i=1}^{N},\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}-\nu;1+\frac{1}{2N}-w,\langle1+\frac{3}{2N}-\frac{i}{N}\rangle_{i=2}^{N}\end{matrix}\middle|\frac{z^2}{4}\right)\\
&=\frac{(-1)^N}{\Gamma(-\mu-\nu)\prod_{i=2}^{N}\Gamma(\frac{i-1}{N}-\mu-\nu-w)\Gamma(1+\mu+\nu)\prod_{i=2}^{N}\Gamma(1-\frac{i-1}{N}+\mu+\nu+w)}\\
&\quad\times\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!}\prod_{i=1}^{N}\Gamma\left(\frac{2i-1}{2N}+\mu+\nu+w+k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+w+k\right)\Gamma\left(1+\mu+\nu+k\right)\\
&\quad\times\prod_{i=2}^{N}\Gamma\left(1-\frac{i-1}{N}+\mu+\nu+w+k\right)\left(\frac{4}{z^2}\right)^{k+\mu+\nu+w-\frac{1}{2N}}e^{-i\pi(k+1)N}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{2m+2-\frac{1}{N}+2\mu+2\nu+2w}}\right),
\end{aligned}$$

而这，　借助定义 (2.2)、反射公式 (3.2) 以及这一事实　　t

$$\prod_{i=1}^{N}\Gamma\left(\frac{2i-1}{2N}+\mu+\nu+w+k\right)\prod_{i=2}^{N}\Gamma\left(1-\frac{i-1}{N}+\mu+\nu+w+k\right)=\prod_{i=1}^{2N-1}\Gamma\left(\frac{i}{2N}+\mu+\nu+w+k\right),$$

化简后得到（2.5）。

5. Proofs of the main transformations

5.1. 定理 2.1 的证明。由 [19, 方程（6.16）] 可知，对于 $f(n) = \exp(-ny)$，其中 $y > 0$ 且 $-1 < \mathrm{Re}(a) < N$，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a^{(N)}(n) e^{-ny} = -\frac{\zeta(-a)}{2} + \frac{\zeta(N-a)}{y} + \frac{1}{N} \frac{\Gamma\left(\frac{1+a}{N}\right) \zeta\left(\frac{1+a}{N}\right)}{y^{\frac{1+a}{N}}} + \frac{(2\pi)^{(N+1)\left(\frac{1+a}{N}\right)-a}}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} S_a^{(N)}(n) \int_0^{\infty} H_a^{(N)}\left((2\pi)^{1+1/N}(nt)^{1/N}\right) t^{\frac{1+a}{N}-1} \exp(-ty)\, dt, \tag{5.1}$$

其中 $H_a^{(N)}(x)$ 在 (1.11) 中定义。根据 [19, 第 40 页-41], , 对于 $\max\left\{0, \frac{1-N+\mathrm{Re}(a)}{N}\right\} < c = \mathrm{Re}(s) < \frac{1+\mathrm{Re}(a)}{N(N+1)}$,

$$\mathcal{I} := \int_0^{\infty} H_a^{(N)}\left(\alpha t^{1/N}\right) t^{\frac{1+a}{N}-1} \exp(-ty)\, dt = \frac{y^{-\frac{(1+a)}{N}}}{4i} \int_{(c)} \frac{\Gamma(Ns)\cos\left(\frac{\pi N s}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2N}(1+a-Ns)\right)} \left(\frac{\alpha^N}{y}\right)^{-s} ds,$$

其中 $\alpha = (2\pi)^{1+1/N} n^{1/N}$。令 $b = \alpha^N / y$，利用以下事实

$$\frac{\pi}{\cos(\pi s)} = \Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right) \tag{5.2}$$

并将 s 替换为 $2s$，我们看到，对于 $\max\left\{0, \frac{1-N+\mathrm{Re}(a)}{2N}\right\} < c' = \mathrm{Re}(s) \le \frac{1+\mathrm{Re}(a)\,2N}{(N+1)}$,

$$\mathcal{I} = \frac{y^{-\frac{1+a}{N}}}{2i} \int_{(c')} \frac{\Gamma(2Ns)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+a}{2N}-s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1+a}{2N}+s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+Ns\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-Ns\right)} b^{-2s} ds$$

应用高斯乘法公式 (3.3) 得到

$$\Gamma(2Ns) = (2\pi)^{\frac{1}{2}-N}(2N)^{2Ns-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{2N-1} \Gamma\left(s+\frac{k}{2N}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm Ns\right) = \Gamma\left(N\left(\frac{1}{2N} \pm s\right)\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-N)} N^{\pm Ns} \prod_{k=0}^{N-1} \Gamma\left(\frac{1}{2N} \pm s + \frac{k}{N}\right).$$

因此，该积分的值为

$$\mathcal{I} = \frac{y^{-\frac{(1+a)}{N}}}{4i\sqrt{N\pi}} \int_{(c')} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1+a}{2N}+s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+a}{2N}-s\right)\prod_{k=0}^{2N-1}\Gamma\left(s+\frac{k}{2N}\right)}{\prod_{k=0}^{N-1}\Gamma\left(\frac{1}{2N}+\frac{k}{N}+s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2N}+\frac{k}{N}-s\right)} \left(\frac{(2N)^{2N}}{b^2}\right)^s ds$$

$$= \frac{y^{-\frac{(1+a)}{N}}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{N}} \frac{1}{2\pi i} \int_{(c')} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1+a}{2N}+s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+a}{2N}-s\right)\prod_{k=0}^{N-1}\Gamma\left(s+\frac{k}{N}\right)}{\prod_{k=0}^{N-1}\Gamma\left(\frac{1}{2N}+\frac{k}{N}-s\right)} \left(\frac{(2N)^{2N}}{b^2}\right)^s ds,$$

其中，在最后一步中，我们利用了这一事实：

$$\prod_{k=0}^{2N-1} \Gamma\left(s+\frac{k}{2N}\right) = \prod_{k=0}^{N-1} \Gamma\left(s+\frac{2k+1}{2N}\right) \prod_{k=0}^{N-1} \Gamma\left(s+\frac{2k}{2N}\right).$$

代入 $s = -w + \frac{1}{N}$ 并将 k 替换为 $i-1$，我们看到，对于 $\frac{1}{N} - \frac{1+}{2N}\mathrm{Re}(a)\ (N+1) \leq c'' = \mathrm{Re}(w) < \min\left\{\frac{1}{N}, \frac{N+1-}{2N}\mathrm{Re}(a), \right\}$，

$$\mathcal{I} = \frac{2N^{3/2}\sqrt{\pi}}{y^{\frac{1+a}{N}} b^{\frac{2}{N}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{(c'')} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{a-1}{2N} - w\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{a-1}{2N} + w\right)\prod_{i=1}^{N}\Gamma\left(-w + \frac{i}{N}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\Gamma\left(-\frac{3}{2N} + \frac{i}{N} + w\right)} \left(\frac{(2N)^{2N}}{b^2}\right)^{-w} dw.$$

现在利用(5.1)中 $\mathcal{I}$ 的上述表示，然后根据(2.1)中的定义将其表示为Meijer G-函数，我们得到当 $-1 < \mathrm{Re}(a) < N$时的(2.3)。借助(2.2)，不难看出(2.4)等价于(2.3)。

接下来，我们将 (2.4) 的有效范围扩展至 $\mathrm{Re}(a) > -1$。为此，我们首先证明，对于任意 $\epsilon > 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{S_a^{(N)}(n)}{n^{\frac{a}{2N}}} \frac{n}{\frac{1}{2}K_{\frac{a}{2N}}^{(N)}\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}, 0\right)}\right)$ 在 $\mathrm{Re}(a) \geq -1+\epsilon$ 内一致收敛。由 (1.10)，

$$|S_a^{(N)}(n)| = \sum_{d_1^N d_2 = n} d_2^{\frac{1+\mathrm{Re}(a)}{N}-1} \leq \sum_{d_1 d_2 = n} d_2^{\frac{1+\mathrm{Re}(a)}{N}-1} = \sigma_{\frac{1+\mathrm{Re}(a)}{N}-1}(n)$$

因此，由约数函数的基本界可得

$$|S_a^{(N)}(n) n^{-\frac{a}{2N}}| \ll n^{\frac{1}{2}\left|\frac{1+\mathrm{Re}(a)}{N}-1\right| + \frac{1}{2N} - \frac{1}{2} + \epsilon} = n^{\max\left(-\frac{\mathrm{Re}(a)}{2N}, \frac{\mathrm{Re}(a)}{2N} + \frac{1}{N} - 1\right) + \epsilon}, \tag{5.3}$$

对每个 $\epsilon > 0$。另一方面，引理 2.2 提供了 $\frac{1}{2}K_{\frac{a}{2N}}^{(N)}\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}, 0\right) = \mathcal{O}(n^{-1-\frac{1}{N}-\mathrm{Re}(a)2N})$。因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_a^{(}$ $\left(\frac{n}{n^{\frac{a}{2N}}} \frac{1}{\frac{1}{2}K_{\frac{a}{2N}}^{(N)}\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}, 0\right)}\right)$ 只要$\mathrm{Re}(a) > -1$，就绝对且一致收敛。由于该级数的被加项在 $\mathrm{Re}(a) > -1$ 时是解析的，根据魏尔斯特拉斯解析函数定理，级数是 a 关于 $a > -1$ 中的解析函数。(2.4) 的左端在$\mathrm{Re}(a) > -1$ 时也是解析的，因此根据解析延拓原理，(2.4)对 $\mathrm{Re}(a) > -1$ 且 $y > 0$成立。使用与上述类似的方法，可以看出，(2.4)两端作为 y 的函数，在$\mathrm{Re}(y) > 0$ 中都是解析的。这就证明了(2.4) 的全部内容。

5.2. 定理 2.3 的证明。正如定理 2.1 的证明所示，当 $\mathrm{Re}(a) > -1$ 时，(2.4) 中的恒等式成立。我们先将其改写成等价形式，然后使用解析延拓。

回顾定义 $\mathfrak{f} C_{m,\ N}$，其中 $m \geq 0$，见 (2.7)。我们先在

$$2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}} \pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N} \left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{-1-\frac{1}{N}-\frac{a}{2N}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}} C_{m,N}\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2N}, 0, \frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)$$

右侧级数的求和项中加上并减去该项，然后稍作化简，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a^{(N)}(n) e^{-ny} + \frac{\zeta(-a)}{2} - \frac{\zeta(N-a)}{y} - \frac{1}{N}\frac{\Gamma\left(\frac{1+a}{N}\right)\zeta\left(\frac{1+a}{N}\right)}{y^{\frac{1+a}{N}}} = \frac{2(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}} N^{\frac{a-1}{2}}}{y^{\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_a^{(N)}(n)}{n^{\frac{a}{2N}}} \left[\frac{1}{2}K_{\frac{a}{2N}}^{(N)}\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}, 0\right)\right.$$

$$\left. - \frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}} \pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}} C_{m,N}\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2N}, 0; \frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\right] + D_{m,N}(a,y), \tag{5.4}$$

其中

$$D_{m,N}(a,y) := \frac{yN^{a+N+\frac{1}{2}}}{2\pi^{2N+a+\frac{5}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_a^{(N)}(n)}{n^{1+\frac{a+1}{N}}} C_{m,N}\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2N}, 0; \frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right).$$

代入式（2.8）中 $C_{m,\ N}\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2N}, 0, \frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)$ 的定义，然后使用公式 [19,式（1.14）]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_a^{(N)}(n)}{n^s} = \zeta(Ns)\zeta\left(s + 1 - \frac{1+a}{N}\right) \qquad \left(\mathrm{Re}(s) > \max\left\{\frac{1}{N}, \frac{1+\mathrm{Re}(a)}{N}\right\}\right) \tag{5.5}$$

这是合理的，因为 Re(a) > -1，我们得到

$$D_{m,N}(a,y) = \frac{y}{\pi^2(2\pi)^{1+N+a}} \sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right) \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k(N+1)+N}}{\left(\frac{(2\pi)^{N+1}}{yN^N}\right)^{2k}} \Gamma\left(2kN+N+a+1\right) \times \zeta(2kN+N+a+1)\zeta(2k+2)$$

$$= \frac{y}{2\pi^2} \sum_{k=0}^{m} \left(-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^k \zeta(-2kN-N-a)\zeta(2k+2),$$

其中在最后一步，我们使用了 (3.5)。

将 $D_{m,N}(a,y)$ 的这些表达式代入 (5.4)，可知 (2.6) 对 Re(a) > -1 成立。现在利用定理 2.2，将 (2.6) 的有效性扩展至 Re(a) $> -(2m+2)N-1$。为此，令定理 2.2 中的 $\mu = 1/2, \nu = a/(2N)$ $w = 0$ 和 $z = \frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}$。此外，利用 (3.3) 和 (5.2)，可知】【。

$$\prod_{i=1}^{N} \cos\left(\pi\left(\frac{a}{2N} - \frac{i-1}{N}\right)\right) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2N}-\frac{i-1}{N}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2N}+\frac{i-1}{N}\right)}$$

$$= \frac{\pi^N}{\left\{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}} N^{\frac{1}{2}-N(-\frac{1}{2}+\frac{a+2}{2N})}\Gamma\left(-\frac{N}{2}+\frac{a}{2}+1\right)\right\}\left\{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}} N^{\frac{1}{2}-N(\frac{1}{2}-\frac{a}{2N})}\Gamma\left(\frac{N}{2}-\frac{a}{2}\right)\right\}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi N}{2}-\frac{a\pi}{2}\right)}{2^{N-1}}.$$

因此，作为 $n \to \infty$，定理 2.2 和 (2.7) 表明

$$\tfrac{1}{2}K^{(N)}_{\frac{a}{2N}}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}, 0\right) - \frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}}\pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}} C_{m,N}\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2N}, 0, \frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right) = \mathcal{O}\left(n^{-2m-3-\frac{1}{N}-\frac{\mathrm{Re}(a)}{2N}}\right). \tag{5.6}$$

因此，结合 (5.3)，(5.6) 表明，对于任意 $\epsilon > 0$，(2.6) 右侧级数的通项为 $\mathcal{O}\left(n^{\max\left(-\frac{\mathrm{Re}(a)}{2N}, \mathrm{Re}\left(\frac{a}{2N}+\frac{1}{N}-1\right)-2m-3-\frac{1}{N}-\mathrm{Re}\left(\frac{a}{2N}+\epsilon\right)\right)}\right)$。因此，对于任意 $\epsilon > 0$，上述级数在 Re(a) $\geq -(2m+2)N-1+\epsilon$ 中一致收敛。由于上述级数的通项在 Re(a) $> -(2m+2)N-1$ 中解析，解析函数的魏尔斯特拉斯定理表明，此级数在 Re(a) $> -(2m+2)N-1$ 中表示 a 的解析函数。由于 (2.6) 左侧以及其右侧的有限和在 Re(a) $> -(2m+2)N-1$ 中也解析，利用解析延拓原理可得，(2.6) 对 Re(a) $> -(2m+2)N-1$ 成立。定理得证。□

