二维 Artin-Schelter 正则代数上的群余作用

西蒙·克劳福德

Abstract. 我们描述了二维 Artin-Schelter 正则代数上所有可能的有限群余作用（等价地，所有群分次）。我们给出了相关 Auslander 映射为同构的充要条件，并精确确定了余作用的不变量环何时为 Artin-Schelter 正则代数。我们的结果通过组合方法证明，并利用了与余作用相关的 McKay 箭图的结构。

arXiv:2304.05937v1 [math.RA] 12 Apr 2023

1. Introduction

在过去二十年中，非交换不变量理论一直是备受关注且持续研究的课题；交换不变量理论中的许多结果也已被证明存在非交换类比物。Kirkman 等人 [Kir16] 撰写的综述文章对这一领域作了出色的概述。

在交换情形中，人们通常考虑由有限群 G 对多项式环 R的分次自同构构成的作用，然后研究由此产生的各种环、模和几何对象。将这一框架推广时，一个自然的起点是以非交换类比物取代多项式环 R，而 Artin-Schelter（AS）正则代数通常担当这一角色。这种做法的一个缺点是，非交换环的自同构群往往相当小；不过，也可以通过允许有限维 Hopf 代数作用来规避这一问题，因为人们常将其视为量子对称性的编码方式。

有限群对代数的余作用是较容易理解的一类 Hopf 代数作用，因为它等价于赋予代数一个群分次。因此，在尝试将交换不变量理论中的结果推广到非交换环时，它们往往是很好的测试案例。尽管如此，似乎尚未有人系统研究有限群对二维 AS 正则代数的群余作用，而这正是本文的研究重点。具体而言，我们将在这一背景下研究两个问题，它们分别受到交换不变量理论中的两个经典结果的启发。

对于 AS 正则代数以及 Hopf 代数的一个作用，有一个与之相关的环同态，称为 Auslander 映射。若该映射是同构，则会产生重要的表示论后果，因此非交换不变量理论的主要研究方向之一，便是为其成为同构提供判定条件。在有限群 G 作用于多项式环 R的交换情形中，已知当且仅当 G 不含非平凡反射 [Aus86]时，Auslander 映射是同构。特别地，若 $G \leqslant \mathrm{SL}(n, \Bbbk)$，则 Auslander 映射是同构。该结果是著名的麦凯对应的一部分。

这一结果的不同版本已推广到非交换情形。在 [CKWZ18], 中，研究者证明，若 A 是二维 AS 正则代数，且 H 是一个作用具有平凡同调行列式的 Hopf 代数，则 Auslander 映射是一个同构。对于不含拟反射的群 $H = \Bbbk G$ G，同样的结果也成立 [Cra20]。本文的主要结果之一给出了二维 AS 正则代数的有限群余作用问题的完整答案。作为第一步，我们对这类余作用进行分类，其中尚未定义的术语将在第 2 节中定义：

定理1.1（命题 3.1）。假设 A 是一个二维 AS 正则代数，它不是交换代数，并且具有一个内忠实的 G分次，其中 G 是有限的且非阿贝尔。则 $A \cong \Bbbk\langle u, v\rangle/\langle u^2 - v^2\rangle$ 以及 $G = \langle a, b \mid \mathcal{R}\rangle$ 对于某个关系集合 $\mathcal{R}$成立，其中一个关系是 $a^2 = b^2$，且该分次满足 $\deg_G u = a$、$\deg_G v = b$。

Date: 2023 年 4 月 13 日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 16E65，16T05，16W22。
Key words and phrases. Artin-Schelter 正则代数，群余作用，McKay 箭图，Auslander 映射。

尽管这一结果对 A 和 G 的可能性施加了相当严格的限制，我们仍然可以获得许多有趣的例子，这些例子展现出不同的表示论行为。尽管例子如此丰富，我们仍能够为 Auslander 映射为同构建立一个简单且统一的充要条件：

定理 1.2（定理 5.2）。采用定理 1.1 中的记号，与一对（A, G）相关联的 Auslander 映射是同构，当且仅当 $|ab| = \frac{1}{2}|G|$。

一个密切相关的问题是，确定与这一设置相关联的不变环 A^H 何时仍为 AS 正则。对于多项式环，这个问题已有完整答案：Chevalley–Shephard–Todd 定理指出，不变环仍为多项式环（因此特别是 AS 正则）当且仅当 G 由反射 [生成 Che55, ST54]。回到非交换情形，我们所知甚少，不过已有一些可以得到完整答案的例子族。例如， [FKMW20] 给出了许多半单 Hopf 代数 H 作用于二维和三维 AS 正则代数的实例，其中 A^H 为 AS 正则；而 [CKZ17] 则证明，down-up 代数在群余作用下的不变环绝非 AS 正则。

我们的第二个主要结果完整刻画了由群余作用产生的不变环何时为 AS 正则：

定理1.3（定理 5.5）。与定理 1.1 中的一对（A， G）相关联的不变环是 AS 正则的，当且仅当

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2, a^{4m} = b^{4m} = (ab)^m = (ba)^m = 1_G \rangle$$

对于某个 $m \geqslant 2$。

为了证明定理 1.2 和 1.3，我们首先将不变环（以及一个相关的环）表示为带关系的箭图的路径代数。这样我们便能利用箭图组合，并结合文献中的结果，证明我们的结论。原则上，无需借助箭图也应能证明这些结果，但我们的方法有助于阐明为何这些结果值得期待为真，也可以推广到其他情形。

致谢。作者是曼彻斯特大学的 Heilbronn 研究员。本研究的部分工作是在作者获得 Cecil King 旅行奖学金期间于华盛顿大学完成的。作者谨此感谢各方提供的资助。

2. Preliminaries

在全文中， $\Bbbk$ 表示一个特征为零的代数闭域。设 A 是一个 $\Bbbk$代数。若 A 是连通分次的，即它是满足 $A_0 = \Bbbk$的 $\mathbb{N}$分次代数，我们就称之为连通分次。若分次 A-模 M 满足对所有 $n \in \mathbb{Z}$都有 $\dim_{\Bbbk} M_n < \infty$ ，则称其为局部有限。

现在假设 A 是连通分次且局部有限的。局部有限分次 A-模的 Gelfand-Kirillov（GK）维数为

$$\mathrm{GKdim}(M) := \limsup_{n\to\infty} \log_n(\dim_{\Bbbk} M_n).$$

可以在更一般的情形下定义模的 GK 维数，但根据 [KL00，命题 6.6]，此定义与通常定义等价。GK 维数为非交换 $\Bbbk$代数提供了一种合理的维数概念；特别地，若 A 是交换的，则 A 的 GK 维数与 A的 Krull 维数一致。

我们将关注一类特殊的连通分次环，它们可以看作多项式环的非交换类比物：

定义 2.1. 设 A 是一个连通分次 $\Bbbk$-代数，并记 $\Bbbk = A/A_{\geqslant 1}$ 为平凡模。若满足以下条件，则称 A 是维数为 d 的 Artin–Schelter Gorenstein（或 AS Gorenstein）代数：

