arXiv:2304.05983v2 [physics.flu-dyn] 9 Jan 2024

利用瞬态湍流波动实现能量增益式翱翔

Danyun He[1,2]†、Gautam Reddy[3,4,5] 和 Chris H. Rycroft [2,6]‡

[1]哈佛大学约翰·A·保尔森工程与应用科学学院，美国马萨诸塞州剑桥市 02138[2]威斯康星大学麦迪逊分校数学系，美国威斯康星州麦迪逊市 53706[3]NTT Research, Inc. 物理与信息学实验室，美国加利福尼亚州桑尼维尔市 94085[4]哈佛大学脑科学中心，美国马萨诸塞州剑桥市 02138[5]哈佛大学 NSF-Simons 生物数学与统计分析中心，美国马萨诸塞州剑桥市 02138[6]劳伦斯伯克利国家实验室计算研究部，美国加利福尼亚州伯克利市 94720

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

翱翔鸟类从稳定的上升气流或风切变中获取能量。然而，能否通过从瞬态湍流波动中提取功来弥补阻力造成的能量损失，仍不清楚。我们设计了数值模拟，让滑翔机在一种运动学模型中导航；该模型捕捉大气湍流的时空相关性。基于蒙特卡洛树搜索的自适应算法会动态筛选已获取的流场信息，以规划未来路径，从而实现能量提取。我们证明，在现实约束下，净能量增益是可行的。滑翔机路径呈现出觅食模式：对流场的探索与通过局部螺旋进行的能量提取交替进行。

关键词：鸟类、翱翔、湍流、学习、导航、高斯过程回归、蒙特卡洛树搜索

1. 引言

翱翔鸟类通过策略性地在大气流场中滑翔，同时从流场中获取能量。对于银鸥和信天翁等翱翔鸟类，滑翔时的耗氧率比扑翼飞行低 ≈30%（Baudinette & Schmidt-Nielsen 1974；Sakamoto 等 2013），这对于在代谢和空气动力学限制下实现长距离迁徙至关重要（Tucker 1972）。不同形式翱翔的能量学特征可以用一个通用表达式来描述，即风场中滑翔机（不产生推力）的无量纲能量增益率 $\dot{\varepsilon}$：

$$\dot{\varepsilon} = -c_D v^3 + w_z - \boldsymbol{v}.\dot{\boldsymbol{w}}, \tag{1.1}$$

其中重力指向负z 方向，c_D 是空气动力阻力系数，$v = \|\boldsymbol{v}\|$ 是滑翔机的空速，而 $\boldsymbol{w} = (w_x, w_y, w_z)$ 是风速（Henningsson & Hedenstr¨om 2011年；Harvey & Inman 2021；Taylor 等人2016）。（详情参见第2.1节。）没有风时，滑翔机的能量会因阻力而持续损失，并以恒定速率下沉。因此，为了抵消阻力，滑翔机应主动定位于上升气流处，或调整自身方向

† 通讯邮箱：danyunhe@g.harvard.edu ‡ 通讯邮箱：chr@math.wisc.edu

与滑翔机轨迹上的快速阵风和风切变反平行。这两种机制分别对应于式（1.1）中的第二项和第三项。鸟类利用这两种机制获取能量，它们对应于两种常见的翱翔模式，即热气流翱翔和动态翱翔。

热气流翱翔依赖于大气边界层中的对流所产生的上升气流（热气流）（Cone 1962；Shannon 等 2002；Woodward1956）。热气流是动态流场结构，通常持续数分钟，可提供上升气流，使鸟类能够盘旋上升穿过边界层，觅食或在迁徙期间滑翔至另一股热气流（Williams 等 2018）。成年秃鹫比幼年秃鹫更能控制自己在热气流中的位置，这表明秃鹫会通过经验提升翱翔技能（Harel等 2016）。动态翱翔使鸟类能够在海洋上实现能量中性的飞行；在海洋上，热气流微弱或不存在（Richardson 等 2018；Bousquet 等 2017；Kempton 等 2022）。动态翱翔过程中能量提取的主要贡献来自方程（1.1）中的第三项（Zhao 2004），即鸟类在海浪后方形成的稳定切变层中机动飞行时，保持适当的航向。

然而，热气流翱翔和动态翱翔都依赖相对稳定的对流羽流或风切变。大气湍流包含寿命短暂、时间尺度各异的涡旋，其速度幅值与滑翔机的典型下沉率相当，即使在没有稳定对流或风切变的环境中，也可能提供持续的能量来源（Mallon 等 2016年；Patel 等 2009）。能否仅从这类湍流的快速波动风场中提取能量，尚不明确（Reynolds 等2014年；Laurent 等 2021）。为了有效获取能量，滑翔机应先获取流场信息，识别潜在能量来源，并选择能够最大化能量增益的路径。然而，在非定常流场中，获取的信息会随时间推移而失效，这带来了严格的约束。在极端情况下，对于不相关的流场，信息价值会立即消失；因此，$\dot{\varepsilon}$ 平均而言为负，$\langle\dot{\varepsilon}\rangle \simeq -c_D v^3$。当流场的相关性持续时间长于或接近滑翔机的典型控制时间尺度时，情况便不再如此。那么，最大能量率 $\langle\dot{\varepsilon}\rangle_{\max}$、流场的动力学特性与滑翔机的空气动力学约束之间有何关系？即使能量正收益的翱翔在物理上可行，即 $\langle\dot{\varepsilon}\rangle_{\max} > 0$，计算算法能否切实达到这一极限？

先前的研究考察了静态风切变层中的动态翱翔导航策略（Bousquet 等，2017；Kempton等，2022），以及有湍流（Reddy等，2016，2018）和无湍流（Wharington，1998；Allen&Lin，2007；Chung 等，2015）对流流场中的热气流翱翔。在前一种情况下，Rayleigh 的经典结果确定了实现能量中性飞行所需的环境条件（Rayleigh，1883）。对于热气流翱翔，强化学习方法已被证明有助于在湍流环境中识别有用线索和有效的导航策略（Reddy 等，2016，2018）。这些情形考虑的是在对流流场中的翱翔，其中上升分支的尺度为数百米，持续时间为数分钟。在这里，湍流通过在识别′并在相对稳定的热气流中定位时引入“噪声”而发挥干扰作用（Woodbury等，2014年；Akos等，2010）。一项近期提出的从非定常流场中提取能量的方法，依赖于一种称为快速跟踪的现象；这种现象由 Stokes 惯性粒子表现出来（Bollt &Bewley，2021）。能够实时学习流场、以自适应方式规划后续路径的在线算法，以及更普遍而言，在复杂流场中进行主动导航的方法，仍有待探索。在本研究中，我们使用三维均匀各向同性湍流的运动学模型来处理这些问题。我们考察了一架在该流场中导航的滑翔机；它利用一种结合统计推断与长期规划的通用决策算法，根据自身的感知历史调整朝向。我们证明了能量正增益翱翔是可行的，并delineate 了实现这一目标时的空气动力学参数和流场参数。

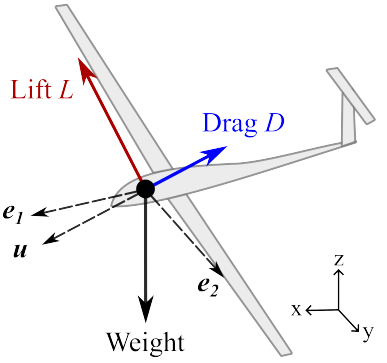

图 1. 滑翔机示意图，标示出其所受的三个力的方向：升力 L、阻力D 和重量。全局坐标系为 (x,y,z)，其中正z 方向垂直向上。e_1 矢量水平指向滑翔机的朝向，但滑翔机方向也可能具有额外的 z 分量。矢量 $\mathbf{u}$ 是滑翔机相对于地面的速度。矢量 e_2 为水平矢量，并且垂直于 e_1。

2. 模型

本节介绍滑翔机在风场中运动的控制方程，以及湍流风场模型，该模型由随机演化的傅里叶模态构成。我们的模拟中有若干环节计算开销较大，因此模型采用定制的 C 实现++，并使用 OpenMP（Dagum & Menon 1998）对关键计算进行多线程处理。附录中讨论了若干实现细节。表3 和4汇总了本文使用的所有参数。

2.1. 滑翔机空气动力学

2.1.1. 滑翔机的控制方程

我们模拟滑翔机在全局 (x,y,z) 坐标系中运动，其中 z 轴向上。滑翔机的位置 $\mathbf{r}(t)$和速度 $\mathbf{u}(t)$相对于地面随时间变化，并受到局部风速 $\mathbf{w}(t)$的影响。因此，滑翔机相对于风的运动由 $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$表示，空速为 $v = \|\mathbf{v}\|$。如图 1所示，作用于滑翔机的力有三种：升力、阻力和重力。升力是空气动力的一个分量，方向垂直于飞行方向。升力的大小为

$$L = \frac{1}{2} c_L \rho S v^2, \tag{2.1}$$

其中，ρ 是空气密度，S 是机翼表面积，v 是空速，而c_L 是无量纲升力系数，其与机翼形状之间存在复杂的依赖关系。阻力是气动力的另一个分量，方向与飞行方向相反。其变化规律与升力相似，大小为

$$D = \frac{1}{2} c_D \rho S v^2 \tag{2.2}$$

其中，c_D 是无量纲阻力系数。图1 还定义了水平面内两个相互正交的向量(e_1,e_2)，其中e_1 在xy平面内指向与滑翔机机身相同的方向。不过请注意，滑翔机也可能发生倾斜，因此其方向向量还包含一个垂直分量。

