arXiv:2304.05965v1 [math.CT] 12 Apr 2023

# 用于 (∞, 2)-范畴的与模型无关的 Gray 张量积

TIMOTHY CAMPION 和 YUKI MAEHARA

Abstract. 我们构造了 (∞,2)-范畴的一个（松弛）Gray张量积，并通过一个与模型无关的泛性质对其进行刻画。也就是说，它是 (∞,2)-范畴的 ∞-范畴上唯一的幺半闭结构；当限制在Gray立方体（即箭头范畴的 Gray 张量幂 $[1]^{\otimes n}$ ）上时，该结构与严格 2-范畴的经典 Gray 张量积一致。

Contents

0. 引言 1
1. 背景 3
2. $\Theta_2$ in 立方体 9
3. Gray 张量积 13
参考文献 15

## 0. Introduction

Gray张量积最初由Gray [Gra74] 在严格 2-范畴的语境中引入。此后，各位作者在各种模型中将其扩展到了严格 $\omega$-范畴，以及弱 $(\infty,\infty)$-范畴和$(\infty, 2)$-范畴（我们将在下文不久详细回顾相关文献）。尽管这些模型之间存在各种比较结果，但“Gray 张量积”的泛滥引出了这样一个问题：如何更加抽象地刻画 Gray张量积。在本文中，我们通过证明（定理 3.3）第二作者 [Mae21] 的 Gray 张量积事实上从 2-拟范畴模型下降为 ∞-范畴 (∞,2)-Cat（即 (∞,2)-范畴）上的一个幺半结构，来回答这一问题。此外，我们证明（推论 3.5），这个“Gray 张量积”具有一个泛性质：它是 (∞, 2)-Cat上唯一一个与Gray立方体上的经典Gray 张量积一致的幺半双闭结构（即箭头范畴的 Gray 张量幂 $\square^n = [1]^{\otimes n}$ ）。通过这种方式，我们将(∞,2)-Cat 上 Gray 张量积的规定，归结为对少量组合数据的规定。

让我们将这一结果置于背景中。严格 2-范畴的Gray 张量积是在 [Gra74] in中引入的，旨在研究松自然变换。它是严格2-范畴的1-范畴 2-Cat上的幺半双闭结构 $\otimes$ ，使得左（分别地，右）内Hom $[\![A、B]\!]$ 以严格2-函子 $A \to B$ 为对象，以松（分别地，余松）自然变换为1-态射，并以修正为 2-态射。幺半结构的单位是终端范畴 $\square^0$，且Ob$(A \otimes B) =$ Ob $A \times$ Ob $B$。箭头范畴 $[1]$ 的前几个Gray 张量幂绘于图1 中。一般而言，幂 $[1]^{\otimes n}$ 是一个松的 $n$-维立方体。Gray 的构造后来得到了扩展

*Date*: 2023年4月13日。

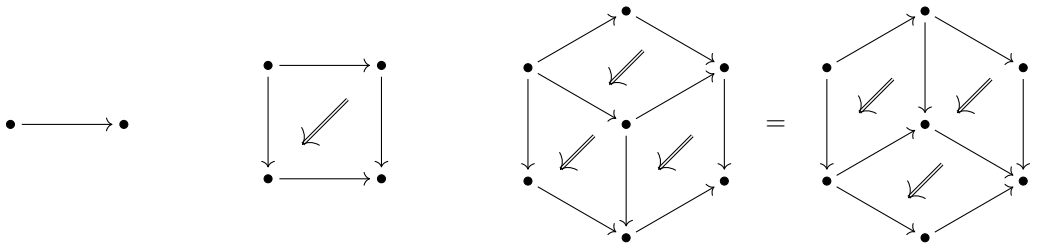


FIGURE 1. $\square^1 = [1]$、 $\square^2 = [1] \otimes [1]$ 和 $\square^3 = [1] \otimes [1] \otimes [1]$

到严格的 $\omega$-范畴，使用拼接方案 [Cra95], 立方 $\omega$-范畴 [AABS02] 以及增广有向复形 [Ste04]。

多位作者为一般的$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$上的（弱）$(\infty, n)$-范畴构造了相关的幺半结构。Verity 的拟范畴模型 [Ver08] 具有幺半结构和 Quillen 双函子，二者弱等价且具有良好的同伦性质。将两个版本的张量积反映到适当的子范畴后，它们便彼此一致，从而在 $(\infty, n)$-Cat 上得到幺半双闭结构（参见 [CKM20，定理 1.33]）。拟范畴模型（[CKM20], [DKM23]）也给出了幺半模型结构，而 [DKM23] 的比较表明，这些模型在双函子层面上与 Verity 的模型一致。得益于 [Lou22] （二维情形下的 [GHL22] ）和 [DKM23] 的工作，这些模型还与 [BSP21] 意义下具有普适性的模型进行了比较。 [JFS17] 也对迭代完全 Segal 空间中的相关组合结构进行了详细研究，但该工作尚未与 Gray 张量积的其他模型进行比较。

更具体地说，在二维情形中， [GR17] 为（$\infty$, 2）-范畴构造了一个称为“Gray 张量积”的双函子，并猜想它具有幺半双闭结构。在 [Mae21] 中，作者为 2-拟范畴构造了一个 Gray 张量积，但在点集层面，该张量积仅为弱幺半的，因此它能否下降为（$\infty$, 2）-Cat 上的幺半双闭结构并非显而易见。在 [GHL21] 中，作者为缩放单纯集合构造了一个具有幺半双闭结构的 Gray 张量积。该幺半结构的底层双函子也被证明在 $\infty$-范畴层面与 [Ver08] 的双函子（也就是其二维情形）一致（因而也与 [CKM20] 的一致），并且作者还迈出了将其与 [GR17]的模型进行比较的步伐。

在本文中，我们借助 [Mae21] 的结果，给出一种新的（$\infty$, 2）-范畴 Gray 张量积构造，并为其证明一个泛性质。具体而言，我们证明（定理 3.3），（$\infty$, 2）-范畴的 $\infty$-范畴上存在一种幺半双闭结构，且它由如下性质唯一刻画（推论 3.5）：在“Gray 立方体” $\square^n$ 上（这里， $\square^n = [1]^{\otimes n}$ 是区间的 Gray 张量幂），该幺半结构与更为人熟知的严格 Gray 张量积一致。我们的证明不涉及太多组合学（只要愿意接受[Mae21] 的结果），因为我们需要处理的严格 2-范畴只有这些 Gray 立方体和 Joyal 范畴 $\Theta_2$中的对象，而它们全都是相对简单的偏序集富集范畴。

遗憾的是，从某种意义上说，我们的泛性质“过于强大”：对于给定的 Gray 张量积模型，要验证它在 Gray 立方体上的表现符合预期，可能并不容易。例如，关于 2-拟范畴情形，请参见 [Mae21, §7] 。特别是，我们无法立即看出我们自己的 Gray 张量积与先前已知的模型 [Ver08], [CKM20], [GHL21], [GR17], 以及 [JFS17]之间的比较结果。

我们对幺半双闭结构的构造如下进行。我们从 $\square = \{\square^0, \square^1, \square^2, \dots\}$ Gray 立方体范畴上的经典 Gray 张量积开始，并将其扩展到ᵏꝏ

在其上的空间预层 ∞-category Psh(□) 中，使用 ∞-范畴论的 Day 卷积（定理 3.1）。接着我们证明，(∞, 2)-Cat 是这个预层范畴的一个典范局部化，即包含映射 □ → (∞, 2)-Cat 是稠密的（推论 2.11）。事实上，我们证明了更强的结论（参见第一作者的 [Cam22]）：Joyal 的范畴 $\Theta_2$ 包含在 □ 的幂等完备化中（定理 2.1）；由于众所周知 $\Theta_2 \to (\infty, 2)$-Cat 是稠密的，这便根据下文第 1.2 节回顾的稠密性的基本性质，推出 □ → (∞, 2)-Cat 的稠密性。我们没有给出这个局部化的显式生成元。尽管如此，借助 [Mae21] 的工作，我们可以通过形式论证推得 (∞, 2)-Cat ⊂ Psh(□) 是一个指数理想，因此根据 ∞-范畴论的 Day 反射定理，Day 卷积 Gray 张量积会下降为 (∞, 2)-Cat 上的一个幺半双闭结构（定理 3.3）。Day 卷积与 Day 反射的相关泛性质使我们得以直接读出这个 Gray 张量积的模型无关泛性质（推论 3.5）。

