arXiv:2304.05997v1 [math.GT] 12 Apr 2023

从微分同胚到小型四维流形中的奇异现象

HOKUTO KONNO、Abhishek Mallick 和 Masaki Taniguchi

Abstract. 我们提出了一种研究相对较小的四维流形中奇异现象的方法，将多种不同的奇异行为纳入统一框架。这些现象包括具有 $b_2 = 1$ 的四维流形上的奇异光滑结构、强软木塞的例子，以及在外部稳定化后仍然存在的嵌入 $\mathbb{C}P^2\# -\mathbb{C}P^2$ 中的奇异余维1嵌入。我们还提出了一种检测四维流形同胚的新方法，该同胚不同伦于任何微分同胚，并给出了某些纽结的相对亏格下界。我们的主要工具是由族 Seiberg–Witten 理论导出的四维流形微分同胚的约束。

Contents

1. 引言 2 1.1. 带有 $b_2 = 1$ 3 的奇异四维流形 1.2. 族 Seiberg–Witten 理论检测强软木塞 5 1.3. 三维流形的奇异嵌入 7 1.4. 不与任何微分同胚同痕的同胚 9 1.5. 微分同胚给出的相对亏格界 10 1.6. 问题与联系： $b^+ = 1$ 界与局部等价类。12 2. 主要工具 13 2.1. 族 Seiberg–Witten 理论给出的约束 13 2.2. 对合 Heegaard Floer 理论给出的约束 18 2.3. 瞬子理论给出的约束 22 3. 小型奇异流形 23 3.1. 定理 1.1 的证明 23 4. 强软木塞检测 28 4.1. 强软木塞检测工具 29 4.2. 微分同胚在 $b^+ = 1$ 界上的（不可）延拓性 29 4.3. 强软木塞的例子 31 5. 嵌入小型四维流形中的奇异嵌入 34 5.1. 定理1.13 的证明 34 6. 保持 H^+ 38 定向的不可光滑化同胚 6.1. 定理 1.15 的证明 38 7. 微分同胚给出的相对亏格界 38 7.1. 一般结果 38 7.2. Manolescu 的 α、 β、 γ 与 Frøyshov 的 δ 40 的界 7.3. 亏格界 42 参考文献 46

1. Introduction

奇异行为的研究，即四维流形上光滑范畴与拓扑范畴之间的区别，是低维拓扑学的核心课题。与欧拉示性数较大的四维流形相比，要在紧致可定向的小型四维流形上检测奇异现象通常更具挑战性。研究此类奇异行为的主要工具，是各种四维流形不变量，例如唐纳森多项式不变量 [35]、Seiberg–Witten不变量 [99] 以及 Heegaard Floer混合不变量 [85]。借助这些四维流形不变量，许多学者构造出了小型奇异四维流形，相关工作始于 Akbulut [3, 4]。近年来，诸如*Floer* 同调的对合变体和族规范理论等新工具，已被证明有助于探索各种奇异行为。本文旨在结合并比较上述后两种工具，以期将其应用于四维中的奇异现象。

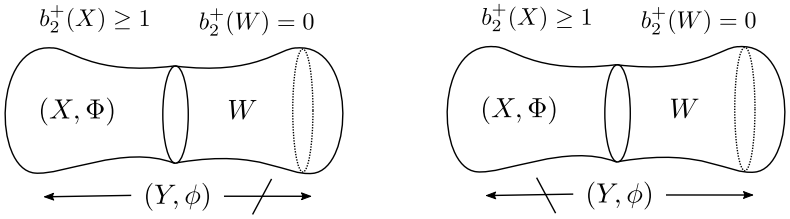


Figure 1. 本文核心主张的示意图。W 的虚线部分表示，W 可能还有另一个边界分支。箭头表示 ϕ是否延拓。

我们的方法有一个总体性的主张，大致可以描述如下。假设一个四维流形分解为两个彼此独立的4维流形： X with$b^+(X) \geq 1$ 以及 W with $b^+(W) = 0$，它们沿着一个整同调球 Y粘合。现在，如果 Y上存在一个微分同胚 ϕ，它可以光滑地延拓到X上（并满足某些条件），那么 ϕ 不能 光滑地延拓到 W 上，反之亦然，见图1。

本文的结果大致可分为五个部分。首先，结合族 Seiberg–Witten 理论 [56]和对合 Heegaard Floer 同调 [31], ，我们给出一种构造具有 $b_2 = 1$ 的异态四维流形的方法，并用它构造这类流形的新例子。特别是，我们的方法不涉及任何四维流形不变量。第二项应用与强软木塞有关；强软木塞是研究闭4维流形异态光滑结构的基本对象。Lin、Ruberman 和 Saveliev 于 [67] 利用单极 Floer 同调构造了首个此类强软木塞的例子。之后，Dai、Hedden 和第二作者于 [31] 利用 Heegaard Floer 同调，基于对称性在 Floer 同调上的作用以及 [44]中的局部等价表述，发展出一种用于强软木塞检测的 Floer 理论不变量。本文表明，族规范理论能够检测强软木塞。与以往的方法不同，我们检测强软木塞的方法不直接涉及对称性在 Floer 同调上的任何作用（也不使用任何局部等价表述），但仍足以复现当前文献中的大多数强软木塞例子 [31]。第三，我们获得了有关

三维流形在四维流形中的奇异嵌入的结果。具体而言，沿着第一作者和第三作者与 Mukherjee 最近的合作工作 [53], ，我们证明存在一个嵌入到 $\mathbb{C}P^2\# -\mathbb{C}P^2$ 中的异态余维1嵌入，且在外部稳定化后仍然存在。这回答了 [53], 中提出的问题，而且目前已知这是具有此性质的最小四维流形。相比之下， [53] 中证明了此类奇异嵌入存在于$\#_2(S^2\times S^2)$和$\#_3(\mathbb{C}P^2\# -\mathbb{C}P^2)$中。第四个主题是利用我们的形式体系，在某些小型四维流形上给出新的同胚例子，这些同胚不同伦于任何微分同胚。Baraglia [13]为此类四维流形上的同胚同伦于微分同胚给出了一个必要条件。我们的结果表明，他的限制条件并非充分条件。最后，我们给出某些具有 $b^+\leq 2$的四维流形中纽结的相对亏格下界。这推广了 Bryan 的等变 10/8 不等式 [22]。我们给出亏格界的策略同样是运用微分同胚和族 Seiberg–Witten 理论。

在上述大多数应用中，我们证明并反复使用了某种版本的这句格言。现在让我们进一步阐述我们的结果：

1.1. 具有 $b_2=1$ 的奇异四维流形。 如果两个四维流形（有边界或无边界）同胚但不同胚，就称它们互为奇异副本。我们关注具有 $b_2=1$ 的紧致（可定向）四维流形。对于这类四维流形，奇异结构主要是借助四维流形不变量发现的。这个过程需要将一对奇异四维流形嵌入另一个已知的奇异闭四维流形中；这些流形可由某个四维流形不变量或伴随不等式加以区分，例如参见 $[3,5,6,8,9,49,100]$。

在本文中，我们给出一个用于构造具有 $b_2=1$ 的异态4维流形（带边界）的判据。随后，我们利用该判据提供许多具有 $b_2=1$ 的异态4维流形示例，而此前尚未知晓它们是异态的。我们的方法不依赖于（有效）嵌入和4维流形不变量的存在。相反，我们使用族 Seiberg–Witten 理论、对合 Heegaard Floer 理论（以及滤过瞬子理论），并运用 Akbulut–Ruberman技术 [7]。

在陈述我们的结果之前，我们需要先确立一些术语。我们将用 $h(Y)$ 表示定向同调 3-球 Y 的瞬子 Frøyshov 不变量 [39] 。Heegaard Floer 同调中的 Frøyshov 不变量对应物是 d-不变量 [83]。这两个同调余bordism 不变量（对于整数同调球而言）均取整数值，并且猜想它们相等。给定一个纽结 K，我们将关注量 $d(S^3_{+1}(K))$。通常，在文献中，我们定义

$$V_0(K) := -\frac{1}{2}d(S^3_{+1}(K)).$$

量 $V_0(K)$ 实际上是由 Rasmussen 定义的纽结同痕不变量（见 [92]）。对我们而言，另一个研究对象是对称纽结，例如强可逆结。若存在一个保持 S^3 的集合不变、但反转纽结定向的保定向对合 τ，则称纽结 K 为强可逆。对于这样的强可逆结 $(K,\ \tau)$，Dai、Stoffregen 和第二作者在 [33] 中构造了等变纽结同痕群的数值不变量 $V_0^\tau(K)$。关于不变量 $V_0^\tau(K)$ 的明确定义，请参见第 2.2 小节。最后，对于 S^3 中的纽结 K 以及正整数 $n\geq 2$，我们定义一个紧致、光滑、定向的负定4维流形 —

$W_n(K)$，它是图2中的四维协边去掉连接 $S^3_{1/n}(K)$ 中一点与 $S^3_{1/(n-1)}(K)$ 中一点的一条弧的小开邻域后所得。注意，我们有

$$\partial W_n(K) = -S^3_{1/n}(K) \# S^3_{1/(n-1)}(K)$$

并且 $b_2(W_n) = 1$。在 [82] 中检验了 $W_n(K)$ 是单连通的。我们不 w

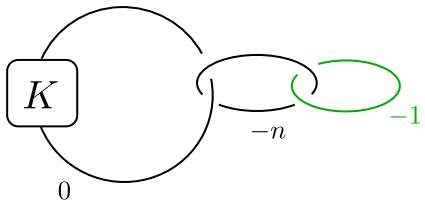


FIGURE 2. 用于定义流形 W_n 的（-1）框架 2-柄协边，以绿色描绘。

以便陈述该定理：

定理 1.1. 设 n 为正整数。设 K 是S^3 中的一个强可逆结，满足以下条件。

$$\underline{V}^{\tau}_0(K) > V_0(K) > 0 \text{ and } h(S^3_1(K)) < 0.$$

于是，四维流形 $W_{2n}(K)$ 包含一对余维零光滑紧流形 $M_n(K)$ 和 $M'_n(K)$，它们满足：

(a) $M_n(K)$ 和 $M'_n(K)$ 是异态的，即彼此同胚但不微分同胚。*(b)* $M_n(K)$ 和 $M'_n(K)$ 与 $W_{2n}(K)$ 同伦等价。特别地，$M_n(K)$ 和 $M'_n(K)$ 是单连通的，且 $b_2 = 1$。*(c)* $\partial M_n(K)$ 和 $\partial M'_n(K)$ 彼此微分同胚，并且它们与 $\partial W_{2n}(K)$ 光滑同调协边。