（1）$\mathrm{i.dim}\ {}_AA = \mathrm{i.dim}\ A_A = d < \infty$，且（2）存在分次右 A-模的同构

$$\mathrm{Ext}^i({}_A\Bbbk, {}_AA) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq d \\ \Bbbk[\ell]_A & \text{if } i = d \end{cases}$$

对于某个整数 ℓ，并且对 $\mathrm{Ext}^i(\Bbbk_A, A_A)$ 也成立一个对称条件，其中整数ℓ相同。我们称 ℓ 为 A 的戈伦斯坦参数。

此外，如果

(3) $A = d$ 的整体维数有限，且 (4) A 的 GK 维数有限，那么我们称 A 为维数为 d 的 Artin-Schelter 正则代数（或 AS 正则代数）。

如前所述，AS 正则代数通常被视为多项式环的非交换类比物，并且与多项式环有许多共同的良好性质。例如，所有已知的例子都是诺特整环，人们猜想这一点总是成立。特别地，交换AS正规代数是多项式环 [BH98, Exercise 2.2.25]。

AS 正则代数在维数 2 和 3 [中已得到分类 3 [AS87, ATVdB07, Ste96, Ste97]。维数为 2 时，分类陈述起来很容易（此时我们还将施加限制，要求 A 由 1 次元素生成）。在这种情况下，除同构外，唯一的例子是

$$\Bbbk_q[u,v] \coloneqq \frac{\Bbbk\langle u,v\rangle}{\langle vu - quv\rangle}, \quad q \in \Bbbk^\times, \qquad \text{and} \qquad \Bbbk_J[u,v] \coloneqq \frac{\Bbbk\langle u,v\rangle}{\langle vu - uv - u^2\rangle}, \tag{2.2}$$

whic分别称为量子平面和 Jordan 平面。我们还注意到，该代数 a

$$\frac{\Bbbk\langle x,y\rangle}{\langle x^2 - \alpha y^2\rangle}, \quad \alpha \in \Bbbk^\times,$$

is 通过映射 $u \mapsto x + \sqrt{\alpha}y$, $v \mapsto x - \sqrt{\alpha}y$ 与 $\Bbbk_{-1}[u,v]$ 同构，因此是 AS 正则的。

本文关注一类特定 Hopf 代数（即群余作用）在 AS 正则代数上的作用。现在，我们给出一般 Hopf 代数及其作用的一些定义和结果，并在适当之处具体说明群余作用的相关细节。

Gi给定一个 Hopf 代数 H，记 Δ 为余乘法，ε 为余单位，S 为反余代。我们

使用斯威德勒记号表示余乘法像中的元素，因此，对于 $h \in H$，

$$\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2.$$

当 H 为半单时，正如我们这里的情形，它必然是有限维的，并且反极满足 $S^2 = \mathrm{id}_H$。

如果 H 是有限维 Hopf 代数，那么对偶代数 $H^* \coloneqq \mathrm{Hom}_\Bbbk(H,\Bbbk)$ 也具有 Hopf 代数结构。当 $H = \Bbbk G$ 是有限群 G 的群代数时，我们尤其关注这一构造。在这种情况下，H^* 具有一组 $\Bbbk$-基 $\{\phi_g \mid g \in G\}$，其中 $\phi_g\colon \Bbbk G \to G$ 与元素 $g \in G$ 对偶，而这些元素构成 H^* 的一组本原正交幂等元。H^* 的余乘法、余单位和反极定义如下:

$$\Delta(\phi_g) = \sum_{\substack{x,y\in G\\ xy=g}} \phi_x \otimes \phi_y, \qquad \varepsilon(\phi_g) = \begin{cases} 1 & \text{if } g = \mathrm{id}_G,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases} \qquad S(\phi_g) = \phi_{g^{-1}}.$$

特别地，我们将关注 Hopf 代数 H 对 $\Bbbk$-代数 A 的作用，这些作用与代数结构相容。在这种情况下，关于 H 对 A的作用有着完善的不变量理论。

定义 2.3. 设 H 是一个 Hopf 代数，且 A 是一个 $\Bbbk$-代数。若 A 是一个 H-模代数，即 A 是一个左 H-模并满足

$$h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \qquad \text{and} \qquad h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A$$

对所有 $h \in H$ 和 a、$b \in A$ 均成立。在此情形下，H 对 A 的作用所对应的不变环为

$$A^H = \{a \in A \mid h \cdot a = \varepsilon(h)a \text{ for all } h \in H\}.$$

当 A 是一个 H-模代数时，我们可以构造叉积 $A\#H$。作为一个阿贝尔群，它就是 $A \otimes_\Bbbk H$，而我们将简单张量写作 $a\#h$，其中 $a \in A$ 和 $h \in H$。乘法定义为

$$(a\#h)(b\#k) = \sum a(h_1 \cdot b)\#h_2k,$$

并按线性方式扩展。

如果代数 A 可分解为阿贝尔群的直和，我们就称其按群 G 分次，或称为 G-分次。

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g$$

它满足 $A_gA_h \subseteq A_{gh}$。必然有 $1_A \in A_{1_G}$。如果 A 是 G-分次的，则（左） A-模 M 是G-分次的，当且仅当存在一个阿贝尔群直和分解

$$M = \bigoplus_{g\in G} M_g$$

它满足 $A_gM_h \subseteq M_{gh}$。

当 $H = (\Bbbk G)^*$ 时，众所周知，阿贝尔群 M 具有 H-模结构，当且仅当M 是 G-分次的（[Mon93, Example 1.6.7]）；而这又等价于在 M上定义 $\Bbbk G$的余作用。更确切地说，给定 M上的一个 G-分次，我们可以通过定义 $\phi_g \cdot m := m_g$，得到 $(\Bbbk G)^*$的一个作用，其中 $m = \sum_{g\in G} m_g$ 是将 $m \in M$ 分解为其 G-齐次分量所得的分解。类似地，我们可以利用 $(\Bbbk G)^*$ 在 M 上的作用来定义 M上的一个 G-分次。这种对应关系也推广到 H-模代数。我们将（$\Bbbk G$）*-作用、 G-分次和 G-余作用这些术语交替使用，并在方便时切换不同的视角。我们还注意到，在这种情形下，不变环满足 $A^H = A_{1_G}$，即它是 A 中具有平凡 G-度的元素所组成的集合。

Hopf 代数最重要的性质之一是， H-模的张量积仍然是一个 H-模。若 $H = (\Bbbk G)^*$ 和 V 以及 W 都是 H-模（即 G-分次），那么$V \otimes_{\Bbbk} W$也具有同样的性质；若 $v \in V$和 $w \in W$ 是 G-齐次的，那么

$$\deg_G(v \otimes w) = (\deg_G v)(\deg_G w).$$

研究有限群在 $\Bbbk$-代数上的作用时，通常假设该群的相应表示是忠实的。Hopf 代数中与忠实作用相对应的概念如下：

定义 2.4. 设 V 是一个左 H-模。若对每个非零 Hopf 理想 I （其中 I 是 H的 Hopf 理想）， H 在 V 上的作用都满足$IV \neq 0$ ，则称该作用是内忠实的。