如图 2所示，滑翔机的姿态可用三个角度描述。倾侧角 μ 设定机翼表面相对于垂直方向的倾斜程度，并可由滑翔机自身控制。

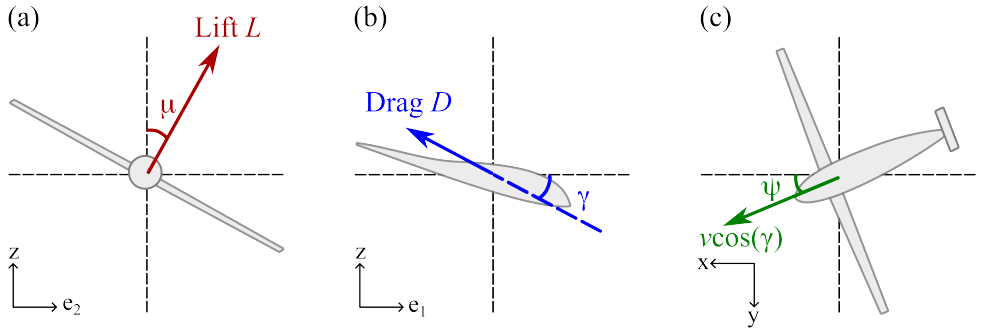

图 2. 滑翔机从不同方向观察的示意图，采用全局(x, y, z) 坐标系以及图(e_1,e_2) 中定义的坐标系。1。这些角度决定滑翔机的姿态。(a) 倾侧角 μ 表示滑翔机相对垂直方向的滚转角度。(b) 滑翔角 γ 是航向与水平面之间的夹角。(c) 方位角 ψ 是空速矢量在水平面上的投影与x轴之间的夹角。

滑翔角 γ 表示滑翔机运动相对于水平面的角度，其定义为$\gamma = \sin^{-1} v_z/v$。方位角表示滑翔机在水平面内的运动方向，其定义为 $(v_x, v_y) = (v\cos\gamma\cos\psi, v\cos\gamma\sin\psi)$。根据这些定义，滑翔机的控制方程为

$$m\dot{u}_x = L\cos(\mu)\sin(\gamma)\cos(\psi) - L\sin(\mu)\sin(\psi) - D\cos(\gamma)\cos(\psi), \tag{2.3}$$

$$m\dot{u}_y = L\cos(\mu)\sin(\gamma)\sin(\psi) + L\sin(\mu)\cos(\psi) - D\cos(\gamma)\sin(\psi), \tag{2.4}$$

$$m\dot{u}_z = L\,\text{余弦}(\mu)\text{余弦}(\gamma) + D\,\text{正弦}(\gamma) - mg, \tag{2.5}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}, \tag{2.6}$$

其中m 是 t 滑翔机的质量，且g 是重力加速度。能量由

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - m\mathbf{g}\cdot\mathbf{z}. \tag{2.7}$$

对方程（2.7）求时间导数，并代入方程（2.3）–（2.6），可得能量变化为

$$\begin{aligned}\dot{E} &= m\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} - m\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}\\ &= m\mathbf{v}\cdot(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{w}}) - m\mathbf{g}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})\\ &= \mathbf{v}\cdot(m\dot{\mathbf{u}} - m\mathbf{g}) - m\mathbf{g}\cdot\mathbf{w} - m\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{w}}\\ &= -vD + mgw_z - m\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{w}},\end{aligned} \tag{2.8}$$

这与引言中的方程（1.1）等价。如引言所述，该方程中的第一项对应于阻力造成的能量损失。其余两项分别对应于高度增加和局部风阵风带来的能量增益，这两种能量增益均为翱翔鸟类所利用（Taylor 等2016）。

2.1.2. 无量纲化方程

根据滑翔机稳定飞行时的空速，我们定义滑翔机的特征速度尺度$v_c = \sqrt{2mg/\rho S}$、控制时间尺度$t_c = v_c/g$以及长度尺度$l_c = v_c^2/g$，其中 ρ 为空气密度，而S 为机翼表面积。对于翱翔迁徙鸟类，典型滑翔速度为 14m/s（Tucker 和 Parrott，1970；Horvitz 等，2014年）；因此，下文取$v_c = 10\text{m/s}$，典型控制时间尺度为$t_c = 1\,\text{s}$。我们以这三个尺度对所有速度进行无量纲化，

长度和时间均相对于这三个尺度进行无量纲化。沿用相同的符号，方程（2.3）–（2.6）变为

$$\dot{u}_x = c_L v^2 \cos(\mu)\sin(\gamma)\cos(\psi) - c_L v^2 \sin(\mu)\sin(\psi) - c_D v^2 \cos(\gamma)\cos(\psi), \tag{2.9}$$

$$\dot{u}_y = c_L v^2 \cos(\mu)\sin(\gamma)\sin(\psi) + c_L v^2 \sin(\mu)\cos(\psi) - c_D v^2 \cos(\gamma)\sin(\psi), \tag{2.10}$$

$$\dot{u}_z = c_L v^2 \cos(\mu)\cos(\gamma) + c_D v^2 \sin(\gamma) - 1, \tag{2.11}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}。 \tag{2.12}$$

我们在数值实现中使用公式（2.9）–（2.12）。无量纲能量由公式（2.7）除以因子mv_c^2得到，因此

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v^2 + z. \tag{2.13}$$

无量纲化的能量增益率为

$$\dot{\varepsilon} = -c_D v^3 + w_z - \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{w}}, \tag{2.14}$$

与方程（1.1）相符。

2.2. 湍流流场模拟

我们为滑翔机所经历的风场引入一个运动学模型，该模型涵盖湍流流场特有的广泛长度尺度和时间尺度。对于位置 **r** 和时间t处的三维风场**w(r**,t)，我们考虑一种均匀且各向同性的湍流流场，它可以用傅里叶变换来描述，

$$\mathbf{w}(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k},t), \tag{2.15}$$

其中， ˜w(k,t) 是波数为 k 的波在时间 t 的复值振幅。我们模拟了一个能够再现二阶 Kolmogorov 统计特性的湍流场（Fung 等人 1992），其中波数大小为 k 的波所包含的能量 = ||k|| 的尺度关系类似于 E(k) ∼ $k^{-5/3}$。在我们的数值实现中，使用第 2.1.2 节引入的无量纲化方法，风速在周期性盒子 [0,B)^3 中通过离散傅里叶变换计算，使用 N × N × N 个复数傅里叶模态˜w$^{\alpha\beta\zeta}$。定义晶格间距 h = B/N。对于晶格点 r = (h j,hl, hq)，风速由离散傅里叶变换给出

$$\mathbf{w}(\mathbf{r},t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1}\sum_{\beta=0}^{N-1}\sum_{\zeta=0}^{N-1}\tilde{\mathbf{w}}_{\alpha\beta\zeta}(t)e^{2\pi i(j\alpha+l\beta+q\zeta)/N}. \tag{2.16}$$

我们将复傅里叶模态视为按周期性索引，因此 ˜**w**$_{(\alpha+N),\ \beta,\ \zeta}$ = ˜**w**$^{\alpha\beta\zeta}$， β和 ζ也有类似关系。为确保 ˜**w(r**， t) 为实值，离散傅里叶系数必须满足

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\alpha\beta\zeta} = \bar{\tilde{\mathbf{w}}}_{-\alpha,-\beta,-\zeta}. \tag{2.17}$$

由于复傅里叶模态具有周期性，式（2.16）中的求和可以重新排列。定义 $M = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$，并且

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } |n| = N/2, \\ 1 & \text{if } |n| < N/2. \end{cases} \tag{2.18}$$

那么对于晶格点 **r** = (hj,hl,hq)，式（2.16）等价于

$$\mathbf{w}(\mathbf{r},t) = \sum_{\alpha=-M}^{M}\sum_{\beta=-M}^{M}\sum_{\gamma=-M}^{M} f(\alpha)f(\beta)f(\zeta)\tilde{\mathbf{w}}_{\alpha\beta\zeta}(t)e^{2\pi i(j\alpha+l\beta+q\zeta)/N}. \tag{2.19}$$

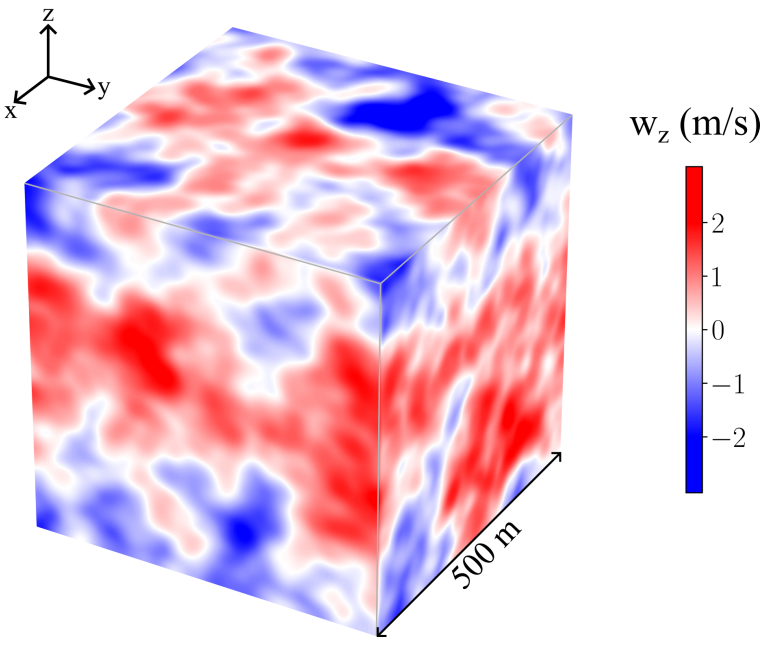

图 3. 三维均匀各向同性湍流的数值模拟。图中显示垂直风速场。红色和蓝色分别表示强烈的上升气流和下降气流。

当 N 为奇数时，每个求和恰好包含 N 项。当 N 为偶数时，每个求和恰好包含 $N+1$项，但 f 函数会使位于 $\pm M$ 处的两个极端指标按半权重计数。由于周期性，这两个极端指标具有相同的傅里叶模态系数。因此，在这两种情况下，求和所计算的都是与式（2.16）中相同的项。