6. New results on derivatives of Mittag-Leffler functions

Wiman 的二变量米塔格-莱夫勒函数 $E_{\alpha,\beta}(z)$ [45] 定义为

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \qquad (\mathrm{Re}(\alpha)>0, \mathrm{Re}(\beta)>0). \tag{6.1}$$

这些函数已应用于科学和工程的诸多领域，例如随机游走、L´evy 飞行、分数阶欧姆定律、时空分数阶扩散、非线性波、电场弛豫、黏弹性系统、化学反应和统计分布。在数学中，它们出现在分数阶微积分、分数阶积分或微分方程等领域。参见 [2], [22], [32], 及其中的参考文献。

对 (6.1) 两边关于 β 求导，得到

$$\frac{\partial E_{\alpha,\beta}(z)}{\partial \beta} = -\sum_{h=0}^{\infty} \frac{\psi(\alpha h+\beta)}{\Gamma(\alpha h+\beta)} z^h.$$

最近， [2], 给出了关于二元 Mittag-Leffler 函数参数的导数的闭式求值，其中计算使用了 Mathematica。

令 Re(z) >0。由引理 [15] 的引理3.2 和 [16], 中的引理 9.1，根据 (2.19) 中的记号，我们有),

$$\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(\psi(2h+1)-\log(z))}{\Gamma(2h+1)}z^{2h}=\int_0^{\infty}\frac{t\cos(t)}{t^2+z^2}\,dt=(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})(z), \tag{6.2}$$

这给出了 $\frac{\partial E_{2,\beta}}{\partial\beta}z^2\Big|_{\beta=1}$() 的闭式求值，因为 $\sum_{h=0}^{\infty}\frac{z^{2h}}{\Gamma(2h+1)}=\cosh(z)$。

注 3。令 (6.2) 两端相等所得的恒等式，即

$$\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(\psi(2h+1)-\log(z))}{\Gamma(2h+1)}z^{2h}=(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})(z) \tag{6.3}$$

事实上，当 $|\arg(z)|<\pi$ 时也成立，这可由解析延拓得出。

Dixon 和 Ferrar [20, 式 (3.12)] 定义了函数

$$K_{/-\nu}(z)=\frac{1}{\pi}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2h}}{\Gamma(h+1)\Gamma(h+\nu+1)}\left\{2\log\left(\frac{z}{2}\right)-\psi(h+1)-\psi(h+\nu+1)\right\},$$

该函数在他们证明 Voronoï 求和公式 $\sum_{n=1}^{\infty}d(n)f(n)$ 时发挥了重要作用。对 (3.3) 作对数微分，得到 [33, 第 138 页，式 5.5。9]

$$\sum_{k=1}^{m}\psi\left(z+\frac{k-1}{m}\right)=m\left(\psi(mz)-\log(m)\right),$$

我们看到，(6.2) 最左边的表达式不过是 $-\frac{1}{2}\pi^{3/2}K_{/-\frac{1}{2}}(z)$。在下面的命题中，我们推广 (6.2)，从而对 $\frac{\partial E_{2N,\beta}}{\partial\beta}z^{2N}\Big|_{\beta=1}$() 给出一个近似闭式的求值。本命题的第一部分将有助于证明推论 7.1。

命题 6.1. 设 Re(z) >0 and $N\in\mathbb{N}$。则

(a) 当 N 为奇数时，有

$$\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(\psi(2Nh+1)-\log z)}{\Gamma(2Nh+1)}z^{2Nh}=\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right)+\frac{\pi}{2N}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(-1)^j}{\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{z^{2Nh+2j}}{(2Nh+2j)!}. \tag{6.4}$$

(b) 当 N 为偶数时，

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\left(\psi(2Nh+1)-\log z-\frac{i\pi}{2N}\right)}{\Gamma(2Nh+1)}z^{2Nh}&=\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right)\\&\quad+\frac{\pi}{2N}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(-1)^{j+\frac{j}{N}}}{\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{z^{2Nh+2j}}{(2Nh+2j)!}.\end{aligned} \tag{6.5}$$

证明. 我们先证明 (a)，即 N 为奇数的情形。注意到

$$\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\psi(2Nh+1)}{\Gamma(2Nh+1)}z^{2Nh}=\sum_{\substack{h=0\\N|h}}^{\infty}\frac{\psi(2h+1)}{\Gamma(2h+1)}z^{2h}. \tag{6.6}$$

此外，

$$\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}}e^{\frac{2\pi ikh}{N}}=\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}}e^{\frac{2\pi ikh}{N}}+\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{-1}e^{\frac{2\pi ikh}{N}}=\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}}e^{\frac{2\pi ikh}{N}}+\sum_{\ell=\frac{N+1}{2}}^{N-1}e^{\frac{2\pi i(\ell-N)h}{N}}=\sum_{k=0}^{N-1}e^{\frac{2\pi ikh}{N}},$$

因此，根据特征标的正交性（参见 [3, 第 158 页，定理 8.1]），

$$\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{\frac{2\pi ikh}{N}} = \begin{cases} N & \text{for } N \mid h \\ 0 & \text{for } N \nmid h. \end{cases} \tag{6.7}$$

因此，由 (6.6) 和 (6.7) 可得，

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{\psi(2Nh+1)}{\Gamma(2Nh+1)} z^{2Nh} = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\psi(2h+1)}{\Gamma(2h+1)} z^{2h} \sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{\frac{2\pi ikh}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\psi(2h+1)}{\Gamma(2h+1)} \left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right)^{2h}.$$

由于 $|\arg(ze^{\frac{\pi ik}{N}})| < \pi$，利用 (6.3)，可得

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{\psi(2Nh+1)}{\Gamma(2Nh+1)} z^{2Nh} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (\sinh \mathrm{Shi} - \cosh \mathrm{Chi}) \left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right) + \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \log\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right) \cosh\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right). \tag{6.8}$$

令 A 表示上述方程中的第二个有限和。$\cosh\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right)$ 的级数展开为

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \log\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right)^{2\ell}}{(2\ell)!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} \sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{\frac{2\pi ik\ell}{N}} \log\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right) \\ &= \log z \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} \sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{\frac{2\pi ik\ell}{N}} + \frac{i\pi}{N} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} \sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} k e^{\frac{2\pi ik\ell}{N}} \end{aligned} \tag{6.9}$$

与 (6.7) 类似，可推导出

$$\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} k e^{\frac{2\pi ik\ell}{N}} = \begin{cases} 0 & \text{for } N \mid \ell \\ \frac{(-1)^{\ell} N}{e^{\frac{\pi i\ell}{N}} - e^{-\frac{\pi i\ell}{N}}} & \text{for } N \nmid \ell. \end{cases} \tag{6.10}$$

因此，将 (6.7) 和 (6.10) 代入 (6.9)，可得

$$\begin{aligned} A &= N \log z \sum_{\substack{\ell=0 \\ N \mid \ell}}^{\infty} \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} + i\pi \sum_{\substack{\ell=0 \\ N \nmid \ell}}^{\infty} \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} \frac{(-1)^{\ell}}{\left(e^{\frac{\pi i\ell}{N}} - e^{-\frac{\pi i\ell}{N}}\right)} \\ &= N \log z \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^{2Nh}}{(2Nh)!} + i\pi \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^{2Nh+2j}}{(2Nh+2j)!} \frac{(-1)^{Nh+j}}{\left(e^{\frac{\pi i(Nh+j)}{N}} - e^{-\frac{\pi i(Nh+j)}{N}}\right)} \\ &= N \log z \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^{2Nh}}{(2Nh)!} + \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(-1)^{j}}{\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^{2Nh+2j}}{(2Nh+2j)!}, \end{aligned} \tag{6.11}$$

其中，在第二步中，我们在第一个求和中令 $\ell = Nh$，在第二个求和中令 $\ell = Nh + j$、$1 \le j \le N-1$。最后，将（6.11）代入（6.8），得到（6.4）。

现在证明 (b)，其中 N 为偶数。应用 [3, 第 158 页，定理 8.1], , 即 i s,

$$\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} e^{\frac{2\pi ikh}{N}} = \begin{cases} N & \text{for } N \mid h \\ 0 & \text{for } N \nmid h, \end{cases}$$

我们有

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{\psi(2Nh+1)}{\Gamma(2Nh+1)} z^{2Nh} = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\psi(2h+1)}{\Gamma(2h+1)} z^{2h} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} e^{\frac{2\pi ikh}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\psi(2h+1)}{\Gamma(2h+1)} (ze^{\frac{\pi ik}{N}})^{2h}.$$

将（6.3）代入上式，得到

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{\psi(2Nh+1)}{\Gamma(2Nh+1)} z^{2Nh} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} (\sinh \mathrm{Shi} - \cosh \mathrm{Chi}) \left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right) + \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \log\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right) \cosh\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right). \tag{6.12}$$

令 B 表示上式中的第二个有限和。由 $\cosh\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right)$ 的泰勒展开可得

$$B = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \log\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\left(ze^{\frac{\pi ik}{N}}\right)^{2\ell}}{(2\ell)!} = \log z \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} e^{\frac{2\pi ik\ell}{N}} + \frac{i\pi}{N} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} ke^{\frac{2\pi ik\ell}{N}}. \tag{6.13}$$

同样，不难看出

$$\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} ke^{\frac{2\pi ik\ell}{N}} = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{for } N \mid \ell \\ \frac{(-1)^{\ell} N}{1-e^{-\frac{2\pi i\ell}{N}}} & \text{for } N \nmid \ell. \end{cases} \tag{6.14}$$

因此，由（6.13）和（6.14）可得,

$$\begin{aligned} B &= N \log z \sum_{\substack{\ell=0 \\ N \mid \ell}}^{\infty} \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} + i\pi \left[\frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=0 \\ N \mid \ell}}^{\infty} \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{\substack{\ell=0 \\ N \nmid \ell}}^{\infty} \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} \frac{(-1)^{\ell}}{1-e^{-\frac{2\pi i\ell}{N}}} \right] \\ &= \left(N \log z + \frac{i\pi}{2}\right) \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^{2Nh}}{(2Nh)!} + i\pi \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^{2Nh+2j}}{(2Nh+2j)!} \frac{(-1)^{j}}{1-e^{-\frac{2\pi ij}{N}}} \\ &= \left(N \log z + \frac{i\pi}{2}\right) \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^{2Nh}}{(2Nh)!} + \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(-1)^{j+\frac{j}{N}}}{\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^{2Nh+2j}}{(2Nh+2j)!}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

将（6.15）代入（6.12），化简后即得（6.5）。 □

7. Special cases of Theorem 2.3 for N odd

我们从定理 2.3 的特殊情形 $a = -2Nm - N$ 开始本节。

7.1. 拉马努金公式关于 $\zeta(2m+1)$ 的一种新推广。

定理 2.5的证明。我们不加说明地使用以下事实： N 是奇正整数。在定理 2.3 中令 $a \to -2Nm - N$，其中 $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，我们得到

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{-2Nm-N}^{(N)}(n) e^{-ny} + \frac{1}{2}\zeta(2Nm+N) - \frac{1}{y}\zeta(2Nm+2N) - \frac{y^{2m+1-\frac{1}{N}}}{N} \Gamma\left(-2m-1+\frac{1}{N}\right) \zeta\left(-2m-1+\frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{2(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}} N^{\frac{-2Nm-N-1}{2}}}{y^{\frac{1}{N}-m-\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{-2Nm-N}^{(N)}(n)}{n^{-m-\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{2} K_{-m-\frac{1}{2}}^{(N)}\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}, 0\right) - \frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{1-2Nm-N}{N}} \pi^{(1-N)(-m-\frac{1}{2})-N}}{2^{N-1}\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{\frac{1}{N}-m+\frac{1}{2}}} \right. \end{aligned}$$

$$\times \lim_{a\to -2Nm-N}\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)C_{m,N}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{a}{2N},0,\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\Bigg] + \frac{y}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^k \zeta(2Nm-2kN)\zeta(2k+2). \quad (7.1)$$

令 $Z=\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}=\frac{1}{4}\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^2$。我们首先得到 ${}_{\frac{1}{2}}K^{(N)}_{-m-\frac{1}{2}}\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)$ 的一个初等表达式。为此，我们在下面的第一步中使用（2.2），然后在第二步中调用定理 2.4，从而得到

$$\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{2}}K^{(N)}_{-m-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right) &= \frac{(2\pi)^{-2m-1-2/N}}{\pi^2\sqrt{2}}\left(\frac{n}{yN^N}\right)^{-m-\frac{1}{2}-\frac{2}{N}} G^{N+1,\,1}_{1,\,2N+1}\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1+2Nm+N}{2N}\\ \langle\frac{i}{N}\rangle,\,\frac{1}{2}+\frac{1+2Nm+N}{2N};\langle 1+\frac{3}{2N}-\frac{i}{N}\rangle\end{matrix}\right| Z\right)\\
&= \frac{(2\pi)^{-2m-1-2/N}}{\pi^2\sqrt{2}}\left(\frac{n}{yN^N}\right)^{-m-\frac{1}{2}-\frac{2}{N}}\left\{\frac{N^{2Nm+2N-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-2Nm-2N}{2}\right)Z^{1+m+\frac{1}{2N}}}{\Gamma\left(Nm+N\right)}\right.\\
&\qquad\left.\times\,{}_1F_{2N}\left(\left.\begin{matrix}1\\ \langle 1+m+\frac{i-1}{2N}\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\right| Z\right)+A_{-2Nm-N,N}\left(Z\right)\right\},
\end{aligned}$$

其中，$A_{a,N}(z)$ 定义见（2.12）。

利用（3.6），我们将所得的 ${}_1F_{2N}$ in it 化简为

$$\begin{aligned}
{}_1F_{2N}\left(\left.\begin{matrix}1\\ \langle 1+m+\frac{i-1}{2N}\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\right| Z\right) &= \frac{(2N(m+1)-1)!}{(2N)^{2N(m+1)}Z^{m+1-\frac{1}{2N}}}\left\{\sum_{k=0}^{2N-1}\frac{\exp\left(2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}Z^{\frac{1}{2N}}\right)}{e^{\pi ik(2m+2-\frac{1}{N})}}\right.\\
&\qquad\left.-(2N)^{2N(m+1)}\sum_{k=1}^{m}\frac{Z^{m+1-\frac{1}{2N}-k}}{(2N)^{2Nk}(2N(m+1)-1-2Nk)!}\right\},
\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{2}}K^{(N)}_{-m-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right) &= \frac{\left(\frac{n}{yN^N}\right)^{-m-\frac{1}{2}-\frac{2}{N}}}{\pi^2\sqrt{2}(2\pi)^{2m+1+\frac{2}{N}}}\left[A_{-2Nm-N,N}\left(Z\right)+\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{N}}Z^{\frac{1}{N}}\right.\\
&\qquad\left.\times\left\{\sum_{k=0}^{2N-1}\frac{\exp\left(2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}Z^{\frac{1}{2N}}\right)}{e^{\pi ik(2m+2-\frac{1}{N})}}-\sum_{k=1}^{m}\frac{(2N)^{2N(m+1)}Z^{m+1-\frac{1}{2N}-k}}{(2N)^{2Nk}(2N(m+1)-1-2Nk)!}\right\}\right]. \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