本文结构如下。我们在第 1 节介绍一些背景。第 1.1 节中，我们固定一些记号。第 1.2 节中，我们回顾关于∞-范畴情形下稠密性和幂等完备化的一些事实。第 1.3 节中，我们回顾 [Gra74] 的严格 2-范畴的 Gray 张量积。第 1.4 节中，我们回顾第二位作者的论文[Mae21]中 2-拟范畴的 Gray 张量积。在第 2 节中，我们证明包含映射 □ → (∞, 2)-Cat 是稠密的（推论 2.11），更具体地说，Joyal 的范畴 $\Theta_2$ 包含在 □ 的幂等完备化中（定理 2.1）。事实上，这由 [Cam22], 的主要结果可得（注记 2.3），但我们更愿意给出一个二维情形下的直接证明。最后，在第 3 节中，我们通过 Day 卷积和反射构造 Gray 张量积（定理 3.1 和定理 3.3），并据此得出所需的泛性质（推论 3.5）。

0.1.致谢。没有 Alexander Campbell 最初的洞见和启发，并且没有他慷慨地与 YM 分享这些成果，本项目不可能启动。我们感谢 Aaron Mazel-Gee 和 Dominic Verity 的有益交流。TC感谢 ARO 通过 MURIGrant W911NF-20-1-0082 提供的支持。YM 由衷感谢 Australian Mathematical Society Lift-Off Fellowship 以及 JSPS KAKENHI Grant Number JP21K20329 提供的支持。

## 1. Background

本节汇集了之后将会用到的若干背景知识。我们在第1.1 节首先确定一些记号和约定，主要涉及 ∞-范畴和单幺∞-范畴。在简短的第1.2节中，我们回顾 ∞-范畴背景下关于稠密性和幂等完备化的一些事实。在第1.3 节中，我们回顾 [Gray74]严格 2-范畴的Gray 张量积。在第1.4节中，我们回顾第二作者论文 [Mae21] 中的 2-拟范畴的 Gray 张量积。

1.1. 记号。本文中，“∞-范畴”一词意为“(∞, 1)-范畴”，更确切地说是“拟-单纯范畴”；我们的主要参考文献是 [Lur09a] 和 [Lur]。我们用 (∞, 2)-Cat 表示由 (∞, 2)-范畴构成的 ∞-范畴，其定义可参见 [BSP21]。

我们用 Spaces 表示空间的 ∞-范畴。设 $\mathcal{C}$ 是一个小型 ∞-范畴（例如，$\mathcal{C}$ 可以是一个小型 1-范畴）。我们用 Psh($\mathcal{C}$) 表示 $\mathcal{C}$ 上以 Spaces 为值的预层构成的 ∞-范畴。我们用 $\text{ɣ}\colon \mathcal{C} \to$ 表示 Psh($\mathcal{C}$) 的 Yoneda 嵌入。对我们而言，Psh($\mathcal{C}$) 由哪个拟范畴表示并不重要：只需在等价意义下相同即可。因此，例如，Psh($\mathcal{C}$) 可以用 $\mathcal{C}$ 上的左纤维化来建模。只要 (∞, 2)-Cat 是一个全子范畴（通常当 $\mathcal{C}$ 稠密，即 $\mathrm{N}_{\mathcal{C}}$ 全忠实时），我们就统称神经函子为 $\mathrm{N}_{\mathcal{C}} : (\infty, 2)\text{-Cat} \to \text{Psh}(\mathcal{C})$。

一个幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 是一个在 $E_1$-运算子上的 ∞-运算子 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 余笛卡尔纤维化，这符合 [Lur]的定义。若 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ 是幺半 ∞-范畴，则我们用 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{lax}}_{E_1}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 表示从 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 到 $F$ 的松幺半函子以及它们之间的幺半变换所构成的 ∞-范畴（按 [Lur], 的记号，这应写作 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{C}/E_1}(\mathcal{D})$）。我们用 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{strong}}_{E_1}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 表示强幺半函子 $F$: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$所构成的全子范畴（按 [Lur], 的记号，这应写作 $\mathrm{Fun}^{\otimes}_{E_1}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$）。我们令 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{lax\ cocts}}_{E_1}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

并用 $\mathrm{Fun}_{E_1}^{\text{strong cocts}}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 表示其中要求函子保持余极限的全子范畴。

设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半闭 $\infty$-范畴，且设 $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{C}$ 是一个全子范畴。我们称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个指数理想，如果对于任意 $C\in\mathcal{C}$ 和 $D\in\mathcal{D}$，左、右内部 Hom $[C,D]^l$ 和 $[C,D]^r$ 均属于 $\mathcal{D}$。

我们将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathrm{Spaces}$ 记作 $\infty$-范畴 $\mathcal{C}$ 的 Hom 函子。我们将 $\mathrm{Nat}=\mathrm{Hom}^{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}$ 记作 $\infty$ 范畴 $\mathcal{C}$，并将 $\mathrm{Fun}=\mathrm{Hom}^{(\infty,2)\text{-}\mathsf{Cat}}$ 记作。

1.2. $\infty$-范畴。回顾一下，$\infty$-范畴的函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 如果诱导出的函子 $F^*\mathcal{D}\to\mathrm{Psh}(\mathcal{C})$是全忠实的，则称其为稠密（或者用 [Lur09b的定义4.4.2] 中的术语称为强生成——由于"稠密"是相应概念在 1-范畴中的名称，因此更倾向于使用"稠密"）。

引理 1.1. 设 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}\subseteq\mathcal{C}$ 为满子-$\infty$-范畴的包含映射。假设 $\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ 稠密。那么 $\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 稠密。

证明。此即 [Lur09b，注 4.4.7]。 □

引理 1.2. 设 $\mathcal{A}\to\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 为满子-$\infty$-范畴的包含映射。假设 $\mathcal{B}$ 包含于 $\mathcal{A}$的幂等完备化中。当且仅当 $\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ 稠密时，$\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 稠密。

证明。这由限制函子 $\mathrm{Psh}(\mathcal{B})\to\mathrm{Psh}(\mathcal{A})$ 是一个等价（参见 [Lur09a，5.1.4.9][1]）这一事实得出。□

注 1.3. 设 $\mathcal{A}$ 是一个恰好为 1-范畴的 $\infty$-范畴。那么 $\mathcal{A}$ 的幂等完备化 $\tilde{\mathcal{A}}$ 也是一个 1-范畴，因为 $\mathcal{A}$ 中的每个 Hom 空间都是 $\mathcal{A}$ 中某个 Hom 空间的收缩（因为每个对象都是 $\mathrm{Psh}(\mathcal{A})$ 中一个可表对象的收缩——见 [Lur09a，5.1.4.2][2] 的证明），因此本质上是离散的。因此，$\mathcal{A}$ 与 $\tilde{\mathcal{A}}$ 在 1-范畴意义下的幂等完备化一致，它由 $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\text{集合})$ 中可表对象的收缩构成（另见 [Lur09a，5.1.4.2] 的证明）。

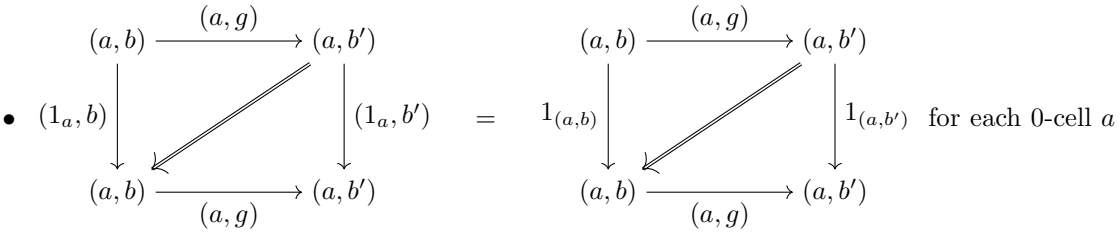
1.3.2-范畴的 Gray 张量积。本小节回顾 2-Cat 上的（松弛）Gray 张量积 $\otimes_{\square}$ 在 2-Cat [Gra74，定理 I.4.9]。$\otimes_{\square}$ 中的下标表明，我们考虑的是2-Cat上的Gray 张量积，而不是后来介绍的 $\Theta_2$ 或（$\infty$，2）-Cat 上的 Gray 张量积。