这意味着 H 的作用不能通过其某个真商群的作用来实现。特别地，群代数的作用是内忠实的，当且仅当它是忠实的。

假设 A 是一个 $\mathbb{N}$-分次 H-模代数，且 U 是 A 的一个 H-子模，并且 U 作为代数生成A 。那么很容易看出， H 在 A 上的作用是内忠实的，当且仅当 H 在 U 上的作用是内忠实的。特别地，如果 H 的作用是齐次的，且 A 由 1次元素生成，那么当且仅当 H 在 A_1 上的作用是内忠实的。

当 $H = (\Bbbk G)^*$ 是群代数的对偶时，很容易判断该作用何时是内忠实的：

引理 2.5. 假设 A 是一个由 1 次齐次元素生成的分次 $\Bbbk$-代数， $H = (\Bbbk G)^*$ 是某个有限群 G，并且 A 是一个 H-模代数。那么 H 在 A 上的作用是内忠实的，当且仅当

$$D := \{\deg_G x \mid x \in A_1 \text{ is } G\text{-homogeneous}\}$$

是 G 的生成集。

证明。对 A 的作用是内忠实的，当且仅当对 A_1 的作用是内忠实的；根据[PQ95，推论 10]，，这当且仅当 H 的每个不可约表示 $\Bbbk\phi_g$ 都是某个 $(A_1)^{\otimes_{\Bbbk} n_g}$ （对于某个 $n_g \in \mathbb{N}$）的一个直和项。等价地，对于每个 $g \in G$，张量代数 $T_{\Bbbk}(A_1)$ 包含一个次数为 g 的元素；这当且仅当 D 是 G 的生成集。□

所谓的Auslander 映射在非交换不变量理论中发挥着重要作用。这是自然映射

$$\gamma : A\#H \to \mathrm{End}(A_{A^H}), \quad \gamma(a\#h)(b) = a(h \cdot b).$$

如果这个映射是同构，那么关于代数 H, $A\#H$ 和 A^H [CKWZ19]，，就有强有力的表示论结果，因此人们非常关注何时会出现这种情形。根据 Zhu 的一项最新结果， [Zhu22, Theorem 0.3]，，我们知道这种情形会在

A 是满足多项式恒等式的 Artin-Schelter 正则代数，且 H 是群代数或其对偶，并且 H 在 A 上的作用具有平凡的同调行列式时发生。我们不在此给出这一术语的定义，但指出，这可以视为要求一个作用于多项式环的群 G 满足 $G \leqslant \mathrm{SL}(n, \Bbbk)$ 的一种类似情形。感兴趣的读者可参阅[JZ00, KKZ09]，了解更多信息。

本文中的许多结果将借助箭图来证明，因此我们先回顾一些定义。箭图是一种有向多重图，本文假定其顶点和边的数量均有限。对于这些定义，我们假设 Q 有 n 个顶点，标记为 $\{1, \dots, n\}$。我们可以在 Q 上定义头映射和尾映射，它们分别将箭 $\alpha : i \to j$ 映射到顶点 j 和顶点 i。路径（长度为 ℓ）是 Q 中的一列箭 $p = \alpha_1 \dots \alpha_\ell$，满足 $h(\alpha_i) = t(\alpha_{i+1})$，其中 $1 \leqslant i < \ell$（特别地，我们按从左到右的顺序复合路径）。显然，我们可以将头映射和尾映射扩展到路径上。

给定一个有限箭图，我们可以如下构造一个 $\Bbbk$-代数 $\Bbbk Q$，称为 Q 的路径代数。作为向量空间，$\Bbbk Q$ 以箭图中的路径为基（包括平凡路径 e_i，即停留在顶点 i 的路径），路径的乘法在有定义时由连接给出：

$$p \cdot q := \begin{cases} pq & \text{if } h(p) = t(q), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

然后将其线性扩展到所有的 $\Bbbk Q$。元素 e_i 是两两正交的幂等元，$\Bbbk Q$ 中的单位元为 $1_{\Bbbk Q} = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$。路径代数具有由路径长度给出的自然分次。

若 $\Bbbk Q$ 是路径代数，则 $\Bbbk Q$ 中的关系 ρ 是 $(\Bbbk Q)_m$ 中的一个元素，其中某个 $m \geqslant 2$ 满足 ρ 中的每条路径都有相同的起点和终点，即对于某些顶点 i 和 j，有 $\rho \in e_i(\Bbbk Q)_m e_j$。若 I 是由关系生成的 $\Bbbk Q$ 的双边理想，则称 $\Bbbk Q/I$ 为带关系的路径代数，或称为带关系的箭图。

B根据 Cra22，定理 4.8]，，可以将 $A\#H$ 表示为带关系的箭图。特别是 r, whe若 $H = (\Bbbk G)^*$ 且 A 是维数为 2 的 AS 正则代数，则有以下结果：

定理 2.6（[Cra22，定理 6.2]）。设 $A = \Bbbk\langle u, v\rangle / \langle \rho(u, v)\rangle$ 是一个二维 Artin-Schelter 正则代数，且 $H = (\Bbbk G)^*$ 在 A 上的作用是内忠实且齐次的。此外，假设该作用是 G-齐次的，并记

$$\deg_G u = a, \quad \deg_G v = b$$

对某些 $a, b \in G$ 成立。令 Q 为一个箭图，其顶点以 G 的元素标记，并且对所有 $g \in G$，存在箭

$$g \to a^{-1}g, \quad g \to b^{-1}g;$$

另外，分别用 u 和 v 标记这些箭。我们称 Q 为 H 在 A 上的作用对应的 McKay 箭图。最后，令 $I = \langle \rho_g \mid g \in G\rangle$ 为由以下元素 ρ_g 生成的 $\Bbbk Q$ 的理想：固定 $g \in G$，则 ρ_g 是从顶点 g 到顶点 $(\deg_G \rho(u, v))^{-1} g$ 的长度为 2 的路径的线性组合，使得若将 ρ_g 中的一支箭替换为其标记，则得到 $\rho(u, v)$。于是 $A\#H \cong \Lambda := \Bbbk Q/I$ 和 $A^H \cong e_1 \Lambda e_1$，其中 e_1 是与标记为 G 的单位元的顶点对应的幂等元。

上文提到的 McKay 箭图可以定义为任意 Hopf 代数齐次作用于分次代数时的对象。在本文中，我们将保留记号 Λ 和 e_1，分别表示定理 2.6 陈述中的代数和顶点幂等元。

如前所述，确定 Auslander 映射何时为同构尤其重要。一般而言，很难判定这一点，但 Bao–He–Zhang[BHZ19, Theorem 0.3] 的一个结果提供了一种可用于实例的计算方法。下面重述他们的结果，这初步说明了箭图将在本文结果的证明中发挥怎样的作用：