接下来考虑前　　两个表达式，即（7.2）方括号中的前两项。利用（2.12），我们注意到

$$\begin{aligned}
&A_{-2Nm-N,N}\left(Z\right)+\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{N}}\left(Z\right)^{\frac{1}{N}}\sum_{k=0}^{2N-1}\frac{\exp\left(2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}Z^{\frac{1}{2N}}\right)}{e^{\pi ik(2m+2-\frac{1}{N})}}\\
&=\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{N}}Z^{\frac{1}{N}}\left\{-\left[\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}}-\sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{\frac{3N-1}{2}}+\sum_{k=\frac{3N-1}{2}}^{2N-1}\right]e^{\frac{\pi ik}{N}}\exp\left(2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}Z^{\frac{1}{2N}}\right)+\sum_{k=0}^{2N-1}\frac{\exp\left(2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}Z^{\frac{1}{2N}}\right)}{e^{\pi ik(2m+2-\frac{1}{N})}}\right\}\\
&=\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}}{\sqrt{N}}Z^{\frac{1}{N}}\sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{\frac{3N-1}{2}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\exp\left(2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}Z^{\frac{1}{2N}}\right).
\end{aligned}$$

将上述表达式代入（7.2），可得 that

$$\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{2}}K^{(N)}_{-m-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right) &= (-1)^{m+1}\frac{N^{Nm+\frac{N}{2}+\frac{3}{2}}Z^{\frac{1}{N}}}{\pi(2\pi)^{2m+\frac{3}{2}+\frac{2}{N}}(n/y)^{m+\frac{1}{2}+\frac{2}{N}}}\sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{\frac{3N-1}{2}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\exp\left(2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}Z^{\frac{1}{2N}}\right)\\
&\quad+(-1)^m\frac{2^{2Nm+2N}N^{3Nm+\frac{5N}{2}+\frac{3}{2}}Z^{\frac{1}{N}+m+1-\frac{1}{2N}}}{(2\pi)^{2m+\frac{5}{2}+\frac{2}{N}}(n/y)^{m+\frac{1}{2}+\frac{2}{N}}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(\frac{y^2}{(2\pi)^{2N+2}n^2}\right)^k}{(2Nm-2Nk+2N-1)!}. \qquad (7.3)
\end{aligned}$$

现在令 L 表示右端 (7.1) 中方括号内第二个表达式的极限。我们计算这个极限。利用以下事实：$\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)=(-1)^{\frac{N-1}{2}}\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)$，以及第一步中所用的 (2.7)和 (3.3)，并利用以下事实：$\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)=(-1)^{k+\frac{N+1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}(N+a+1+2Nk)\right)$，以及第二步中所用的事实，我们有

$$\begin{aligned}L&=(-1)^{\frac{N+1}{2}}(2\pi)^{N-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{m}(2N)^{2Nm-2Nk-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{-2k}\lim_{a\to-2Nm-N}\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\Gamma(N+a+1+2Nk)\\&=(2\pi)^{N-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{(2N)^{2Nk-2Nm+\frac{1}{2}}}\left(\frac{2\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{-2k}\\&\quad\times\lim_{N+a+1+2Nk\to-(2\ell+1)}\cos\left(\frac{\pi}{2}(N+a+1+2Nk)\right)\Gamma(N+a+1+2Nk)\end{aligned}$$

因为 $k=m$ 项消失。这里，$\ell=Nm-Nk-1$。接下来，我们在上述方程中用 $N+a+1+2Nk$ 替换 a，并将 k 替换为 $k-1$，从而得到

$$L=(-1)^m(2\pi)^{N-\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)(2N)^{2Nm+2N-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^2\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(\frac{y^2}{(2\pi)^{2N+2}n^2}\right)^k}{(2Nm-2Nk+2N-1)!},$$

由此，经过化简，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{a\to-2Nm-N}\frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}}\pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}}C_{m,N}\left(\frac{1}{2},\frac{a}{2N},0,\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\\&=(-1)^m\pi(2\pi)^{2Nm+2N-\frac{1}{N}-\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{y}\right)^{m-\frac{1}{N}+\frac{3}{2}}N^{Nm+\frac{N}{2}+\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(\frac{y^2}{(2\pi)^{2N+2}n^2}\right)^k}{(2Nm-2Nk+2N-1)!}.\end{aligned}\tag{7.4}$$

注意，(7.3)中的第二个表达式与(7.4)中的表达式完全抵消。因此，(7.1)右端方括号内的表达式在极限下化简为

$$\begin{aligned}&\lim_{a\to-2Nm-N}\left[\tfrac{1}{2}K^{(N)}_{\frac{a}{2N}}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)-\frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}}\pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}}C_{m,N}\left(\frac{1}{2},\frac{a}{2N},0,\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\right]\\&=(-1)^{m+1}\frac{N^{Nm+\frac{N}{2}+\frac{3}{2}}}{\pi(2\pi)^{2m+\frac{3}{2}+\frac{2}{N}}(n/y)^{m+\frac{1}{2}+\frac{2}{N}}}\left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)^{\frac{1}{N}}\sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{\frac{3N-1}{2}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\exp\left(2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}\left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)^{\frac{1}{2N}}\right)\\&=(-1)^{m+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4\pi^2n}{y}\right)^{-m-\frac{1}{2}}N^{Nm+\frac{N}{2}-\frac{1}{2}}\sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{\frac{3N-1}{2}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\exp\left(2\pi e^{\frac{\pi ik}{N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right).\end{aligned}$$

利用上述方程以及（1.10）中 $S_a^{(N)}(n)$的定义，并交换极限与求和的顺序，这是合理的，因为对于任意 $\epsilon>0$，右端（2.6）中级数的被加项为 $\mathcal{O}\left(n^{\max\left(-\frac{\mathrm{Re}(a)}{2N},\,\mathrm{Re}\left(\frac{a}{2N}\right)+\frac{1}{N}-1\right)-2m-3-\frac{1}{N}-\frac{\mathrm{Re}(a)}{2N}+\epsilon}\right)$，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{2(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}}N^{\frac{-2Nm-N-1}{2}}}{y^{\frac{1}{N}-m-\frac{1}{2}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{(N)}_{-2Nm-N}(n)}{n^{-m-\frac{1}{2}}}\left[\tfrac{1}{2}K^{(N)}_{-m-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)-\frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{1-2Nm-N}{2N}}\pi^{(1-N)(-m-\frac{1}{2})-N}}{2^{N-1}\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{\frac{1}{N}-m+\frac{1}{2}}}\right.\\&\left.\times\lim_{a\to-2Nm-N}\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)C_{m,N}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{a}{2N},0,\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{N}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m-\frac{1}{N}+1}\sum_{d_1,d_2=1}^{\infty} d_2^{-2m-2+\frac{1}{N}}\sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{k=\frac{3N-1}{2}} e^{\frac{\pi ik}{N}}\exp\left\{2\pi d_1 e^{\frac{\pi ik}{N}}\left(\frac{2\pi d_2}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}$$

$$= \frac{(-1)^{m}}{N}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m-\frac{1}{N}+1}\sum_{d_2=1}^{\infty} d_2^{-2m-2+\frac{1}{N}}\sum_{j=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{\frac{\pi ij}{N}}\sum_{d_1=1}^{\infty}\left\{\exp\left(-2\pi e^{\frac{\pi ij}{N}}\left(\frac{2\pi d_2}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right)\right\}^{d_1}$$

$$= \frac{(-1)^{m}}{N}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m-\frac{1}{N}+1}\sum_{j=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{\frac{\pi ij}{N}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2m-2+\frac{1}{N}}}{\exp\left\{2\pi e^{\frac{\pi ij}{N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}-1}, \tag{7.5}$$

其中，在倒数第二步中，我们将 k 替换为 $j+N$；在最后一步中，由于 $-\frac{(N-1)}{2} < j < \frac{(N-1)}{2}$ 意味着 $\mathrm{Re}\left(2\pi d_1 e^{\frac{\pi ij}{N}}\left(\frac{2\pi d_2}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right) = 2\pi d_1 \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)\left(\frac{2\pi d_2}{y}\right)^{\frac{1}{N}} > 0$，因此使用几何级数公式对内层级数求和。最后，在 (2.6) 右端的最后一个表达式中，将 k 替换为 $k-1$，

$$\frac{y}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\zeta(2Nm-2Nk)\zeta(2k+2)\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{-2k} = -\frac{2}{y}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k\zeta(2N(m-k+1))\zeta(2k)\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{-2k}. \tag{7.6}$$

由 (7.1)、(7.5) 和 (7.6) 可得，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-2Nm-N}^{(N)}(n)e^{-ny} + \frac{1}{2}\zeta(2Nm+N) - \frac{1}{y}\zeta(2Nm+2N) - \frac{y^{2m+1-\frac{1}{N}}}{N}\Gamma\left(-2m-1+\frac{1}{N}\right)\zeta\left(-2m-1+\frac{1}{N}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{N}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m-\frac{1}{N}+1}\sum_{j=\frac{-(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{\frac{\pi ij}{N}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2m-2+\frac{1}{N}}}{\exp\left\{2\pi e^{\frac{\pi ij}{N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}-1}$$

$$-\frac{2}{y}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k\zeta(2N(m-k+1))\zeta(2k)\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{-2k}.$$

利用 (3.5) 计算上述方程左端的极限，并将项 $\frac{1}{y}\zeta(2Nm+2N)$ 作为右端有限和中的第 $k=0$ 项纳入，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-2Nm-N}^{(N)}(n)e^{-ny} + \frac{1}{2}\zeta(2Nm+N)$$

$$= \frac{(-1)^{m}}{2N\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m+1-\frac{1}{N}}\zeta\left(2m+2-\frac{1}{N}\right) + \frac{(-1)^{m}}{N}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m-\frac{1}{N}+1}\sum_{j=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{\frac{\pi ij}{N}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2m-2+\frac{1}{N}}}{\exp\left\{2\pi e^{\frac{\pi ij}{N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}-1}$$

$$-\frac{2}{y}\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\zeta(2N(m-k+1))\zeta(2k)\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{-2k}.$$

最后，令 $\alpha = 2^{-N}y$ 且 $\beta = 2\pi^{1+\frac{1}{N}}y^{-\frac{1}{N}}$ 使得 $\alpha\beta^N = \pi^{N+1}$，将上述等式两边乘以 $\alpha^{-\left(\frac{2Nm+N-1}{N+1}\right)}$，并使用欧拉公式 (1.2) 和 (1.5)，即可得到 (2.14)。证明完毕。□

注 4. 通过类似的方法令 $a \to -2Nm-1$，即可由定理 2.3 得到恒等式 (1.4)。

7.2. 一个涉及扩展高阶 Herglotz 函数的恒等式。最近，第二作者 Gupta 和 Kumar [14] 引入并研究了扩展高阶 Herglotz 函数

$$\mathscr{F}_{k,N}(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n^N x) - \log(n^N x)}{n^k} \qquad (x \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]), \tag{7.7}$$

其中 k 和 N 是满足 $k+N>1$的正实数。当 $k=N=1$时，这个函数称为 Herglotz 函数 [47]，有时也称为 Herglotz-Zagier 函数，在 Zagier 关于实二次域的 Kronecker 极限公式的显式版本中发挥着重要作用。Vlasenko 和 Zagier [40] 也研究了 (7.7) 的情形 $N=1$，并且它在高阶 Kronecker“极限”公式中很有用。

下文推论 7.1 中的恒等式本质上涉及扩展高阶 Herglotz 函数。该结果最初是在 [14, 定理 3.11] 中，通过对$\zeta(2m+1)$ [15, 定理 2.4]中的拉马努金公式的双参数推广求导而得到的。尽管通过求导可以相当直接地得到推论 7.1 的结果，但必须指出，[15] 本身的定理 2.4 并不容易推导，其证明需要不少技术性结果。

接下来，我们将推论 7.1 的结果作为定理 2.3 的特殊情形推导出来。这体现了定理 2.3 的强大之处：定理 2.5、推论 7.1、定理 2.7 等性质各异的结果，都可以纳入同一框架。

推论 7.1. 设 N 为奇正整数。对于 $\alpha\beta^N=\pi^{N+1}$，若 $\mathrm{Re}(\alpha)>0$、$\mathrm{Re}(\beta)>0$，且 $m\geq 1$,

$$\alpha^{-\left(\frac{2Nm}{N+1}-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\zeta(2Nm+1-N)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2Nm-1+N}}{e^{(2n)^N\alpha}-1}\right)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{B_{2j}\ \zeta(2Nm+1-2Nj)}{(2j)!}2^{N(2j-1)}\alpha^{2j-\frac{2Nm}{N+1}-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2^{2m(N-1)}}{N\pi^{\frac{N+1}{2}}}(-1)^{m+1}\beta^{-\left(\frac{2Nm}{N+1}-\frac{N}{2}\right)}\left[\frac{N\gamma}{2^{N-1}}\zeta(2m)+\frac{1}{2^N}\sum_{j=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{(N-1)}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\left(\psi\left(\tfrac{i\beta}{2\pi}(2n)^{1/N}e^{\frac{i\pi j}{N}}\right)+\psi\left(-\tfrac{i\beta}{2\pi}(2n)^{1/N}e^{\frac{i\pi j}{N}}\right)\right)\right].$$

证明。令 $a\to -2Nm-1+N$ 满足定理 2.3，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^{(N)}_{-2Nm-1+N}(n)e^{-ny}+\frac{1}{2}\zeta(2Nm+1-N)-\frac{1}{y}\zeta(2Nm+1)$$

$$=\lim_{a\to -2Nm-1+N}\frac{2(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}}N^{\frac{a-1}{2}}}{y^{\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_a^{(N)}(n)}{n^{\frac{a}{2N}}}\left[\tfrac{1}{2}K^{(N)}_{\frac{a}{2N}}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)-\frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}}\pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}}\right.$$

$$\left.\times C_{m,N}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{a}{2N},0,\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\right]+\lim_{a\to -2Nm-1+N}\left(\frac{1}{N}\frac{\Gamma\left(\frac{1+a}{N}\right)\zeta\left(\frac{1+a}{N}\right)}{y^{\frac{1+a}{N}}}+\frac{y}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^k\zeta(-2kN-N-a)\zeta(2k+2)\right). \tag{7.8}$$