此外，若 $n \neq n'$，则 $\partial M_n(K)$ 不同胚于 $\partial M_{n'}(K)$。

如前所述，请注意，定理 1.1 的假设不 要求四维流形不变量（例如 Seiberg–Witten不变量）非平凡，我们在证明中也没有使用这一点。相反，我们只需对纽结作出一些条件假设。此外，由于在定理 1.1 的证明中，我们使用了涉及某些四维流形上微分同胚不存在性结果的 Akbulut–Ruberman技术 [7]，因此我们证明了具有 $b_2 = 1$ 的四维流形上的某些微分同胚不存在性结果。详情见命题 3.5。

注记 1.2。 根据 [43], 我们有以下关系，涉及定理 1.1 假设中出现的两个不变量。

$$\underline{V}^{\tau}_0(K) \geq V_0(K).$$

因此，假设中的条件要求上述不等式为严格不等式。此外，若我们假设关于瞬子 Frøyshov 不变量与 Heegaard Floer d 不变量（相差一个 $-1/2$倍数）相一致的猜想成立，那么假设中关于 h 和 V_0 的条件等价：

$$V_0(K) > 0 \Leftrightarrow h(S^3_1(K)) < 0.$$

尽管乍看之下该假设听起来具有限制性，但仍有无穷多个满足这些假设的纽结。事实上，例如有：

例 1.3. 令 τ为图 3 中所述的 $T_{2,\ 2n+1}$（2，$2n+1$）环面纽结上的强对合。对于任意奇正整数 n [1]，可以取一列强可逆纽结

$$(K_n, \tau_n) = (T_{2,2n+1}\#T_{2,2n+1}, \tau\#\tau),\ n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

作为满足定理 1.1 所有假设的例子。此外，利用滤过瞬子理论，我们还可以区分不同 n 和 m 选择下的 $M_2(K_n)$ 与 $M_2(K_m)$。见注2.17。

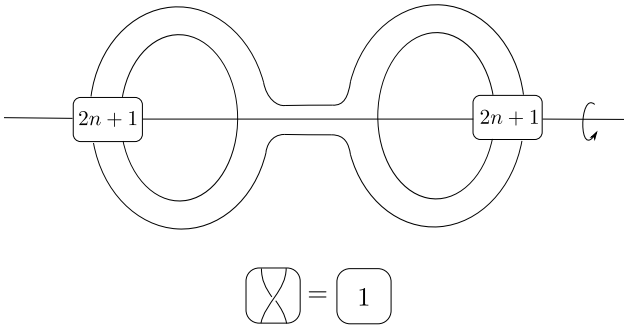


FIGURE 3. 纽结 $K_n = T_{2,\ 2n+1}\#T_{2,\ 2n+1}$，其强对合为 $\tau\#\tau$，由 $T_{2,\ 2n+1}$上的强对合 τ 诱导而来。

尽管定理 1.1 的假设并未提及族规范理论，但证明关键性地运用了该理论，同时也借鉴了对合 Heegaard Floer 同调 [31] 和过滤瞬子Floer同调 [82]中的技巧。证明见第3节。

1.2. **族塞伯格–维滕理论可检测强软木塞**。软木塞是研究异态4维流形的基本对象之一。事实上，根据 Matveyev [76] 以及 Curtis-Freedman-Hsiang-Stong [29], 的工作，我们知道，闭单连通4维流形上的任意两种不同奇异光滑结构都可通过 *cork* 扭转相互关联。最近，Lin、Ruberman 和 Saveliev [67], 引入了软木塞的一种更广义形式，称为强软木塞。下面回顾（强）软木塞的定义。

定义 1.4。设 (Y, τ, W) 为一个三元组，其中 τ 是整同调球 Y 上的保定向光滑对合，而 Y 是一个可缩、光滑、紧致流形 W 的边界。若对合 τ 在 Y 上不能作为微分同胚延拓到 W 上，则称三元组 (Y, τ, W) 为一个软木塞。此外，考虑如前所述的 (Y, τ)。若 τ 不能作为微分同胚延拓到任何 $\mathbb{Z}_2$ 同调球 W 上，则称 (Y, τ) 为一个强软木塞。

[1]不应将此参数与 W_n中的参数 n 混淆。

有时我们会宽泛地称一对 (Y,τ) 为强软木塞：若 τ 不能延拓到任何 $\mathbb{Z}_2$ 同调球上，而不要求 Y 是某个可缩流形的边界。与异态流形检测的情形一样，现有关于软木塞检测的大多数文献都采用以下技术。首先，在一个闭4维流形中有效嵌入软木塞，然后证明某个四维流形不变量会在软木塞扭转 [4] 下发生变化。另一方面，这类方法无法检测强软木塞。Lin、Ruberman 和 Saveliev 最近在 [67] 研究了这一方法的替代方案，并证明 Akbulut 软木塞是强软木塞。随后，第二作者于 [31] 与 Dai 和 Hedden 合作，给出了大量新的强软木塞实例。他们构造了一个源自对合 Heegaard Floer 同调的不变量，从而实现了对强软木塞的检测。具体而言，该不变量的构造利用了软木塞扭转对称性在边界 Heegaard Floer 同调上的作用，以及 Hendricks–Manolescu–Zemke 的局部等价表述 [44]。

本文中，我们将使用族 Seiberg–Witten 规范理论来构造强软木塞的例子。我们检测强软木塞的方法独立于 [67] 和 [31] 中使用的方法。具体而言，我们不 使用边界的 Floer 同调上的任何对称性作用，也不使用局部等价表述。

在陈述障碍之前，我们需要回顾几个定义。给定一个定向四维流形 X，我们将 $H^+(X)$ 记为 $H^2(X;\mathbb{R})$ 的一个最大维正定子空间。给定一个保定向的微分同胚 $\Phi\colon X\to X$，我们可以定义 Φ 保持或反转 $H^+(X)$ 的定向这一概念，且该概念独立于 $H^+(X)$ 的选择（更多细节见第 2.1 小节）。现在我们给出以下两个定义：

定义1.5。设 X^4 是一个有边界或无边界的定向四维流形，且 Φ 是 X 上的保定向微分同胚。根据 Φ 保持还是反转 $H^+(X)$ 的定向，我们称 Φ 为 H^+-保持 或 H^+-反转 。

定义1.6。设 (X,Φ) 如前所述。若 $\mathfrak{s}$ 是 X 上的自旋^c-结构，且在 Φ 的作用下保持不变，即 $\Phi(\mathfrak{s})=\mathfrak{s}$，则称 Φ 对于 $\mathfrak{s}$ 是自旋^c-保持的 。另一方面，若 $\mathfrak{s}$ 是 X 上的自旋^c-结构，且在 Φ 的作用下被共轭，即 $\Phi(\mathfrak{s})=\bar{\mathfrak{s}}$，则称 Φ 对于 $\mathfrak{s}$ 是自旋^c-反转的 （或共轭的）。

现在我们可以陈述我们的障碍：

定理 1.7。设 $(Y,\ \phi)$ 是一个定向同调 *3*-球，带有一个保定向（不一定是二阶）微分同胚 ϕ。假设 Y 是某个自旋^c *4*-流形 $(X,\ \mathfrak{s})$ 的边界，其中 $b^+(X)=1$ 且 $b_1(X)=0$。现在，若 Φ 是 ϕ 的任意保定向光滑延拓，使得 Φ 是 H^+-反转的，并且对于某个自旋^c-结构 $\mathfrak{s}$，Φ 是自旋^c-保持的，同时

$$\frac{c_1(\mathfrak{s})^2-\sigma(X)}{8}>0,$$

那么 (Y,ϕ) 是一个强软木塞。

我们陈述另一个障碍，其假设在某种程度上是对上述假设的“共轭”：

定理 1.8。设(Y,ϕ) 是一个带有保定向（不一定为 *2* 阶）微分同胚 ϕ的定向同调 *3*-球。假设 Y 为边界

一个自旋^c 4-流形 $(X,\mathfrak{s})$，具有 $b^+(X) = 1$ 以及 $b_1(X) = 0$。现在，若 Φ 是 ϕ 的任意保定向光滑延拓，使得 Φ 保持 H^+，并且对某个自旋^c-结构 $\mathfrak{s}$ 保持自旋^c，则一并搭配着

$$\frac{c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X)}{8} > 0,$$

然后 (Y,ϕ) 是一个强软木塞。

熟悉 [31] 的读者稍后会看到，定理1.8扮演$\iota \circ \tau$-局部等价类的角色，而定理 1.7则替代 τ-局部等价类。事实上，定理 1.8 将通过在塞伯格–维滕理论中使用电荷共轭对称性来证明，这对应于 HeegaardFloer 理论中的 ι-映射。然而，我们指出，塞伯格–维滕理论与对合 Heegaard Floer 同调的各族之间没有明显关系。