定理 2.7（[Cra22, Corollary 5.7]）。假设定理 2.6 的条件成立，并令 Λ 表示该定理中的代数。那么，与对 (A, G) 相关联的 Auslander 映射是同构，当且仅当 $\Lambda/\langle e_1\rangle$ 是有限维的。

在许多情况下，可以利用箭图 Q 上的组合方法来判断 $\Lambda/\langle e_1\rangle$ 是否为有限维。我们将用此方法证明定理 1.2。

3. Classifying G-coactions

我们首先对二维 Artin-Schelter 正则代数上的可能群余作用进行分类。如果 G 是阿贝尔群，那么 $(\Bbbk G)^*$ 与 $\Bbbk G$ 作为 Hopf 代数同构，因此该余作用等价于有限阿贝尔群的作用；这一情形已在 [Cra20] 中讨论。因此，我们将注意力限制在 G 为非阿贝尔群的情形。此外，[EW14，定理 1.3] 表明，我们可以忽略 A 为多项式环的情形。

命题 3.1. 设 A 是一个非交换的二维 AS 正则代数，并且其关于有限非阿贝尔群 G 分次，使得 $(\Bbbk G)^*$ 的相应作用是内忠实的。那么 $A \cong \Bbbk\langle u, v\rangle/\langle u^2 - v^2\rangle$ 和 $G = \langle a, b \mid \mathcal{R}\rangle$，其中某组关系为 $\mathcal{R}$，且其中一条是 $a^2 = b^2$，并且该分次满足 $\deg_G u = a$、$\deg_G v = b$。

证明. 回想一下，在同构意义下，二维 AS 正则代数是 (2.2) 中的量子平面和 Jordan 平面；在前一种情形下，若 $q = -1$，则该代数同构于引理陈述中出现的代数。

令 A 为量子平面或 Jordan 平面，并假设 A 按有限非阿贝尔群 G群分次。由于 G 不是阿贝尔群且余作用是内忠实的，由引理 2.5 可知，它由两个元素 a 和 b生成，不妨如此称呼。不失一般性，我们可以假设 G-分次满足

$$\deg_G(u + \alpha v) = a, \quad \deg_G(\beta u + v) = b.$$

对于某些 $\alpha, \beta \in \Bbbk$，使得 $\alpha\beta \neq 1$。记 $x := u + \alpha v$ 和 $y := \beta u + v$，则有

$$u = \frac{1}{1-\alpha\beta}(x - \alpha y), \qquad v = \frac{1}{1-\alpha\beta}(-\beta x + y).$$

现在假设 $A = \Bbbk_J[u, v]$。那么该代数的定义关系为

$$vu - uv - u^2 = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}\left(-x^2 + (\alpha\beta + \alpha - 1)xy + (-\alpha\beta + \alpha + 1)yx - \alpha^2 y^2\right).$$

注意，xy和 yx的系数不能同时为 0，否则可推出 $\Bbbk_J[x, y]$ 同构于 $\Bbbk\langle x, y\rangle/\langle x^2 + \alpha^2 y^2\rangle$，而后者同构于 $\Bbbk_{-1}[u, v]$。因此，xy或 yx 中至少有一个必须以非零系数出现；不妨假设前者出现，后一种情形几乎完全相同。为了使 $(\Bbbk G)^*$ 对 A 的作用是齐次的，该关系必须是 G-齐次的，因此可得

$$a^2 = \deg_G x^2 = \deg_G xy = ab.$$

因此 $a = b$，所以 G 事实上是阿贝尔的，与我们的假设相矛盾。

现在假设 $A = \Bbbk_q[u, v]$ 对于某个 $q \in \Bbbk^\times$。由于我们已假设 A 不是交换的，因此有 $q \neq 1$。在这种情况下，定义关系变为

$$vu - quv = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}\left((q\beta - \beta)x^2 + (\alpha\beta - q)xy + (1 - q\alpha\beta)yx + (q\alpha - \alpha)y^2\right).$$

由于 $q \neq 1$，x^2 和 y^2 的系数均非零。与 Jordan 平面一样，如果 xy或 yx的系数非零，则 G是阿贝尔的。因此，我们必须有 $\alpha\beta - q = 0 = 1 - q\alpha\beta$，从而 $q^2 = 1$，进而 $q = -1 = \alpha\beta$。最后，如果我们定义

$$X := \sqrt{\beta}x, \qquad Y := \sqrt{-\alpha}y,$$

那么定义关系变为

$$vu - quv = -\frac{1}{2}(-2\beta x^2 - 2\alpha y^2) = X^2 - Y^2,$$

w其中$\deg_G X = a$ 和 $\deg_G Y = b$。由于该关系是 G-齐次的，我们还必须有

$$a^2 = \deg_G X^2 = \deg_G Y^2 = b^2,$$

由此即可得出结论。 □

4. The McKay Quiver and Combinatorics

在证明主要结果之前，我们先给出一个较为详细的例子，以帮助说明定理 2.6 中关于代数 Λ 的一些组合学。

有了命题 3.1，我们关注该代数上的群余作用

$$A = \frac{\Bbbk\langle u, v\rangle}{\langle u^2 - v^2\rangle}.$$

特别地， G 必须满足命题 3.1 的假设，因此在本节中令

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2, a^4 = b^4 = (ab)^3 = 1\rangle,$$