现在我们化简 (7.8) 右端方括号中的表达式。利用定理 2.4，并将 $k=m$ 项与包含 $C_{m,N}$ 的表达式分开，其中 $C_{m,N}$ 由 (2.8) 给出，我们得到

$$\tfrac{1}{2}K^{(N)}_{\frac{a}{2N}}\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)-\frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}}\pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}}C_{m,N}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{a}{2N},0,\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)$$

$$=R(a)+\frac{(y/n)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}+2m}N^{\frac{1-a}{2}}}{\pi(2\pi)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{N}+a+N+2m(N+1)}}\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)\Gamma(N+2Nm+a+1), \tag{7.9}$$

其中

$R(a):=R_{m,N}(a,n,y)$

$$:=\frac{(2\pi)^{\frac{a-2}{N}}}{\pi^2\sqrt{2}}\frac{(n/y)^{\frac{a}{2N}-\frac{2}{N}}}{N^{\frac{a}{2}-2}}\left\{\frac{N^{N-a-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-N+a}{2}\right)\left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}}}{\Gamma\left(\frac{N-a}{2}\right)}{}_1F_{2N}\left(\begin{matrix}1\\ \left\langle\frac{1}{2}-\frac{a+1}{2N}+\frac{i}{2N}\right\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\middle|-\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)\right.$$

$$\left.+A_{a,N}\left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)\right\}+\frac{(y/n)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}N^{\frac{1-a}{2}}}{\pi(2\pi)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{N}+a+N}}\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)\sum_{k=0}^{m-1}\Gamma(N+2Nk+a+1)\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{-2k}, \tag{7.10}$$

且 $A_{a,\ N}(z)$ 在 (2.12) 中定义。

在 $R(a)$ 定义式的最后一个表达式中，将 k 替换为 $k-1$，然后利用 $\Gamma(-N+2Nk+a+1)=\frac{\pi}{\Gamma(N-a-2Nk)\sin(\pi a)}$ ~~(由 (3.2) 可得) 这~~一事实，并应用 $\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)=(-1)^{\frac{N-1}{2}}\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)$，可知

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{y}{n}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}N^{\frac{1-a}{2}}}{\pi(2\pi)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{N}+a+N}}\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)\sum_{k=0}^{m-1}\Gamma(N+2Nk+a+1)\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{-2k}\\&=\frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}\left(\frac{y}{n}\right)^{-1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}N^{\frac{1-a}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}+a-N}\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{-2k}}{\Gamma(N-a-2Nk)}.\end{aligned}\tag{7.11}$$

因此，由 (7.10)、(7.11) 以及这一事实可得

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-N+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-a}{2}\right)}=\frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}\sqrt{\pi}2^{N-a-1}}{\Gamma(N-a)\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)},\tag{7.12}$$

其结果为 (4.8)，并利用 (2.12) 和(2.10) 以及 $b=0$，我们得到，在 $Z=\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}$ 的条件下，

$$\begin{aligned}R(a)=&\frac{\sqrt{N}(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{2\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\left(\tfrac{4\pi^2n}{yN^N}\right)^{\frac{a}{2N}}\Bigg\{\left(\frac{y}{n}\right)^{-1+\frac{1}{N}}\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{N}+N}}{\Gamma(N-a)}\left(\frac{y}{(2\pi)^{N+1}n}\right)^{\frac{a}{N}}{}_1F_{2N}\left(\begin{matrix}1\\\left\langle\frac{1}{2}-\frac{a+1}{2N}+\frac{i}{2N}\right\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\middle|\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)\\&-\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}N}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}}\mathscr{E}_{a,N,Z}(k,0)+\sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{\frac{3N-1}{2}}e^{-\pi ia}\mathscr{E}_{a,N,Z}(k,0)+\sum_{k=\frac{3N+1}{2}}^{2N-1}e^{-2\pi ia}\mathscr{E}_{a,N,Z}(k,0)\right]\\&+\frac{\left(\frac{y}{n}\right)^{-1+\frac{1}{N}}}{(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}-N}}\left(\frac{y}{(2\pi)^{N+1}n}\right)^{\frac{a}{N}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{-2k}}{\Gamma(N-a-2Nk)}\Bigg\}.\end{aligned}\tag{7.13}$$

现在我们证明，对于 $a=-2Nm-1+N$，上述表达式的形式为 $_00$。显然，分母中的正弦函数为零，因为 $\sin\left(\frac{\pi}{2}(-2Nm-1+N)\right)=0$。接下来的任务是证明，对于 $a=-2Nm-1+N$，(7.13) 中花括号内的表达式等于零。为此，利用 (3.6)，我们看到

$$\begin{aligned}&\frac{(2\pi)^{2Nm+\frac{1}{2}}}{\Gamma(2Nm+1)}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{2m}{}_1F_{2N}\left(\begin{matrix}1\\\left\langle m+\frac{i}{2N}\right\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\middle|\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)\\&=\frac{(2\pi)^{2Nm+\frac{1}{2}}}{(2Nm)!}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{2m}\Bigg\{\frac{(2Nm)!}{(2N)^{2Nm+1}\left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)^m}\Bigg[\sum_{k=0}^{2N-1}\exp\left\{2Ne^{\frac{\pi ik}{N}}\left(\frac{2\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{\frac{1}{N}}\right\}\\&\quad-(2N)^{2Nm+1}\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)^{m-k}}{(2N)^{2Nk}(2Nm-2Nk)!}\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned}$$

因此，利用上面的等式可知，对于 $a=-2Nm-1+N$，(7.13) 右端花括号中的第一项恰好与其中另外两项完全抵消。因此，为了求出 $\lim_{a\to-2Nm-1+N}R(a)$，我们需要使用洛必达法则。不过，在此之前，我们进一步化简 (7.13) 中花括号内的表达式。结合 ${}_1F_{2N}$ 的级数定义与 (3.3)，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{y}{n}\right)^{-1+\frac{1}{N}}}{(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}-N}}\left(\frac{y}{(2\pi)^{N+1}n}\right)^{\frac{a}{N}}\left[\frac{1}{\Gamma(N-a)}{}_1F_{2N}\left(\begin{matrix}1\\\left\langle\frac{1}{2}-\frac{a+1}{2N}+\frac{i}{2N}\right\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\middle|\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{-2k}}{\Gamma(N-a-2Nk)}\right]\\&=\frac{\left(\frac{y}{n}\right)^{-1+\frac{1}{N}}}{(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}-N}}\left(\frac{y}{(2\pi)^{N+1}n}\right)^{\frac{a}{N}}\left[\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(N-a+2Nh)}\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{2h}+\sum_{h=-m}^{-1}\frac{\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{2h}}{\Gamma(N-a+2Nh)}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\frac{y}{n}\right)^{-1+\frac{1}{N}}}{(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}-N}} \left(\frac{y}{(2\pi)^{N+1}n}\right)^{\frac{a}{N}+2m} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{2h}}{\Gamma(N-2Nm-a+2Nh)}$$
$$=: R_1^*(a). \tag{7.14}$$

此外，利用 (2.12)、(2.11) 和 (4.5)，可以将 (7.13) 中花括号内的剩余表达式（不含前面的负号）改写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{2}(-1)^{\frac{N+1}{2}}}{\sqrt{N}} \left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)^{-\frac{1}{N}} \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) A_{a,N}\left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{2}(-1)^{\frac{N+1}{2}}}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \frac{(2N)^{2j-2}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{1/2}}{\Gamma(2j-1)} S^*(a) \left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)^{\frac{j-1}{N}} {}_1F_{2N}\left(\left.\begin{matrix}1\\ \left\langle \frac{j-1}{N}+\frac{i}{2N}\right\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\right| \frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right) \\
&=: R_2^*(a), \text{say},
\end{aligned} \tag{7.15}$$

其中

$$S^*(a) := S_{j,N}^*(a) := \frac{(-1)^j \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}{\cos\left(\pi\left(\frac{j}{N}+\frac{a-1}{2N}\right)\right)}. \tag{7.16}$$

因此，由（7.13）、（7.14）和（7.15），

$$R(a) = \frac{1}{2}\sqrt{N}(-1)^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{4\pi^2 n}{yN^N}\right)^{\frac{a}{2N}} \frac{R_1^*(a) - R_2^*(a)}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \tag{7.17}$$

首先,

$$\frac{d}{da}R_1^*(a) = \frac{\left(\frac{y}{n}\right)^{-1+\frac{1}{N}}}{(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}-N}} \left(\frac{y}{(2\pi)^{N+1}n}\right)^{2m+\frac{a}{N}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\psi(N-2Nm-a+2Nh) - \log\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{1/N}}{\Gamma(N-2Nm-a+2Nh)} \left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{2h}.$$

应用命题 6.1，可得

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{da}R_1^*(a)\right|_{a=-2Nm-1+N} &= \frac{\sqrt{2\pi}}{N} \sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (\sinh \mathrm{Shi} - \cosh \mathrm{Chi}) \left(2\pi\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}} e^{\frac{\pi i k}{N}}\right) \\
&\quad + \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{N\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(-1)^j}{\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\left(2\pi\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right)^{2Nh+2j}}{(2Nh+2j)!}.
\end{aligned} \tag{7.18}$$

接下来，我们化简（7.16）中定义的 $S^*(a)$。由（4.1）可得

$$S^*(a) = \frac{\cos\left(N\pi\left(\frac{j}{N}+\frac{a-1}{2N}\right)\right)}{\cos\left(\pi\left(\frac{j}{N}+\frac{a-1}{2N}\right)\right)} = (-1)^{\frac{N-1}{2}} \sum_{\ell=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^{\ell} \exp\left(-\frac{2\pi i \ell j}{N} - \frac{\pi i \ell (a-1)}{N}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{da}S^*(a)\right|_{a=-2Nm-1+N} &= \frac{\pi i}{N}(-1)^{\frac{N+1}{2}} \sum_{l=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} l e^{-\frac{2\pi i l(j-1)}{N}} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{for } N \mid (j-1), \\ i\pi \frac{(-1)^{1-j+\frac{N+1}{2}}}{\left(e^{\frac{\pi i(1-j)}{N}} - e^{-\frac{\pi i(1-j)}{N}}\right)} & \text{for } N \nmid (j-1), \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.19}$$

其中在 th 在最后一步中，我们使用了 (6.10)。 ${}_1F_{2N}$ 的级数定义结合 (3.3) 得出

$$ {}_1F_{2N}\left(\left.\begin{matrix}1\\ \left\langle\frac{j-1}{N}+\frac{i}{2N}\right\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\right|\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2j-1\right)}{\Gamma\left(2j-1+2Nh\right)}\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{2h}. $$

因此，由（7.15）、（7.19）及上述恒等式，

$$ \begin{aligned}\left.\frac{d}{da}R_2^*(a)\right|_{a=-2Nm-1+N}&=\frac{\pi^{3/2}i}{2\sqrt{2}N^3}\sum_{j=2}^{N}\frac{(-1)^j(2N)^{2j}}{\left(e^{\frac{\pi i(1-j)}{N}}-e^{-\frac{\pi i(1-j)}{N}}\right)}\left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)^{\frac{j-1}{N}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma\left(2j-1+2Nh\right)}\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{2h}\\&=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{N\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(-1)^j}{\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)}\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{\frac{2j}{N}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma\left(2j+1+2Nh\right)}\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{2h}.\end{aligned}\tag{7.20} $$

将（7.18）和（7.20）代入（7.17）后，可以看出，对 j 的求和项完全抵消，因此

$$ \lim_{a\to-2Nm-1+N}R(a)=\frac{\sqrt{2}(-1)^m}{\sqrt{N\pi}}\left(\frac{4\pi^2n}{yN^N}\right)^{-m-\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}}\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\left(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi}\right)\left(2\pi\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right).\tag{7.21} $$

因此，由（7.9）、（7.21）以及交换极限与求和的次序（这是合理的，因为对于任意 $\epsilon>0$，下列级数的被求和项为 $\mathcal{O}\left(n^{\max\left(-\frac{\mathrm{Re}(a)}{2N},\mathrm{Re}\left(\frac{a}{2N}+\frac{1}{N}-1\right)-\sqrt{2m}-3-\frac{1}{N}-\right)\mathrm{Re}\left(\frac{a}{2N}+\epsilon\right)}\right)$，我们得到

$$ \begin{aligned}&\lim_{a\to-2Nm-1+N}\frac{2(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}}N^{\frac{a-1}{2}}}{y^{\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_a^{(N)}(n)}{n^{\frac{a}{2N}}}\left[\frac{1}{2}K_{\frac{a}{2N}}^{(N)}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)-\frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}}\pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}}\right.\\&\left.\times C_{m,N}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{a}{2N},0,\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\right]\\&=\frac{4(-1)^m}{Ny}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m}\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{k=\frac{N-1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}S_{-2Nm-1+N}^{(N)}(n)\left(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi}\right)\left(2\pi\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)\\&\quad+\frac{(-1)^my^{2m+1}\Gamma(2N)}{\pi^2(2\pi)^{2(N+m)}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_{-2Nm-1+N}^{(N)}(n)}{n^2}.\end{aligned}\tag{7.22} $$

利用(6.2)中的第二个等式得到下式的第一步，并在第二步使用(1.10)中 $S_a^{(N)}(n)$的定义，我们看到

$$ \begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}S_{-2Nm-1+N}^{(N)}(n)\left(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi}\right)\left(2\pi\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}S_{-2Nm-1+N}^{(N)}(n)\int_0^{\infty}\frac{t\cos(t)\,dt}{t^2+\left(2\pi\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{i\pi k}{N}}\right)^2}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{t\cos(t)\,dt}{t^2+\ell^2\left(2\pi\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{i\pi k}{N}}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\left[\log\left(\left(\tfrac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)-\frac{1}{2}\left\{\psi\left(i\left(\tfrac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)+\psi\left(-i\left(\tfrac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)\right\}\right],\end{aligned}\tag{7.23} $$

其中，在最后一步中，我们使用了 [15, 定理 2.2]。将 (7.23) 和 (5.5) 与 $s=2$ 代入 (7.22)，并利用 $\zeta(s)$ 的函数方程以及当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\log(n)n^{-s}=-\zeta'(s)$ 这一事实，我们推得热久久精品