方程（2.16）和（2.19）在格点处等价，但这依赖于因子 $e^{2\pi i}$的抵消。在非格点处，两者并不相同，因为方程（2.16）涉及对快速振荡指数函数求和。相比之下，方程（2.19）给出了最低频率的傅里叶指数函数的一种表示。由于滑翔机会在任意位置移动，因此我们采用方程（2.19）来计算位置 $\mathbf{r}$ 处的风场。

现在我们将 $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{w}}^{\alpha\beta\zeta}$定义为 $\mathbf{k} = (2\pi\alpha/B\ 2\pi\beta/B\ 2\pi\zeta/B)$。遵循 Fung等人 （1992）的模型，我们假设每个傅里叶模态都按照时间尺度为 $\tau(k)$的奥恩斯坦–乌伦贝克过程演化，因此

$$d\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k},t) = -\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k},t)\frac{dt}{\tau(k)} + a(k)dW(t), \tag{2.20}$$

其中，W(t) 表示维纳过程。为匹配柯尔莫哥洛夫标度，我们要求 $\tau(\mathrm{k}) \sim \mathrm{k}^{-2/3}$。设定 a(k)，使能谱 $\mathrm{E(k)} \sim \mathrm{k}^{-5/3}$。a(k) 和 τ(k) 的具体表达式见第 2.3 节。图 3 展示了模拟风场的一个示例：对于流体场，我们使用边长为 $\mathrm{B} = 500\mathrm{m}$ 的立方域，并采用周期性边界条件。流体使用 64^3 个模态进行模拟。根据典型的大气风速波动幅度，风速均方根值（RMS）设为 0.5m/s。附录 A 介绍了如何利用多线程编程高效计算风场。

2.3. 时空协方差的推导

在后续章节中，我们将利用对该场的不完整知识，推断未知位置和时间处的风场信息。因此，我们需要了解风函数的相关性。空间域为 $\Omega = [0,B)^3$。为计算时空协方差函数，我们首先写出

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{w}(0,0), \mathbf{w}(\mathbf{r},t)\rangle &= (2\pi)^{-3}\int_{\tilde{\Omega}} d^3\mathbf{k}\int_{\tilde{\Omega}} d^3\mathbf{k}'\, e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}\langle \tilde{\mathbf{w}}(k,0), \tilde{\mathbf{w}}(k',t)\rangle \\ &= (2\pi)^{-3}\int_{\tilde{\Omega}} d^3\mathbf{k}\int_{\tilde{\Omega}} d^3\mathbf{k}'\, e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}(12\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')e(k)e^{-|t|/\tau(k)} \end{aligned} \tag{2.21}$$

˜其中 Ω 是倒易空间，第二步来自

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k},0), \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k}',t)\rangle &= \langle \tilde{\mathbf{w}}_R(\mathbf{k},0), \tilde{\mathbf{w}}_R(\mathbf{k}',t)\rangle - \langle \tilde{\mathbf{w}}_I(\mathbf{k},0), \tilde{\mathbf{w}}_I(\mathbf{k}',t)\rangle \\ &\quad + i\langle \tilde{\mathbf{w}}_R(\mathbf{k},0), \tilde{\mathbf{w}}_I(\mathbf{k}',t)\rangle + i\langle \tilde{\mathbf{w}}_I(\mathbf{k},0), \tilde{\mathbf{w}}_R(\mathbf{k}',t)\rangle \\ &= (\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') + \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'))6e(k)e^{-|t|/\tau(k)} \\ &\quad - (\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') - \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'))6e(k)e^{-|t|/\tau(k)} + 0 + 0 \\ &= 12\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')e(k)e^{-|t|/\tau(k)}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

积分消去$\mathbf{k}'$得到

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{w}(0,0), \mathbf{w}(r,t)\rangle &= \frac{3}{2\pi^3}\int d^3\mathbf{k}\, e(k)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-|t|/\tau(k)} \\ &\approx \frac{3}{\pi^2}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk\, k^2 e(k)e^{ikr\cos\theta}e^{-|t|/\tau(k)}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

其中，我们将盒子上的积分近似为球壳上的积分，因为当k较大时，$k^2e(k)$衰减至零。特征时间尺度 $\tau(k) = \tau_c(lk)^{-2/3}$ 的前因子为 τ_c，它设定了时间涨落的整体时间尺度。最小波数为$k_{\min} = \sqrt{3}\pi/B$。最大波数由最小分辨长度尺度决定，该尺度在N^3 网格中为 $1/N$，因此，最大波数为$k_{\max} = \sqrt{3}\pi/(B/N) = \sqrt{3}\pi N/B$。令$k^2e(k) = \alpha k^{-5/3}$，其中 α将设定为使每个分量的方差为 1。于是我们有

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{w}(0,0), \mathbf{w}(0,0)\rangle = 1 &\approx \frac{3}{\pi^2}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk\,\alpha k^{-5/3} \\ &= \frac{6\alpha}{\pi^2}\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk\, k^{-5/3} \\ &= \frac{9\alpha}{\pi^2}(k_{\min}^{-2/3} - k_{\max}^{-2/3}), \end{aligned} \tag{2.24}$$

这给出的是

$$\begin{aligned}\alpha &\approx \frac{\pi^2}{9}(k_{\min}^{-2/3} - k_{\max}^{-2/3})^{-1}, \\ e(k) = \alpha k^{-11/3} &= \frac{\pi^2}{9}k^{-11/3}(k_{\min}^{-2/3} - k_{\max}^{-2/3})^{-1}, \\ a(k) = \sqrt{4e(k)/\tau(k)} &= \frac{2}{3}3^{-1/6}\pi^{1/3}k^{-3/2}\sqrt{(k_{\min}^{-2/3} - k_{\max}^{-2/3})^{-1}}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

每个分量的协方差函数为$K(r,\ t) = \langle \mathbf{w}(0,\ 0),\ \mathbf{w}(\mathbf{r},\ t)\rangle$，以及

$$K(r,t) = \frac{6\alpha}{\pi^2}\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk\, k^{-5/3}\,\mathrm{sinc}(kr)e^{-|t|/\tau(k)}. \tag{2.26}$$

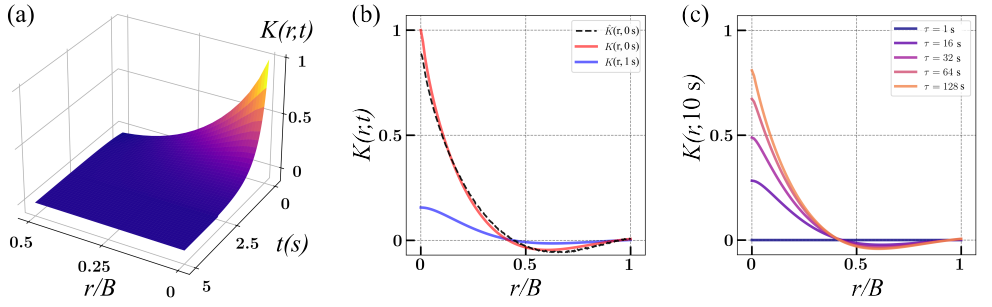

图 4. 核函数示意图。(a) 当 $\tau_c = 1$s 时，相关函数随时间t和距离r的变化。(b) 当 $\tau_c = 1$s 时，相关函数随r的变化，分别对应$t = 0$和$t = 1$。模拟风场的相关性 $\hat{K}(r,t)$，使用 128 个风场计算得出，每个风场在随机位置包含 1024 个样本。(c) 当 $\tau_c = [1\text{s},16\text{s},32\text{s},64\text{s},128\text{s}]$时，相关函数随$r$的变化，对应$t = 10$s。

由于风场的平移不变性，对于任意两个位置$\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2$, 和时间$t_1,t_2$, ，我们计算$r = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$、 $t = |t_1 - t_2|$，并应用公式（2.26）得到它们的相关性。

流场的统计特性由各风速分量的平稳各向同性协方差核决定，如式(2.26)所示。解析相关函数$K(r,t)$如图 4所示，随着时间差或距离差增大，相关性呈指数衰减。当 $r/B < 0.5$ 且$t < 1$时，相关性显著。风场模拟的相关性 $\hat{K}(r,t)$与解析值 $K(r,t)$相符。

3. 滑翔机导航策略的实现

3.1. 导航策略概述

现在我们描述导航策略，该策略将滑翔机的风速和位置历史映射为三种倾侧角变化之一，即 $\Delta\mu = 0°$、$\pm 10°$ 至 $\mu = \pm 40°$的最大值（最小值）。具有记忆大小M且历史为H_t 的滑翔机在时间t包含滑翔机过去的位置以及以固定间隔 Δt $=\mathrm{t}_c/2$收集的风测量值，即$\mathrm{H}_t = \boldsymbol{r}_{t-M\Delta t}\boldsymbol{w}_{t-M\Delta t}\boldsymbol{r}_{t-(M-1)\Delta t}\boldsymbol{w}_{t-(M-1)\Delta t}\cdots\boldsymbol{r}_t\boldsymbol{w}_t$。滑翔机选择一个动作，以最大化时间d$\Delta$t内获得的总期望能量增益，$\langle\varepsilon_{t+d\Delta t}\rangle_{H_t} - \varepsilon_t$，其中$\mathrm{d}\Delta\mathrm{t} = 10\mathrm{t}_c$ 设定了规划时域。给定特定历史时的这一最大期望能量增益$\mathrm{V}(\mathrm{H}_t)$满足递归Hamilton–Jacobi–Bellman方程（Bardi等，1997），

$$V(H_t) = \max_{a\in\mathscr{A}} \langle \varepsilon_{t+\Delta t} - \varepsilon_t + V(H_{t+\Delta t})\rangle_{H_t,a}, \tag{3.1}$$