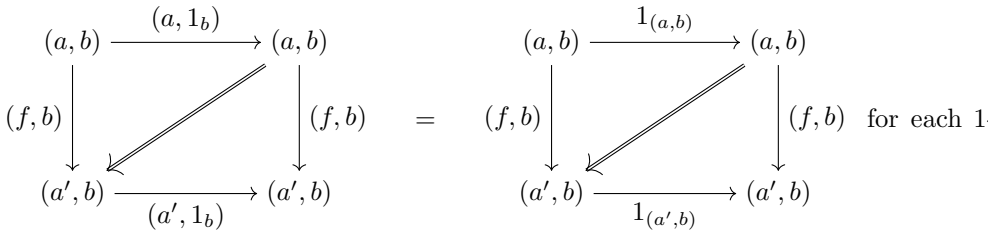
定义 1.4. 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 为 2-范畴。Gray 张量积 $\mathcal{A}\otimes_{\square}\mathcal{B}$ 是由以下数据自由生成的 2-范畴:

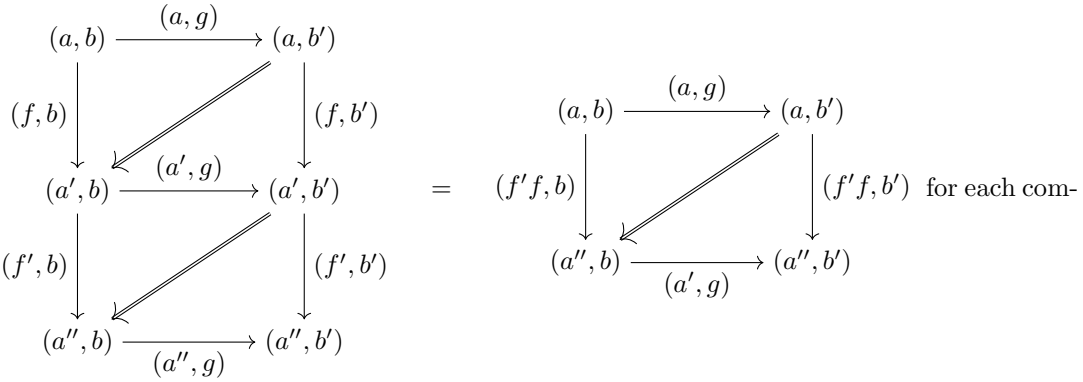
- 一个0-胞$(a,b)$，对应于 $\mathcal{A}$ 中的每个 0-胞 $a$ 和 $\mathcal{B}$ 中的每个 0-胞 $b$，
- 一个1-胞 $(f,b):(a,b)\to(a',b)$ 对每个1-胞 $f:a\to a'$ 在 $\mathcal{A}$中，以及每个0-胞 $b$在 $\mathcal{B}$中，
- 对于每个 0-胞 $a$in $\mathcal{A}$以及每个 1-胞 $g:b\to b'$in $\mathcal{B}$，都有一个 1-胞 $(a,g):(a,b)\to(a,b')$，
- 对于每个 2-胞腔 $\alpha:f\to f'$in $\mathcal{A}$以及每个 0-胞 $b$in $\mathcal{B}$，都有一个 2-胞腔 $(\alpha,b):(f,b)\to(f',b)$，
- 每个 0-胞 $a$，$\beta$以及每个 2-胞腔 $a:g\to(a,g')$ 对于每个 0-胞 $a$ 属于 $\mathcal{A}$ 以及每个 2-胞腔 $\beta:g\to g'$ 属于 $\mathcal{B}$，并且 $(a,b)\,(a,b')\,(a,g)$
- 一个 2-胞腔 $(f,b)$（$f,b'$）对于每个 1-胞 $f:a\to a'$在 $\mathcal{A}$以及每个 1-胞$(a',b)$（$a',b'$）$g:b\to b'$ 在 $\mathcal{B}$

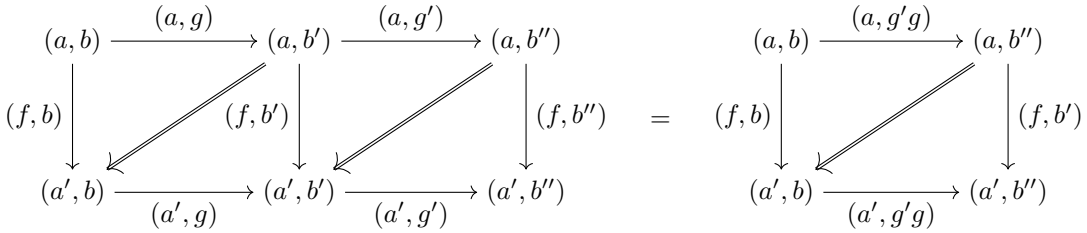
[1]此处引用的是 [Lur09a] 的在线版本。[2]此处引用的是 [Lur09a] 的在线版本。

满足以下条件：

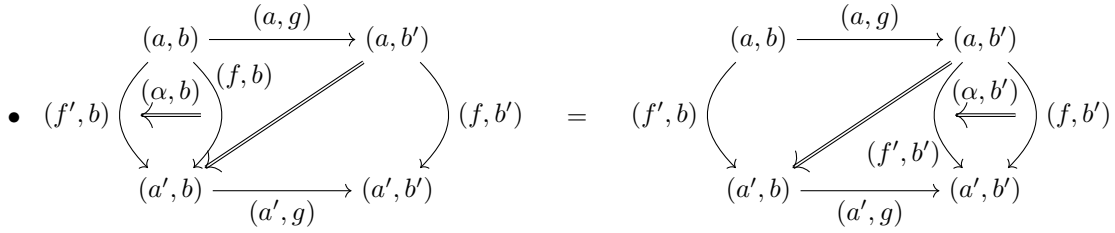
- 指派 $x \mapsto (x, b)$ 对于 $\mathcal{B}$ 中的每个 0-胞 $b$ 都是一个 2-函子 $\mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes_{\square} \mathcal{B}$，
- 赋值 $y \mapsto (a, y)$ 是一个 2-函子 $\mathcal{B} \to \mathcal{A} \otimes_{\square} \mathcal{B}$，对每个 0-胞 $a \in \mathcal{A}$，
- 

for each 0-cell $a$ 在 $\mathcal{A}$ 中，以及对每个 1-胞 $g\colon b \to b' \in \mathcal{B}$,
- 

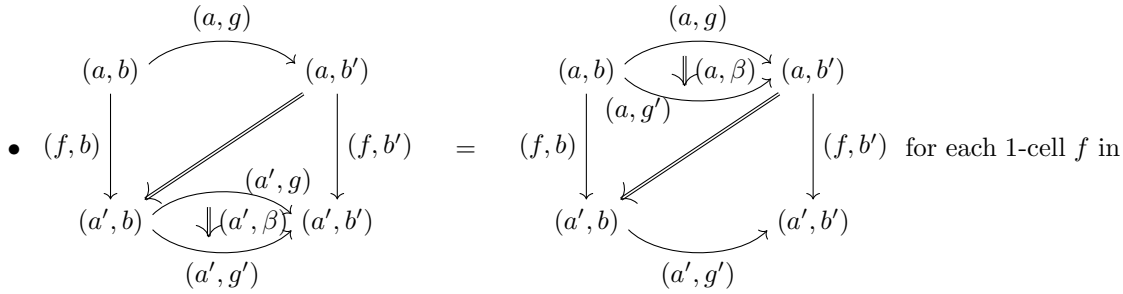
for each 1-cell $f$ : 在 $a \to a'$ 中，以及对每个 0-胞 $b \in \mathcal{B}$,
- 

for each com- 可复合的 1-胞对 $f, f' \in \mathcal{A}$，以及对每个 1-胞 $g \in \mathcal{B}$,
- 

对于 $\mathcal{A}$ 中的每个 1-胞 $f$，以及 $\mathcal{B}$ 中的每一对可复合的 1-胞 $g$、$g'$，




- 对于每个2-胞腔 $\alpha$，在 $\mathcal{A}$ 中，以及每个 1-胞 $g$，在 $\mathcal{B}$ 中，并且




- for each 1-cell $f$ in $\mathcal{A}$ and each 2-cell $\beta$ in $\mathcal{B}$.