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to -2Nm-1+N}\frac{2(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}}N^{\frac{a-1}{2}}}{y^{\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_a^{(N)}(n)}{n^{\frac{a}{2N}}}\Bigg[\tfrac{1}{2}K_{\frac{a}{2N}}^{(N)}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)-\frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}}\pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}}\\
&\quad\times C_{m,N}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{a}{2N},0,\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\Bigg]\\
&=\frac{(-1)^m y}{\pi^2(2\pi)^{2N}}\Big(\frac{y}{2\pi}\Big)^{2m}\Gamma(2N)\zeta(2N)\zeta(2m+2)\\
&\quad+\frac{2(-1)^m}{Ny}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m}\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{k=\frac{N-1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\left[\log\left(\left(\tfrac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)-\frac{1}{2}\left\{\psi\left(i\left(\tfrac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)+\psi\left(-i\left(\tfrac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)\right\}\right]\\
&=-\frac{(-1)^m y}{2\pi^2}\Big(\frac{y}{2\pi}\Big)^{2m}\zeta(1-2N)\zeta(2m+2)+\frac{2(-1)^m}{Ny}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m}\left(-\zeta'(2m)+\log\left(\frac{2\pi}{y}\right)\zeta(2m)\right)\\
&\quad-\frac{(-1)^m}{Ny}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m}\sum_{j=-\frac{(N-1)}{2}}^{j=\frac{N-1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi\left(i\left(\tfrac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ij}{N}}\right)+\psi\left(-i\left(\tfrac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ij}{N}}\right)\right\}.
\end{aligned}\tag{7.24}$$

现在我们计算（7.8）右端的第二个极限，即

$$L_1:=\lim_{a\to -2Nm-1+N}\left(\frac{1}{N}\frac{\Gamma\left(\frac{1+a}{N}\right)\zeta\left(\frac{1+a}{N}\right)}{y^{\frac{1+a}{N}}}+\frac{y}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^k\zeta(-2kN-N-a)\zeta(2k+2)\right).$$

注意，在有限和中，对于 $a=-2Nm-1+N$ 来说，唯一有问题的项是 $k=m-1$。因此，

$$L_1=\frac{y}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{m-2}\left(-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^k\zeta(-2kN+2Nm+1-2N)\zeta(2k+2)+(-1)^m\frac{y}{2\pi^2}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m}\zeta(1-2N)\zeta(2m+2)+L^*,\tag{7.25}$$

其中

$$\begin{aligned}
L^*&:=\lim_{a\to -2Nm-1+N}\left(\frac{1}{N}\frac{\Gamma\left(\frac{1+a}{N}\right)\zeta\left(\frac{1+a}{N}\right)}{y^{\frac{1+a}{N}}}+\frac{y}{2\pi^2}\left(-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^{m-1}\zeta(-2Nm+N-a)\zeta(2m+2)\right)\\
&=\lim_{s\to 1-2m}\left(\frac{1}{N}\frac{\Gamma(s)\zeta(s)}{y^s}-\frac{2}{y}\left(\frac{-y^2}{4\pi^2}\right)^m\zeta(-2Nm+N+1-Ns)\zeta(2m)\right).
\end{aligned}$$

利用 $s=1-2m$ 附近的幂级数展开，我们注意到

$$\begin{aligned}
\zeta(-2Nm+N+1-Ns)&=\frac{1}{-2Nm+N-Ns}+\gamma+O(|-2Nm+N-Ns|)\\
\Gamma(s)&=\frac{-1}{(2m-1)!\,(s+2m-1)}-\frac{\psi(2m)}{(2m-1)!}+O\left(|s+2m-1|\right),\\
\zeta(s)&=\zeta(1-2m)+\zeta'(1-2m)(s+2m-1)+O(|s+2m-1|^2),\\
y^{-s}&=y^{2m-1}\left(1-(s+2m-1)\log y+O_y(|s+2m-1|^2)\right),
\end{aligned}$$

当 $s\to 1-2m$ 时，上述极限可求得为

$$\begin{aligned}
L^*&=\frac{y^{2m-1}}{N(2m)!}\left\{2m\zeta(1-2m)\left(\log y-\psi(2m)\right)-2m\zeta'(1-2m)+N\gamma B_{2m}\right\}\\
&=\frac{y^{2m-1}B_{2m}}{N\,(2m)!}\log\left(\frac{2\pi}{y}\right)+\frac{2\,(-1)^m\,\zeta'\,(2m)\,y^{2m-1}}{N\,(2\pi)^{2m}}+\frac{y^{2m-1}\gamma B_{2m}}{(2m)!},
\end{aligned}\tag{7.26}$$

其中我们反复使用了欧拉公式 (1.2) 以及 $\zeta(1-2m) = -B_{2m}/(2m)$ 这一事实。因此，在 (7.25) 中用 $k-1$ 替换k，并将所得结果与 (7.26) 结合，可推得

$$L_1 = -\frac{2}{y}\sum_{k=1}^{m-1}\left(-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^k \zeta(-2kN+2Nm+1)\zeta(2k) + (-1)^m \frac{y}{2\pi^2}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m}\zeta(1-2N)\zeta(2m+2)$$
$$+ \frac{y^{2m-1}B_{2m}}{N\,(2m)!}\log\left(\frac{2\pi}{y}\right) + \frac{2\,(-1)^m\,\zeta'\,(2m)\,y^{2m-1}}{N\,(2\pi)^{2m}} + \frac{y^{2m-1}\gamma B_{2m}}{(2m)!}. \tag{7.27}$$

现在将 (7.24) 和 (7.27) 代入 (7.8)，然后把左边关于 k 的有限和移到另一边，将项 $-\frac{1}{y}\zeta(2Nm+1)$ 作为其 $k=0$ 项进行归纳，并重新整理，得到

$$\frac{1}{2}\zeta(2Nm+1-N) + \sum_{n=1}^{\infty}\sigma^{(N)}_{-2Nm-1+N}(n)e^{-ny} + \frac{2}{y}\sum_{k=0}^{m-1}\left(-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^k \zeta(-2kN+2Nm+1)\zeta(2k)$$
$$= \frac{y^{2m-1}\gamma B_{2m}}{(2m)!} - \frac{(-1)^m}{Ny}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m}\sum_{j=-\frac{(N-1)}{2}}^{j=\frac{N-1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi\left(i\left(\tfrac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi i j}{N}}\right) + \psi\left(-i\left(\tfrac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi i j}{N}}\right)\right\}.$$

最后令 $\alpha = 2^{-N}y$ 和 $\beta = 2\pi^{1+\frac{1}{N}}y^{-\frac{1}{N}}$。将上式两边乘以 $\alpha^{-}(\frac{2Nm-1}{N+1}-\frac{1}{2})$，应用欧拉公式 (1.2) 和 (1.5)，并化简，最终得到 (7.1)。□

7.3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^{(N)}_{2Nm-1+N}(n)e^{-ny}$ 的一种变换。这里我们首先得到定理 2.1 中一般变换在 $a=2Nm-1+N$ 情形下的特殊情形。然后，我们讨论这一特殊情形本身的一个推论，该推论有助于求出 (2.17) 中定义的含有"n^N 的 n^{2N-1} 个副本"的幂分拆生成函数 $q\to 1^-$ 的渐近估计。

定理 2.7 的证明。 设 $z=\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}$。在定理 2.1 中令 $a\to 2Nm-1+N$ 取极限，我们得 et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^{(N)}_{2Nm-1+N}(n)e^{-ny} - \frac{1}{y}\zeta(1-2Nm) - \frac{\Gamma(2m+1)\zeta(2m+1)}{Ny^{2m+1}}$$
$$= \frac{N^{3/2}}{\pi^{5/2}}\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{2m+1-\frac{2}{N}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{(N)}_{2Nm-1+N}(n)}{n^{2/N}}\lim_{a\to 2Nm-1+N}G^{N+1,\,1}_{1,\,2N+1}\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}\\ \frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N},\langle\frac{i}{N}\rangle;\langle 1+\frac{3}{2N}-\frac{i}{N}\rangle\end{matrix}\middle|\frac{z^2}{4}\right). \tag{7.28}$$

我们计算右侧的极限—— 边 (7.28)。利用 (4.5)、${}_1F_{2N}$ 的级数定义以及 (7.12)，我们有 e

$$G^{N+1,\,1}_{1,\,2N+1}\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}\\ \frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N},\langle\frac{i}{N}\rangle;\langle 1+\frac{3}{2N}-\frac{i}{N}\rangle\end{matrix}\middle|\frac{z^2}{4}\right) = T_1^* + T_2^*, \tag{7.29}$$

其中

$$T_1^* := T_1^*(z,a,N) := \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}\sqrt{\pi N}(2N)^{N-a-1}}{\Gamma(N-a)\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{2N}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2N}+\frac{i-1}{2N}\right)}{\prod_{i=1}^{2N}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2N}+h+\frac{i-1}{2N}\right)}\left(\frac{z^2}{4}\right)^h$$
$$+\frac{\sqrt{\pi/N}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{1/N}}{\cos\left(\frac{\pi(a+1)}{2N}\right)}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{2N}\Gamma\left(\frac{1}{2N}+\frac{i-1}{2N}\right)}{\prod_{i=1}^{2N}\Gamma\left(\frac{1}{2N}+h+\frac{i-1}{2N}\right)}\left(\frac{z^2}{4}\right)^h,$$

$$T_2^* := T_2^*(z,a,N) := \sum_{j=2}^{N}\frac{(-1)^{j-1}(2N)^{2j-2}(\pi/N)^{1/2}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{j/N}}{\Gamma(2j-1)\cos\pi\left(\frac{j}{N}+\frac{a-1}{2N}\right)}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{2N}\Gamma\left(\frac{2j-1}{2N}+\frac{i-1}{2N}\right)}{\prod_{i=1}^{2N}\Gamma\left(\frac{2j-1}{2N}+h+\frac{i-1}{2N}\right)}\left(\frac{z^2}{4}\right)^h.$$

利用高斯乘法公式 (3.3) 以及 $\cos\left(\frac{\pi(a+1)}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)$ 这一事实，我们得到

$$T_1^* = \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}\sqrt{\pi N}(2N)^{N-a-1}}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}}\left[\sum_{h=0}^{m-1}+\sum_{h=m}^{\infty}\right]\frac{(2N)^{2Nh}}{\Gamma\left(N-a+2Nh\right)}\left(\frac{z^2}{4}\right)^h$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{\sqrt{\pi/N}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{1/N}}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \frac{\cos\left(\frac{\pi(a+1)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi(a+1)}{2N}\right)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2N)^{2Nh}}{\Gamma\left(1+2Nh\right)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^h. \\
&= (-1)^{\frac{N-1}{2}} \sqrt{\pi N} (2N)^{N-a-1} \left(\frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}} \sum_{h=0}^{m-1} \frac{(2N)^{2Nh}\left(\frac{z^2}{4}\right)^h}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)\Gamma\left(N-a+2Nh\right)} \\
&+ \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}} \sqrt{\pi N} (2N)^{2Nm+N-a-1}}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^{\frac{2Nm+N-a+1}{2N}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2N)^{2Nh}}{\Gamma\left(2Nm+2Nh+N-a\right)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^h \\
&- \frac{\sqrt{\pi/N}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{1/N}}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)} (-1)^{\frac{N-1}{2}} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} {}''i^j e^{-\pi i j \frac{(a+1)}{2N}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2N)^{2Nh}}{\Gamma\left(1+2Nh\right)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^h \\
&=: B_1 + B_2 - B_3, \qquad (7.30)
\end{aligned}
$$

其中，在倒数第二步中，我们将求和中的 h 从 m 到 ∞ 的 h 替换为 $h+m$，并应用引理 4.1 化简了最后一个表达式。现在

$$
\lim_{a\to 2Nm-1+N} B_1 = (-1)^{\frac{N-1}{2}} \sqrt{\pi N} (2N)^{-2Nm} \left(\frac{z^2}{4}\right)^{-m+\frac{1}{N}} \sum_{h=0}^{m-1} (2N)^{2Nh} \left(\frac{z^2}{4}\right)^h L_1,
$$

其中 $L_1 = \lim_{a\to 2Nm-1+N} \frac{1}{\text{正弦}(\,)\Gamma(N-a+2Nh)}$. 将 a 替换为 $N-a+2Nh$ 并使用 (3.4)，我们得到

$$
L_1 = \lim_{a\to -(2(Nm-Nh-1)+1)} \frac{1}{(-1)^{\frac{N-1}{2}+h}\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\Gamma(a)} = (-1)^{\frac{N-1}{2}+h} \frac{2(2Nm-2Nh-1)!}{(-1)^{m-h}\pi}
$$

因此，

$$
\lim_{a\to 2Nm-1+N} B_1 = \frac{(-1)^m 2\sqrt{\pi N}}{\pi (2N)^{2Nm}} \left(\frac{z^2}{4}\right)^{-m+\frac{1}{N}} \sum_{h=0}^{m-1} (2N)^{2Nh} \left(\frac{z^2}{4}\right)^h \Gamma(2Nm-2Nh). \qquad (7.31)
$$

此外，

$$
\begin{aligned}
B_2 - B_3 = \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}\sqrt{\pi N}}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \Bigg\{ &(2N)^{2Nm-1+N} \left(\frac{z^2}{4}\right)^{m+\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2N)^{2Nh}\left(\frac{z^2}{4}\right)^h \left(2N(\frac{z}{2})^{\frac{1}{N}}\right)^{-a}}{\Gamma(2Nh+2Nm+N-a)} \\
&- \frac{1}{N}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{1/N} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2N)^{2Nh}}{\Gamma\left(1+2Nh\right)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^h \sum_{j=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^j e^{-\frac{\pi i j}{N}(a+1)} \Bigg\}, \qquad (7.32)
\end{aligned}
$$

注意，对于 $a = 2Nm-1+N$，花括号内的表达式为零。因此， $B_2 - B_3$ 呈现为$0/0$。 Consequently，根据洛必达法则，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{a\to 2Nm-1+N} (B_2 - B_3) \\
&= \lim_{a\to 2Nm-1+N} \frac{2(-1)^{\frac{N-1}{2}}\sqrt{\pi N}}{\pi\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \Bigg\{ (2N)^{2Nm-1+N} \left(\frac{z^2}{4}\right)^{m+\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}} \\
&\times \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2N)^{2Nh}\left(\frac{z^2}{4}\right)^h \left[-\Gamma(2Nh+2Nm+N-a)\log\left(2N(\frac{z}{2})^{\frac{1}{N}}\right) + \Gamma'(2Nh+2Nm+N-a)\right]}{\left(2N(\frac{z}{2})^{\frac{1}{N}}\right)^a \Gamma^2(2Nh+2Nm+N-a)} \\
&- \frac{1}{N}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{1/N} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2N)^{2Nh}}{\Gamma\left(1+2Nh\right)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^h \sum_{j=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^{j+1} \frac{\pi i j}{N} e^{-\frac{\pi i j}{N}(a+1)} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2(-1)^{\frac{N-1}{2}}\sqrt{\pi N}}{\pi(-1)^{m+\frac{N-1}{2}}}\left\{(2N)^{2Nm-1+N}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{m+\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(2N)^{2Nh}\left(\frac{z^2}{4}\right)^h\left[\psi(2Nh+1)-\log\left(2N(\frac{z}{2})^{\frac{1}{N}}\right)\right]}{\left(2N(\frac{z}{2})^{\frac{1}{N}}\right)^{2Nm-1+N}\Gamma(2Nh+1)}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\pi i}{N^2}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{1/N}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(2N)^{2Nh}}{\Gamma(1+2Nh)}\left(\frac{z^2}{4}\right)^h\sum_{j=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(-1)^j je^{-\pi ij(2m+1)}\right\}\\
&= 2(-1)^m\sqrt{\frac{N}{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{2}{N}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\psi(2Nh+1)-\log\left(2N(\frac{z}{2})^{\frac{1}{N}}\right)}{\Gamma(2Nh+1)}\left(2N\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{N}}\right)^{2Nh}\\
&= (-1)^m\frac{2}{\sqrt{\pi N}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{2}{N}}\left[\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})\left(2N\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(-1)^j}{\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\left(2N(\frac{z}{2})^{\frac{1}{N}}\right)^{2Nh+2j}}{(2Nh+2j)!}\right],
\end{aligned}
\tag{7.33}
$$