尽管读者可能会觉得定理 1.7 和定理 1.8 的假设都有些严格，但我们仍能利用它们，重现文献中几乎所有已有的强软木塞示例（来自 [31]）。下面列出这些示例：

定理 1.9. [31] 以下这些配备指定对合的3维流形都是强软木塞：

(a) 对于 k 为正且为奇数的情形，以及图 *4* 所示的对称性，对切片结9_{41}、9_{46}、10_{35}、10_{75}、10_{155}进行任意 $1/k$- 手术，11_{n49}。

(b) 图 *5* 所示的流形(M_n,τ)，其中 $n > 0$。

(c) 图 *5* 所示的流形(W_n,τ)，其中 $n > 0$ 且为奇数。

(d) 对于 k 为正且为奇数的情形，以及图 *6* 中所示的$(K_{-n,n+1},\tau,\sigma)$

$$\begin{cases} (S^3_{1/k}(\overline{K}_{-n,n+1}),\tau) \text{ and } (S^3_{1/k}(\overline{K}_{-n,n+1}),\sigma) & \text{if } n \text{ is odd} \\ (S^3_{1/k}(K_{-n,n+1}),\tau) \text{ and } (S^3_{1/k}(K_{-n,n+1}),\sigma) & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

这重新得到 [67, 定理 D]和 [31, 定理 1.10、1.11、1.12、1.13]。我们再次强调，我们没有使用对称性在 Floer 同调上的作用（尽管证明仍借鉴了 [31]中构造的等变协边）。与 [31] 中的方法相比，我们的方法的优势在于，计算对称性在 Heegaard Floer 同调上的作用往往很困难。事实上，目前仅对少数纽结（因而也仅对这些纽结的手术）了解这一作用 [33, 70]。相比之下，我们的假设涉及边界的交叉形式，以及能否以某种方式延拓微分同胚；这些条件有时可从柯比图中轻松检验，因此可能更易于使用。不过，我们还没有能阐明这一点的具体例子。关于一个特设情形的描述，见注 4.9。

1.3.三维流形的奇异嵌入。最近，人们通过各种工具研究了三维流形到四维流形中的奇异嵌入 [23, 46, 53, 98]。首先，让我们回顾一下本文中所使用的奇异嵌入的定义：

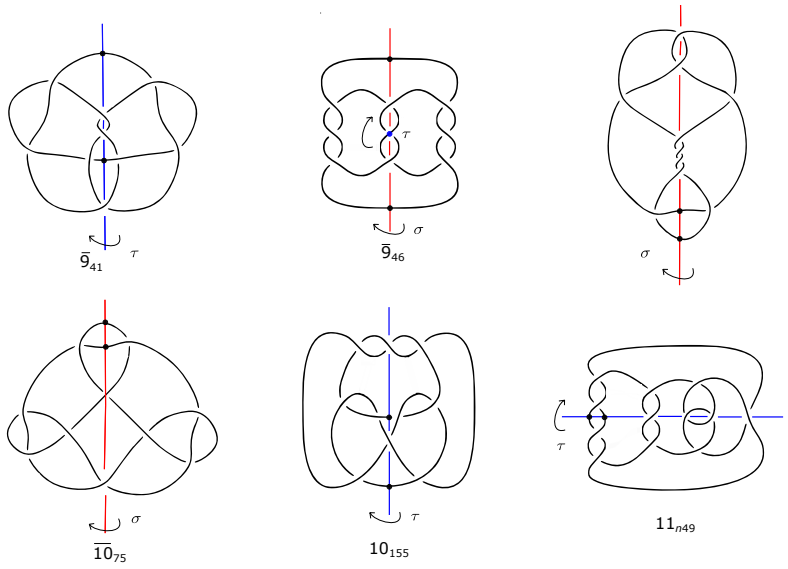


FIGURE 4. 定理 1.9 中使用的切片结。图片来源：[31,图 2]。

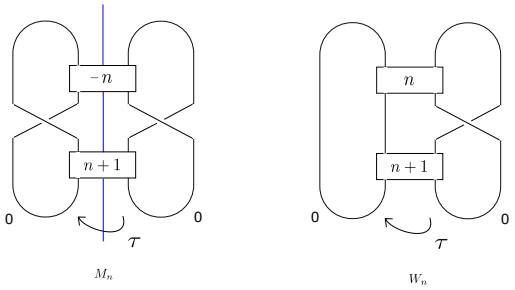


FIGURE 5. 定理 1.9 中使用的流形 W_n 和 M_n。

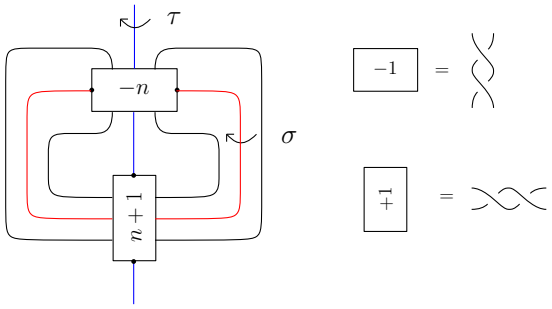


FIGURE 6. 定理 1.9 中使用的切片结 $K_{-n,n+1}$。

定义 1.10。设 Y 是一个三维流形。我们称两个光滑嵌入i_1, i_2 : $Y \to X$ 到一个光滑4维流形 X 中是（强）异态 如果

(i) 存在一个拓扑环境同痕 $H_t\colon X\times[0,1]\to X$ 使得 $H_1\circ i_1 = i_2$，(ii) 不存在这样的光滑同伦，(iii) Y_1 和 Y_2 的补空间微分同胚，即存在一个微分同胚 $f\colon X\to X$ 使得 $f\circ i_1 = i_2$。

注1.11。可以考虑异态嵌入这一概念的一个较弱版本，即仅去掉条件 (iii)。我们很容易给出这种较弱意义下的异态嵌入示例。例如，参见 [53]。

在 [53], 中，已构造出同调3球面到 #$_2$($S^2\times S^2$) 和 #$_3$($\mathbb{C}P^2$#–$\mathbb{C}P^2$) 中的奇异嵌入。同一篇论文中还提出了以下问题:

问题1.12 ([53]). 是否存在一个比[53, 定理1.4/定理1.7]中的闭4维流形更小、且支持奇异余维1嵌入的闭4维流形？更具体地说，S^4、$S^2\times S^2$或 $\mathbb{C}P^2$#($-\mathbb{C}P^2$)是否承认奇异余维1嵌入?

在本文中，我们给出了嵌入到 $\mathbb{C}P^2\#\,-\mathbb{C}P^2$ 中的一对奇异嵌入:

定理1.13。存在一对异态（强）嵌入，将 $\Sigma(2,3,7)$ 嵌入到$\mathbb{C}P^2\#\,-\mathbb{C}P^2$中。此外，在嵌入的像之外与任意连通光滑*4*维流形取连通和后，它们仍然是异态的。

定理1.13的证明论证使我们能够构造更多奇异嵌入。定理1.13的证明使用了族 Seiberg–Witten 理论。我们还注意到，仅使用对合 Heegaard Floer 理论也可以推导出定理1.13。参见定理5.3。

注 1.14。在 [53], 中指出，具有平凡映射类群的3维流形嵌入 S^4 的奇异嵌入会推翻四维 Smale 猜想。当3维流形具有平凡映射类群时，奇异嵌入就成为奇异子流形。因此，值得探讨的是，是否可以在定理1.13中用具有平凡映射类群的3维流形替换3维流形 Σ(2，3，7)。

1.4. **不同伦于任何微分同胚的同胚**。给定一个光滑4维流形 X，自然会问从微分同胚群到同胚群的包含映射 $i\colon$ Diff(X) $\hookrightarrow$Homeo(X) 的连通性，其中两者分别配备 C^∞-拓扑和 C^0-拓扑。我们将着重探讨诱导映射是否】【。

$$i_*:\pi_0(\mathrm{Diff}(X))\to\pi_0(\mathrm{Homeo}(X))$$

是满射的。对于 $f\in$ Homeo(X)，拓扑映射类 $[f]$ 属于 i_* 的像，当且仅当 f 与某个微分同胚拓扑同伦。给定 $[f]\in\pi_0$(Homeo(X)，我们称 $[f]$ 为由微分同胚实现，若 $[f]$ 属于 i_*的像。

根据 Wall 定理，映射 i_* 通常是满射的 [97], ，但也存在映射 i_* 非满射的 4 维流形。已知 i_* 非满射的最小四维流形是同伦 $\mathbb{C}P^2$#10($-\mathbb{C}P^2$)。Friedman–Morgan [38] 证明，对于 $\mathbb{C}P^2$#n($-\mathbb{C}P^2$)，若 $n\geq 10$，则 i_* 不是满射的；而当 $n<10$ [97]时，i_*是满射的。更一般地，若 $n\geq 10$是同伦 $\mathbb{C}P^2$#n($-\mathbb{C}P^2$)，则由 Baraglia [13] 的一个结果可知，$[f]\in\pi_0$(Homeo(X)) 可由微分同胚实现

当且仅当 f 保持 $H^+(X)$ 的定向。自然会有人问，反过来是否也成立。我们的答案是否定的：

定理 1.15. 设 X 是一个与$\mathbb{C}P^2\#n(-\mathbb{C}P^2)$ 同伦等价的光滑四维流形，其中 $n \geq 10$ 为某个对象。那么存在一个 X 的同胚 f，使得：

(i) f 保持 $H^+(X)$的定向；且 *(ii)* $[f] \in \pi_0(\mathrm{Homeo}(X))$ 不能由微分同胚实现，也就是说，f 不同伦于任何微分同胚。

注 1.16. 已知 i_* 不满射的最小自旋四维流形是同伦 $K3$。Donaldson [35] 证明了 $K3$ 曲面的情形；对于一般的同伦 $K3$，则可由 Morgan–Szab´o [80]后来的结果推出。在实现问题中，定向同样至关重要。更确切地说，给定一个同伦 $K3$的同胚 f，只有当 f 保持 H^+的定向时，拓扑映射类 $[f]$ 才可由微分同胚实现。对于 $K3$ 曲面，由 Matumoto [75] 和 Borcea [19] 的结果可知，反过来亦成立：若 f 保持 $H^+(K3)$的定向，则 $[f]$ 可由微分同胚实现。