这个张量积是 2-Cat 上幺半双闭结构的一部分。

定义 1.5。对于 $d \geq 0$, $d$ 维 Gray 立方体 $\square^d$ 是 $d$ 个自由 1-胞的 Gray 张量积。我们将由 $\square^d$（其中 $d \geq 0$）张成的 2-Cat 的全子范畴记为 $\square$。

我们可以更明确地描述 $\square^d$ 如下。（参见 [Gra76, §2], [Str88, 定理 1] 或 [Mae21, 引理 3.5]。）

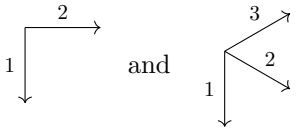
- $\square^d$ 的对象是长度为 $d$的二进制串 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d) \in \{0,1\}^d$。
- 若两个对象 $\boldsymbol{\epsilon}$、$\boldsymbol{\zeta}$ 满足对所有 $1 \leq a \leq d$都有 $\epsilon_a \leq \zeta_a$，则同态范畴 $\square^d(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\zeta})$ 是如下偏序集。– $\square^d(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\zeta})$ 的元素恰好是集合上的全序 $\preceq$。– 全序 $\preceq_1$ “小于” $\preceq_2$，记作 $\preceq_1 \blacktriangleleft \preceq_2$，，当且仅当对于任意满足 $a \preceq_1 b$的 $1 \leq a \leq b \leq d$，都有 $a \preceq_2 b$。否则，$\square^d(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\zeta})$ 为空。

$$\{a : \epsilon_a = 0, \quad \zeta_a = 1\}.$$

- 水平复合由偏序集的并给出。更明确地说，$\preceq_1$ in $\square^d(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\zeta})$ 与 $\preceq_2$ in $\square^d(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta})$ 的水平复合是由 $a \preceq b$ 给出的全序 $\preceq$，当且仅当：– $a \preceq_1 b$；– $a \preceq_2 b$；或 – $\epsilon_a = 0, \zeta_a = \eta_a = 1$, $\epsilon_b = \zeta_b = 0$ 和 $\eta_b = 1$。

直观地说，$\{a : \epsilon_a = 0, \quad \zeta_a = 1\}$ 是从 $\boldsymbol{\epsilon}$ 到$\boldsymbol{\zeta}$必须移动的方向集合，而 1-态射 $\preceq$ 只是对这些方向排序。2-态射 $\preceq_1 \blacktriangleleft \preceq_2$ 证明，相较于 $\preceq_1$，$\preceq_2$ 更接近通常序 $\leq$。

我们已在图2中描绘了 $\square^2$ 和 $\square^3$；在这些图中，方向按逆时针顺序排列：



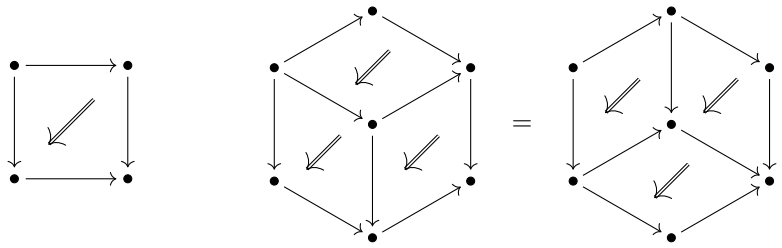


FIGURE 2. $\square^2$ 和 $\square^3$

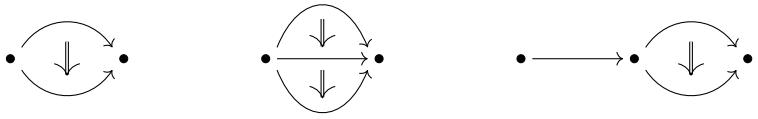


FIGURE 3. $\Theta_2$的对象

分别。二维 Gray 立方体是“lax 正方形”（图2左），其唯一的非平凡 2-态射见证了 $(2 \preceq 1) \blacktriangleleft (1 \preceq 2)$。三维 Gray 立方体是“交换立方体”（图2右），其长对角线是以下偏序集:

$$(2 \preceq 3 \preceq 1) \quad \blacktriangleleft \quad (2 \preceq 1 \preceq 3)$$

$$(3 \preceq 2 \preceq 1) \qquad\qquad (1 \preceq 2 \preceq 3)$$

$$(3 \preceq 1 \preceq 2) \quad \blacktriangleleft \quad (1 \preceq 3 \preceq 2)$$

1.4. $\Theta_2$-集合的 Gray 张量积。现在我们回顾 $\Theta_2$-集合的 Gray 张量积，来源于[Mae21]。

定义 1.6. 我们将由以下 Cat-富图自由生成的 2-范畴记作 $[n;\ \mathbf{q}] = [n;\ q_1,\ \ldots\ldots,\ q_n]$ :

- 其顶点为 0、1、……、 $n$,
- 若 $0 < k \leq n$ , 则 Hom$(k-1, k)$ 是偏序集 $[q_k] = \{0 < 1 < \cdots < q_k\}$，并且
- 所有其他同态集均为空。

我们用 $\Theta_2$ 表示由 $[n$张成的 2-Cat 全子范畴；$\mathbf{q}]$ 表示 $n \geq 0, q_1, \ldots, q_n \geq 0.$

例如， $[1;\ 1], [1;\ 2]$ 和 $[2;\ 0, 1]$（即生成的 Cat-富集图）如图 3 所示。

预层范畴 $[\Theta_2^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ 具有由 Ara [Ara14] 给出的模型结构。其纤维化对象称为 2-拟范畴，用来刻画 $(\infty, 2)$-范畴。我们如下定义 2-拟范畴版本的 Gray 张量积。记 $\mathrm{N}_\Theta : 2\text{-Cat} \to \Theta_2$ 为由包含映射 $\Theta_2 \to 2$-Cat 诱导的神经函子。

定义 1.7（[Mae21，定义 3.1]）。我们通过扩张复合映射来定义 2-拟范畴 Gray 张量积 $\otimes_\Theta$：

$$\Theta_2 \times \Theta_2 \to \Theta_2$$

$$\Theta \times \Theta \to \text{2-Cat} \times \text{2-Cat} \xrightarrow{\otimes_\square} \text{2-Cat} \xrightarrow{\mathrm{N}_\Theta} \widehat{\Theta_2}$$

对每个变量分别保余连续。

定理 1.8（[Mae21，定理 6.1]）。作为一个二元函子，$\otimes_\Theta$ 相对于 Ara 的模型结构是左 Quillen 的。

推论 1.9。双变量左伴随 $\otimes_\Theta\colon \Theta_2 \times \Theta_2 \to \Theta_2$ 诱导出一个双变量左伴随$\otimes_\Theta^L\colon (\infty, 2)\text{-Cat} \times (\infty, 2)\text{-Cat} \to (\infty, 2)\text{-Cat}$。

证明。由 [MG15，定理 4.6], Quillen 双函子会诱导出 $\infty$-范畴的双变量伴随，因此结论由定理 1.8 得出。□

注 1.10。函子 $\otimes_\Theta^L\colon (\infty,2)\text{-Cat}\times(\infty,2)\text{-Cat} \to (\infty,2)\text{-Cat}$ 显然将是我们在 $(\infty,2)$-Cat 上构造的幺半结构的底层函子。不过，事实上我们只能在下文的注 3.4 中间接推出这一点。

定理 1.11。我们有一个自然弱等价

$$\begin{array}{ccc} \square \times \square & \xrightarrow{\mathrm{N}_\Theta \times \mathrm{N}_\Theta} & \widehat{\Theta_2} \times \widehat{\Theta_2} \\ \downarrow{\scriptstyle \otimes_\square} & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle \otimes_\Theta} \\ \square & \xrightarrow[\mathrm{N}_\Theta]{} & \widehat{\Theta_2} \end{array}$$