其中，期望是针对滑翔机从t到 $t + \Delta t$的轨迹上遇到的风场构型计算的，边界条件为 $V(H_{t+d\Delta t}) = 0$。最优动作是在集合 $\mathscr{A}$中使最大值达到的动作；该集合包含滑翔机可以采取的所有可能动作。期望中隐含地包含了“传播子”，即新位置处风速的条件概率密度，$P(\boldsymbol{w}_{t'}|H_t,\boldsymbol{r}_{t'})$ 在 $t' > t$时。由于需要评估数量呈指数增长的（$\sim|\mathscr{A}|^d$）可能未来路径，以及沿这些路径遇到的风场构型，计算最优动作通常颇具挑战。现在，我们将介绍为从一般表达式方程（3.1）推导出高效在线算法而采用的三项简化。

首先，我们观察到，滑翔机的未来轨迹和能量增益与 $\boldsymbol{w}$ 具有近似线性依赖关系，前提是 w 远小于滑翔机的典型空速（ $w \ll v_c$ ）。由于流场由公式（ 2.26 ）中的二阶统计量定义，因此它是一个高斯过程。我们执行高斯过程回归，以预测未来时间和位置上给定的风速

历史 H_t，然后我们沿着大量路径（此处为10^4 条路径）计算期望能量增益。

其次，我们使用蒙特卡洛采样对最优路径进行数值评估。然而，未来路径数量庞大，仍然是一项挑战，因此需要采用高效的剪枝技术，使规划变得可行。为在规划过程中剪除次优路径，我们实现了蒙特卡洛树搜索（MCTS）（Browne 等人 2012）。MCTS 使用树搜索算法，在对未来路径进行探索与利用之间取得平衡。该算法以随机方式对不同路径进行采样，并在每个分支处根据期望能量增益选择一个动作。采样会偏向能量增益较高的路径，同时加入探索奖励，以确保前景较差的路径仍有机会得到探索。

最后，我们使用 MCTS 寻找动作序列 $a_1, a2, \ldots, a_d$，使期望能量增益近似达到最大，即 $V(H_t) \approx \max_{a_1,a2,\ldots,ad} \langle \varepsilon_{t+d\Delta t} - \varepsilon_t \rangle_{H_t,a1,a2,\ldots,ad}$。请注意，这并不等同于优化式（3.1），因为最大值运算针对的是路径，而这些路径的期望能量增益是在给定H_t的条件下计算的。

在下文中，我们将详细介绍高斯过程回归（GPR），滑翔机可利用它根据历史观测预测风场。随后，我们将介绍蒙特卡洛树搜索（MCTS），滑翔机利用它控制飞行，以最大化能量增益。最后，我们将概述仿真过程的设置。

3.2. 高斯过程回归

我们将均值函数 $m(\mathbf{x})$ 和协方差函数 $K(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ 高斯过程$f(\mathbf{x})$ 定义为（Wan 和 Sapsis, 2017）

$$m(\mathbf{x}) = E[f(\mathbf{x})], \tag{3.2}$$

$$f(\mathbf{x}) \sim GP(m(\mathbf{x}), K(\mathbf{x},\mathbf{x}')). \tag{3.3}$$

假设我们有一个观测数据集 X，其大小为 M，并定义 $f = f(X)$。令 f^* 为在X^*处未观测到的数据。那么 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{f}^*$ 的联合分布为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{f}^* \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} m(X) \\ m(X_*) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K(X,X) & K(X,X^*) \\ K(X^*,X) & K(X^*,X^*) \end{bmatrix} \right) \tag{3.4}$$

将联合高斯先验分布基于观测进行条件化，可得

$$\boldsymbol{f}^* | \boldsymbol{f}, X, X^* \sim N(K(X^*,X)K(X,X)^{-1}\boldsymbol{f}, K(X^*,X^*) - K(X^*,X)K(X,X)^{-1}K(X,X^*)). \tag{3.5}$$

由于我们的风分量由许多以高斯过程演化的随机模态生成，因此我们使用高斯过程回归来执行风场推断，即可以应用公式（3.5）利用观测历史执行风场预测。我们直接根据风模型公式（2.26）计算核函数。图 5 给出了在风场中进行稀疏采样时风场预测的示例。它恢复了风场中的大尺度特征。为了验证 GPR预测的准确性，我们设置了 10 个冻结风场，并让 20 架滑翔机随机探索 t_m =25 s，同时滑翔机每隔 $(\mathbf{w},\mathbf{r},t)$ 将信息存储到内存中一次，间隔为 Δt = 0.5s。当内存已满时，我们在 0.1、1 和 10 秒后执行预测，其中 10 秒是滑翔机的规划时域。图 6 表明，GPR 预测在较短距离和时间范围内是准确的，而在较长时间范围内误差较大，此时相关性较弱。增加内存采集时长有助于提升 GPR 预测的性能。增加模态数量会将更多细节带入风场中，从而使预测更加困难。

高斯过程回归在计算上可能开销很大，因为计算式（3.5）中的均值需要计算 $K(X,X)^{-1}$，而该项在每一步都会变化。因此，我们按照附录 B.中的描述，加快这些逆矩阵的计算。

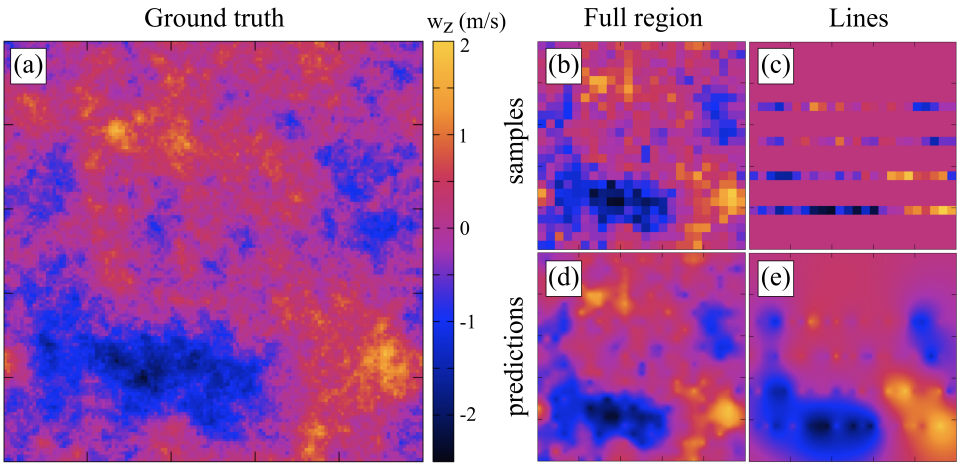

图5 . GPR 预测示意图。(a) 使用 FFTW 库，按照第 $128 \times 128\, xz$ 节和附录 2.2 中的说明计算得到的 A 平面垂直风速。(b) 风场的粗略 24×24 样本。(c) 风场在 4×24 网格上的四条样本线。(d) 使用 (b) 中的样本得到的 wz 对应的 GPR 预测。(e) 使用 (c) 中的样本得到的对应 GPR 预测。

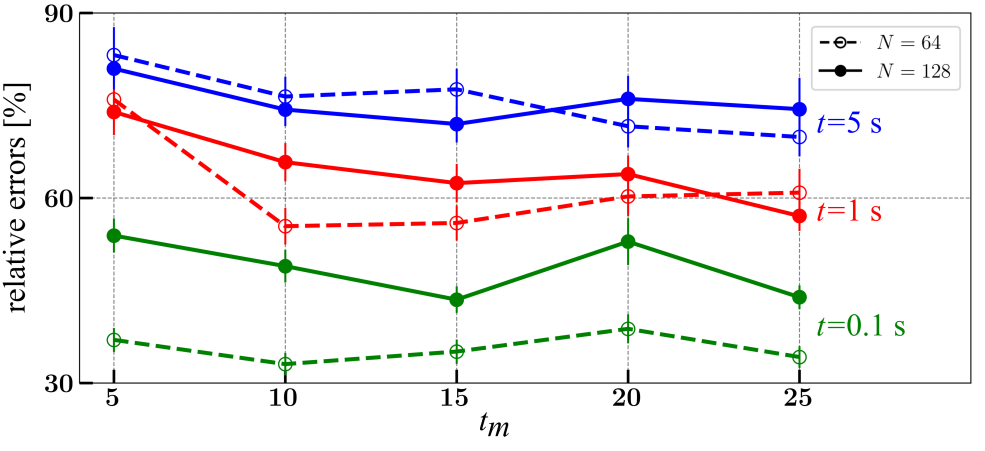

图 6. 冻结风场中未来时刻风速预测的相对误差。200 架滑翔机在冻结风场中随机飞行。在最初的 25 s 内，它们收集信息并将其存储在内存中，内存大小为 $M = 50$。随后，它们使用 GPR 对 0.1 s、1 s 和 5 s 后当前位置的风速进行预测。图中显示了风速预测值 $\hat{\mathbf{w}}$ 与实际风速 $\mathbf{w}$之间的相对误差。

3.3. 蒙特卡洛树搜索

蒙特卡洛树搜索是一种高效的前瞻规划和决策方法。其核心思想是随机构建一棵搜索树，探索未来可能采取的动作。该方法会对搜索树进行大量随机模拟，更有希望的分支会被更频繁地访问，同时也会探索较不理想的选项。每次模拟结束后，都会利用最终奖励更新该模拟路径上各节点的奖励。经过大量模拟后，这棵树便能估算出最佳轨迹。利用瞬时湍流波动实现能量正向的翱翔

定义 th 一系列k动作$A_k = a_1 a_2 a_3 \cdots a_k$，其中每个动作都是对倾侧角的一次调整 .