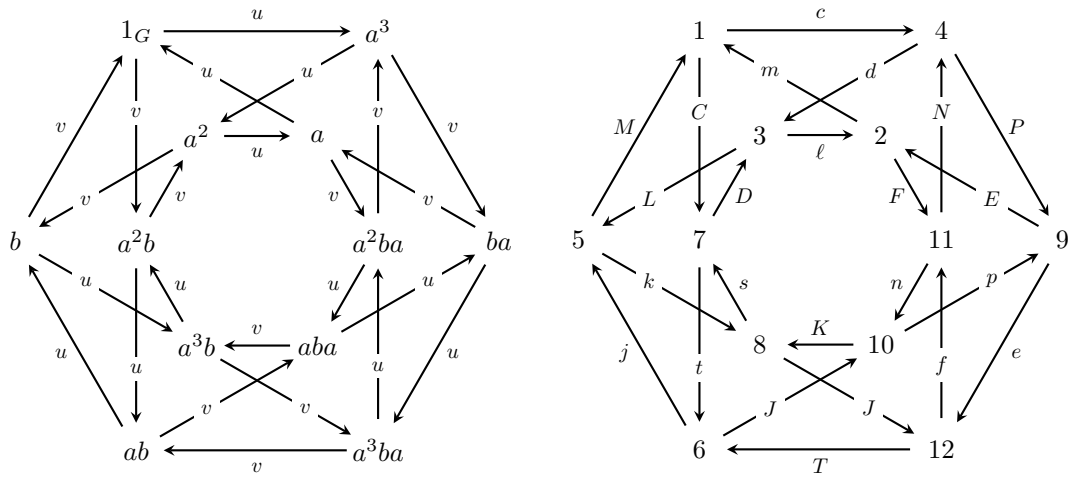
并通过规定为 A 赋予一个 G-分次

$$\deg_G u = a \quad \text{and} \quad \deg_G v = b.$$

群 G 同构于阶为 12 的二元二面体群，并且作为一个集合，我们有

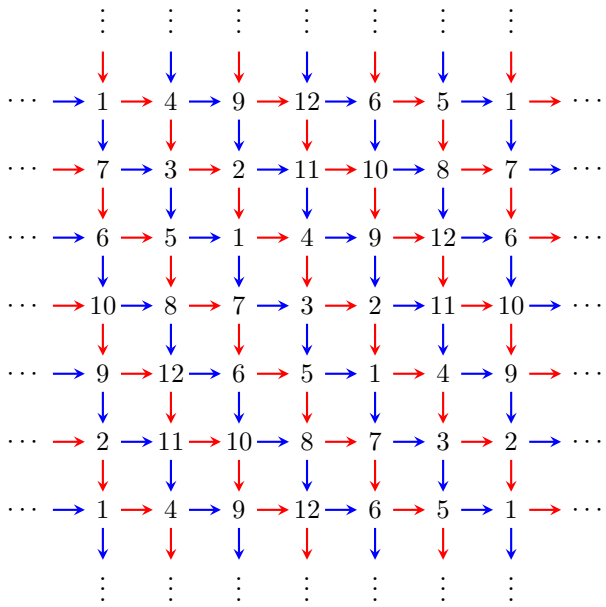
$$G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b, ba, aba, a^2ba, a^3ba\}.$$

为了确定 A^H 和 $A\#H$ 的性质，我们构造定理 2.6 中的代数 Λ 。按照该定理给出的步骤，经过直接计算可验证，McKay 箭图 Q 如下方左图所示，其中顶点以 G 的元素标记，箭上则标有元素 u 和 v。右图还给出了另一种标记方式，以便我们更轻松地讨论 Λ的元素：



要定义与 $A\#(\Bbbk G)^*$ 同构的代数 Λ ，还需确定箭图中的关系。由于 A 的定义关系是 $u^2 - v^2$，且满足 $\deg_G(u^2 - v^2) = a^2$，因此 Λ 中的关系恰好是箭图中从顶点 g 出发、到达 $a^{-2}g = a^2g$，并描绘出关系 $u^2 = v^2$的路径。例如，通过比较两种不同的标记方式，我们可以看到， $cd = CD$ 和 $d\ell = PE$ 都是 Λ中的关系；总共有十二个关系，每个起始顶点（等价地说，每个群元素）对应一个。

虽然上述箭图赏心悦目，但要确定长度为 $\ell \geqslant 2$ 的两条路径在 Λ中何时等价并不容易。事实证明，将 McKay 箭图视为箭图 $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty^\infty$的一个适当商会更便于直观呈现。该箭图是一个无限箭图，其顶点在平面上构成方格格子；按照我们的约定，箭指向南方和东方，通向相邻顶点。在这个贯穿全文的例子中，McKay 箭图可以如下表示：我们省略箭的标签，但当相应的标签分别为 u 和v 时，将箭标为红色或蓝色：



这里，共享同一数字的顶点被视为同一个顶点，因此只需展示箭图的一小部分$\mathbb{ZA}_{\infty}^{\infty}$，之后便会无限重复。我们称之为 McKay 箭图的格子表示。

在上图所示的无限箭图片段中，可以看到两侧能够识别，因此只需表示方格网格，并省略两侧的箭。只要 A 和 G满足命题 3.1 的假设，就总能以这种方式表示 McKay 箭图。若进一步假设左上角顶点标记为 1_G，那么我们称这种表示为 McKay 箭图的环面表示。

注意，在每一行和每一列中，箭都在红色和蓝色之间交替，这对应于装饰在 u 和 v之间交替这一事实。在 McKay 箭图的环面表示中，我们约定顶行的第一支箭装饰为 u，因此左侧列的第一支箭装饰为 v。等价地说，环面 McKay 箭图顶行的顶点从左到右标记为 1_G、a^{-1}、$b^{-1}a^{-1}$、$a^{-1}b^{-1}a^{-1}$、.....、1_G。在 McKay 箭图的格子表示中，Λ中的关系表明，从一个顶点到其东南方向紧邻顶点的两条长度为二的路径相等；反复应用这些关系可知，在 Λ 中，从一个顶点到任何位于其南方和/或东方的顶点，都恰有一条非零路径。

例如，$cPeTjM$和 $CtJpEm$ 中的路径彼此不同，因为尽管它们的起点和终点相同，长度也相同，但从 McKay 箭图的格子表示中可以清楚看出，它们对应于不同的路径。另一方面，$cPEm$ 和$CtjM$ 在 Λ中相等，这一点用该表示也能一目了然。使用我们最初对 Λ的表示时，这两个事实都不明显。

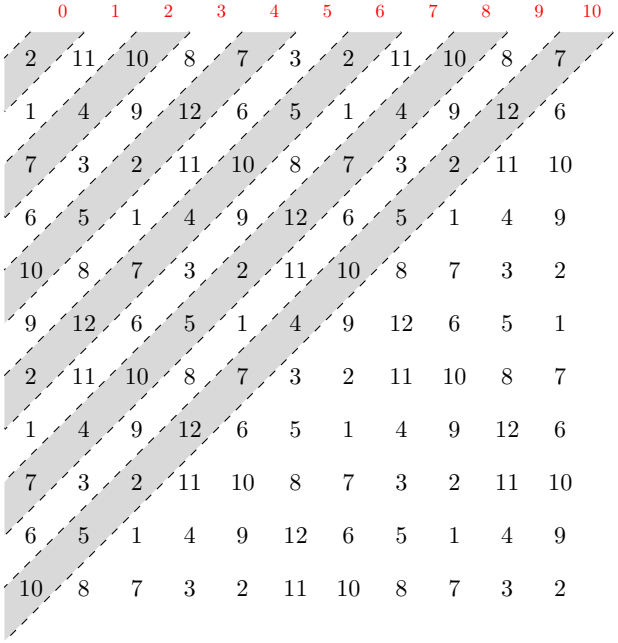
格子表示和环面表示使得在 Λ中进行计算格外容易。例如，利用这一描述，可以轻松确定不变环 $A^H = A_{1_G}$。根据定理 2.6，我们有 $A^H \cong e_1\Lambda e_1$，因此只需考察箭图中从顶点 1 到其自身的路径。如上所述，存在不同的路径 $aPeTjM$和 $CtJpEm$，此外还有一条长度为四的路径 $cd\ell m$（以及另外五条与之等价的路径）。利用 Λ的环面表示，可以证明，从顶点 1 到其自身的任何其他路径都能写成这三条路径的乘积。分别将这些路径记为 x、y和 z，容易验证这些元素彼此交换并满足 $xy = z^3$；稍作推导，我们便得到

$$A^H \cong \frac{\Bbbk[x,y,z]}{\langle xy - z^3\rangle},$$

这是一个 $\mathbb{A}_2$ 奇点（的坐标环）。使用 A 而非 Λ 时，元素 x、y 和 z 分别对应于 $(uv)^3$,$(vu)^3$，和 u^4，它们也满足关系 $xy = z^3$。