其中，在倒数第二步中，我们使用了以下事实：$\sum_{j=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} j=0$，而在最后一步中，使用了（6.4）。

现在将 $a\to 2Nm-1+N$ 代入（7.30），再将（7.31）、（7.33）代入其中，得到

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to 2Nm-1+N}T_1^* &= \frac{(-1)^m 2\sqrt{\pi N}}{\pi(2N)^{2Nm}}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{-m+\frac{1}{N}}\sum_{h=0}^{m-1}(2N)^{2Nh}\left(\frac{z^2}{4}\right)^h\Gamma(2Nm-2Nh)\\
&\quad+(-1)^m\frac{2}{\sqrt{\pi N}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{2}{N}}\left[\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})\left(2N\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(-1)^j}{\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\left(2N\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{N}}\right)^{2Nh+2j}}{(2Nh+2j)!}\right].
\end{aligned}
\tag{7.34}
$$

现在我们计算 $\lim_{a\to 2Nm-1+N}T_2^*$。为此，在 T_2^*的分子和分母中使用高斯乘法公式 (3.3)，然后将 j 替换为 $j+1$，并利用当 $a=2Nm-1+N$时，$\cos\left(\pi\left(\frac{j}{N}+\frac{a-1}{2N}\right)\right)=(-1)^{m+1}\sin\left(\frac{\pi j}{n}\right)$这一事实，得到

$$
\lim_{a\to 2Nm-1+N}T_2^* = (-1)^{m+1}\sqrt{\frac{\pi}{N}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{2}{N}}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(-1)^j}{\sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\left(2N\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{N}}\right)^{2Nh+2j}}{(2Nh+2j)!}.
\tag{7.35}
$$

现在将 $a\to 2Nm-1+N$ 代入（7.29），再将（7.34）和（7.35）代入其中，并注意到关于 j 的有限和完全抵消，得到

$$
\begin{aligned}
&\lim_{a\to 2Nm-1+N}G^{N+1,\,1}_{1,\,2N+1}\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}\\ \frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N},\langle\frac{i}{N}\rangle;\langle 1+\frac{3}{2N}-\frac{i}{N}\rangle\end{matrix}\right|\frac{z^2}{4}\right)\\
&=\frac{(-1)^m 2\sqrt{\pi N}}{\pi(2N)^{2Nm}}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{-m+\frac{1}{N}}\sum_{h=0}^{m-1}(2N)^{2Nh}\left(\frac{z^2}{4}\right)^h\Gamma(2Nm-2Nh)
\end{aligned}
$$

$$+(-1)^m\frac{2}{\sqrt{\pi N}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{2}{N}}\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})\left(2N\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)$$

$$=\frac{2(-1)^m}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{N^{3/2}}\left(\frac{2\pi^{N+1}n}{y}\right)^{\frac{2}{N}}\sum_{j=1}^{m}(2Nj-1)!\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{-2j}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{N^{5/2}}\left(\frac{2\pi^{N+1}n}{y}\right)^{\frac{2}{N}}\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})\left(\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)\right],$$

其中在最后一步，我们用 $m-j$ 替换了 h，并利用了 $z=\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}$ 这一事实。将上述极限求值代入（7.28），得到（2.20）。□

在定理 2.7 中令 $m=1$，得到

推论 7.2. 设 N 为奇正数。对于正整数 m,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{3N-1}^{(N)}(n)e^{-ny}+\frac{B_{2N}}{2Ny}-\frac{2\zeta(3)}{Ny^3}$$

$$=\frac{-16\pi^2}{y^3}\sum_{n=1}^{\infty}S_{3N-1}^{(N)}(n)\left[\frac{(2N-1)!y^2}{n^2(2\pi)^{2N+2}}+\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})\left(\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)\right].$$

8. Asymptotics of generalized power partitions with "n^{2N-1} copies of n^N"

定理 2.8 的证明。令 $-\frac{N-1}{2}\le k\le\frac{N-1}{2}$，其中 N 为奇自然数，并令 w 为稍后选取的正实数。由 [17, 定理 1.10] 可得

$$R_{Nm}\left(1,we^{\frac{\pi ik}{N}}\right)=(-1)^{Nm}\left((\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})\left(we^{\frac{\pi ik}{N}}\right)+\sum_{j=1}^{Nm}\frac{(2j-1)!}{w^{2j}e^{\frac{2\pi ijk}{N}}}\right)\tag{8.1}$$

由 [17, 引理 2.1] 还可得，对于 $w>0$,

$$R_{Nm}\left(1,we^{\frac{\pi ik}{N}}\right)\sim-\frac{\cos(\pi Nm)}{w^{2Nm}e^{2\pi ikm}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2Nm+2j)}{w^{2j}e^{\frac{2\pi ijk}{N}}}$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{w^{2Nm}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2Nm+2j)}{w^{2j}e^{\frac{2\pi ijk}{N}}}.\tag{8.2}$$

因此，(8.1) 与 (8.2) 一起推出

$$\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})\left(we^{\frac{\pi ik}{N}}\right)+\sum_{j=1}^{Nm}\frac{(2j-1)!}{w^{2j}}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}e^{-\frac{2\pi ijk}{N}}\right)$$

$$\sim-\frac{1}{w^{2Nm}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2Nm+2j)}{w^{2j}}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}e^{-\frac{2\pi ijk}{N}}\right).$$

接下来，我们在上述方程两边应用（6.7），得到

$$\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})\left(we^{\frac{\pi ik}{N}}\right)+\sum_{\substack{j=1\\N|j}}^{Nm}\frac{(2j-1)!}{w^{2j}}\sim-\frac{1}{w^{2Nm}}\sum_{\substack{j=1\\N|j}}^{\infty}\frac{\Gamma(2Nm+2j)}{w^{2j}}.$$

将 j 替换为 Nj 代入上式可得

$$\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})\left(we^{\frac{\pi ik}{N}}\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{(2Nj-1)!}{w^{2Nj}}=\frac{-1}{w^{2Nm}}\sum_{j=1}^{r+1}\frac{\Gamma(2Nm+2Nj)}{w^{2Nj}}+O\left(w^{-2Nm-2Nr-4N}\right).$$

因此，若令 $w=\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{1/N}$，则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}(\sinh\mathrm{Shi}-\cosh\mathrm{Chi})\left(\left(\frac{(2\pi)^{N+1}n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi ik}{N}}\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{(2Nj-1)!y^{2j}}{(2\pi)^{(N+1)(2j)}n^{2j}}\\&=-\frac{y^{2m}}{(2\pi)^{(N+1)(2m)}n^{2m}}\sum_{j=1}^{r+1}\frac{\Gamma(2Nm+2Nj)}{(2\pi)^{(N+1)(2j)}n^{2j}}\,y^{2j}+O\left(\frac{y^{2m+2r+4}}{n^{2m+2r+4}}\right).\end{aligned}\tag{8.3}$$

将 (8.3) 代入定理 2.7，可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^{(N)}_{2Nm-1+N}(n)e^{-ny}&=\frac{(2m)!\zeta(2m+1)}{Ny^{2m+1}}-\frac{B_{2Nm}}{2Nmy}-\frac{2(-1)^m}{\pi}\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{2m+1}\frac{y^{2m}}{\left((2\pi)^{N+1}\right)^{2m}}\\&\quad\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{(N)}_{2Nm-1+N}(n)}{n^{2m}}\sum_{j=1}^{r+1}\frac{\Gamma(2Nm+2Nj)}{(2\pi)^{(N+1)(2j)}n^{2j}}\,y^{2j}+O\left(y^{2m+2r+4}\right)\\&=\frac{(2m)!\zeta(2m+1)}{Ny^{2m+1}}-\frac{B_{2Nm}}{2Nmy}-\frac{4(-1)^m}{(2\pi)^{2Nm}}\sum_{j=1}^{r+1}\frac{\Gamma(2Nm+2Nj)\zeta(2Nm+2Nj)\zeta(2j)}{(2\pi)^{(N+1)(2j)}}y^{2j-1}\\&\quad+O\left(y^{2r+3}\right),\end{aligned}$$

最后一步中，我们使用了 (5.5)。证明至此完成。 □

现在我们求出 (2.17) 中定义的无穷乘积 $F_N(q)$ 的渐近行为。

推论 2.9 的证明。令定理 2.8 中的 $m=1$, $y=\log\left(\frac{1}{q}\right)$, $|q|<1$，并利用 (2.18)，可得

$$\begin{aligned}q\frac{d}{dq}\left(\log F(q)\right)=&-\frac{2\zeta(3)}{N(\log q)^3}+\frac{B_{2N}}{2N\log q}-\frac{4}{(2\pi)^{2N}}\sum_{j=1}^{r+1}\frac{\Gamma(2N+2Nj)\zeta(2N+2Nj)\zeta(2j)}{\left((2\pi)^{N+1}\right)^{2j}}(\log q)^{2j-1}\\&+O\left(-(\log q)^{2r+3}\right).\end{aligned}$$

接下来，将两边都除以 将上述等式的两边乘以 q，然后对 q 进行积分，从而得到 t

$$\begin{aligned}\log F(q)=c+\frac{\zeta(3)}{N(\log q)^2}+\frac{B_{2N}}{2N}\log\log q-\frac{4}{(2\pi)^{2N}}\sum_{j=1}^{r+1}\frac{\Gamma(2N+2Nj)\zeta(2N+2Nj)\zeta(2j)}{2j\left((2\pi)^{N+1}\right)^{2j}}(\log q)^{2j}\\+O\left((\log q)^{2r+4}\right).\end{aligned}$$

最后，对 上述等式两边取指数，便得到所需的估计 . □

9. Special cases of Theorem 2.3 for N even

9.1. Wigert 公式的推广。在本小节中，我们将说明，下面这个最初在 [18, 定理 1.5], 中得到的公式，可以由定理 2.3 推导出来。

推论 9.1。设 N 为偶正整数， m 为任意整数。对于满足 $\alpha\beta^N=\pi^{N+1}$ 的任意 α、$\beta>0$，

$$\alpha^{-\left(\frac{2Nm-1}{N+1}\right)}\left(\frac{1}{2}\zeta(2Nm)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2Nm}}{\exp\left((2n)^N\alpha\right)-1}\right)$$

$$= \beta^{-(\frac{2Nm-1}{N+1})}\frac{(-1)^m}{N}2^{(N-1)(2m-\frac{1}{N})}\left(\frac{\zeta\left(2m+1-\frac{1}{N}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)}\right.$$
$$-2(-1)^{\frac{N}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1}(-1)^j\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m+1-\frac{1}{N}}}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{\frac{i\pi(2j+1)}{2N}}}{\exp\left((2n)^{\frac{1}{N}}\beta e^{\frac{i\pi(2j+1)}{2N}}\right)-1}\right)\Bigg)$$
$$+(-1)^{\frac{N}{2}+1}2^{2Nm-1}\sum_{j=0}^{m}\frac{B_{2j}B_{(2m+1-2j)N}}{(2j)!((2m+1-2j)N)!}\alpha^{\frac{2j}{N+1}}\beta^{N+\frac{2N^2(m-j)-N}{N+1}}. \tag{9.1}$$

证明。我们将不再提及地使用这一事实： N 是一个偶正整数。令 $a\to -2Nm, m\in\mathbb{Z}$，在定理 2.3 中，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-2Nm}^{(N)}(n)e^{-ny}+\frac{1}{2}\zeta(2Nm)-\frac{1}{y}\zeta(N+2Nm)-\frac{y^{2m-1/N}}{N}\Gamma\left(\frac{1}{N}-2m\right)\zeta\left(\frac{1}{N}-2m\right)$$
$$=\lim_{a\to -2Nm}\frac{2(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}}N^{\frac{a-1}{2}}}{y^{\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_a^{(N)}(n)}{n^{\frac{a}{2N}}}\left[\tfrac{1}{2}K_{\frac{a}{2N}}^{(N)}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)-\frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}}\pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}}C_{m,N}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{a}{2N},0,\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\right]$$
$$+\lim_{a\to -2Nm}\frac{y}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^k\zeta(-2kN-N-a)\zeta(2k+2). \tag{9.2}$$

对于与定理 2.5 相似的证明部分，细节从略；而对于涉及新分析的部分，我们则给出全部细节。

我们首先化简 (9.2) 右端方括号中的第一个表达式。为此，利用 (2.2) 和定理 2.4，可得

$$\tfrac{1}{2}K_{\frac{a}{2N}}^{(N)}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{a-2}{N}}}{\pi^2\sqrt{2}}\frac{(n/y)^{\frac{a}{2N}-\frac{2}{N}}}{N^{\frac{a}{2}-2}}\left(\frac{N^{N-a-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-N+a}{2}\right)\left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2N}}}{\Gamma\left(\frac{N-a}{2}\right)}\right.$$
$$\left.\times\,{}_1F_{2N}\left(\left.\begin{matrix}1\\ \langle\frac{1}{2}-\frac{a+1}{2N}+\frac{i}{2N}\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\right|-\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)+A_{a,N}\left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)\right), \tag{9.3}$$

其中 $A_{a,\ N}(z)$ 在 (2.13) 中定义。

令 $a\to -2Nm$，并利用 (3.6)，可得

$${}_1F_{2N}\left(\left.\begin{matrix}1\\ \langle\frac{1}{2}+m+\frac{i-1}{2N}\rangle_{i=1}^{2N}\end{matrix}\right|-\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)$$
$$=\frac{(2N)^{-2Nm-N}(2Nm+N-1)!}{\left(-\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)^{\frac{1}{2}+m-\frac{1}{2N}}}\left\{\sum_{k=0}^{2N-1}\frac{\exp\left\{2\pi e^{\frac{\pi ik}{N}}\left(\frac{-4\pi^2n^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2N}}\right\}}{\exp\left\{\frac{\pi ik}{N}(2Nm+N-1)\right\}}-\sum_{k=1}^{m}\frac{(2N)^{2Nm+N}\left(-\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)^{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2N}-k}}{(2N)^{2Nk}(2Nm-2Nk+N-1)!}\right\}.$$