具体而言，每个 a$_j$都将是 $\Delta\mu = \pm 10°$，而 μ的范围从 $-40°$到 $40°$。价值函数 V (A_k) 表示从 A_k开始直至终止的预估平均能量增益。N(A_k,a_{k+1})表示从 A_k执行 a_{k+1} 的访问次数。对于树中的节点 i，它存储动作序列 A_i、价值函数 V (A_i)以及总访问次数 N(A_{i-1}, a_i)。UCT算法选择使上置信界最大的动作（Kocsis & Szepesv´ari 2006）

$$U(A_k, a_{k+1}) = V(A_k \cup a_{k+1}) + 2C\sqrt{\frac{2\ln(\sum_a N(A_k, a))}{N(A_k, a_{k+1})}}. \tag{3.6}$$

UCT界限中的第一项鼓励选择高价值动作，而第二项则鼓励探索访问次数较少的动作。$C = 0.5$ 是探索参数，如果希望进行更多探索，可以对其进行调整。

在一次蒙特卡洛模拟中，使用UCT算法选择动作序列，然后使用公式（2.14）估计能量增益，并将其反向传播以更新 $V(A_k)$。为了估计能量增益，需要未来时间和位置处的风速。我们执行GPR预测来估计风况，然后计算估计的能量增益。经过足够数量的蒙特卡洛模拟后，选择值最高的动作作为实际动作。

4. 结果与讨论

我们模拟滑翔机在风场中翱翔。它们在探索过程中收集信息，然后使用结合GPR 预测的MCTS规划方案来选择最优动作并向前移动。滑翔机可能了解整个区域的风场，也可能只了解它们经历过的部分区域。我们相应地将它们定义为全信息滑翔机 和 部分信息滑翔机 。

4.1. 滑翔机设置

我们将全信息滑翔机定义为在当前时间知道整个区域风速的滑翔机。在蒙特卡洛树搜索规划部分，它使用当前时间的精确风速$\mathbf{w}(\mathbf{r},t)$。在规划时，它使用 $\mathbf{w}(\mathbf{r},t)$，利用式（**4.1**）预测 $\mathbf{w}(\mathbf{r},t+\Delta t)$，该式仅涉及风场中的时间相关性，因此

$$K(0,t) = \frac{|t|}{\tau(k_{\min}) - \tau(k_{\max})}\left(\Gamma\left(-1, \frac{|t|}{\tau(k_{\min})}\right) - \Gamma\left(-1, \frac{|t|}{\tau(k_{\max})}\right)\right). \tag{4.1}$$

部分信息滑翔机是指只知道其访问过的位置处风速的滑翔机。它存储有限的风场信息，记忆大小为 $M = 10$，20，30，40，50。在规划部分，它使用高斯过程回归，利用内存中的先验知识预测未知位置和时间的风速。

4.2. 静态风场中的滑翔机

我们对风场进行10 次模拟，每次包含 20架滑翔机，共计200 架滑翔机。我们模拟500 s 的时长。首先，我们考虑在时间上保持不变的风场中导航的滑翔机，其空间相关性由$K(r,0)$ 在公式（2.26）中指定。我们可以通过选择规划树的深度和模拟路径的数量来自定义蒙特卡洛树搜索。规划时域的选择应使滑翔机能够充分探索风场。我们将规划时域设为 10s，原因有二：首先，该规划时域足以让滑翔机完成一整圈飞行以探索风场；其次，在 10 s 内风具有合理的相关性（图4）。如图6所示，滑翔机在 5 s 后无法收集准确信息。我们将路径数量设为 10^4,，这足以选择最优动作，同时计算效率较高。

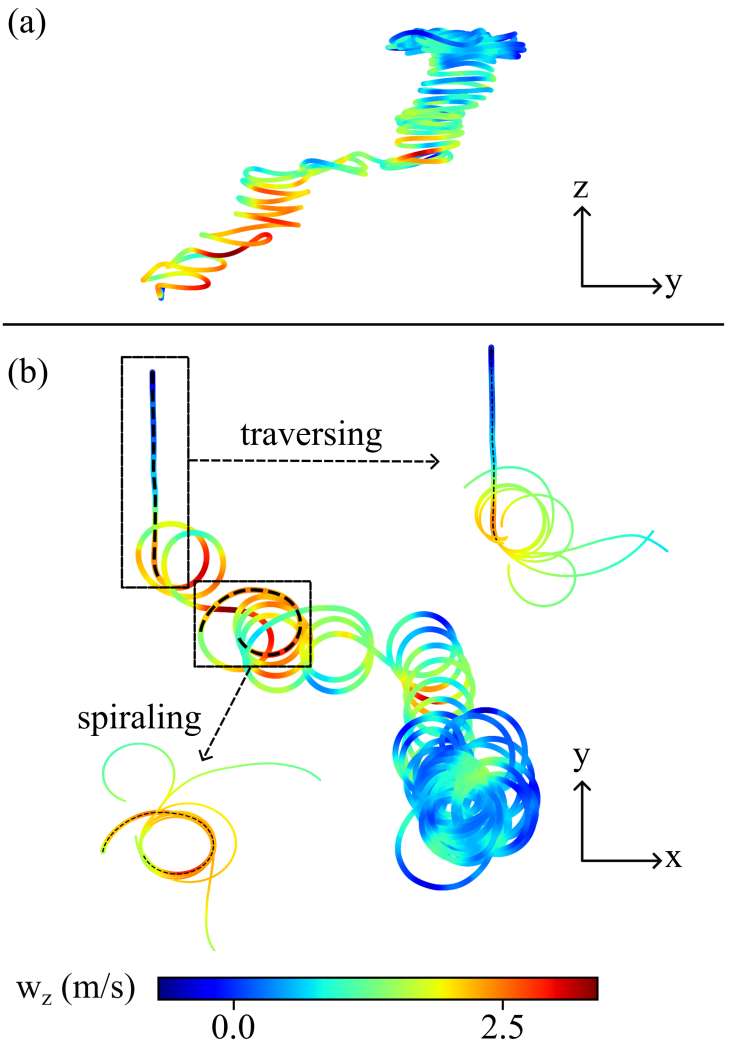

图 7. 滑翔机在冻结风场中的轨迹。颜色表示作用于滑翔机的垂直风速。(a) 滑翔机在yz平面中的轨迹。(b) 滑翔机在xy平面中的轨迹。搜索开始时，滑翔机表现出“穿越”行为；找到上升气流后，则转为“盘旋”行为。放大图展示了蒙特卡洛树搜索路径的一些示例。

在图 7中，我们展示了滑翔机的一条示例路径，以及沿途单次蒙特卡洛树搜索时探索的轨迹。滑翔机表现出明显的局部盘旋行为，并在盘旋过程中获得高度，这与热气流翱翔时观察到的翱翔模式相似。这些盘旋过程之间穿插着平直飞行，可以直观地视为“觅食”行为：当这些盘旋过程中获得的高度超过典型的相关性长度（$\simeq$ 50米）时，驱动盘旋的上升气流便会消散。随后，滑翔机穿越流场中价值较低的区域，飞向新的富能量区域。

在远大于 1 秒的时间尺度上，由于 v 与 v_c相当，从流场中提取的能量主要转化为势能。为了研究能量增益的组成，我们计算了式（2.14）中的各个分量。图 8 显示，风的波动所带来的贡献微不足道。能量增益主要来自上升气流。

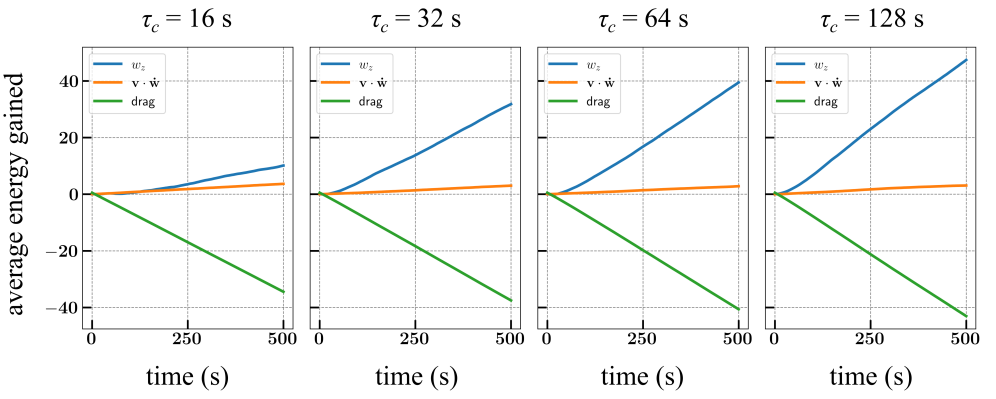

图8. 平均获得能量的各组成部分。我们模拟了 200 架滑翔机，分别运行 $\tau_c = 16$、32、64、128 秒，记忆大小为 $M = 40$，并分别展示式（2.14）中的平均获得能量。w_z 项对能量贡献起主导作用。

因此，我们使用滑翔机的爬升率 c（图 9）来衡量能量提取效率。我们模拟执行随机动作的滑翔机，以及能够完全掌握流场信息的滑翔机，分别得到爬升率的下界（$c_{\min}$）和上界（$c_{\max}$）。能量提取效率定义为

$$\eta(c) = \frac{c - c_{\min}}{c_{\max} - c_{\min}}. \tag{4.2}$$

效率用于估算流场全局知识相对于沿滑翔机路径获取的局部信息所提供的价值。对该冻结流场拥有完整信息的滑翔机表现出正的爬升率 $c_{\max} = 0.5\mathrm{m/s}$，这表明，只要滑翔机拥有足够的信息，且流场的相关性足够长，能量正收益飞行就是可行的。使用部分信息（即沿过去的轨迹测得的风速）的滑翔机也表现出正的爬升率（图 9、1），其 $\eta = 0.77,\ 0.81$ 分别对应记忆大小 $M = 20$、50（2）。信息每隔 $\Delta t = 0.5\mathrm{s}$ 存入内存，记忆时长为 $t_m = M\Delta t$。