4.1. 通过箭图组合进行维数计数。现在我们介绍一种方法，用于计算与 A 上的 G 群余作用相关联的代数 Λ 的各种子空间的维数。继续沿用前面的例子，可以最简便地说明这一方法。本节介绍的方法是 [Wem11 第 4] 节所述技术的具体实例。

假设我们想确定从 Λ 中的顶点 i 到顶点 j、长度为 ℓ的路径数；等价地，我们想知道 $\dim_{\Bbbk}(e_i\Lambda e_j)_\ell$。正如前面所观察到的，$\Lambda$ 中的关系告诉我们，在 McKay 箭图的格子表示中，从一个顶点到其南方和/或东方的任意顶点，恰有一条路径。例如，为了计算 $\dim_{\Bbbk}(e_2\Lambda e_j)_\ell$，请看下面的图示；暂且忽略阴影部分和红色数字：



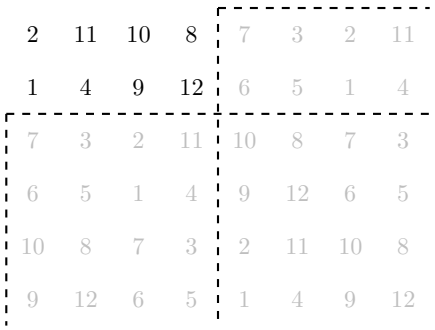
这只是箭图 $\mathbb{ZA}_\infty^\infty$的一部分，为了使图示更清晰，我们省略了其中的箭。由于我们关注的是从顶点 2 出发的路径，因此所示部分中该顶点位于左上角。网格中出现的每个顶点都对应着 Λ 中从顶点 2 到顶点 j的一条唯一的路径。因此，从顶点 2 到顶点 j 、长度为 ℓ 的路径数（等价地，$\dim_{\Bbbk}(e_2\Lambda e_j)_\ell$）等于沿着由红色非负整数 ℓ标记的对角带出现的 j 的次数。例如，下表记录了 Λ 中从顶点 2 到顶点 $j = 1$、2、3、4，长度至多为 10 的路径数：

终端顶点	路径长度										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	0	1	0	2	0	1	0
2	1	0	0	0	1	0	2	0	1	0	2
3	0	0	0	1	0	1	0	1	0	2	0
4	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1

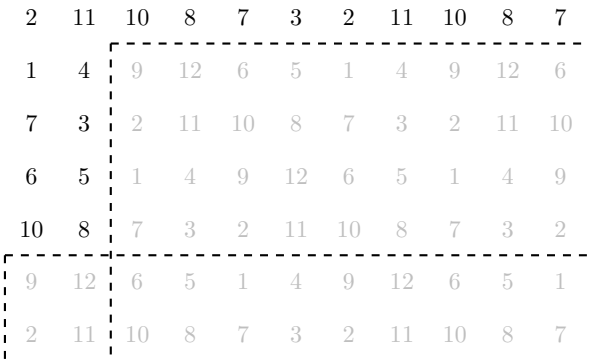
我们可以对上述方法稍作修改，从而计算从顶点 i 到顶点 j 的路径数，这些路径在 Λ中无法经由某个特定顶点（或若干顶点）分解。下一节将会用到这一点。

例如，假设我们想要计算 Λ 中以顶点 2 为起点且不经过顶点 7 的路径数。等价地，我们想要计算向量空间 $e_2\Lambda/e_2\Lambda e_7\Lambda$的维数。利用 Λ的格点表示，当且仅当该顶点不位于某个顶点 7 实例的正南方或正东方时，才满足这一条件。下图中，从顶点 2 出发存在非零路径可达的顶点

Λ 中的顶点以黑色表示，其余顶点以灰色表示：



特别地，$\dim_{\Bbbk} e_2\Lambda/e_2\Lambda e_7\Lambda = 8$。如果我们转而关注不能通过顶点 9 分解的路径，则得到的图如下：



由于顶行具有周期性，Λ 中存在无穷多条非零路径，它们从顶点 2 出发且不经过顶点 9。因此 $\dim_{\Bbbk} e_2\Lambda/e_2\Lambda e_9\Lambda = \infty$。

5. Proofs of Main Results

5.1. 关于 Auslander 映射何时为同构。现在，我们将着手给出条件，以刻画对应于命题 3.1 中的对 (A, G) 的 Auslander 映射为同构的充要条件。首先，我们需要一个初等引理：

Le引理 5.1. 假设 G 是一个有限群，且 g与 $h \in G$ 不交换。则元素 s

$$1_G, g, gh, ghg, ghgh, \ldots, (gh)^{k-1}, (gh)^{k-1}g$$

均互不相同，当且仅当 $|gh| \geqslant k$。特别地，上述列表不重复地包含 G 中的每个元素，当且仅当 $|gh| = \frac{1}{2}|G|$。

证明。必要性显然，因此我们只证明充分性。假设存在重复。如果重复的形式为 $(gh)^m g^{\varepsilon} = (gh)^n g^{\varepsilon}$，其中 $0 \leqslant m < n \leqslant k-1$ 和 $\varepsilon \in \{0, 1\}$，则可得$|gh| \leqslant n - m \leqslant k - 1$。

或者，重复可能具有$(gh)^m = (gh)^n g$的形式，其中 $0 \leqslant m < n \leqslant k-1$。那么 $g = (gh)^{m-n}$，但也

$$g(hg)^{n-m} = (gh)^{n-m}g = 1,$$

使得 $g^{-1} = (hg)^{n-m}$。因此

$$hg^{-1} = h(gh)^{n-m} = (hg)^{n-m}h = g^{-1}h.$$

因此 $gh = hg$，这与我们的假设相矛盾。$m > n$ 的情形类似，从而穷尽了所有可能性。□

有了这个引理，我们便能够利用代数 Λ 的结构，精确确定 Auslander 映射何时是同构：

定理 5.2. 假设 A 和 G 如命题 3.1 所述。那么，对于这一对 (A, G)，Auslander 映射是同构，当且仅当 $|ab| = \frac{1}{2}|G|$。

证明. 我们有以下一系列等价陈述:

Auslander 映射是一个同构。

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \Lambda/\Lambda e_1\Lambda \text{ is finite-dimensional} && \text{(Theorem 2.7)}\\
&\Leftrightarrow e_j\Lambda/e_j\Lambda e_1\Lambda \text{ 是有限维的，用于}\\
&\quad \text{每个顶点 } j\\
&\Leftrightarrow \text{环面的每一行和每一列}\\
&\quad \Lambda \text{ 的表示包含 } 1_G && \text{(Section 4.1)}\\
&\Leftrightarrow \text{环面}\\
&\quad \text{表示中的每一行和每一列都包含 } G \text{ 的每个元素}\\
&\Leftrightarrow \text{对于所有 } g\in G\text{，列表 } g, a^{-1}g, b^{-1}a^{-1}g, a^{-1}b^{-1}a^{-1}g, \dots\\
&\quad \text{包含 } G \text{ 的每个元素}\\
&\Leftrightarrow ab \text{ 的阶为 } \tfrac{1}{2}|G|, && \text{(Lemma 5.1)}
\end{aligned}$$