将上述表达式代入（9.3），得到

$$\tfrac{1}{2}K_{-m}^{(N)}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)=\frac{N^{Nm+2}}{\pi^2\sqrt{2}(2\pi)^m\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{m+\frac{2}{N}}}\left[A_{-2Nm,N}\left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{\frac{5}{2}}(-1)^{\frac{1}{2N}-m-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{2}{N}}\right.$$
$$\left.\times\left\{\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k\exp\left\{2\pi e^{\frac{\pi ik}{N}}\left(\tfrac{-4\pi^2n^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2N}}+\tfrac{i\pi k}{N}\right\}-\sum_{k=1}^{m}\frac{(2N)^{2Nm+N}\left(-\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)^{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2N}-k}}{(2N)^{2Nk}(2Nm-2Nk+N-1)!}\right\}\right].$$

因此，利用 (2.13) 以及 $(-1)^{\frac{1}{2N}}=e^{\frac{i\pi}{2N}}$ 这一事实，我们得到

$$
\begin{aligned}
&A_{-2Nm,N}\left(\frac{4\pi^{2N+2}n^2}{y^2N^{2N}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{\frac{5}{2}}(-1)^{\frac{1}{2N}-m-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{2}{N}}\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k\exp\left\{2\pi e^{\frac{\pi ik}{N}}\left(\frac{-4\pi^2n^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2N}}+\frac{i\pi k}{N}\right\}\\
&=\frac{1}{2}(-1)^{m+\frac{N+1}{2}}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{5/2}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{2/N}\left\{\left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}-\sum_{k=\frac{N}{2}}^{\frac{3N}{2}-1}+\sum_{k=\frac{3N}{2}}^{2N-1}\right](-1)^k\exp\left\{2\pi e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}+\frac{\pi i(2k+1)}{2N}\right\}\right.\\
&\quad\left.-\left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}+\sum_{k=\frac{N}{2}}^{\frac{3N}{2}-1}+\sum_{k=\frac{3N}{2}}^{2N-1}\right](-1)^k\exp\left\{2\pi e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}+\frac{\pi i(2k+1)}{2N}\right\}\right\}\\
&=-(-1)^{m+\frac{N+1}{2}}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{5/2}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{2/N}\sum_{k=\frac{N}{2}}^{\frac{3N}{2}-1}(-1)^k\exp\left\{2\pi e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}+\frac{\pi i(2k+1)}{2N}\right\}\\
&=(-1)^{m+\frac{N+1}{2}}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{5/2}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{2/N}\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}(-1)^k\exp\left\{-2\pi e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}+\frac{\pi i(2k+1)}{2N}\right\},
\end{aligned}
$$

其中在最后一步，我们用 $k+N$ 替换了 k。

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}K^{(N)}_{-m}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)&=(-1)^{m+\frac{N+1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}N^{mN-\frac{1}{2}}\left(\frac{4\pi^2n}{y}\right)^{-m}\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}(-1)^k\exp\left\{-2\pi e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\left(\tfrac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}+\tfrac{\pi i(2k+1)}{2N}\right\}\\
&\quad+(-1)^{\frac{N}{2}}\pi N^{mN+\frac{1}{2}}(2\pi)^{2Nm+N-\frac{1}{N}-\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{y}\right)^{m+1-\frac{1}{N}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(-\frac{y^2}{(2\pi)^{2N+2}n^2}\right)^k}{(2Nm-2Nk+N-1)!}.
\end{aligned}
$$

接下来，类似于（7.4）中的推导，我们可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{a\to-2Nm}\frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}}\pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}}C_{m,N}\left(\frac{1}{2},\frac{a}{2N},0,\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\\
&=-(-1)^{\frac{N}{2}}\pi N^{mN+\frac{1}{2}}(2\pi)^{2Nm+N-\frac{1}{N}-\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{y}\right)^{m+1-\frac{1}{N}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(-\frac{y^2}{(2\pi)^{2N+2}n^2}\right)^k}{(2Nm-2Nk+N-1)!}.
\end{aligned}
$$

因此，(9.2)右端方括号内的表达式在极限中化简为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{a\to-2Nm}\left[\tfrac{1}{2}K^{(N)}_{\frac{a}{2N}}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)-\frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}}\pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}}C_{m,N}\left(\frac{1}{2},\frac{a}{2N},0,\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\right]\\
&=(-1)^{m+\frac{N+1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}N^{mN-\frac{1}{2}}\left(\frac{4\pi^2n}{y}\right)^{-m}\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}(-1)^k\exp\left(-2\pi e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}+\frac{\pi i(2k+1)}{2N}\right).
\end{aligned}
\tag{9.4}
$$

由 (9.4)、(1.10) 中 $S_a^{(N)}(n)$的定义，以及交换极限与求和的顺序（因为下述级数的被求和项对于任意 $\epsilon>0$ 都是 $\mathcal{O}\left(n^{\max\left(-\frac{\mathrm{Re}(a)}{2N},\ \mathrm{Re}\left(\frac{a}{2N}+\frac{1}{N}-1\right)-2m-3-\frac{1}{N}-\mathrm{Re}\left(\frac{a}{2N}+\epsilon\right)\right)}\right)$，我们看到 ——

$$
\lim_{a\to-2Nm}\frac{2(2\pi)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}}N^{\frac{a-1}{2}}}{y^{\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_a^{(N)}(n)}{n^{\frac{a}{2N}}}\left[\tfrac{1}{2}K^{(N)}_{\frac{a}{2N}}\left(\tfrac{4\pi^{N+1}n}{yN^N},0\right)-\frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{a+1}{N}}\pi^{\frac{(1-N)a}{2N}-N}}{\left(\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)^{1+\frac{1}{N}+\frac{a}{2N}}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(N-a)\right)}{2^{N-1}}C_{m,N}\left(\frac{1}{2},\frac{a}{2N},0,\frac{4\pi^{N+1}n}{yN^N}\right)\right]
$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m-\frac{1}{N}}(-1)^{m+\frac{N+1}{2}}\sum_{d_2=1}^{\infty} d_2{}^{\frac{1}{N}-1-2m}\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}(-1)^k e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\sum_{d_1=1}^{\infty}\exp\left(-2\pi d_1 e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\left(\frac{2\pi d_2}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m-\frac{1}{N}}(-1)^{m+\frac{N+1}{2}}\sum_{d_2=1}^{\infty} d_2{}^{\frac{1}{N}-1-2m}\left[\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{-1}+\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\right]\frac{(-1)^k e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}}{\exp\left(2\pi e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\left(\frac{2\pi d_2}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right)-1}$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m-\frac{1}{N}}(-1)^{m+\frac{N+1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{N}-1-2m}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}(-1)^k \mathrm{Im}\left(\frac{e^{\frac{i\pi(2k+1)}{2N}}}{\exp\left(2\pi e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right)-1}\right), \tag{9.5}$$

其中，在倒数第二步中，我们使用几何级数公式计算了关于 d_1 的和，因为 $-\frac{N}{2}\le k\le\frac{N}{2}-1$ 意味着 $-\frac{\pi}{2}<\arg\left(e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right)<\frac{\pi}{2}$，而在最后一步中，我们在第一个有限和中用 $-k-1$ 替换了 k。最后，我们考虑（9.2）右端的有限和。令 $a\to -2Nm$ 代入其中后，对于偶数 N，$\zeta(-N)=0$，因此 $k=m$ 项消失。因此，用 $k-1$ 替换 k 后，我们得到

$$\lim_{a\to -2Nm}\frac{y}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^k\zeta(-2kN-N-a)\zeta(2k+2) = -\frac{2}{y}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\zeta(2N(m-k)+N)\zeta(2k)\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{-2k}. \tag{9.6}$$

因此，由 (9.2)、(9.5) 和 (9.6)，我们看到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-2Nm}^{(N)}(n)e^{-ny}+\frac{1}{2}\zeta(2Nm)-\frac{1}{y}\zeta(N+2Nm)-\frac{y^{2m-1/N}}{N}\Gamma\left(\frac{1}{N}-2m\right)\zeta\left(\frac{1}{N}-2m\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m-\frac{1}{N}}(-1)^{m+\frac{N+1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{N}-1-2m}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}(-1)^k \mathrm{Im}\left(\frac{e^{\frac{i\pi(2k+1)}{2N}}}{\exp\left(2\pi e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right)-1}\right)$$

$$-\frac{2}{y}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\zeta(2N(m-k)+N)\zeta(2k)\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{-2k}.$$

利用函数方程 (3.5) 重写 $\Gamma\left(\frac{1}{N}-2m\right)\zeta\left(\frac{1}{N}-2m\right)$，并将 $\frac{1}{y}\zeta(N+2Nm)$ 归纳到关于 k 的第二个有限和中，作为其 $k=0$ 项，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-2Nm}^{(N)}(n)e^{-ny}+\frac{1}{2}\zeta(2Nm)$$

$$= \frac{(-1)^m}{N}\left(\frac{y}{2\pi}\right)^{2m-\frac{1}{N}}\left[\frac{\zeta\left(2m+1-\frac{1}{N}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)}(-1)^{\frac{N+1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{N}-1-2m}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}(-1)^k \mathrm{Im}\left(\frac{e^{\frac{i\pi(2k+1)}{2N}}}{\exp\left(2\pi e^{\frac{\pi i(2k+1)}{2N}}\left(\frac{2\pi n}{y}\right)^{\frac{1}{N}}\right)-1}\right)\right]$$

$$-\frac{2}{y}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\zeta(2N(m-k)+N)\zeta(2k)\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{-2k}.$$

令 $\alpha=\frac{y}{2^N}$ 和 $\beta=\frac{2\pi^{1+\frac{1}{N}}}{y^{\frac{1}{N}}}$，将上式两边乘以 $\alpha^{-}(\frac{2Nm-1}{N+1})$，并利用欧拉公式 (1.2) 和 (1.5)，化简后可得 (9.1) 成立。□

9.2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-2Nm+N}^{(N)}(n)e^{-ny}$ 的一个变换。设 N 为偶正整数，m 为任意整数。对 [15, 定理 2.12] 中的恒等式两边关于 a 求导，然后令

$a=1$，并利用事实 $\frac{\partial}{\partial a}\zeta(s,a)\big|_{a=1}=-s\zeta(s+1)$ 和 $\alpha\beta^N=\pi^{N+1}$，得到

$$\begin{aligned}
&\alpha^{-\left(\frac{2Nm-1}{N+1}\right)}\left(\zeta\left(2Nm\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\zeta\left(2N\left(m-j\right)\right)\left(2^N\alpha\right)^{2j}-2^N\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2Nm+N}}{e^{(2n)^N\alpha}-1}\right)\\
&\quad=\beta^{-\left(\frac{2Nm-1}{N+1}\right)}\frac{2^{2Nm-1}}{N}\left\{-\left(\frac{1-2Nm}{N}\right)\pi^{-\left(\frac{1-2Nm}{N}\right)}\Gamma\left(\frac{1-2Nm}{N}\right)\zeta\left(\frac{1-2Nm}{N}+1\right)\right.\\
&\qquad\left.-4\pi\left(-1\right)^{m+1}2^{\frac{1-2Nm}{N}}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m-\frac{1}{N}}}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{i\pi(2j+1)}{2N}}}{\exp\left((2n)^{\frac{1}{N}}\beta e^{\frac{i\pi(2j+1)}{2N}}\right)-1}\right)\right\}\\
&\qquad+\frac{(-1)^{\frac{N}{2}+1}}{2}2^{2Nm-1}\frac{B_{(2m-1)N}}{\left((2m-1)N\right)!}\alpha^{\frac{2}{N+1}}\beta^{N+\frac{2N^2(m-1)-N}{N+1}}.
\end{aligned}\tag{9.7}$$

也可以在定理 2.3 中令 $a=-2Nm+N$（N 为偶数）来证明这个恒等式。此处留作练习。

10. The generalized Dedekind eta-transformation

如引言中所述，Tenenbaum、Wu 和 Li [39] 利用鞍点法，对 $p_k(n)$（即 n的幂分拆数）关于 $n\to\infty$ 的渐近展开给出了新的证明。在证明过程中，他们遇到了级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_N^{(N)}(n)e^{-ny}$。现在我们证明定理 2.6 中给出的该级数的精确变换，并说明它等价于式 (1.8) 中给出的广义戴德金η变换。

定理 2.6 的证明。对于 N 为奇数的情形，在定理 2.5 中令 $m=-1$ 。对于 N 为偶数的情形，在上面的 (9.7) 中令 $m=0$ ，利用 $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ 这一事实，将关于 j 的两个求和拆开，并在第二个求和中用 $-1-j$ 替换 j 。然后，在所得的两个恒等式中，也就是分别对应 N 为奇数和 N 为偶数的恒等式中，代入 $y=2^N\alpha$ ，即可得到 (2.15)。□

现在我们由 (1.8) 推导定理 2.6。

证明。 We 只证明 N 为奇数时的结果。 N even 的情形可用类似方法证明。

在 (1.8) 中令 $z=iy$，$\mathrm{Re}(y)>0$，可得

$$\eta_N\left(\frac{i}{y}\right)=(2\pi)^{(N-1)/2}\sqrt{y}\prod_{\substack{w\in\mathbb{H}\\ w^N=\pm iy}}\eta_{1/N}(w),\tag{10.1}$$

而取　　对 (1.7) 两边取对数，令 $s=N$ 且 $z=iy$ 满足 $\mathrm{Re}(y)>0$ ，可得

$$\log\eta_N(iy):=\pi\zeta(-N)y-\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_N^{(N)}(n)\frac{e^{-2\pi ny}}{n}.\tag{10.2}$$

对（10.1）两边取对数可得

$$\log\left(\eta_N\left(\frac{i}{y}\right)\right)=\frac{1}{2}(N-1)\log(2\pi)+\frac{1}{2}\log(y)+\sum_{\substack{w\in\mathbb{H}\\ w^N=iy}}\log\eta_{1/N}(w)+\sum_{\substack{w\in\mathbb{H}\\ w^N=-iy}}\log\eta_{1/N}(w).\tag{10.3}$$