4.3. 动态风场中的滑翔机

接下来，我们考虑具有时间相关性（记为 τ_c）的动态风场。上文考虑的冻结风场可由以下极限 $\tau_c \to \infty$获得。为评估性能，我们根据滑翔机在 200 s 至 500 s 期间获得的高度，测量其平均爬升率。我们考虑冻结风场和动态风场，其中 $\tau_c = 16\mathrm{s}$、$32\mathrm{s}$、$64\mathrm{s}$、$128\ \mathrm{s}$。随后，我们得到具有不同记忆容量的全信息滑翔机和部分信息滑翔机，其记忆容量为$M = 4$、10、20、30、40、50。表 1 总结了爬升率的详细信息。表 2 展示了部分信息滑翔机在动态风场和冻结风场中的效率。

对于较小的 τ_c，时间相关性减弱意味着，在通过蒙特卡洛树搜索选取最优路径时，过去的经验所提供的信息较少，因此平均爬升率会降低。此外，螺旋飞行段背后的直觉表明，每个飞行段的持续时间至多为 $\sim \tau_c$，从而减少在流场的富能量区域中所花费的时间。当 τ_c 足够小时，过去的信息无法预测未来流场构型，净能量增益应降低至随机滑翔机的水平。

图 10 显示，对于部分信息滑翔机而言，能量正收益飞行在 $\tau_c \gtrsim 60\mathrm{s}$ 时是可行的。净能量增益随 τ_c 增加；只要 $t_m > 10\mathrm{s}$，净能量增益对记忆大小的依赖很弱。滑翔机的效率随 τ_c 单调增加，即使爬升

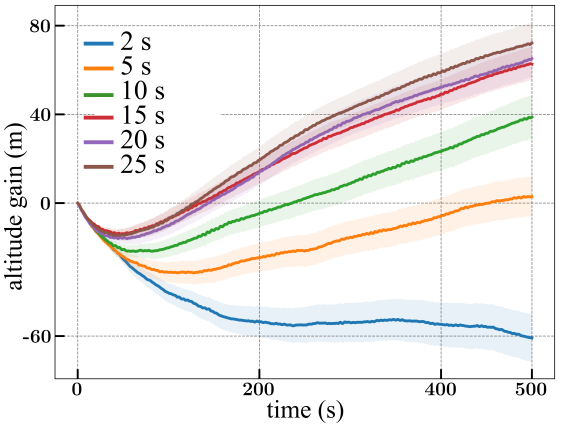

图9. 滑翔机在冻结风场中的高度增益，利用从测得的风历史中获取的部分信息，并采用不同的记忆时长 $t_m = [2s, 5s, 10s, 15s, 20s, 25s]$。所有滑翔机最初都在下降，但在为风场建立更好的模型后开始获得高度。从200 s 开始的高度增益斜率被测量为爬升率。爬升率的测量定义见公式（4.2）。

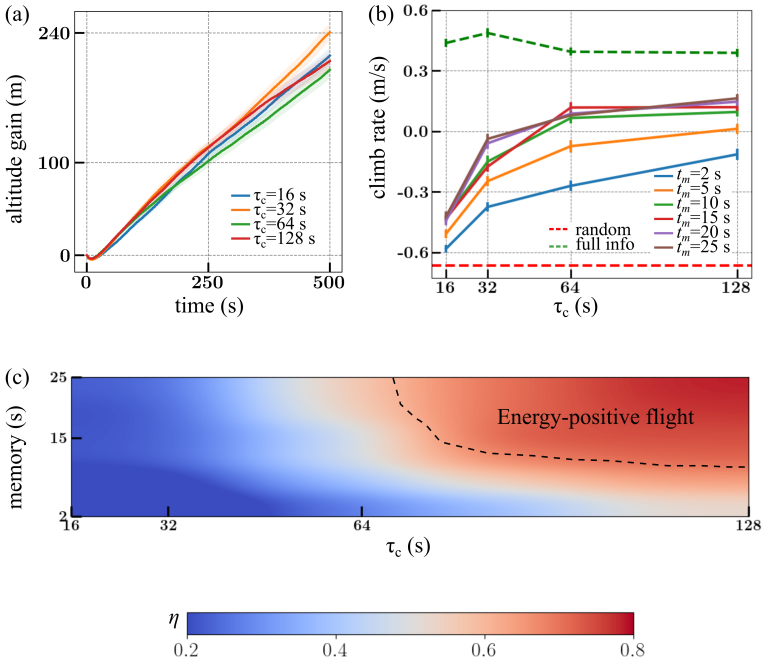

图10.(a) $\tau_c = 16s、32s、64s、128s$ 动态风场中完整信息滑翔机的平均高度增益。(b) 内存为$t_m = 5s、10s、15s、20s、25s$和 $\tau_c = 16s、32s、64s、128s$时爬升率的汇总。完整信息滑翔机的爬升率显示为上界，随机动作滑翔机的爬升率显示为下界。(c) 能量提取效率 $\eta(c)$作为t_m 和 τ_c的函数。能量正收益飞行区域为$c > 0$。

τ_c(秒) \ 吨$_m$(秒)	随机	2	5	10	15	20	25	完整信息
16	-0.67	-0.581	-0.507	-0.428	-0.432	-0.441	-0.422	0.437
32	-0.67	-0.375	-0.247	-0.150	-0.175	-0.060	-0.038	0.486
64	-0.67	-0.270	-0.074	0.065	0.117	0.086	0.079	0.394
128	-0.67	-0.115	0.012	0.095	0.119	0.146	0.162	0.388
冻结	-0.67	-0.024	0.092	0.145	0.161	0.170	0.176	0.398

表 1. 部分信息滑翔机和完整信息滑翔机爬升率（米/秒）摘要 i n 动态风场和冻结风场。

τ_c(s) \ t_m(s)	2	5	10	15	20	25
16	7.74%	14.45%	21.66%	21.25%	20.44%	22.20%
32	25.30%	36.37%	44.79%	42.62%	52.65%	54.54%
64	37.35%	55.28%	68.27%	73.12%	70.24%	69.54%
128	52.32%	64.33%	72.24%	74.49%	77.06%	78.62%
冻结	60.38%	71.25%	76.23%	77.81%	78.66%	79.16%

表2. 部分信息滑翔机在动态风场和冻结风场中的效率汇总（定义见公式（4.2））。

当滑翔机拥有完美信息（$c_{\max}$）时，爬升率会随着 τ_c的增加而降低，这表明，短时间尺度流场中爬升率降低是由于所获取信息更快退化，而不是因为能量来源更少。

部分信息滑翔机在不同的场动力学条件下展现出不同的探索策略。如图所示11，在波动较大的场中，滑翔机会发现并停留在不同位置；而在较为稳定的场中，滑翔机的行为则更加稳定。

5. 结论

人们认为，翱翔鸟类会利用相对稳定的大尺度流动结构（如热气流或剪切层），通过高效采样和导航可靠地获取能量。我们的结果表明，采用基于采样的规划算法的滑翔机，能够利用流体湍流运动学模型中的瞬态波动，实现能量正收益飞行。与依赖局部机械线索或优化飞行模式的方法不同（前者已被证明有助于热气流翱翔，后者则有助于动态翱翔），我们的算法采用一种自适应策略，利用近期测得的风速历史，预测并估计未来轨迹上的能量增益。与其他翱翔方式不同，实现能量正收益飞行需要记忆最近数十秒的信息，这凸显了存储信息以描绘局部物理环境的重要性。

在我们的模拟中，滑翔机获得的大部分能量来自局部上升气流，即方程（1.1）右侧的第二项，而不是风梯度。滑翔机的轨迹反映了觅食模式：通过相对笔直的路径高效探索流场，随后在存在显著上升气流的局部螺旋中进行能量提取。这一图景表明，几十秒的内存所带来的边际收益可能是流场相关长度尺度的结果（此处为 ≈ 100米）：一架滑翔机，它

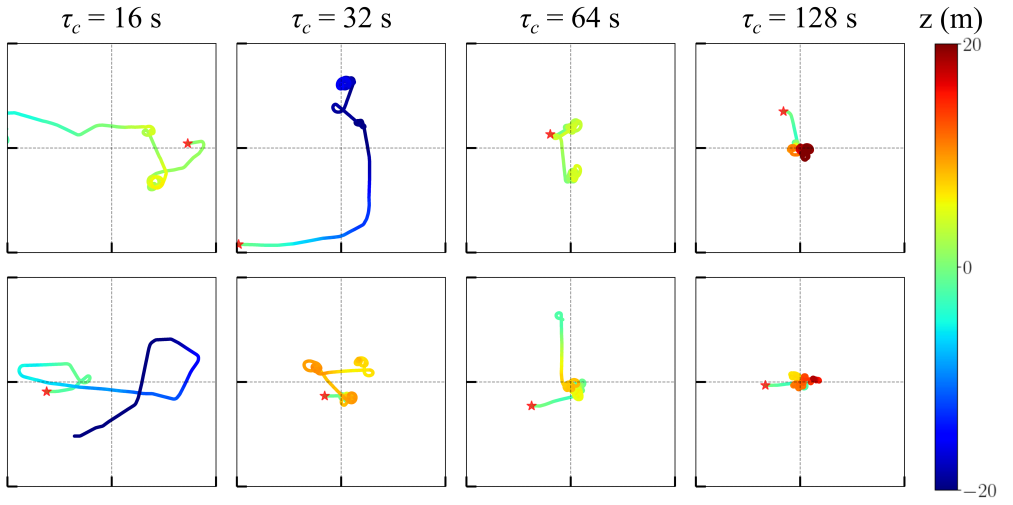

图11. 动态风场中滑翔机轨迹示例。滑翔机在 100m × 100m *xy*平面上的俯视图。红色星号表示滑翔机的初始位置。

以 10 m/s 的速度飞行，至少需要 10 s 的内存，才能获取流场的两个独立样本并指导后续决策。

大气边界层中的中性条件表现出 50 s 至 100s 的相关时间尺度，典型速度波动幅度为 1 m/s（Lenschow & Stankov 1986）。通过模拟滑翔比（15:1）与翱翔鸟类相近的滑翔机，我们的结果表明，在物理上相关的时间尺度内，能量正收益飞行确实可行。现代滑翔机的飞行速度快得多，因此能够更高效地探索，且滑翔比超过 40:1（Administration& Service 2004）。采用本文提出的算法的滑翔机，有望在对大气尺度要求更严格的条件下实现能量正收益飞行。该算法适用于具有任意相关结构的流场，包括上升气流具有独特空间分布的环境（例如，大气边界层中的云街（Irving 1973））。需要注意的是，预测模型依赖于流场的二阶矩。一个值得探讨的开放问题是，大气湍流中的非高斯偏差（Katul等 1994年）是否会显著影响算法的性能。