证明。对于 $n \geq 0$，记 $\otimes_\Theta^n$ 为 $n$ 元 Gray 张量积，它作用于 $\Theta_2$ 上（定义方式与 $\otimes_\Theta^2 = \otimes_\Theta$ 相同，但以 2-Cat 上的 $n$ 元 Gray 张量积取代 $\otimes_\square$）。那么，对于任意$X_1$、……、$X_m$、$Y_1$、……、$Y_n \in \Theta_2$，我们有一个弱等价

$$\otimes_\Theta^2\big(\otimes_\Theta^m(X_1,\dots,X_m), \otimes_\Theta^n(Y_1,\dots,Y_n)\big) \to \otimes_\Theta^{m+n}(X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n)$$

根据 [Mae21，推论 7.11]。特别地，我们有一个弱等价

$$\mathrm{N}_\Theta(\square^m)\otimes_\Theta \mathrm{N}_\Theta(\square^n) \cong \otimes_\Theta^2\big(\otimes_\Theta^m(\square^1,\dots,\square^1), \otimes_\Theta^n(\square^1,\dots,\square^1)\big) \to \otimes_\Theta^{m+n}(\square^1,\dots,\square^1) \cong \mathrm{N}_\Theta(\square^{m+n}) \cong \mathrm{N}_\Theta(\square^m \otimes_\square \square^n)$$

从 $\otimes_\Theta$ 的构造可以看出，$\mathrm{N}_\Theta(\square^m) \otimes_\Theta \mathrm{N}_\Theta(\square^n)$ 中的一个 $\theta$-胞腔可表示为（但表示不唯一）一个五元组 $(\theta_1, \theta_2, F, F_1, F_2)$，其中：

- $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 是 $\Theta$中的2-范畴，
- $F\colon \theta \to \theta_1 \otimes_\square \theta_2$, $F_1\colon \theta_1 \to \square^m$ 和 $F_2\colon \theta_2 \to \square^n$ 是 2-函子。

上述弱等价将这样的 $\theta$-胞元发送到 $\mathrm{N}_\Theta(\square^m \otimes_\square \square^n)$ 中与该复合相对应的胞元

$$\theta \xrightarrow{F} \theta_1 \otimes_\square \theta_2 \xrightarrow{F_1 \otimes_\square F_2} \square^m \otimes_\square \square^n$$

（见 [Mae21，命题 7.2]）。根据这一显式描述，可以直接验证它关于 $\square^m, \square^n \in \square$ 的自然性。□

## 2. $\Theta_2$ in Cubes

在本节中，我们证明（定理 2.1） $\Theta_2$ 包含于 □的幂等完备化中。证明几乎贯穿整个章节。最后，我们推论得出（推论 2.11）， □ 在（$\infty$, 2）-Cat 中稠密。

定理 2.1。 $\Theta_2$ 的每个对象都是 □中某个对象的收缩核。

注记 2.2。定理 2.1 是一个 1-范畴论陈述。但根据注记 1.3，它同时也是一个 $\infty$-范畴论陈述。

注记 2.3。定理 2.1 可由第一作者 [Cam22 的推论 2.4],中的一个结果推出，该结果表明， $\Theta$ 的每个对象都是 $\omega$维立方体范畴 $\square_\omega$中某个对象的收缩核。为此，令 $\theta \in \Theta_2$。于是 $\theta \in \Theta$。因此存在 $\square^n \in \square_\omega$ 以及一个幂等态射 $e\colon\ \square^n \to \square^n$ ，其分裂为 $\theta$。严格 2-范畴反射是严格 2-范畴反射 $\square^n$ 上的一个幂等态射 $e_2:\ \square_2^n \to \square_2^n$ ，其分裂是严格 2-范畴反射 $\theta$。由于 $\theta \in \Theta_2$ 已经是一个严格 2-范畴，该幂等分裂就是其 $\theta$ 本身。

不过，我们在此更倾向于直接给出二维情形的证明。

固定 $[n;\ \mathbf{q}] = [n;\ q_1,\ .....,\ q_n] \in \Theta_2$，并令 $d = n + q_1 + \cdots + q_n$。在下面的一系列引理中，我们通过将 $[n;\ \mathbf{q}]$ 证明为 $\square^d$的一个收缩，来证明定理 2.1；也就是说，我们构造 2-函子$[n;\ \mathbf{q}]$ $\overset{S}{\rightarrow}\square^d$ $\overset{R}{\rightarrow}[n]$ ；$\mathbf{q}$，使得 $RS = 1$。

我们从章节 $S$ 开始：$[n;\ \mathbf{q}] \to \square^d$。

定义 2.4. 对于任意对象 $k \in [n; \mathbf{q}],$ ，我们将其秩定义为

$$\rho^\Theta(k) = k + q_1 + \cdots + q_k.$$

$S$ 的对象部分由以下给出。

$$S(k) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{\rho^\Theta(k) \text{ times}}, 0, \ldots, 0).$$

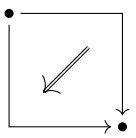
然后对于每个 $i \in [q_k] = \mathrm{Hom}_{[n;\mathbf{q}]}(k-1, k)$，像 $S(i)$ 必须是整数集合 $a$ 上的一个全序 $\preceq_{k,i}$ ，满足 $\rho^\Theta(k-1) < a \leq \rho^\Theta(k)$。这个全序是通过并得到的。

$$\big(\{\rho^\Theta(k-1)+1, \ldots, \rho^\Theta(k-1)+i\}, \leq\big) \quad \text{and} \quad \big(\{\rho^\Theta(k-1)+i+1, \ldots, \rho^\Theta(k)\}, \geq\big).$$

换言之，当且仅当 $a \preceq_{k,i} b$ ：

- $a \leq b \leq \rho^\Theta(k-1) + i$;
- $a \leq \rho^\Theta(k-1) + i < b$; 或者
- $\rho^\Theta(k-1) + i < b \leq a$。

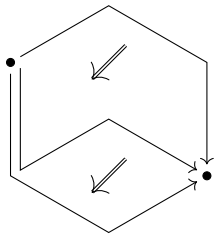
例 2.5. (a) 当 $[n; \mathbf{q}] = [1; 1],$时，我们有 $\rho^\Theta(0) = 0$，且 $\rho^\Theta(1) = 2$。2-函子 $S$将$0 \in [1] = \mathrm{Hom}_{[1;1]}(0, 1)$ 映到 $1 \preceq 0$ ，并将 $1 \in [1]$ 映到 $0 \preceq 1$。换言之， $S$ 只是取出松弛方形内部的 2-胞腔。我们可以将 $S$ 的作用形象地看作图 3 左图的一个扭曲版本:



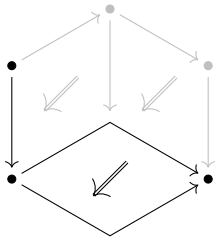
(b) 当 $[n;\mathbf{q}] = [1;2],$时，我们有 $\rho^{\Theta}(0) = 0,$ 且 $\rho^{\Theta}(1) = 3$。 $S$在 $\mathrm{Hom}_{[1;2]}(0,1) = [2]$上的作用由下式给出

$$0 \mapsto (3 \preceq 2 \preceq 1)$$
$$1 \mapsto (1 \preceq 3 \preceq 2)$$
$$2 \mapsto (1 \preceq 2 \preceq 3).$$

因此， $S$ 可以如下图示：



（c）当 $[n;\ \mathbf{q}] = [2;\ 0,1],$ $S$ 选取以下胞腔时：



**Le**引理 2.6。上述对应确实延拓为唯一的 2-函子 $S\colon [n;\mathbf{q}] \to \square^d$ .

证明。只需检验对于任意满足 $i \le j$ 的 $i$、 $j \in [q_k]$ ，都有 $\preceq_{k,i} \blacktriangleleft \preceq_{k,j}$。也就是说，我们必须证明 $\rho^{\Theta}(k-1) < a \le b \le \rho^{\Theta}(k)$ 且 $a \preceq_{k,i} b$ 蕴含 $a \preceq_{k,j} b$。