现在考虑 (10.3) 右端的第三个表达式。对于奇数 N, $w^N=iy$ 和 $w\in\mathbb{H}$ ，可得 $w=y^{\frac{1}{N}}e^{\frac{(4k+1)\pi i}{2N}}$，其中 $0\le k\le\frac{N-1}{2}$。类似地，第四个表达式中的 w由 $w=y^{\frac{1}{N}}e^{(4k-1)2N}{}^{\pi i}$ 给出，其中$1\le k\le\frac{N-1}{2}$。因此，利用 (10.2) 和 $\sigma_N^{(N)}(n)$ 的定义，我们观察到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{w\in\mathbb{H}\\ w^N=iy}}\eta_{1/N}(w)+\sum_{\substack{w\in\mathbb{H}\\ w^N=-iy}}\eta_{1/N}(w)\\
&\quad=\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}}\left[-i\pi\zeta\left(-\frac{1}{N}\right)y^{\frac{1}{N}}e^{\frac{(4k+1)\pi i}{2N}}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\exp\left(2\pi in^{\frac{1}{N}}my^{\frac{1}{N}}e^{\frac{(4k+1)\pi i}{2N}}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$+\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\left[-i\pi\zeta\left(-\frac{1}{N}\right)y^{\frac{1}{N}}e^{\frac{(4k-1)\pi i}{2N}}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\exp\left(2\pi i n^{\frac{1}{N}}my^{\frac{1}{N}}e^{\frac{(4k-1)\pi i}{2N}}\right)\right]$$
$$=-\sum_{k=0}^{N-1}i\pi\zeta\left(-\frac{1}{N}\right)y^{\frac{1}{N}}e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2N}}-\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\exp\left(2\pi i m n^{\frac{1}{N}}y^{\frac{1}{N}}e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2N}}\right).$$

在 (10.3) 中代入 (10.2)，其中将 y 替换为 $1/y$，并代入上述等式，我们便可推出 Zagier 恒等式的一个等价形式，即

$$\frac{\pi\zeta(-N)}{y}-\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_N^{(N)}(n)\frac{e^{-2\pi n/y}}{n}=\frac{1}{2}(N-1)\log(2\pi)+\frac{1}{2}\log(y)-i\pi\zeta\left(\frac{-1}{N}\right)y^{\frac{1}{N}}\sum_{k=0}^{N-1}e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2N}}$$
$$-\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\exp\left(2\pi i m n^{\frac{1}{N}}y^{\frac{1}{N}}e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2N}}\right).$$

对两边关于 y 求导，得到

$$-\frac{\pi\zeta(-N)}{y^2}-\frac{2\pi}{y^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_N^{(N)}(n)e^{\frac{-2\pi n}{y}}=\frac{1}{2y}-\frac{i\pi}{N}\zeta\left(-\frac{1}{N}\right)y^{\frac{1}{N}-1}\sum_{k=0}^{N-1}e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2N}}$$
$$-\frac{2\pi i}{N}e^{\frac{\pi i}{2N}}y^{\frac{1}{N}-1}\sum_{k=0}^{N-1}e^{\frac{\pi i k}{N}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{N}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\exp\left(2\pi i n^{\frac{1}{N}}y^{\frac{1}{N}}e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2N}}\right)\right)^m.$$
$$=\frac{1}{2y}-\frac{i\pi}{N}\zeta\left(-\frac{1}{N}\right)y^{\frac{1}{N}-1}\left(\frac{i}{\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)}\right)$$
$$+\frac{2\pi}{N}y^{\frac{1}{N}-1}\sum_{j=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}}e^{\frac{\pi i j}{N}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{N}}\exp\left(-2\pi(ny)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi i j}{N}}\right)}{1-\exp\left(-2\pi(ny)^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\pi i j}{N}}\right)},\tag{10.4}$$

其中，在最后一步对 k 求和的第二项中，我们将 k 替换为 $j+\frac{N-1}{2}$。现在将等式两边乘以 $-\frac{y^2}{2\pi}$，然后在所得恒等式中用 $2\pi/y$ 替换 y，化简后得到（2.15）。□

注 5. 如果我们从式 (2.15) 出发，沿原步骤回溯至式 (10.4)，然后对两边关于 y 进行积分，并作进一步化简，就可以得到式 (1.8)，而无需显式计算常数 $(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}$ 。

11. Concluding remarks

我们在定理2.1和定理 2.3中获得了关于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a^{(N)}(n)e^{-ny}$ 的显式一般变换。定理2.1 的特殊情形 $a=3N-1$，如推论7.2所给出，结合(2.18)，可以直接推导出具有“n^{2N-1}个 n^N的副本”的广义幂分拆的生成函数在 $q\to1^-$ 时的渐近行为，即 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n^N}\right)^{-n^{2N-1}}$ 的渐近行为。

这个生成函数是本文首次引入的，从分析和组合学的角度来看，它引出了重要的问题。下面列出这些问题。

(1) 确定当 q趋近于其他单位根时，$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n^N}\right)^{-n^{2N-1}}$ 的渐近行为。

(2) 确定推论 2.9 中的常数 c。请注意，当 $N=1$时，Wright 已证明 $c=2\int_0^{\infty}y\log(y)\frac{}{e^{2\pi y}-1}\,dy$。但对于奇数 $N>1$，这个常数很可能取决于 N。我们的方法无法明确确定该常数。

(3) 将 [9] 中的结果扩展到无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n^N}\right)^{-f_N(n)}$，其中 $f_N(n)$ 是一个算术函数，其狄利克雷级数满足与 [9, p. 4] 中类似的性质。

(4) 找出由 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n^N}\right)^{-n^{2N-1}}$ 生成的广义平面分拆的描述。本文将该乘积视为生成带有“n^{2N-1} 个 n^N 副本”的分拆；对于 $N=1$，这类分拆带有“n 个 n 副本”。鉴于后一类分拆的数量与相应正整数的平面分拆数量相同，因此，研究上述乘积所生成的广义平面分拆究竟是什么，以及如何将其与带有“n^{2N-1} 个 n^N 副本”的分拆建立一一对应，显然颇有价值。

(5) 求偶数 N 时 $F_N(q)$ 的渐近行为。本文仅考虑了奇数 N。此外，也可以针对 N 为偶数的情形，提出上述 (1)–(4) 中的相同问题。

作为定理 2.1 的一个特殊情形 $a=N$，我们得到了推论 2.6。正如注 5 中所述，除确定积分常数 $\frac{(N-1)}{2}\log(2\pi)$ 外，该推论等价于 Zagier 恒等式 (1.8)。要直接得到 Zagier 变换，一种途径或许是~~求出~~ $\sum_{n=1}^{\infty}S_{-1}^{(N)}(n)e^{-ny}$ 的一个变换，其中 $S_a^{(N)}(n)$ 定义见 (1.10)。更一般地，求出 $\sum_{n=1}^{\infty}S_a^{(N)}(n)e^{-ny}$ 的一个变换或许也很重要。

Acknowledgements

第一作者是加尔各答印度科学教育与研究学院的 INSPIRE 教员，受 DST 项目 DST/INSPIRE/04/ 2021/002753 资助。本研究的大部分工作是在第一作者担任甘地讷格尔印度理工学院博士后期间完成的，并由 SERB NPDF 项目 PDF/2021/001224 资助。第二作者获得 SERB（印度政府）黄金禧年奖学金项目 SB/SJF/2021-22/08 的资助。第三作者获得 CSIR SPM 奖学金资助，项目编号为 SPM-06/1031(0281)/2018-EMR-I。全体作者谨向各资助机构致以诚挚谢意。第一作者也感谢甘地讷格尔印度理工学院给予的支持。

References

[1] G.E. Andrews, 《分拆理论》，艾迪生-韦斯利出版公司，纽约，300页（1976）。由剑桥大学出版社于1998年在纽约再版。[2] A. Apelblat, *Differentiation of the Mittag-Leffler functions with respect to parameters in the Laplace transform approach*, 《数学》，8（2020年），657。[3] T. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer Science+Business Media，纽约，1976。[4] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, *Part* II, Springer-Verlag，纽约，1989。[5] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, 第五部分，Springer–Verlag，纽约，1998。[6] George E. Andrews 和 Bruce C. Berndt, *Ramanujan's Lost Notebook Part* II，Springer，纽约，2009，418页。[7] B. C. Berndt、A. Dixit、A. Roy 和 A. Zaharescu, *New pathways and connections in number theory and analysis motivated by two incorrect claims of Ramanujan* **304** 2017 809 929 ，《数学进展》（），–。[8] B. C. Berndt 和 A. Straub, *Ramanujan's formula for* $\zeta(2n+1)$，《探索黎曼ζ函数》，编者：H. Montgomery、A. Nikeghbali 和 M. Rassias，第13–34页，Springer，2017。[9] W. Bridges、B. Brindle、K. Bringmann 和 J. Franke, *Asymptotic expansions for partitions generated by infinite products*，已投稿发表，arXiv:2303:11864v1，2023年3月21日。[10] T. W. Chaundy, *The unrestricted plane partition*, 《数学季刊》第3辑（1932），76–80。[11] E. Cohen, *An extension of Ramanujan's sum*, 《杜克数学杂志》16（1949），85–90。[12] M. M. Crum, *On some Dirichlet series*, 《伦敦数学学会杂志》15（1940），10–15。[13] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 第3版，Springer–Verlag，纽约，2000。[14] A. Dixit、R. Gupta 和 R. Kumar, *Extended higher Herglotz functions* I. *Functional equations*，已投稿发表。[15] A. Dixit、R. Gupta、R. Kumar 和 B. Maji, *Generalized Lambert series Raabe's cosine transform and a two-parameter generalization of Ramanujan's formula for* $\zeta\ 2m+1$ **239** 2020 232 293 ，《名古屋数学杂志》（），–。[16] A. Dixit、A. Kesarwani 和 R. Kumar, *Explicit transformations of certain Lambert series*, 《数学研究科学》9，34（2022）（54页）。[17] A. Dixit 和 R. Kumar, *Applications of the Lipschitz summation formula and a generalization of Raabe's cosine transform*，已投稿发表。[18] A. Dixit 和 B. Maji, *Generalized Lambert series and arithmetic nature of odd zeta values*, 《爱丁堡皇家学会会刊》A辑：数学，150卷第2期（2020），741–769。[19] A. Dixit、B. Maji 和 A. Vatwani, *Voronoï summation formula for the generalized divisor function* $\sigma_z^{(k)}(n)$，已投稿发表。[20] A. L. Dixon 和 W. L. Ferrar, *Lattice-point summation formulae*, 《数学季刊》2（1931），31–54。

[21] D. Dorigoni 和 A. Kleinschmidt, *Resurgent expansion of Lambert series and iterated Eisenstein integrals*, 《数论与物理通讯》15卷第1期（2021），1–57。[22] R. Gorenflo、A. A. Kilbas、F. Mainardi 和 S. V. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, 施普林格数学专著，Springer-Verlag，2014，443页。[23] A. P. Guinand, *Some rapidly convergent series for the Riemann Ξ-function*, 《牛津数学季刊》6（1955），156-160。[24] G.H. Hardy 和 S. Ramanujan，组合分析中的渐近公式，《伦敦数学学会会刊》，（2）17，（1918），75–115。重印于《斯里尼瓦瑟·拉马努金论文集》，Chelsea Publishing Company，纽约（ 1962 276 309），第–[25] *On the values of the Riemann zeta-function at rational arguments* 页。S. Kanemitsu、Y. Tanigawa 和 M. Yoshimoto，，《哈代—拉马努金杂志》24（2001），11–19。[26] S. Kanemitsu、Y. Tanigawa 和 M. Yoshimoto, *On multiple Hurwitz zeta-function values at rational arguments*, 《算术学报》107卷第1期（2003），45–67。[27] N. S. Koshliakov, *Sur une intégrale définie et son application à la théorie des formules sommatoires*, 《列宁格勒物理数学学会杂志》2卷第2期（1929），123–130。[28] N. S. Koshliakov, *Note on certain integrals involving Bessel functions*, 《苏联科学院通报》数学辑，第2辑第4期，417–420；英文文本421–425（1938）。[29] E. Kr¨atzel, *Dedekindsche Funktionen und Summen, II*（德文），《匈牙利数学期刊》12卷第3期（1981），163–179。[30] Y. L. Luke, *The Special Functions and Their Approximations*, 第1卷，英国版，学术出版社，INC.，1969。[31] P. J. McCarthy, *Arithmetische Funktionen*, Springer Spektrum，2017。[32] P. Van Mieghem, *The Mittag-Leffler function*, arXiv:2005.13330v4，2021年9月26日（71页）。[33] F. W. J. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert 和 C. W. Clark 编, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, 剑桥大学出版社，剑桥，2010。[34] A. P. Prudnikov、Yu. A. Brychkov 和 O. I. Marichev, *Integrals and series*, 第3卷：更多特殊函数，Gordon and Breach，纽约，1990。[35] S. Ramanujan, *On certain trigonometric sums and their applications in the theory of numbers*, 《剑桥哲学学会会刊》22（1918），179-199。[36] S. Ramanujan, *The Lost Notebook and Other Unpublished Papers*, Narosa，新德里，1988。[37] S. Ramanujan, 《笔记本》（2卷），塔塔基础研究院，孟买，1957；第2版，2012。[38] N. M. Temme, *Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics*, Wiley-Interscience 出版物，纽约，1996。[39] G. Tenenbaum、J. Wu 和 Y.-L. Li, *Power partitions and saddle-point method*, 《数论杂志》204（2019），435–445。[40] M. Vlasenko 和 D. Zagier, *Higher Kronecker "limit" formulas for real quadratic fields*, 《纯粹与应用数学杂志》679，第23–64页（2013）。[41] P. Chavan、S. Chavan、C. Vignat 和 T. Wakhare, *Dirichlet series under standard convolutions: variations on Ramanujan's identity for odd zeta values* **59** 4 2022 1245 1285 ，

《拉马努金杂志》第（），–。[42] S. Wigert, *Sur une extension de la série de Lambert*, 《数学、天文学与物理学档案》19（1925），13页。[43] S. Wigert, *Sur une nouvelle fonction entière et son application à la théorie des nombres*, 《数学年刊》96卷第1期（1927），420–429。$\propto$[44] S. Wigert, *Note sur la série* $\sum_{n=1} e^{-n^k x}$, 《东北数学杂志》38（1933），451–457。[45] A. Wiman, *Uber den fundamental satz in der theorie der funcktionen $E_a(x)$*，《数学学报》29（1905），191–201。[46] E. M. Wright, *Asymptotic partition formulae I. Plane partitions*, 《数学季刊》1（1931），177–189。[47] D. Zagier, *A Kronecker limit formula for real quadratic fields*, 《数学年刊》213（1975），153–184。[48] D. Zagier, *Power partitions and a generalized eta transformation property*, 《哈代—拉马努金杂志》44（2021），1-18。

Department of Mathematics and Statistics, Indian Institute of Science Education and Research Kolkata, Mohanpur, Nadia 741246, West Bengal, India*Email address*: soumya.tatan@gmail.com

Discipline of Mathematics, Indian Institute of Technology Gandhinagar, Palaj, Gandhinagar 382355, Gujarat, India
Email address: adixit@iitgn.ac.in

Discipline of Mathematics, Indian Institute of Technology Gandhinagar, Palaj, Gandhinagar 382355, Gujarat, India
Email address: shivajee.o@iitgn.ac.in