经费支持。 G.R. 部分获得哈佛大学 NSF-Simons 数学生物学与统计分析中心（资助编号 # 1764269）和哈佛定量生物学倡议的支持。C.H.R. 部分获得美国能源部科学办公室高级科学计算研究应用数学计划的支持，合同编号为 DE-AC02-05CH11231。

利益声明。作者声明不存在利益冲突。

作者 ORCID D. He https://orcid.org/0009-0004-1100-9024；G. Reddy https://orcid.org/0000-0002-1276-9613；C. H. Rycroft，https://orcid.org/0000-0003-4677-6990

附录 A。风场的计算

如第 2.2 节所述，风采用各向同性湍流模型来描述，该模型由 $N \times N \times N$ 个傅里叶模态（式（2.19））构成，并按照 Ornstein–Uhlenbeck 过程（式（2.20））随机演变。为了像图 3那样将风场可视化，可以根据式（2.16），在格点位置进行标准的离散傅里叶变换。为此，我们使用 FFTW 库（Frigo & Johnson 2005），特别是 `c2r` 变换

将复数傅里叶模态转换为实数场。由于式（2.17）对模态的限制，FFTW 将模态表示为一个 $N \times N \times \lfloor \frac{N}{2}+1 \rfloor$ 数组，其余模态则由此隐式确定。FFTW 使用自定义的 fftw complex 数据类型表示每个复数，该类型由一个包含两个双精度浮点数的数组组成（占用 16 字节）。因此，我们将这个三维数组用作存储描述风场的傅里叶模态的主要存储空间。

在执行傅里叶变换之前，FFTW 会使用其 fftw 计划数据类型，为特定数据和内存布局选择最佳算法。我们使用自定义的 fftw 计划，对全部三个速度分量同时执行快速傅里叶变换；由于采用了向量化，这比依次进行三次计算有所提速。FFTW 会执行多线程计算，并在 $O(N^3 \log N)$ 时间内完成三维离散傅里叶变换。

为了评估单个非晶格滑翔机位置处的风场，我们编写了一个用于计算公式（2.19）的自定义例程，其计算复杂度为 $O(N^3)$时间。由于所有模态都对公式（2.19）中的求和进行独立计算，因此可以使用 OpenMP高效地进行多线程处理。由于这里只需计算单个速度，而不是完整的三维速度网格，因此其速度显著快于 FFTW 计算。在某些情况下，我们会考虑同一风场中的一组 G 个滑翔机，并编写了另一个用于同时计算 G 个速度的例程。由于所有 $O(N^3)$个傅里叶模态只需从内存中读取一次，因此该例程比执行G 次单独的风场评估更快。

最后，我们编写了一个例程，根据方程（2.20）更新傅里叶模态。我们使用 GNU 科学库（GSL）计算高斯随机变量，并采用 Tausworthe 随机数生成器（L'Ecuyer 1996，1999）。此更新可以高效地进行多线程处理，每个线程使用一个以不同种子初始化的独立生成器。

在图 12中，我们展示了初始状态和较晚时刻 $t = 100$s 下风场的能谱。由于风场以稳态初始化，因此满足 Kolmogorov 幂律，即 $E(k) \sim k^{-5/3}$。较晚时刻的风场也满足 Kolmogorov 定律，这表明方程（2.20）中的随机微分方程在平衡状态下保持了模态。随着模态数量 N 增加，Kolmogorov 定律适用的 k 范围也随之扩大。

附录 B：高效高斯过程回归

如第 3.2 节所述，直接实现式 (3.5) 需要计算 $\mathrm{K(X,X)}^{-1}$。每次都对 K(X, X) 求逆，例如使用 LU 分解（Heath 2002），需要 $\mathrm{O(M^3)}$ 次运算，开销将变得难以承受。因此，为了提高性能，我们利用了每一步中 K(X,X) 仅发生微小变化这一特点。令 $\mathrm{X} = [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}2, \cdots, \mathrm{x}_M]$。随着滑翔机探索场，新记忆会取代旧记忆。当新观测 x_{M+1} 加入 X 时，最早的观测 x_1 会被删除，于是 $\mathrm{X}' = [\mathrm{x}_{M+1}, \mathrm{x}2, \cdots, \mathrm{x}_M]$。我们可以通过应用 Woodbury 公式，利用 $\mathrm{K(X,X)}^{-1}$ 高效地计算协方差函数 $\mathrm{K(X', X')}^{-1}$的新逆矩阵。令 $\mathrm{A} = \mathrm{K(X,X)}$，$\mathrm{v} = \mathrm{K}(\mathrm{x}_{M+1}, \mathrm{X})$，并假设 A^{-1} 已知。令

$$K(X', X')^{-1} = (A + ev^{\mathsf{T}} + ve^{\mathsf{T}})^{-1}.$$

其中 e 是一个单位向量，满足 $e_1 = 1$。根据 Woodbury 公式

$$(A + ev^{\mathsf{T}} + ve^{\mathsf{T}})^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C + VA^{-1}U)VA^{-1}$$

其中

$$U = [e|v], \qquad V = U^{\mathsf{T}}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

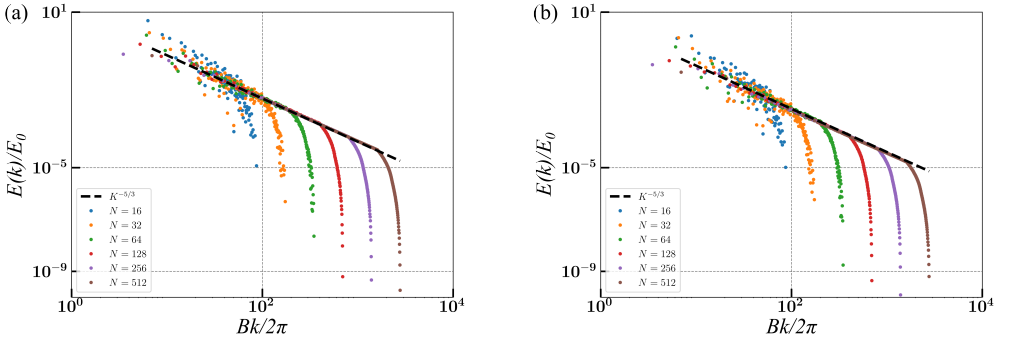

图 12. 使用不同模态数（$N = [16, 32, 64, 128, 256, 512]$）进行模拟所得的能谱符合 Kolmogorov 的 $5/3$ 定律，其中 E_0 为参考能量尺度。(a) 初始风场，$t = 0$。(b) $t = 100$ 秒时的风场。

更新步骤需要$O(M^2)$ 时间，这比直接计算矩阵的逆更高效。

参 考 文 献

美国联邦航空管理局。2004 年飞行标准滑翔机飞行手册。Aviation Supplies & Academics。´ AKOS, ZSUZSA, NAGY, M ´AT´E, LEVEN, SEVERIN & VICSEK, TAM ´AS 2010 鸟类与无人飞行器的热气流翱翔飞行。*Bioinspir. Biomim.* **5** (4), 045003。ALLEN, MICHAEL J & LIN, VICTOR 2007 自主翱翔无人飞行器的制导与控制。技术报告。BARDI, MARTINO, DOLCETTA, ITALO CAPUZZO & OTHERS 1997 *Hamilton–Jacobi–Bellman*方程的最优控制与黏性解，第 12 卷。Springer。BAUDINETTE, RV & SCHMIDT-NIELSEN, K 1974 银鸥滑翔飞行的能量成本。*Nature* **248** (5443), 83–84。BOLLT, SCOT A & BEWLEY, GREGORY P 2021 如何通过快速跟踪在飞行中从湍流提取能量。*J. Fluid Mech.* **921**。BOUSQUET, GABRIEL D, TRIANTAFYLLOU, MICHAEL S & SLOTINE, JEAN-JACQUES E 2017 最优动态翱翔由连续的浅弧段构成。*J. R. Soc. Interface* **14** (135), 20170496。BROWNE, CAMERON B, POWLEY, EDWARD, WHITEHOUSE, DANIEL, LUCAS, SIMON M, COWLING, PETER I, ROHLFSHAGEN, PHILIPP, TAVENER, STEPHEN, PEREZ, DIEGO, SAMOTHRAKIS, SPYRIDON & COLTON, SIMON 2012 蒙特卡洛树搜索方法综述。*IEEE T. Comp. Intel.AI* **4** (1), 1–43。CHUNG, JEN JEN, LAWRANCE, NICHOLAS RJ & SUKKARIEH, SALAH 2015 学习翱翔：强化学习中的资源约束探索。*Int. J. Robot Res.* **34** (2), 158–172。CONE, CLARENCE D 1962 鸟类的热气流翱翔。*Am. Sci.* **50** (1), 180–209。DAGUM, L. & MENON, R. 1998 OpenMP：共享内存编程的行业标准 API。*IEEE Computational Science and Engineering* **5** (1), 46–55。FRIGO, M. & JOHNSON, S.G. 2005 fftw3 的设计与实现。*Proceedings of the IEEE* **93** (2), 216–231。FUNG, JIMMY CHI HUNG, HUNT, JULIAN C HARLES ROLAND, MALIK, NADEEM A & PERKINS, RJ 1992 通过非定常随机傅里叶模态对均匀湍流进行运动学模拟。*J. Fluid Mech.***236**, 281–318。HAREL, ROI, HORVITZ, NIR & NATHAN, RAN 2016 成年秃鹫在具有挑战性的热气流翱翔条件下表现优于幼鸟。*Scientific Reports* **6** (1), 1–8。HARVEY, CHRISTINA & INMAN, DANIEL J 2021 滑翔鸟类与同类无人飞行器的气动效率：综述。*Bioinspir. Biomim.* **16** (3), 031001。HEATH, MICHAEL T. 2002 科学计算：入门综述。McGraw-Hill。