注意，在假设 $\rho^{\Theta}(k-1) < a \le b \le \rho^{\Theta}(k)$ 的情况下，我们有

$$a \preceq_{k,i} b \quad \text{iff} \quad a \le \rho^{\Theta}(k-1) + i$$

类似地

$$a \preceq_{k,j} b \quad \text{iff} \quad a \le \rho^{\Theta}(k-1) + j.$$

因此，所需的蕴含关系可由不等式 $i \le j$ 轻易得到。 □

接下来我们构造收缩 $R\colon \square^d \to [n;\ \mathbf{q}]$。

定义 2.7. 对于 $\square^d$ 中的任意对象 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d)$，我们将其秩定义为

$$\rho^{\square}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sum_{1 \le a \le d} \epsilon_a.$$

我们将 $R$ 的对象部分定义为

$$R(\boldsymbol{\epsilon}) = \max\bigl\{k : \rho^{\Theta}(k) \le \rho^{\square}(\boldsymbol{\epsilon})\bigr\}.$$

对于每个 $1 \le a \le d$，令 $\boldsymbol{\delta}^a \in \square^d$ 表示由下式给出的“第 $a$ 个单位向量”

$$\delta^a_b = \begin{cases} 1, & b = a, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

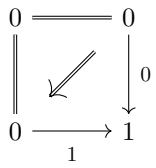
那么， $\square^d$ 的底层 1-范畴由下列形式的 1-胞自由生成

$$\{a\} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\delta}^a) \to \boldsymbol{\epsilon}$$

（其中 $\boldsymbol{\epsilon} \in \square^d$ 满足 $\epsilon_a = 1$）对应于单元素集合 $\{a\}$ 上唯一的全序。因此，为了描述 $R$ 的底层 1-函子，只需指定每个此类 $\{a\}$ 的像：$(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\delta}^a) \to \boldsymbol{\epsilon}$。

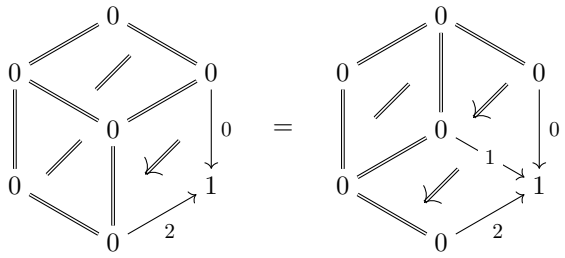
- 如果对于任何 $k$， $\rho^{\square}(\boldsymbol{\epsilon}) = \rho^{\Theta}(k)$ 都不成立，那么我们有 $R(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\delta}^a) = R(\boldsymbol{\epsilon})$。因此，$\{a\}$ 的像必定是该对象上的恒等态射。
- 假设对于某个 $k$， $\rho^{\square}(\boldsymbol{\epsilon}) = \rho^{\Theta}(k)$ 成立。在这种情况下， $\{a\}$ 的像必定是 $[q_k]$的某个元素。– 如果 $\boldsymbol{\epsilon} = S(k)$，并且 $a > \rho^{\Theta}(k-1)$，那么我们将 $\{a\}$ 映射到 $a - \rho^{\Theta}(k-1) - 1 \in [q_k]$。（注意， $\boldsymbol{\epsilon} = S(k)$ 和 $\epsilon_a = 1$ 蕴含 $a \leq \rho^{\Theta}(k)$，因此 $a - \rho^{\Theta}(k-1) - 1$ 确实是 $[q_k]$的一个有效元素。）– 否则，我们将 $\{a\}$ 映射到 $0 \in [q_k]$。

例 2.8. (a) 当 $[n; \mathbf{q}] = [1;\ 1],$时，2-函子 $R\colon \square^2 \to [1;1]$ 将对象 (1, 1) 映到 1，并将另外三个对象映到 0。对于余域为 (1, 1) 的两个原子 1-胞，它将定义域为 $(1, 0) = (1, 1) - \boldsymbol{\delta}^2$ 的那个映到 1，而将定义域为 $(0, 1) = (1, 1) - \boldsymbol{\delta}^1$ 的那个映到 0。我们可以通过在图2左侧的 0-胞和 1-胞旁标注它们各自的像来直观呈现这一点：

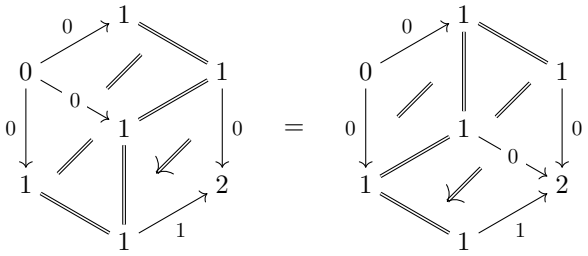


（这里的等号表示 $R$ 将该 1-胞映为恒等态射。）

(b) 当 $[n; \mathbf{q}] = [1; 2]$时， $R$ 可以表示为：

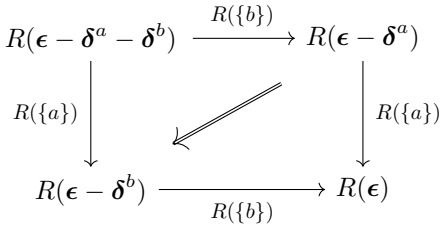


(c) 当 $[n;\ \mathbf{q}] = [2;\ 0, 1]$, $R$ 可表示为：

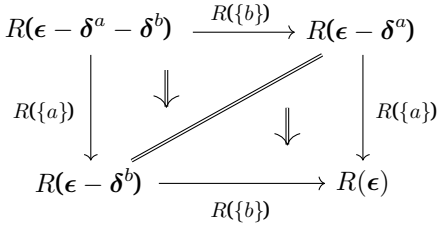


引理 2.9. 上述赋值确实唯一地扩张为一个 2-函子 $R\colon \square^d \to [n; \mathbf{q}]$。

证明。只需检查是否总存在一个（必然唯一的）2-胞腔




对于任意满足 $\epsilon_a = \epsilon_b = 1$ 的 $\epsilon \in \square^d$ 和 $1 \le a < b \le d$。注意，由于 $R$ 的对象部分完全由秩决定，我们有 $R(\epsilon - \delta^a) = R(\epsilon - \delta^b)$。因此，我们可以改为展示如下形式的 2-胞腔。




首先考虑上三角形。注意，若对任意 $k$， $\rho^{\square}(\epsilon - \delta^a) = \rho^{\Theta}(k)$ 均不成立，那么由于三角形的三条边都是恒等态射，我们显然有这样一个 2-胞腔。因此，假设存在某个 $k$，使得 $\rho^{\square}(\epsilon - \delta^a) = \rho^{\Theta}(k)$ 成立。注意， $\epsilon - \delta^a$ 不可能是 $S(k)$，因为它的第 $a$ 个坐标为 0，而第 $b$ 个坐标为 1。因此，顶边 $R(\{b\})$ 是 $0 \in [q_k]$，这就意味着所需的 2-胞腔存在。

对于下三角形，我们分别考虑以下几种情况。

- 若对任意 $k$， $\rho^{\square}(\epsilon) = \rho^{\Theta}(k)$ 均不成立，那么由于三角形的三条边都是恒等态射，我们显然可以得到所需的 2-胞腔。
- 若 $\rho^{\square}(\epsilon) = \rho^{\Theta}(k)$，但 $\epsilon \neq S(k)$，则显然可得所需的 2-胞腔，因为 $R(\{a\}) = R(\{b\}) = 0$。
- 假设对某个 $k$， $\epsilon = S(k)$ 成立。– 若 $a \le \rho^{\Theta}(k-1)$，则 $R(\{a\}) = 0 \in [q_k]$ 是始对象，因此可得所需的 2-胞腔。– 若 $a > \rho^{\Theta}(k-1)$，则不等式

$$R(\{a\}) = a - \rho^{\Theta}(k-1) - 1 > b - \rho^{\Theta}(k-1) - 1 = R(\{b\})$$