这里我们对 $g = a^{-1}$ 和 $h = b^{-1}$ 应用引理 5.1。这就证明了结论。 □

例 5.3. 假设,

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2, a^4 = b^4 = (a^3b)^3 = 1\rangle,$$

其与第4节中贯穿示例里的群抽象同构。如果通过规定 $\deg_G u = a$ 和 $\deg_G v = b$，给 A 赋予一个群分次，结果表明，不变环 A_{1_G}与第4节中的相比具有不同的性质。

容易看出，作为集合，我们有

$$G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b, ba, aba, a^2ba, a^3ba\},$$

与第4节中的情况一样。如果我们按照上述集合中群元素的编号来标记 McKay 箭图的顶点，那么 McKay 箭图的环面表示如下（其中省略了箭，但一如既往，它们默认直接指向南方和东方）：

1	4	9	12	8	7	3	2	11	10	6	5	1
7	3	2	11	10	6	5	1	4	9	12	8	7
6	5	1	4	9	12	8	7	3	2	11	10	6
12	8	7	3	2	11	10	6	5	1	4	9	12
11	10	6	5	1	4	9	12	8	7	3	2	11
4	9	12	8	7	3	2	11	10	6	5	1	4
3	2	11	10	6	5	1	4	9	12	8	7	3
5	1	4	9	12	8	7	3	2	11	10	6	5
8	7	3	2	11	10	6	5	1	4	9	12	8
10	6	5	1	4	9	12	8	7	3	2	11	10
9	12	8	7	3	2	11	10	6	5	1	4	9
2	11	10	6	5	1	4	9	12	8	7	3	2
1	4	9	12	8	7	3	2	11	10	6	5	1

特别地，McKay 箭图的每一行和每一列都包含顶点 1，这对应于 ab 的阶等于 G 的阶的一半这一事实。根据定理 5.2，可知在此情形下 Auslander 映射是一个同构。

箭图的环面表示还表明，不变环 A^H 由五个元素生成，它们分别对应于 Λ 中从顶点 1 到自身、长度为 4、8、8、12 和 12 的路径。事实上，可以证明 McKay 箭图与 $_1{}_{12}(1, 5)$ 奇点的 McKay 箭图相同，因此 A^H 是非 Gorenstein 型 $\mathbb{A}$ 奇点（参见 [Wem11] 的第 5 节和第 6 节）。

5.2. 不变环的正则性。本节将准确确定命题 3.1 中一对 (A, G) 所对应的不变环何时为 AS 正则。

假设 $G = \langle a、\ b \mid \mathcal{R}\rangle$ 如命题 3.1 中所述，因此特别地，$a^2 = b^2$ 必须是 G 中的一个关系。由于 G 是有限的，可以推出 a 和 b 必须具有相同的阶，ab和 ba 也必须如此；分别将这些阶记为 i 和 m，由于 G 是非阿贝尔的，这两个阶都为 $\geqslant 2$ 。特别地，

$$1_G = (ab)^m(ba)^m = a^{4m}$$

因此 $i \leqslant 4m$。由此可知，G 必须是该群的一个商群。

$$\Gamma_m := \langle a, b \mid a^2 = b^2, a^{4m} = b^{4m} = (ab)^m = (ba)^m = 1_G\rangle.$$

引理 5.4。$|\Gamma_m| = 4m^2$。

证明。令 ω 为 $2m$ 次本原单位根，若我们将 a 和 b 与矩阵..... es

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

那么容易验证它们满足 Γ_m 中的关系。这产生了 Γ_m的某个商的表示，但特别地，它告诉我们 a 的阶为 $4m$。注意到 $\Gamma_m/\langle a^2\rangle \cong D_m$，其中 D_m 是阶为 $2m$的二面体群，我们发现

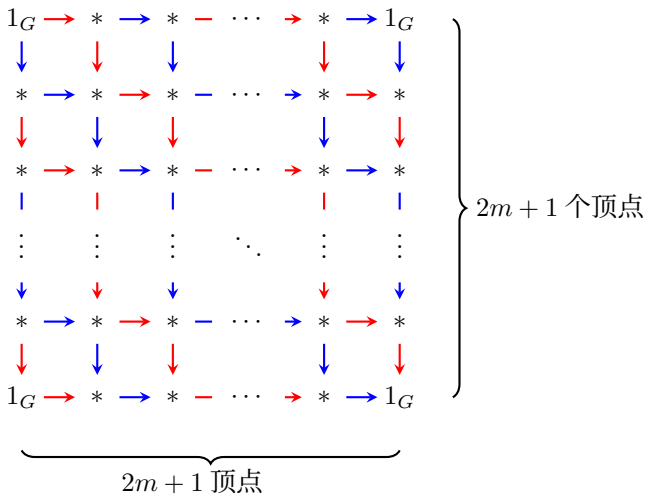
$$\frac{|\Gamma_m|}{2m} = \frac{|\Gamma_m|}{|\langle a^2\rangle|} = |D_m| = 2m,$$

使得 $|\Gamma_m| = 4m^2$。 □

利用这一点，我们可以证明本节的主要结果：

定理 5.5. A_{1_G} 是 AS 正则的，当且仅当 $G = \Gamma_m$，其中某个 m。

证明. 沿用上述记号，若假设 ab 的阶为 m，则可知 G 必定是 Γ_m 的一个商。因此，相应 McKay 箭图的环面表示具有如下形式：



在此图中，星号表示 G 的任意元素，其中可能包括单位元。

根据我们在第4节中的约定，红色箭头标记为 u，蓝色箭头标记为 v；顶行的顶点序列为 1_G、a^{-1}、$b^{-1}a^{-1}$、$a^{-1}b^{-1}a^{-1}$、.....、1_G，共有 $2m+1$ 个顶点，因为 ab 的阶为 m。对左侧列也可作类似分析。特别地，第一行和最后一行以及最左列和最右列中的星号均不对应于 1_G。

现在，根据定理 2.6，我们有 $A_{1_G} \cong e_1\Lambda e_1$。从上面对 Q 的表示可以看出，存在一条从 1_G 到自身的水平路径和一条垂直路径，二者长度均为 $2m$，且它们都不能分解为从 1_G 到自身的较短路径之积。因此，可以将这些元素选作 $e_1\Lambda e_1$ 的生成集中的元素；将水平路径 x 和 the