符号	描述	值
滑翔机参数		
t	Time	
$\mathbf{r}$	滑翔机的位置	
$\mathbf{u}$	滑翔机的地速	
$\mathbf{u}_0$	滑翔机的初始地速	$\|\mathbf{u}_0\| = 10\text{m/s}$
$\mathbf{w}$	风速	
w	风速大小，$w = \|\mathbf{w}\|$	
$\bar{w}$	平均值w	0.5m/s
$\mathbf{v}$	滑翔机空速矢量，$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$	
v	滑翔机空速，$v = \|\mathbf{v}\|$	
ρ	空气密度	
S	机翼表面积	
c_L	无量纲升力系数	15
c_D	无量纲阻力系数	1
L	升力大小	
D	阻力大小	
m	滑翔机质量	
g	重力加速度	
μ	滑翔机倾侧角	$[-40^\circ, 40^\circ], \Delta\mu = \pm 10^\circ$
γ	滑翔机运动相对于水平面的角度	
ψ	滑翔机方位角	
v_c	速度尺度	$\sqrt{2\text{毫克}/\rho S}$
t_c	时间尺度	v_c/g
l_c	长度尺度	v_c^2/g
E	滑翔机的总能量	
ε	滑翔机的无量纲总能量	
G	同一风场中的滑翔机数量	20
风参数		
$\mathbf{k}$	波数	
k	波的幅度，$k = \|\mathbf{k}\|$	
$k_{\min}$	最小波数	$\sqrt{3}\pi/B$
$k_{\max}$	最大波数	$\sqrt{3}\pi N/B$
$\tilde{\mathbf{w}}$	波的复振幅	
$E(k)$	波浪中包含的能量	
N	一维中的复数傅里叶模态数量	
τ_c	动态风场的时间相关性	16 秒、32 秒、64 秒、128 秒
$\tau(k)$	随机过程的时间尺度	
$K(r,\ t)$	各风分量的相关函数	方程（2.26）

表 3. 用于描述滑翔机和风场的全文参数。

HENNINGSSON, PER & HEDENSTR¨OM, ANDERS 2011年 普通雨燕滑翔飞行的空气动力学。实验生物学杂志 **214** (3), 382–393. HORVITZ, NIR, SAPIR, NIR, LIECHTI, FELIX, AVISSAR, RONI, MAHRER, ISAAC & NATHAN, RAN 2014年 迁徙鸟类的滑翔速度：慢而安全，还是快而冒险？生态学快报 **17** (6), 670–679. IRVING, FRANK 1973年 云街飞行。技术滑翔 **3** (1), 1–8. KATUL, GABRIEL G, PARLANGE, MARC B & CHU, CHIA R 1994年 大气表面层湍流中的间歇性、局部各向同性和非高斯统计。流体物理学 **6** (7), 2480–2492. KEMPTON, JAMES A, WYNN, JOE, BOND, SARAH, EVRY, JAMES, FAYET, ANNETTE L, GILLIES, NATASHA, GUILFORD, TIM, KAVELAARS, MARWA, JUAREZ-MARTINEZ, IGNACIO, PADGET,

符号说明		值
高斯过程回归参数		
M	记忆大小	4、10、20、30、40、50
Δt	单次记忆存储的时间间隔	0。5 秒
t_m	记忆时长	2 秒、5 秒、10 秒、15 秒、20 秒、25 秒
蒙特卡洛树搜索参数		
H_t	滑翔机在时间t的历史	
$V(H_t)$	给定H_t时的最大预期能量增益	
d	规划深度	20
结果参数		
c	部分信息滑翔机的爬升率（表1）	
c_{min}	下沉率	−0.67米/秒
c_{max}	全信息滑翔机的爬升率（表 1）	
η	部分信息滑翔机的效率（表 2）	

表 4. 用于描述高斯过程回归、蒙特卡洛树搜索和结果的全文参数。 te
蒙特卡洛树搜索和结果。

OLIVER 等人 2022 拍翅滑翔海鸟的动态翱翔优化影响其海上大尺度分布。科学进展**8** (22), eabo0200. KOCSIS, LEVENTE & SZEPESV´ARI, CSABA 2006 基于赌博机的蒙特卡洛规划。载于机器学习：*ECML 2006 22, 2006 17 18 17*, 282 293：第届欧洲机器学习会议，德国柏林，*9*月—会议录页 – 。Springer。 LAURENT, KASEY M, FOGG, BOB, GINSBURG, TOBIAS, HALVERSON, CASEY, LANZONE, MICHAEL J, MILLER, TRICIA A, WINKLER, DAVID W & BEWLEY, GREGORY P 2021 湍流解释了鹰在自然飞行中的加速度。美国国家科学院院刊**118** (23), e2102588118. L'ECUYER, PIERRE 1996 **65**, 203 213 最大均匀分布的组合 Tausworthe 生成器。数学计算– 。L'ECUYER, PIERRE 1999 **68**, 261 269 最大均匀分布的组合 LFSR 生成器表。数学计算– 。LENSCHOW, DONALD H & STANKOV, B BOBA 1986 对流边界层中的长度尺度。大气科学杂志**43** (12), 1198–1209. MALLON, JULIE M, BILDSTEIN, KEITH L & KATZNER, TODD E 2016 空中湍流有利于翱翔鸟类。奥克：鸟类学进展**133** (1), 79–85. PATEL, CHINMAY, LEE, HAK-TAE & KROO, ILAN 2009 通过飞行测试从大气湍流中提取能量。技术滑翔**33** (4), 100–108. RAYLEIGH 1883 鸟类的翱翔。自然**27** (701), 534–535. REDDY, GAUTAM, CELANI, ANTONIO, SEJNOWSKI, TERRENCE J & VERGASSOLA, MASSIMO 2016 学习在湍流环境中翱翔。美国国家科学院院刊**113** (33), E4877–E4884. REDDY, GAUTAM, WONG-NG, JEROME, CELANI, ANTONIO, SEJNOWSKI, TERRENCE J & VERGASSOLA, MASSIMO 2018 通过强化学习在野外操控滑翔机翱翔。自然**562** (7726), 236–239. REYNOLDS, KATE V, THOMAS, ADRIAN LR & TAYLOR, GRAHAM K 2014 草原雕 Aquila nipalensis 翱翔飞行时收翼是对大气湍流的反应。英国皇家学会界面期刊**11** (101), 20140645. RICHARDSON, PHILIP L, WAKEFIELD, EWAN D & PHILLIPS, RICHARD A 2018 漂泊信天翁的飞行速度和飞行表现与风的关系。运动生态学**6** (1), 1–15. SAKAMOTO, KENTARO Q, TAKAHASHI, AKINORI, IWATA, TAKASHI, YAMAMOTO, TAKASHI,

YAMAMOTO, MAKI & TRATHAN, PHILIP N 2013 黑眉信天翁扑翼飞行与滑翔时的心率及估算能量消耗。实验生物学杂志 **216** (16), 3175–3182. SHANNON, HARLAN D, YOUNG, GEORGE S, YATES, MICHAEL A, FULLER, MARK R & SEEGAR, WILLIAM S 2002 美洲白鹈鹕的翱翔飞行时间和高度与热气流深度及强度变化的关系。秃鹰 **104** (3), 679–683. TAYLOR, GRAHAM K, REYNOLDS, KATE V & THOMAS, ADRIAN LR 2016 运动大气中的翱翔能量学与滑翔性能。哲学学会学报*B*辑 **371** (1704), 20150398. TUCKER, VANCE A 1972 笑鸥 Larus atricilla 飞行期间的代谢。美国生理学杂志 **222** (2), 237–245. TUCKER, VANCE A & PARROTT, G CHRISTIAN 1970 隼及其他鸟类滑翔飞行的空气动力学。实验生物学杂志 **52** (2), 345–367. WAN, ZHONG YI & SAPSIS, THEMISTOKLIS P 2017 用于混沌动力系统数据驱动概率预测的降维高斯过程回归。物理学*D*辑 **345**, 40–55. WHARINGTON, JOHN 1998 通过强化学习对翱翔飞行器进行自主控制。博士论文，皇家墨尔本理工大学（澳大利亚）。 WILLIAMS, HANNAH J, DURIEZ, OLIVIER, HOLTON, MARK D, DELL'OMO, GIACOMO, WILSON, RORY P & SHEPARD, EMILY LC 2018 秃鹫通过改变倾侧角来应对近地面热气流翱翔的挑战。实验生物学杂志。**221** (23), jeb174995. WOODBURY, TIMOTHY D, DUNN, CAROLINE & VALASEK, JOHN 2014 利用强化学习进行轨迹生成的自主翱翔。在第*52*届航空航天科学会议，第0990页。 WOODWARD, BETSY 1956 热气流翱翔理论。*OSTIV*出版物 **4**，159–162。 ZHAO, YIYUAN J 2004 滑翔机动态翱翔的最优模式。最优控制应用与方法 **25** (2), 67–89。