对应于所需的 2-胞腔。

证明至此完成。 □

引理 2.10. 复合 $RS$ 在 $[n$上是恒等态射；q]。

证明。容易验证，它在 0-胞上是恒等态射。对于 1-胞，固定 $i \in [q_k]$，并考虑其像 $S(i)$ 在 $\square^d$ 中分解为原子 1-胞的情形。容易验证（通过考察分解中出现的对象的秩）， $R$ 将除最后一个因子外的每个因子都映为 $k-1$ 处的恒等态射。最后这个因子是

$$\{\rho^{\Theta}(k-1) + i + 1\} : \left(S(k) - \delta^{\rho^{\Theta}(k-1)+i+1}\right) \to S(k),$$

并将其发送回期特码

$$\left(\rho^{\Theta}(k-1) + i + 1\right) - \rho^{\Theta}(k-1) - 1 = i.$$

证明至此完成。 □

定理 2.1 的证明。我们将 $\theta \in \Theta_2$ 展示为 $\square^d \in \square$ 的一个收缩。截面在定义 2.4 之后给出。收缩在定义 2.7 之后给出。该构造的正确性由引理 2.6、引理 2.9 和引理 2.10 保证。□

推论2.11。全忠实函子 $\square \to$ (∞,2)-Cat 是稠密的。明确地，受限 Yoneda 嵌入(∞, 2)-Cat $\to$ Psh(□) 是全忠实的，并具有一个左伴随 $L$。

~ ~证明。我们有 $\Theta_2 \subseteq \square \supseteq \square$ （其中 □ 是 □的幂等完备化），从而诱导出限制 ~函子 Psh($\Theta_2$) $\leftarrow$ Psh(□) $\to$ Psh(□)。如引理 1.2 所示，Psh(□) $\to$ Psh(□) 是一个等价。根据引理 1.1 和定理 2.1，Psh($\Theta_2$) $\leftarrow$ Psh(□) 是一个等价。众所周知， $\Theta_2$ 在(∞, 2)-Cat 中是稠密的（例如，(∞,2)-Cat 可以通过 Θ-空间模型来表示），即神经函子(∞,2)-Cat $\to$ Psh($\Theta_2$) 是全忠实的。与等价Psh($\Theta_2$) $\simeq$ Psh(□) $\simeq$ Psh(□) 复合后，我们发现神经函子 (∞,2)-Cat $\to$ Psh(□) 是全忠实的。左伴随 $L$ 同样可通过与从Psh($\Theta_2$)到 (∞, 2)-Cat 的局部化复合得到。□

## 3. The Gray Tensor Product

在本节中，我们使用上一节的结果，在(∞,2)-Cat 上构造 Gray 张量积（定理3.3）。构造分为两步。首先，我们通过 Day卷积将 $\otimes_\square$ 从 □ 扩展到 Psh(□)（定理3.1）。然后，我们利用第1.4 节中回顾的 $\otimes_\Theta$ 的良好性质，证明这个Day 卷积张量积下降到 (∞, 2)-Cat；根据推论 2.11，后者是 Psh(□)的一个全子范畴。最后，我们推导出Gray张量积的泛性质（推论 3.5）。鉴于前几节以及 [Lur], 的结果，本节中的论证完全是形式性的。

定理 3.1. Psh(□) 上存在一种幺半双闭结构 $\hat{\otimes}_\square$，使得 Yoneda 嵌入 $\text{ɣ}\colon \square \to$ Psh(□) 是强幺半的。此外，对于任意余完备的幺半 ∞-范畴 $\mathcal{E}$，若其余极限在每个变量上分别保持，则 ɣ 诱导出一个等价 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{lax}\ \mathrm{cocts}}_{E_1}$(Psh(□) $\mathcal{E}$) $\to \mathrm{Fun}^{\mathrm{lax}}_{E_1}(\square, \mathcal{E})$】【。

证明。这是 [Lur，命题4.8.1。10], 应用于以下情形： $\mathcal{K} = \emptyset$， $\mathcal{K}'$ 由所有小∞-范畴组成，且 $\mathcal{O}$ 是 $E_1$ 运算子，而 $\mathcal{C} = \square$视为关于 $\otimes_\square$的幺半范畴。（严格来说，我们由此得到上述陈述的修正版，即$\hat{\otimes}_\square$ 分别在每个变量中保持余极限；并且根据 ∞-范畴伴随函子定理（[Lur09a，推论5.5.2。9]），我们得到 Psh(□) 是幺半闭的。） □

引理 3.2. 设 $L\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : R$ 是 ∞-范畴的一个伴随 $L \dashv R$，其中 $R$ 是全忠实的。设 $T\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个双函子。假设存在一个函子 $H\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$，使得存在一个等价$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', H(C, D)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T(C', C)\ D)$，它关于 $C'$、$C$、$D$ 是自然的。则 $T$ 与局部化 $L$ 左相容，其含义是：若 $f\colon C'' \to C'$ 在 $C''$、$C' \in \mathcal{C}$ 处经 $L$ 映为等价，则 $f \otimes \mathrm{id}_{C'''}$ 经 $L$ 映为等价（对 $C''' \in \mathcal{C}$）。

证明。只需验证 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f \otimes \mathrm{id}_{C'''}, D) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T(C', C''')\ D) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T(C'', C''')\ D)$ 对于 $D \in \mathcal{D}$ 是一个等价。我们有

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T(C', C''')\ D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', H(C''', D)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C'', H(C''', D)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T(C'', C''')\ D)$,

正如所需。 □

定理 3.3。全忠实神经 (∞, 2)-Cat $\to$ Psh(□) 将 (∞, 2)-Cat 表示为定理 3.1 中幺半范畴 Psh(□) 的一个指数理想。因此，左伴随 $L$ to $\mathrm{N}_\square$ 是强幺半的。此外，对于任意完备余完备幺半 ∞-范畴 $\mathcal{E}$，若其余极限由 $\otimes$ 在每个变量中分别保持，则与 $L$复合会诱导一个全忠实函子

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{strong,cocts}}_{E_1}((\infty, 2)\text{-}\mathsf{Cat}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{strong,cocts}}_{E_1}(\mathsf{Psh}(\square), \mathcal{E})$$

其本质像由那些强幺半且保持余极限的函子 Psh(□) → $\mathcal{E}$ 组成，这些函子的底层函子下降为一个函子 (∞, 2)-Cat → $\mathcal{E}$。

证明。根据 [Lur，命题 4.1.7.4],，只需证明 $E_1$ 幺半结构 ˆ⊗□ 与局部化函子 $L$ 相容。也就是说，我们必须证明：若 $f\colon X \to Y$ 是预层之间的一个映射，且 $L(f)$ 是等价，则对于每个预层 $Z$， $L(f$ ˆ⊗□id$_Z)$ 和 $L($id$_Z$ ˆ⊗□$f)$ 都是等价。我们验证第一个断言；另一种情形的证明类似。由于 $L$ 与余极限相容，且 Psh(□) 在余极限下由可表对象生成，只需在 $Z = ょz$ 为可表对象时验证。