1.5. **由微分同胚得到的相对亏格界**。 从纽结理论的四维视角来看，研究 S^3 中纽结的各种切片性概念是一个基本问题。设 X 为闭、定向、连通的光滑四维流形， K 为 S^3中的一个纽结。我们聚焦于纽结的 X-切片亏格，并在此回顾其定义。

定义 1.17。设 x 是 $H_2(X;\mathbb{Z}) \cong H_2(X \setminus \mathrm{int}\ D^4,\ \partial;\mathbb{Z})$ 中的一个元素。纽结 K 在 S^3 中关于 X 的光滑（分别为拓扑） X-属 $g_{X,\ x}(K)$ ($g^{\mathrm{top}}_{X\ x\ ,}(K)$) 是带边界为 K 且代表 x 的、光滑（分别为局部平坦）正常嵌入曲面的最小属，其中这些曲面嵌入于一个去掉一点的 X 中。

对于定号四维流形 X，已有许多由Heegaard Floer理论、Khovanov 同调理论和规范理论 Floer 理论推导出的 $g_X(K)$ 的有效下界。例如，Milnor 猜想断言

$$g_{S^4,0}(T_{p,q}) = u(T_{p,q}) = \frac{1}{2}(p-1)(p-1)$$

已在许多不同理论中得到证明（例如，参见 [15,30,57,58,84,91]），其中 $T_{p,\ q}$ 是类型为（p，q）的正环面纽结， p 和 q 为互素整数，而$u(K)$是纽结 K的解结数。对于不定号四维流形，能够给出$g_{X,\ x}(K)$有效下界的方法较少。假设一个四维流形 X 具有辛结构，或具有非零规范理论不变量（并额外假设 $b^+ \geq 2$），则已有若干伴随型不等式 [14,47,48,73,81]。对于规范理论不变量为零的不定号四维流形，利用 10/8 型不等式，也已知一些亏格界 [22,50,52,73,78]。本文利用族 Frøyshov 不等式，为定号和不定号流形的光滑亏格 $g_X(K)$给出下界。

通过 [32], 使用对合 Heegaard Floer 理论，已证明八字结的 (2，1)-缆结不能光滑切片。最近， [1], 根据 Bryan 的 10/8 不等式，得出了关于 $X = \#_2\mathbb{CP}^2$ 中具有该同调类的嵌入曲面的亏格界 [22]

（2，6）：

$$g_{\#_2\mathbb{C}P^2,(2,6)}(U) \geq 10, \tag{1}$$

曾被用于重新证明八字结的 (2，1)-缆结的非切片性。现在，我们将利用族 Seiberg–Witten 理论推广 Bryan 不等式。

为了描述我们的结果，使用下面这个从纽结同伦群出发的同态较为方便 $\mathcal{C}$:

$$\mathbf{\Sigma} : \mathcal{C} \to \Theta^{\tau}_{\mathbb{Z}_2},$$

其中 $\Theta^{\tau}_{\mathbb{Z}_2}$ 是 $\mathbb{Z}_2$微分同胚的 - 同调配边群。该群 $\Theta^{\tau}_{\mathbb{Z}_2}$的定义与 [31, 定义 2.2]类似。映射 $\mathbf{\Sigma}$ 定义为

$$\mathbf{\Sigma}([K]) := [(\Sigma(K), \tau)],$$

其中， τ 是沿着 K的双重分支覆盖空间 $\Sigma(K)$上的覆盖对合。注意，映射 $\mathbf{\Sigma}$ 定义了一个同态。

我们将（1）推广为以下结果:

定理 1.18. 设 K 是一个纽结，其同痕类属于 核 $\mathbf{\Sigma}$ $with\sigma(K) = 0$，其中 $\sigma(K)$ 表示结签名。那么我们有

$$g_{\#_2\mathbb{C}P^2,(2,6)}(K) \geq 10.$$

注意，Bryan 的等变 10/8 不等式 [22]及 Montague [78] 对其的推广，其证明使用了配边上的真正的 $\mathbb{Z}_2$-等变对合（即阶为 2 的微分同胚），以及带有$G =$ Pin(2) $\times_{\mathbb{Z}_2}$ $\mathbb{Z}_4$的等变 K理论。相比之下，我们的论证适用于 $\mathbb{Z}_2$-同调协边上的任意微分同胚（不对其阶数作任何限制），并且也使用了 Pin(2)-等变上同调理论。

注记 1.19. Ker $\mathbf{\Sigma}$ 中的元素示例如下：对于一个强负镜像自反结 K,

$$[K\# - K^r] \in \operatorname{Ker} \mathbf{\Sigma} \tag{2}$$

其中， $-K$ 表示 K 的同痕逆元，而 K^r 是 K 经过反向定向得到的纽结。例如，参见 [2] 中的讨论。注意，对于强负镜像自反结 K， $K\# - K^r$ 是纽结同伦群中的一个2-挠元。这意味着 $\sigma(K\# - K^r) = 0$。因此，对于此类纽结，定理 1.18 的所有假设都得到满足。作为一个具体例子，可以取 $K = 8_{17}$。[2, 51] 中已证实， $8_{17}\# - 8^r_{17}$ 是核 $\mathbf{\Sigma}$中的一个非平凡元。更多具体例子见 [2] 。

作为定理1.18 的推论，可以得出 $(4_1)_{(2,1)}$ 不属于核 $\mathbf{\Sigma}$。特别地，可以看到:

推论 1.20。 4_1 的$(2,1)$缆结的双重分支覆盖及其覆盖对合构成一个强软木塞。

证明。 在 [1], 中，作者给出了一个上界 $g_{\#_2\mathbb{C}P^2,\ (2,\ 6)}((4_1)_{(2,1)}) \leq 9$。因此，定理 1.18 意味着 $(4_1)_{(2,1)}$ 不属于核 $\mathbf{\Sigma}$，这根据核 $\mathbf{\Sigma}$的定义即可推出所述结论。 □

注记 1.21。 注意，推论 1.20 已在 [32, 注记 2.2]中使用对合 Heegaard Floer 理论证明。按照 [1], ，这提供了一个使用族 Seiberg–Witten 理论证明该结论的替代证明。

定理 1.18 中的界由定理 7.6 所确立的更一般的亏格界推出，该定理利用了微分同胚在 $b^+ \neq 0$ bounds 上的可延拓性。

注记 1.22。我们还给出了带有 $b^+ \leq 2$ 的不定号四维流形的亏格界。在第 7 节中，我们利用这一约束，为 $S^2 \times S^2$、$\#_2 S^2 \times S^2$ 中的某些环面纽结给出了此类界。例如，利用这一约束，我们证明:

$$g_{S^2 \times S^2, 0}(T_{3,13}) \geq 9.$$

这个不等式也可以通过使用 Manolescu 相对 10/8 不等式[71], “实”10/8不等式 [52], 以及 Montague 等变 10/8 不等式[78]来证明。所有这些方法都使用了等变 K 理论，而我们的方法使用的是等变上同调理论。

我们论文中最一般的亏格界见定理 7.7，它是由定理 7.6 针对纽结的双重分支覆盖空间的 α、 β、 γ 和 δ 的界推导而来。特别是，定理 7.6 给出了 Manolescu 的 α、 β、 γ 不变量 [72] 与带边界的 4-流形中的嵌入曲面之间的一些有趣关系。因此，它或许有助于计算 Manolescu 的α、 β、 γ 不变量。

1.6.问题与联系： $b^+ = 1$ **界与局部等价类。** 在本文中，我们使用 $b^+ \geq 1$ 三维流形的界来获得阻碍微分同胚延拓的障碍。我们的结果表明，其中一些障碍在某种意义上属于一个更大的故事，而这个故事尚待展开。我们将它们作为问题列于下文。Sasahira 与第一作者 [55]即将开展的工作也将讨论此类问题的 Seiberg–Witten 类比。下文假设读者熟悉由 [31], 定义的不变量；相关回顾见第 2.2 小节。

我们首先注意到，如果 W 是两个整同调球 Y_1 和 Y_2之间的协边，其中 $b^+(W) = 1$，那么与 F_W 相关联的Heegaard Floer协边映射在无穷型上消失。然而，正如读者将在本文中看到的，某些微分同胚在 W 中的存在，在某些情况下暗示了边界 Y_i的局部等价类之间存在某种关系。这类行为让人联想到由协边映射 F_W诱导的局部映射的存在，以及 [31, 定理 1.5]中的单调性关系。由于映射 F_W 在这种情况下不是局部映射，我们可以将以下内容视为提出了一个伪局部映射的存在。

问题1.23。 假设 W 是一个自旋4维流形，其边界为一个3维流形 Y，其中 $b^+(W) = 1$, $b_1(W) = 0$, $\sigma(W) < 0$，且 Y 是一个整同调球。此外，假设 X 配备了一个保定向微分同胚f，其在 Y 上的限制是一个保定向微分同胚 ϕ。现在，如果 f 保持 W 上的一个自旋结构，并反转 $H^+(W)$ 的定向，那么这是否意味着关于局部等价类的以下结论?