垂直路径 y。在 A_{1_G} 中，这些元素分别对应 $(uv)^m$ 和 $(vu)^m$。

首先，假设对于某个 m，有 $G = \Gamma_m$ 。如果我们忽略McKay箭图右侧的顶点和最底行的顶点（它们分别已经通过与左侧和最顶行的顶点相识别而被计入），那么剩下的顶点恰好有 $2m \times 2m = 4m^2$ 个。此外，每个顶点都标记有一个群元素，并且每个群元素至少必须在这些顶点中出现一次。由于 $|\Gamma_m| = 4m^2$，每个群元素恰好出现一次。特别地，单位元只出现在环面表示的角点处。因此，箭图中从 1_G 到自身的每条路径都可以表示为路径 x 和 y的复合，从而x 和 y 生成 $e_1\Lambda e_1$。直接检查可知，它们交换且不满足其他关系，因此 $A_{1_G} \cong e_1\Lambda e_1$ 是一个二元多项式环。特别地，它是 AS 正则的。

现在假设 $G \neq \Gamma_m$。特别地，它是 Γ_m 的真商群 Γ_m/N，其中 N 是 Γ_m 的正规子群；我们声称这迫使 a 在 Γ_m/N 中的像的阶 i 严格小于 $4m$。事实上，如果 $i = 4m$，那么

$$\frac{|\Gamma_m/N|}{2m} = \left|\frac{\Gamma_m/N}{\langle a^2N\rangle/N}\right| = \left|\frac{\Gamma_m}{\langle a^2\rangle}\right| = |D_m| = 2m,$$

其中 D_m 是阶为 $2m$ 的二面体群。因此， Γ_m/N 的阶为 $4m^2$，这与它是 Γ_m 的真商群这一事实矛盾。由此可知，我们必有 $i < 4m$。现在， $u^i \in A_{1_G}$，它显然不是 $(uv)^m$ 和 $(vu)^m$ 的线性组合。此外，它也不可能是 $(uv)^m$ 和 $(vu)^m$ 的二次（或更高次）表达式，因为这种表达式的次数至少为 $4m$，大于 i。我们注意到， u^i 本身未必是生成元，但在这种情况下，需要额外的生成元才能得到 u^i。无论哪种情况， A_{1_G} 至少需要三个生成元。然而，如果 A_{1_G} 是 AS 正则的，那么它将是二维的，因此有两个生成元；所以它不可能是 AS 正则的。□

备注 5.6。在无法将 u^i 作为不变环的生成元的情况下，最小的群（带有其在 $\Bbbk\langle u、 v\rangle/\langle u^2 - v^2\rangle$ 上隐含的 G-分次）阶为 48，其表示

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2, a^{16} = (a^7b)^3 = 1_G\rangle.$$

在此情形下， u 的最小不变幂为 u^{16} ，且 A_{1_G} 由$(uv)^{24}$,$(vu)^{24}$、 $u^3(vu)^2v$和 $u^2(vu)^3$生成；其中， u^{16} =$(u^3(vu)^2v)(u^2(vu)^3)$。

References

[AS87] M. Artin and W. F. Schelter, *Graded algebras of global dimension 3*, 《数学进展》66 (1987)，第 2 期，171–216 页。[ATVdB07] M. Artin、J. Tate 和 M. Van den Bergh, *Some algebras associated to automorphisms of ellipticcurves*, 《格罗滕迪克纪念文集：为纪念亚历山大·格罗滕迪克 60 岁生日而撰写的论文集》(2007)，33–85 页。[Aus86] M. Auslander, *Rational singularities and almost split sequences*, 《美国数学会汇刊》293 (1986)，第 2 期，511–531 页。[BH98] W. Bruns 和 J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*，第 39 卷，剑桥大学出版社，1998 年。[BHZ19] Y.-H. Bao、J.-W. He 和 J. J. Zhang, *Pertinency of Hopf actions and quotient categories of Cohen-Macaulay algebras* **13** 2019 2, 667 710 ，《非交换几何杂志》（），第 – 期。[Che55] C. Chevalley, *Invariants of finite groups generated by reflections*, 《美国数学杂志》77 (1955)，第 4 期，778–782 页。[CKWZ18] K. Chan、E. Kirkman、C. Walton 和 J. J. Zhang, *McKay correspondence for semisimple Hopf actions on regular graded algebras I* **508** 2018 512 538 ，《代数学杂志》（），— 页。[CKWZ19] , *McKay correspondence for semisimple Hopf actions on regular graded algebras, II*, 《非交换几何杂志》13 (2019)，第 1 期，87–114 页。[CKZ17] J. Chen、E. Kirkman 和 J. J. Zhang, *Rigidity of down-up algebras with respect to finite group coactions* **221** 2017 3103 ，《纯粹与应用代数杂志》（），第 12 期，3089– 页。[Cra20] S. Crawford, *Actions of small groups on two-dimensional Artin-Schelter regular algebras*, 《代数学杂志》560 (2020)，609–666 页。[Cra22] , *Superpotentials and quiver algebras for semisimple Hopf actions*, 《代数与表示论》(2022)，1–44 页。[EW14] P. Etingof 和 C. Walton, *Semisimple Hopf actions on commutative domains*, 《数学进展》251 (2014)，47–61 页。[FKMW20] L. Ferraro、E. Kirkman、W. F. Moore 和 R. Won, *Three infinite families of reflection Hopf algebras*, 《纯粹与应用代数杂志》224 (2020)，第 8 期，106315。[JZ00] P. Jørgensen 和 J. J. Zhang, *Gourmet's guide to Gorensteinness*, 《数学进展》151 (2000)，第 2 期，313–345 页。

[Kir16] E. Kirkman, *Invariant theory of Artin-Schelter regular algebras: a survey*, 《表示论最新进展》第 673 卷, 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2016 年，第 25–50 页。[KKZ09] E. Kirkman, J. Kuzmanovich 和 J. J. Zhang, *Gorenstein subrings of invariants under Hopf algebra actions* **322** 2009 10, 3640 3669 , 《代数学杂志》 () , 第 – 期。[KL00] G. R. Krause 和 T. H. Lenagan, *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension*, 第 22 卷，美国数学会，2000 年。[Mon93] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, 第 82 卷，美国数学会，1993 年。[PQ95] D. S. Passman 和 D. Quinn, *Burnside's theorem for Hopf algebras*, 《美国数学会会刊》123 (1995)，第 2 期，327–333 页。[ST54] G. C. Shephard 和 J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, 《加拿大数学杂志》6 (1954)，274–304 页。[Ste96] D. R. Stephenson, *Artin–Schelter regular algebras of global dimension three*, 《代数学杂志》183 (1996)，第 1 期，55–73 页。[Ste97] , *Algebras associated to elliptic curves*, 《美国数学会汇刊》349 (1997)，第 6 期，2317–2340 页。[Wem11] M. Wemyss, *The GL(2,C) McKay correspondence*, 《数学年刊》350 (2011)，第 3 期，631–659 页。[Zhu22] R. Zhu, *Auslander theorem for PI Artin-Schelter regular algebras*，arXiv 预印本 arXiv:2205.07291 (2022)。

The University of Manchester, Alan Turing Building, Oxford Road, Manchester, M13 9PL, United Kingdom*Email address*: simon.crawford@manchester.ac.uk