由引理 3.2，只需证明存在一个函子 $H\colon$ Psh(□)$^{\mathrm{op}}$ ×(∞, 2)-Cat → (∞, 2)-Cat，以及一个自然等价 Nat($X$, $H(Y, D)$) ≅ Nat($X$ ˆ⊗□$Y$, $D$)，其中 $X, Y \in$ Psh(□) 且 $D \in$ (∞, 2)-Cat。由推论 1.9，存在一个函子 $[-,-]$ : (∞, 2)-Cat$^{\mathrm{op}}$ × (∞, 2)-Cat → (∞, 2)-Cat，并带有一个自然等价 Fun($A \otimes^L_\Theta B, D$) ≅ Fun($A, [B, D]$)。我们将其限制为函子 □$^{\mathrm{op}}$ × (∞, 2)-Cat →(∞, 2)-Cat，然后 Kan 延拓为函子 $H\colon$ Psh(□)$^{\mathrm{op}}$ × (∞, 2)-Cat → (∞, 2)-Cat。我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Nat}(ょ\square^m, H(ょ\square^n, \mathrm{N}_\square D)) &\cong \mathrm{Nat}(ょ\square^m, \mathrm{N}_\square[\mathrm{N}_\Theta \square^n, D]) && \text{根据 } H\text{的定义}\\
&\cong \mathrm{Fun}(\mathrm{N}_\Theta \square^m, [\mathrm{N}_\Theta \square^n, D]) && \text{根据推论 2.11}\\
&\cong \mathrm{Fun}(\mathrm{N}_\Theta \square^m \otimes^L_\Theta \mathrm{N}_\Theta \square^n, D) && \text{由推论 1.9}\\
&\cong \mathrm{Fun}(\mathrm{N}_\Theta \square^m \otimes_\Theta \mathrm{N}_\Theta \square^n, D) && \text{根据定理 1.8（每个.....的对象 } \widehat{\Theta_2} \text{ 是余纤维化的。）}\\
&\cong \mathrm{Fun}(\mathrm{N}_\Theta(\square^m \otimes_\square \square^n)\ D) && \text{由定理 1.11}\\
&\cong \mathrm{Nat}(ょ(\square^m \otimes_\square \square^n), \mathrm{N}_\square D) && \text{由推论 2.11}\\
&\cong \mathrm{Nat}((ょ\square^m)\hat{\otimes}_\square(ょ\square^n),\ \mathrm{N}_\square D) && \text{由定理 3.1}
\end{aligned}
$$

在 $\square^m$、$\square^n \in \square$ 和 $D \in$ (∞, 2)-Cat 中自然。由于两边在所有变量上都保持极限，根据推论 2.11，这推广为一个等价 Nat($X$, $H(Y$, N□ $D)$) ≅Nat($X$ ˆ⊗□$Y$, N□ $D$)，在 $X$、$Y \in$ Psh(□) $D \in$ (∞, 2)-Cat 中自然。□

注 3.4。定理 3.3 的幺半结构的底层双函子 ⊗ ，正是推论 1.9 中的双函子 $\otimes^L_\Theta$： (∞, 2)-Cat × (∞, 2)-Cat → (∞, 2)-Cat。为了解释这一点，注意到 $\otimes^L_\Theta$ 和 ˆ⊗□ 都在每个变量上与余极限交换，并且在立方体上与 ⊗□ 一致；根据推论 2.11，立方体在 (∞, 2)-Cat 中是稠密的。

推论3.5。全忠实函子 □ → (∞,2)-Cat 是强幺半的。这里 □ 被视为一个在严格2-范畴的通常Gray 张量积 ⊗□ 下的幺半（∞-）范畴，而 (∞,2)-Cat被视为在定理 3.3 的Gray 张量积 ⊗ 下的幺半范畴。此外，我们还有以下两个泛性质：

(1) 对于任意幺半闭、余完备的 ∞-范畴 $\mathcal{E}$，与 □ → (∞,2)-Cat 的复合会诱导一个全忠实函子

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{strong,cocts}}_{E_1}((\infty,2)\text{-}\mathrm{Cat}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{strong}}_{E_1}(\square, \mathcal{E})$$

其本质像由底层函子可扩展为余连续函子（∞, 2）-Cat → $\mathcal{E}$ 的幺半函子 □ → $\mathcal{E}$ 构成。

（2） ⊗ 是（∞, 2）-Cat 上唯一的幺半双闭结构，使得 □ → （∞, 2）-Cat 是强幺半的。

证明。我们可以将函子分解为 □ $\overset{ょ}{\to}$ Psh(□) $\overset{L}{\to}$ (∞, 2)-Cat。第一个因子根据定理 3.1 是强幺半的，第二个因子根据定理 3.3 是强幺半的。第一个泛性质由定理 3.1 和定理 3.3 连接而得。对于第二个，假设 $F$： □ →(∞, 2)-Cat 关于 (∞, 2)-Cat 上的另一个幺半双闭结构 $\otimes'$ 是强幺半的，

且其底层函子是通常的 $\square \to (\infty, 2)\text{-Cat}$。由第一个泛性质，存在一个诱导的余连续幺半闭函子 $F : (\infty, 2)\text{-Cat} \to (\infty, 2)\text{-Cat}$，它是从 $\otimes$ 到 $\otimes'$的强幺半函子，且其在 $\square$ 上的限制是恒等态射。由推论 2.11，$F$ 自然同构于恒等函子。因此，$F$ 是一个等价。由于 $F$ 是强幺半函子，它是一个幺半等价 [Lur，注 2.1.3.8]。□

## References


[AABS02] Fahd Ali Al-Agl、Ronald Brown 和 Richard Steiner。多重范畴：球状方法与立方方法的等价性。 *Advances in Mathematics*，170(1)：71–118，2002。[Ara14] Dimitri Ara。高阶拟范畴与高阶 Rezk 空间。 *Journal of K-Theory. K-Theory and its Appli-*，，，（）：。[ *cations in Algebra Geometry Analysis & Topology* 14 3 701, 2014 BSP21] Clark Barwick 和 Christopher Schommer-Pries。关于高阶范畴理论的唯一性。 *Journal of the American Mathematical Society* 34 4 1011 1058, 2021 ，（）：–。[ Cam22] Tim Campion。立方体在（∞, ∞）-范畴中稠密。 *arXiv preprint arXiv:2209.09376*，2022。[CKM20] Tim Campion、Chris Kapulkin 和 Yuki Maehara。（ $\infty$ $n$ *arXiv preprint*,）-范畴的立方模 *arXiv:2005.07603* 2020 型。，。[Cra95] Sjoerd E Crans。 *On combinatorial models for higher-dimensional homotopies*。博士论文，乌得勒支大学，1995。[DKM23] Brandon Doherty、Krzysztof Kapulkin 和 Yuki Maehara。（$\infty, n$）-范畴的立方方法与单纯方法的等价性。 *Advances in Mathematics*，416：108902，2023。[GHL21] Andrea Gagna、Yonatan Harpaz 和 Edoardo Lanari。（∞, 2）-范畴的 Gray 张量积与松函子。 *Advances in Mathematics*，391：107986，2021。[GHL22] Andrea Gagna、Yonatan Harpaz 和 Edoardo Lanari。（∞, 2）-范畴所有模型的等价性。*Journal of the London Mathematical Society*，106(3)：1920–1982，2022。[GR17] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum。 *A study in derived algebraic geometry. Vol. I. Correspondences and*，[卷。美国数学学 *duality* 221 *Mathematical Surveys and Monographs* 会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。74] Gra *Formal category theory: adjointness for* 2*-categories*John W. Gray。[。《数学讲义》，第391卷。Springer-Verlag，柏林—纽约，1974。76] Gra 2 *Algebra topology and*John W. Gray。[- *category theory (a collection of papers in honor of Samuel Eilenberg)* 63 76 1976 范畴张量积的相干性与辫群。载于17]，，，第–页。。 *Advances in Mathematics*JFS[Theo Johnson-Freyd 和 Claudia Scheimbauer。（op）松自然变换、扭曲量子场论与“更高阶”的 Morita 范畴。22]，307：147–223，2017。'Lou $n$F∞elix Loubaton。作为（$n$, *arXiv preprint arXiv:2207.08504*）-范畴模型的[-拟合性集合。]，2022。 `http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf`Lur[Jacob Lurie。高等代数。可见于]。 *Higher topos theory.* Lur09a[ Jacob Lurie。]。《数学研究年刊》第170卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009。∞Lur09b *arXiv preprint arXiv:0905.0462*Jacob Lurie。（[, 2）-范畴与 Goodwillie 微积分 I。21]，2009。 *Adv. Math.*Mae[Yuki Maehara。2-拟范畴的 Gray 张量积。15]，377：107461，78，2021。 ∞MG *arXiv preprint arXiv:1510.04392*Aaron Mazel-Gee。模型[-范畴 II：Quillen 伴随。04]，2015。 *Homology Homotopy Appl.*Ste[Richard Steiner。Omega-范畴与链复形。88]，6(1)：175–200，2004。`http://web.science.mq.edu.au/~street/GrayTensor.pdf`Str[Ross Street。2-范畴的 Gray 张量积。手写笔记，08]，1988。 *Adv. Math.*VerDominic Verity。弱拟合性集合 I：基本同伦理论。，219(4)：1081–1149，2008。