$$h_\tau(Y, \phi) \neq 0,\ h_{\iota \circ \tau}(Y, \iota \circ \phi) = 0.$$

以类似的方式，鉴于对 f 的延拓有不同的条件，我们也可以提出上述问题的一个“共轭”版本。

问题 1.24. 假设 X 是一个自旋4维流形，其边界为3维流形 Y，其中 $b^+(W) = 1$、 $b_1(W) = 0$、 $\sigma(W) < 0$，且 Y 是一个整同调球。此外，假设 X 配备了一个保定向微分同胚

f，其限制在 Y 上是一个保定向微分同胚 ϕ。现在进一步假设 f 保持 W 上的一个自旋结构以及 $H^+(W)$ 的定向，那么这是否意味着局部等价类具有以下性质

$$h_\tau(Y,\phi)=0,\ h_{\iota\circ\tau}(Y,\iota\circ\phi)\neq 0.$$

这些问题也指向布里斯科恩同调球 $\Sigma(p,\ q,\ r)$ 的对合局部等价类与存在 $b^+=1$界之间的联系。事实上，根据 [34] 和 [10]的研究，对于这类布里斯科恩球面，ι 的作用已知与复共轭微分同胚的作用相同（将 $\Sigma(p,\ q,\ r)$ 视为奇点链）。因此，在复共轭在 $\Sigma(p,\ q,\ r)$ 上的作用能够延拓到一个满足问题1.23条件的界的情形下，我们便可得出 $\Sigma(p,\ q,\ r)$ 的对合局部类非平凡，即

$$h_\iota(\Sigma(p,q,r)):=[(CF(\Sigma(p,q,r)),\iota)]\neq 0$$

注 1.25。 例如，作为佐证，我们可以考察族 $\Sigma(2,\ 3,\ 6n+1)$ 和 $\Sigma(2,\ 2n+1,\ 4n+3)$，其中 n 为任意奇整数。第4节中的讨论将表明，这两个族（反转定向后）都满足问题1.23的条件，因此，对该问题的肯定回答将说明这两个族中的所有成员在局部上都非平凡。当然，这一点早已由 Dai 和 Manolescu [34]证明。不过，我们在问题1.23中追问，这种现象是否存在某种内在的解释，即微分同胚能否延拓到一个具有适当自旋^c 和 H^+ 条件的 $b^+=1$ 界上。

读者在浏览第3节和第4节时会发现，这两节中提出的论证实际上暗中支持对上述问题作出肯定回答。

致谢。 本项目始于2022年8月至12月在MSRI/SL-Math举办的“Floer同伦论”项目。因此，本研究得到了美国国家科学基金会DMS-1928930号拨款的资助。作者感谢项目组织者的邀请。我们感谢Kristen Hendricks和Tye Lidman所进行的有益交流。此外，我们感谢Danny Ruberman讲解他与Akbulut的工作，感谢 [7], Irving Dai就软木塞问题展开的许多有益讨论，感谢Kouichi Yasui对早期稿件提出的宝贵意见，感谢David Baraglia指出早期稿件中的一处遗漏，也感谢Ian Zemke的有益通信；这些通信对定理1.13的证明产生了积极影响。最后，本项目的部分工作是在第三作者访问罗格斯大学期间完成的，该次访问由Kristen Hendricks持有的斯隆奖学金资助；作者感谢斯隆基金会的支持。此外，Hokuto Konno部分获得了日本学术振兴会科研费17H06461、19K23412和21K13785号项目的资助，Masaki Taniguchi部分获得了日本学术振兴会科研费20K22319、22K13921号项目以及理化学研究所iTHEMS项目的资助。

2. Main ingredients

2.1. **来自族 Seiberg–Witten理论的约束**。我们首先总结一些由 [56] 得到的关于微分同胚的结果。首先，让我们回顾 $H^+(X)$ 的定义。令 X 为一个有边界或无边界的定向紧致四维流形。于是，由最大维的.....组成的 Grassmann 流形 $\mathrm{Gr}^+(X)$

已知 $H^2(X;\mathbb{R})$ 的正定（相对于交叉形式）子空间构成的空间是可缩的。（例如，参见 [64, 第3.1]小节。）这样的子空间的一个选取记作 $H^+(X)$。

由于 $\mathrm{Gr}^+(X)$ 的可缩性（更弱地说，是 1-连通性），我们可以定义交形式的自同构 $\varphi\colon H^2(X;\mathbb{R}) \to H^2(X;\mathbb{R})$ 保持或反转 $H^+(X)$ 定向的概念。事实上，取定一个特定的 $H^+(X)$，并为 $H^+(X)$ 选取一个定向 $\mathcal{O}$。那么 $\varphi(H^+(X))$ 也属于 $\mathrm{Gr}^+(X)$。在 $\mathrm{Gr}^+(X)$ 中选取 $H^+(X)$ 与 $\varphi(H^+(X))$ 之间的一条同伦，我们便可以比较 $\mathcal{O}$ 与 $\varphi(\mathcal{O})$；由于 $\pi_1(\mathrm{Gr}^+(X)) = 0$，同伦的选取不会影响这一比较。若在 $H^+(X)$ 与 $\varphi(H^+(X))$ 之间进行上述同伦变形后，$\mathcal{O}$ 与 $\varphi(\mathcal{O})$ 重合，我们就称 φ 保持 $H^+(X)$ 的定向；否则称 φ 反转 $H^+(X)$ 的定向。正如我们所见，这些概念仅由 φ 决定，与在 $\mathrm{Gr}^+(X)$ 中对 $H^+(X)$ 的选择以及 $\mathcal{O}$ 无关。

给定一个保定向微分同胚 $f\colon X \to X$，如果诱导映射 $f^*\colon H^2(X;\mathbb{R}) \to H^2(X;\mathbb{R})$ 保持（分别地，反转）$H^+(X)$ 的定向，我们称 f 保持（分别地，反转）$H^+(X)$ 的定向。

定理 2.1 ([56, 定理 1.1])。设 Y 是一个定向有理同调 3-球面，X 是一个以 Y 为边界的定向紧致光滑 4- 流形。假设 $b_1(X) = 0$ 且 $b^+(X) = 1$。设 $\mathfrak{s}$ 是 X 上的一个自旋^c 结构，并设 $\mathfrak{t}$ 是 Y 上由 $\mathfrak{s}$ 限制得到的自旋^{c}结构。若存在一个保定向微分同胚 $f\colon X \to X$，使得 $f^*\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$，$f$ 反转 $H^+(X)$ 的定向，且$f|_Y = \mathrm{id}_Y$，则有

$$\frac{c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X)}{8} \leq \delta(Y,\mathfrak{t}). \tag{3}$$

证明。令 $E \to S^1$ 为 f 的映射环面，其纤维为 X。则诱导的实向量丛 $H^+(E) \to S^1$ 以 $H^+(X)$为纤维，并满足 $w_1(H^+(E)) \neq 0$，因为 f 反转了 $H^+(X)$的定向。此外，通过选取 f 到自旋^c 自同构的一个提升，可以将 E 的结构群提升到自旋^c 4-流形$(X,\ \mathfrak{s})$ 的自同构群，并且在边界的平凡族$Y \times S^1 \to S^1$ 上可以取为平凡的。因此，该定理的断言立即由 [56, 定理 11]得到。□

对于带边界的自旋四维流形，我们可以利用在 [72], 中定义的 Manolescu 不变量 α、β、γ，而非 δ，对定理 2.1 作出精化：

定理 2.2 ([56, 定理 1。2])。设 Y 是一个定向的有理同调3维球面，X 是一个以 Y 为边界的定向紧致光滑4维流形。假设 $b_1(X) = 0$。设 $\mathfrak{s}$ 是 X 上的一个自旋结构，并设 $\mathfrak{t}$ 是 Y 上由 $\mathfrak{s}$ 限制得到的自旋结构。

那么：

- 若 $b^+(X) = 1$，且存在一个保定向微分同胚 $f\colon X \to X$，使得 $f^*\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$、$f$ 反转 $H^+(X)$ 的定向，并且 $f|_Y = \mathrm{id}_Y$，则有

$$\frac{-\sigma(X)}{8} \leq \gamma(Y,\mathfrak{t}). \tag{4}$$

- 如果 $b^+(X) = 2$ 且存在一个保定向微分同胚 $f\colon X \to X$，使得 $f^*\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$，$f$反转 $H^+(X)$ 的定向，并且 $f|_Y = \mathrm{id}_Y$，

那么我们有

$$\frac{-\sigma(X)}{8} \leq \beta(Y, \mathfrak{t}). \tag{5}$$

- 如果 $b^+(X) = 3$ 存在一个保定向微分同胚 $f : X \to X$ 使得 $f^*\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$、$f$ 反转了 $H^+(X)$ 的定向，并且 $f|_Y = \mathrm{id}_Y$，那么我们有

$$\frac{-\sigma(X)}{8} \leq \alpha(Y, \mathfrak{t}). \tag{6}$$

证明。如定理 2.1 的证明中那样，构造以 X 为纤维的 f 的映射环面 $E \to S^1$。于是，E 的结构约化为 $(X, \mathfrak{s})$ 的自旋自同构群。由此，定理的结论立即可由 [56, 定理 1.2] 得出。□

对于一个闭4维流形，我们可以得到定理 2.1 的一个变体，其中考虑了自旋^{c}结构集合上的所谓电荷共轭对称性。该结论如下：

定理 2.3。令 X 为一个定向闭光滑4-流形。假设 $b_1(X) = 0$ 且 $b^+(X) = 1$。令 $\mathfrak{s}$ 为^c 上的自旋结构 X。如果存在一个保定向微分同胚 $f: X \to X$，使得 $f^*\mathfrak{s} = \bar{\mathfrak{s}}$ 且 f 保持 $H^+(X)$的定向，那么我们有

$$\frac{c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X)}{8} \leq 0. \tag{7}$$

为证明定理 2.3，我们需要一些预备知识。首先回顾 Seiberg–Witten 方程的标准设定。设 $(X, \mathfrak{s})$ 是一个光滑、自旋^c 闭 4-流形，且具有 $b_1(X) = 0$。固定 X 上的黎曼度量 g。令 $S^+(\mathfrak{s}, g)$ 和 $S^-(\mathfrak{s}, g)$ 分别表示 $(\mathfrak{s}, g)$ 的正、负旋量丛。固定 $(\mathfrak{s}, g)$ 的行列式线丛 $L(\mathfrak{s}, g) \to X$ 上的一个参考 U(1) 连接 A_0。令 $\mathcal{A}(\mathfrak{s}, g)$ 表示 $L(\mathfrak{s}, g)$ 上 U(1) 连接的空间。

Set

$$\mathcal{C}(X, \mathfrak{s}, g, A_0) = (A_0 + \operatorname{Ker} d_g^*) \otimes \Gamma(S^+(\mathfrak{s}, g)),$$
$$\mathcal{D}(X, \mathfrak{s}, g) = \Omega_g^+(X) \oplus \Gamma(S^-(\mathfrak{s}, g)).$$

这里，$\operatorname{Ker} d_g^*$ 是外微分相对于 g 的伴随算子 $d_g^*: \Omega^1(X) \to \Omega^0(X)$ 的核，而 $\Omega_g^+(X)$ 是 g- 自对偶 2- 形式空间。Seiberg–Witten 方程导出一个非线性 U(1) 等变映射

$$\Psi(X, \mathfrak{s}, g, A_0) : \mathcal{C}(X, \mathfrak{s}, g, A_0) \to \mathcal{D}(X, \mathfrak{s}, g),$$

这被称为 单极映射。定义域 $\mathcal{C}(X, \mathfrak{s}, g, A_0)$ 被称为标架规范群的 全局截面。Seiberg–Witten 模空间对应于商 $\Psi(X, \mathfrak{s}, g, A_0)^{-1}(0)/\mathrm{U}(1)$。

设存在一个保定向微分同胚 $f : X \to X$，使得 $f^*\mathfrak{s}$ 与 $\bar{\mathfrak{s}}$ 同构。这个条件意味着存在一个同构 $\tilde{f} : \bar{\mathfrak{s}} \to \mathfrak{s}$，它是覆盖 $f: X \to X$ 的自旋^c 结构之间的同构。该同构 $\tilde{f}$ 导出双射（用同一符号 f^* 表示）

$$\tilde{f}^* : \mathcal{A}(\mathfrak{s}, g) \to \mathcal{A}(\bar{\mathfrak{s}}, f^*g),$$
$$\tilde{f}^* : \mathcal{C}(X, \mathfrak{s}, g, A_0) \to \mathcal{C}(X, \bar{\mathfrak{s}}, f^*g, f^*A_0),$$
$$\tilde{f}^* : \mathcal{D}(X, \mathfrak{s}, g) \to \mathcal{D}(X, \bar{\mathfrak{s}}, f^*g).$$

现在考虑自旋^{c}结构上的共轭对称性，它是由 $\mathrm{Spin}^c(4) = (\mathrm{Spin}(4) \times \mathrm{U}(1))/\{\pm 1\}$ 中 $\mathrm{U}(1)$ 的复共轭诱导的对称性。令 $\bar{\mathfrak{s}}$ 表示 $\mathfrak{s}$ 的共轭自旋^c 结构。共轭诱导双射（用同一符号 c 表示）

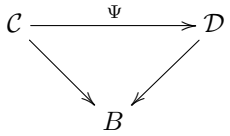
$$\begin{aligned} &c : \mathcal{A}(\bar{\mathfrak{s}}, f^*g) \to \mathcal{A}(\mathfrak{s}, f^*g), \\ &c : \mathcal{C}(X, \bar{\mathfrak{s}}, f^*g, f^*A_0) \to \mathcal{C}(X, \mathfrak{s}, f^*g, c(f^*A_0)), \\ &c : \mathcal{D}(X, \bar{\mathfrak{s}}, f^*g) \to \mathcal{D}(X, \mathfrak{s}, f^*g), \end{aligned}$$

并且，单极映射与这些共轭映射相容 c。

选取一条路径 g_t，连接度量空间中 X 上的 g 和 f^*g；再选取一条路径 A_t，连接 $\bigcup_{t\in[0,1]} \mathcal{A}(\mathfrak{s}, g_t)$ 中的 A_0 和 $c(f^*A_0)$，使得对每个 t 都有 $A_t \in \mathcal{A}(\mathfrak{s}, g_t)$。于是我们得到一参数单极映射族

$$\Psi(X, \mathfrak{s}, g_t, A_t) : \mathcal{C}(X, \mathfrak{s}, g_t, A_t) \to \mathcal{D}(X, \mathfrak{s}, g_t).$$

~通过 $c \circ f^*$ 将 $\mathcal{C}(X, \mathfrak{s}, g_1, A_1)$ 与 $\mathcal{D}(X, \mathfrak{s}, g_0)$ 以及 $\mathcal{D}(X, \mathfrak{s}, g_1)$ 与 $c \circ f^*$ 粘合起来，我们得到以 $B = S^1 = [0,1]/(0 \sim 1)$ 为参数的一参数泛函空间族 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$。于是，$\Psi(X, \mathfrak{s}, g_t, A_t)$ 诱导出一个纤维映射



介于这些族 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 之上 B。

注意，映射 Ψ 不再是$\mathrm{U}(1)$-等变的。这是因为复共轭与在自旋子上乘以 $i \in \mathrm{U}(1)$不可交换。然而，复共轭确实与 $\mathbb{Z}/2 \subset \mathrm{U}(1)$ 可交换。因此Ψ 是一个 $\mathbb{Z}/2$-等变映射。

现在我们按照 Furuta [41]和Bauer–Furuta [17]考虑有限维近似。正如在构造通常的族的 Bauer–Furuta不变量时所做的那样（例如参见 [16, 95]），我们可以对 Ψ取有限维近似，它是一个基于基点的 $\mathbb{Z}/2$-等变连续映射

$$\psi : \mathrm{Th}(V') \to \mathrm{Th}(V), \tag{8}$$

我们称之为扭曲有限维近似，它满足以下性质：

(i) V 和 V' 是 B 上的有限秩向量丛，Th(–)表示托姆空间。(ii) V和 V' 是 B上两种类型向量丛的直和，写作

$$V = V_0 \oplus V_1, \quad V' = V_0' \oplus V_1'.$$

群 $\mathbb{Z}/2$ 在 V_0 和 V_0'上平凡作用，后两者是微分形式空间族的有限维近似。另一方面，$\mathbb{Z}/2$ 在 V_1 和 V_1' 上通过 $\mathbb{Z}/2 = \{1, -1\}$ 进行纤维逐点数乘，后两者是自旋子空间族的有限维近似。

(iii) 秩$_{\mathbb{R}} V_1 -$ 秩$_{\mathbb{R}} V_1' = (c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X))/4$。

(iv) $\mathbb{Z}/2$-不变量部分 $\psi^{\mathbb{Z}/2}\colon \mathrm{Th}(V_0) \to \mathrm{Th}(V_0')$ 是由纤维线性单射 $\psi^{\mathbb{Z}/2}\colon V_0 \to V_0'$ 诱导的。注意，此条件意味着

$$\operatorname{Coker}\psi^{\mathbb{Z}/2} := \bigcup_{b\in B} (\operatorname{Coker}\psi_b^{\mathbb{Z}/2})$$

在 B上构成一个向量丛，其中 ψ_b 表示 ψ 在 $b \in B$ 上各纤维上的限制。

(v) 余核 $\psi^{\mathbb{Z}/2}$ 与 $H^+(X_f) \otimes \mathbb{R}_f \to B$同构。这里， $H^+(X_f) \to B$ 是一个相关联的向量丛，其纤维为 $H^+(X)$，由 f 在 $H^+(X)$上的单值化作用确定，而 $\mathbb{R}_f \to B$ 是非平凡实线丛。

除了最后一条性质 (v) 中出现 $\mathbb{R}_f$ 外，通常的 Bauer–Furuta 不变量族也满足上述所有性质 [16], ，但对称性从 U(1) 限制为 $\mathbb{Z}/2$。最后一条性质 (v) 反映了这一假设： $f^*\mathfrak{s} \cong \bar{\mathfrak{s}}$: 线丛 $\mathbb{R}_f$ 会出现，因为共轭对称性 c 限制在 $\Omega^+_{f^*g}(X) \to \Omega^+_{f^*g}(X)$ 上时，由乘以 -1 给出。

注 2.4。更一般地，假设有一个纤维丛 $E \to B$ ，其底空间为一般底空间，纤维为闭4维流形 X ，并且 E 的单值化作用保持集合 $\{\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}\}$不变。那么，扭曲有限维近似的 $\mathbb{Z}/2$-不变部分的逐纤维余核为 $H^+(E) \otimes \mathbb{R}_\rho$。这里$H^+(E) \to B$ 是一个向量丛，其纤维为与 E相关联的 $H^+(X)$，而 $\mathbb{R}_\rho \to B$ 是由同态 $\rho\colon \pi_1(B) \to \mathbb{Z}/2$ 确定的实线丛，该同态对应于 E 在集合 $\{\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}\}$上的单值化作用。如果 $\mathfrak{s} = \bar{\mathfrak{s}}$，我们可以任意选择 ρ 。

一般而言，对于一种推广上述情形的设置，以下 Borsuk–Ulam型定理成立:

命题 2.5 (参见 [54, 定理 3.1])**.** 设 B 是一个紧拓扑空间。设 $V_0, V_0' \to B$ 是受 $\mathbb{Z}/2$ 平凡作用的有限秩向量丛。设 $V_1, V_1' \to B$是受 $\mathbb{Z}/2$ 以 $\mathbb{Z}/2$作纤维逐点数乘作用的有限秩向量丛。令

$$V = V_0 \oplus V_1, \quad V' = V_0' \oplus V_1' \quad \textit{and} \quad r = \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} V_0' - \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} V_0.$$

假设存在一个带基点的 $\mathbb{Z}/2$-等变连续映射

$$\psi : \mathrm{Th}(V) \to \mathrm{Th}(V')$$

使得 $\psi^{\mathbb{Z}/2}\colon \mathrm{Th}(V_0) \to \mathrm{Th}(V_0')$ 由一个纤维线性单射$\psi^{\mathbb{Z}/2}\colon V_0 \to V_0'$诱导而来。另假设 *Stiefel–Whitney*类

$$w_r(\operatorname{Coker}\psi^{\mathbb{Z}/2}) \in H^r(B; \mathbb{Z}/2)$$

非零。因此我们有

$$\operatorname{rank} V_1 \le \operatorname{rank} V_1'. \tag{9}$$

证明。 这本质上已在 [54, 定理 3。1], 的证明中给出，但为方便读者，我们简要概述证明。

在这个证明中，我们使用 $\mathbb{Z}/2$ 系数上同调。令 $i\colon \mathrm{Th}(V_0) \to \mathrm{Th}(V)$ 和 $i'\colon \mathrm{Th}(V_0') \to \mathrm{Th}(V')$ 表示由包含映射 $V_0 \hookrightarrow V$ 诱导的映射

和 $V_0' \hookrightarrow V'$。于是我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^*_{\mathbb{Z}/2}(\mathrm{Th}(V);\mathbb{Z}/2) & \xleftarrow{\psi^*} & \tilde{H}^*_{\mathbb{Z}/2}(\mathrm{Th}(V')) \\ \downarrow{\scriptstyle i^*} & & \downarrow{\scriptstyle i'^*} \\ \tilde{H}^*_{\mathbb{Z}/2}(\mathrm{Th}(V_0)) & \xleftarrow{(\psi^{\mathbb{Z}/2})^*} & \tilde{H}^*_{\mathbb{Z}/2}(\mathrm{Th}(V_0')). \end{array} \tag{10}$$

˜令 $\tau_{\mathbb{Z}/2}(V') \in H^*_{\mathbb{Z}/2}(\mathrm{Th}(V'))$ 表示 V' 的 $\mathbb{Z}/2$-等变 Thom 类。根据 $\mathbb{Z}/2$-等变 Thom 同构，存在一个上同调类 $\alpha \in H^*_{\mathbb{Z}/2}(B)$，使得

$$\alpha\tau_{\mathbb{Z}/2}(V) = \psi^*\tau_{\mathbb{Z}/2}(V'). \tag{11}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} &i^*\tau_{\mathbb{Z}/2}(V) = e_{\mathbb{Z}/2}(V_1)\tau_{\mathbb{Z}/2}(V_0), \quad i'^*\tau_{\mathbb{Z}/2}(V') = e_{\mathbb{Z}/2}(V_1')\tau_{\mathbb{Z}/2}(V_0'), \\ &(\psi^{\mathbb{Z}/2})^*\tau_{\mathbb{Z}/2}(V_0') = e_{\mathbb{Z}/2}(\mathrm{Coker}\,\psi^{\mathbb{Z}/2})\tau_{\mathbb{Z}/2}(V_0), \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $e_{\mathbb{Z}/2}$ 表示 $\mathbb{Z}/2$-等变 Euler 类，并且我们利用关于 $\psi^{\mathbb{Z}/2}$ 的假设推导出最后一个等式。结合 (10)、(11)、(12) 以及 $\mathbb{Z}/2$-等变 Thom 同构，我们得到

$$\alpha e_{\mathbb{Z}/2}(V_1) = e_{\mathbb{Z}/2}(V_1)e_{\mathbb{Z}/2}(\mathrm{Coker}\,\psi^{\mathbb{Z}/2}). \tag{13}$$

一般来说，对于一个秩为 r 、 $\mathbb{Z}/2$ 作用平凡的向量丛 $E \to B$ ，我们有

$$e_{\mathbb{Z}/2}(E) = w_r(E). \tag{14}$$

另一方面，对于一个秩为 n 、 $\mathbb{Z}/2$ 通过 $\mathbb{Z}/2$ 进行纤维逐点数乘作用的向量丛 $F \to B$ ，我们有

$$e_{\mathbb{Z}/2}(E) = w_0(F)w^n + w_1(F)w^{n-1} + \cdots + w_n(F), \tag{15}$$

其中， w 是 $H^1_{\mathbb{Z}/2}(\mathrm{pt})$ 的生成元。

因此，若 w_r(余核 $\psi^{\mathbb{Z}/2}$) $\neq 0$，则由 (13)、(14)、(15) 可得所需的不等式 (9)。□

现在我们可以证明定理 2.3：

定理 *2.3* 的证明。由假设 $f^*\mathfrak{s} \cong \bar{\mathfrak{s}}$，我们可以得到一个扭曲有限维近似 (8)。由假设 f 保持 $H^+(X)$ 的定向，实线丛 $H^+(X_f) \otimes \mathbb{R}_f \to B = S^1$ 是非平凡的。因此，结合命题 2.5 以及 ψ 满足的性质 (iii)，即可得出定理的结论。□

2.2. 来自对合 Heegaard Floer 理论的约束。 现在我们将讨论在 [31, 33, 43, 44, 70] 中确立的各种对称性对 Heegaard Floer 同调及相关不变量的作用。

在 [43] Hendricks 和 Manolescu 研究了对偶自旋^{c}共轭作用 ι 对偶对 $(Y, \mathfrak{s}_0)$、$HF(Y, \mathfrak{s}_0)$ 的 Heegaard Floer 同调的作用，其中 $\mathfrak{s}_0$ 是 Y 上的一个自旋结构：

$$\iota : HF(Y, \mathfrak{s}_0) \to HF(Y, \mathfrak{s}_0).$$

此后，许多作者成功地利用这一作用研究同调协边和纽结同伦。事实上，利用局部等价 的形式体系进行研究】【。

由 Hendricks、Manolescu 和 Zemke 提出的 ι 作用 [44] 推动了对合 Heegaard Floer 同调的发展，并在这一领域产生了诸多应用。随后，[31], 第二作者与 Dai 和 Hedden 合作，针对有理同调球上保定向微分同胚的作用，采用了类似的表述；这些球配备了一个由 τ 固定的自旋结构 $\mathfrak{s}_0$ ：

$$\tau : HF(Y, \mathfrak{s}_0) \to HF(Y, \mathfrak{s}_0).$$

这引出了一个能够检测强软木塞的不变量 [31,定理 1]。

在 [43], Hendricks 和 Manolescu 定义了 d,_ 即对合 d-(下)不变量。这是一个取值于 $2\mathbb{Z}$ 的不变量，适用于 $\mathbb{Z}_2$-同调球面，并可解释为从 $\mathbb{Z}_2$-同调协边群到以下对象的映射:

$$\underline{d} : \Theta^3_{\mathbb{Z}_2} \to 2\mathbb{Z}.$$

后来，在对称性 τ 对 $(Y, \mathfrak{s}_0)$ 的作用下，文献 [31] 给出了 d 的直接推广。为方便读者，我们在此列出其定义:

定义 2.6。 设 $(Y, \mathfrak{s}_0)$ 是配备自旋结构 $\mathfrak{s}_0$ 的三维流形，且 τ 是 Y 上的一个微分同胚，它固定 $\mathfrak{s}_0$。不变量 $d_\tau(Y, \mathfrak{s}_0)$ 定义为比 [2] 高出 2 的最大分次，其中 U 非挠塔生成元 $[x] \in HF^-(Y, \mathfrak{s}_0)$ 满足 $\tau[x] = [x]$。

在这种情况下，如 [31], 所示，不变量 $d_\tau(Y, \mathfrak{s}_0)$ 可以解释为从等变 $\mathbb{Z}_2$-同调微分同胚纽结群到 see [31]的映射:

$$\underline{d}_\tau : \Theta^\tau_{\mathbb{Z}_2} \to 2\mathbb{Z}.$$

我们将这个不变量称为等变-反向 d下不变量。还有另一种此类不变量 $d_\tau(Y, \mathfrak{s}_0, \tau)$, 称为等变-反向 d上不变量。不过，这与本文关系不大。关于其定义，请读者参阅 [43]。

现在我们聚焦于纽结的对称性。首先，我们将对感兴趣的纽结对称性类型进行范畴化。

定义 2.7. 如果存在一个保定向的对合 τ，其保持纽结 K 的集合不变，并反转纽结上的定向 K，则称纽结 (K, τ) 为强可逆。另一方面，如果存在 S^3 上的一个对合 τ，其保持纽结的集合不变，且 τ 的不动集不与 K 相交，则称纽结 (K, τ) 为周期性。

在对具有对称性的3维流形进行研究的基础上，第二位作者研究了强可逆结或周期纽结的对称性作用于纽结Floer同调 [70],

$$\tau_K : CFK(K) \to CFK(K).$$

Montesinos 证明，对强可逆结（或周期纽结）进行 [79] Dehn 手术（K, τ）会在手术后的流形上诱导出一种对称性 τ。[70] 已证明，通过等变手术公式，对称性在纽结 Floer 同调上的作用与（诱导的）对称性在手术后流形上的作用相关。

在一项相关工作中 [33], ，第二作者与 Dai 和Stoffregen 共同定义了等变相合群的各种不变量，使用纽结 Floer

[2]这里我们遵循这样的约定： $HF(S^3) = \mathbb{F}[U]_{(-2)}$。

同调。这些不变量与上文提到的对合 d-不变量相关。其中一个不变量对本文的研究很有用。我们将 $A_0(K)$ 记作 $CFK(K)$ 的大手术（子）复形。回顾一下， $A_0(K)$ 由形如...的元素生成。

$$[\mathbf{x}, i, j] \text{ with } i \leq 0 \text{ and } j \leq 0.$$

现在我们给出相关不变量的定义：

定义 2.8. 设（K, τ）是一个强可逆结。令 $A_0(K)$ 表示 $CFK(K)$ 的大手术复形。不变量 $V_0^\tau(K, \tau)$ 定义如下：

$$\underline{V}_0^\tau(K, \tau) := -\frac{1}{2}\underline{d}_\tau(A_0(K), \tau).$$

文献 [33] 证明了，$V_0^\tau(K, \tau)$ 是等变纽结同痕群 $\tilde{\mathcal{C}}$ 的不变量。还有一个类似定义的不变量 $V_0^\tau(K, \tau)$，但本文不会涉及它。这些不变量可以看作 Rasmussen [92] 定义的 V_0 不变量的对合类比。这个不变量 V_0 也满足与其对合对应物类似的关系：

$$V_0(K) = -\frac{1}{2}d(A_0(K)) = -\frac{1}{2}d(S^3_{+1}(K)). \tag{16}$$

此外，以下关系可由 [43] 推得

$$\underline{V}_0^\tau(K, \tau) \geq V_0(K).$$

现在我们将计算一些纽结的不变量。

命题 2.9. 设 $T_{2,3}\#T_{2,3}$ 配备强对合 $\tau\#\tau$，其中τ 是图 *3* 所示的 $T_{2,3}$ 上的唯一强对合。那么

$$\underline{V}_0^\tau(T_{2,3}\#T_{2,3}) > V_0(T_{2,3}\#T_{2,3}) > 0.$$

证明。 在图 7 中，我们描述了 $T_{2,3}$ and$T_{2,3}\#T_{2,3}$ 的纽结 Floer 链复形。现在回想一下，利用整数手术公式 [86] ，我们可以从 A_0-复形计算 V_0 不变量。我们立即得到，

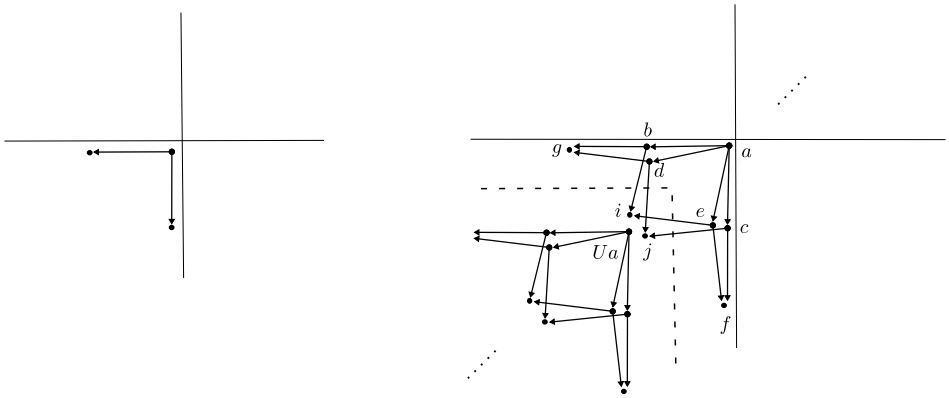


FIGURE 7. 左：$T_{2,3}$的纽结 Floer 复形；右：$T_{2,3}\#T_{2,3}$的纽结 Floer 复形。 A_0-复形由虚线西南侧的复形表示。

$$V_0(T_{2,3}\#T_{2,3}) = 1.$$

现在，为了计算 $V_0^\tau(T_{2,\ 3}\#\underline{T_{2,\ 3}})$ 不变量，我们首先注意到，根据 [33], 中证明的等变连通和公式， $\tau\#\tau$ 在 $CFK(T_{2,\ 3}\#T_{2,\ 3}) = CFK(T_{2,\ 3}) \otimes CFK(T_{2,\ 3})$ 上的作用可被识别为 $\tau \otimes \tau$。由此显然可知，由于 $[i]$ 和 $[j]$ 均不被 $\tau \otimes \tau$ 固定，因此有：

$$\underline{V_0^\tau}(T_{2,3}\#T_{2,3}) > V_0(T_{2,3}\#T_{2,3}).$$

读者实际上可以验证 $V_0^\tau(T_{2,\ 3}\#\underline{T_{2,\ 3}})$ 为 2。证明至此完成。 □

命题2.10。 令 τ 为$T_{2,\ 2n+1}$ 环面纽结上的唯一强反演，且 n 为任意正奇整数，

$$\underline{V_0^\tau}(T_{2,2n+1}\#T_{2,2n+1}) > V_0(T_{2,2n+1}\#T_{2,2n+1}) > 0.$$

证明。证明与命题 2.9 类似。经过基变换，可以检查出the $H_*(A_0(T_{2,2n+1}\#T_{2,2n+1}))$ 以及其上的 τ 作用如图 8 所述。由此可得

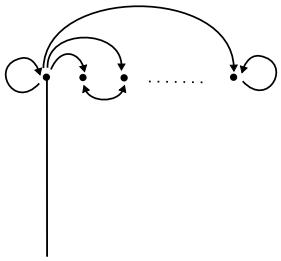


FIGURE 8. 在基变换下， τ 对 $H_*(A_0(T_{2,2n+1}\#T_{2,2n+1})$的作用。存在 n个 U-挠生成元，以及一个 U-非挠塔。 τ作用将除一个以外的所有 U-挠生成元两两配对，而塔生成元映射到自身及所有 U-挠生成元。

$$V_0^\tau(T_{2,2n+1}\#T_{2,2n+1}) > V_0(T_{2,2n+1}\#T_{2,2n+1}).$$

此外，马斯洛夫分次计算表明

$$V_0(T_{2,2n+1}\#T_{2,2n+1}) = n.$$

□

最后，我们记录d_τ 在等变协边下的行为。_首先，按照 [31]中的方式，我们在考虑协边的背景下重新表述定义1.6。

定义 2.11。 设 $(Y_i,\ \phi_i)$ 是一对整同调球 Y_i，各自都配有一个保定向微分同胚 ϕ_i。设 $(W,\ \mathfrak{s},\ f)$ 是一个三元组，使得W 是从 Y_1 到 Y_2 的协边，且 $\mathfrak{s}$ 是其上的自旋^c-结构，并且 f 在 Y_i上的限制为 ϕ_i。若 $f(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$（分别地，若 $f(\mathfrak{s}) = \bar{\mathfrak{s}}$），则称 $(W,\ \mathfrak{s},\ f)$ 为等变自旋^c-保（分别地，自旋^c-反）协边。

现在我们记录前面讨论的不变量在特定等变协边下的行为。首先，对于任意协边 W，其配备有自旋^{c}结构 $\mathfrak{s}$，我们定义如下：

$$\Delta(W,\mathfrak{s}) = \frac{c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\chi(W) - 3\sigma(W)}{4}.$$

定理 2.12 ([31, 定理 1.5])。 设 $(W,\mathfrak{s},f)$ 是从 (Y_1,ϕ_1) 到 (Y_2,ϕ_2) 的负定等变协边，且满足 $b_1(W) = 0$ 以及 $\Delta(W,\mathfrak{s}) = 0$。若 $(W,\mathfrak{s},f)$ 保自旋^c，则

$$\underline{d}_\tau(Y_1,\phi_1) \le \underline{d}_\tau(Y_2,\phi_2).$$

最后，由于我们在表述大多数结果时并未明确使用局部等价类形式体系，因此选择不对其作明确说明。不过，在某些讨论中，熟悉这一形式体系会有所帮助。我们请读者参阅 [44] 和 [31]，了解局部不变量 h_ι、 h_τ 和 $h_{\iota\circ\tau}$的介绍。这些是不变对合 d-下不变量的增强版本，前文已讨论过。

2.3. **来自瞬子理论的约束**。作为瞬子 Floer 理论的一项约束，我们使用以下结果：

定理 2.13 ([82, 定理1.8])。 对于任意纽结 K 在 S^3 中，若 $h(S^3_{+1}(K)) < 0$，则 $\{S^3_{1/n}(K)\}_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是同调协边群中的线性无关集。

注意， h(–) 表示在 [39], 中引入的瞬子 Frøyshov 不变量，它可视为 Heegaard Floer d 不变量的瞬子类比，或等价地视为 Seiberg–Witten Frøyshov 不变量。然而，与 Heegaard Floer d 不变量相比，计算瞬子 Frøyshov 不变量的技术尚未得到发展。最近，出现了以下纽结的“类 tau 不变量”：

(i) 使用框架化瞬子同调 [11], 定义的瞬子 tau 不变量 $\tau^\#$ (ii) 使用缝合瞬子同调定义的纽结瞬子 tau 不变量 τ_I [42],(iii) s-tilde 不变量 $\widetilde{s}$ [30]

被引入后，使我们能够部分计算瞬子 Frøyshov 不变量。这些都是纽结同伦不变量。

已证明 $\tau^\# = \tau_I$ 属于 [42]。此外，已知这些不变量是切片环面不变量，即从纽结同伦群 $\mathcal{C}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数 f，满足以下条件：

- f 是一个同态，
- $f(K) \le g_4(K)$，并
- $f(T_{p,q}) = g_4(T_{p,q})$。

对于任意切片环面不变量 f，已在 [68] 中证明，对于任意交替结， $f(K) = -\frac{1}{2}\sigma(K)$；对于任意拟正结， $f(K) = g_4(K)$。

注记 2.14。 人们猜想

$$\tau(K) = \widetilde{s}(K) = \tau^\#(K)$$

在 [30] 中。对于任何拟正结和交替结，这都是成立的。

以下关系是最近证明的：

定理 2.15 ([12,30])。 设 K 是 S^3 中的一个纽结。假设以下两个条件之一成立：

(i) $\tau_{\#}(K) > 0$，或等价地， $\tau^I(K) > 0$;
(ii) $\widetilde{s}(K) > 0$。则有 $h(S^3_{+1}(K)) < 0$。

特别是，作为示例，可以计算以下内容：

例 2.16。 由于 $K_n = T_{2,\ 2n+1}\#T_{2,\ 2n+1}$ 对每个 n都是一个非切片强拟正结，我们有

$$\tau^{\#}(K_n) = \widetilde{s}(K_n) = g_4(K_n) = g_3(K_n) > 0,$$

其中 g_4 和 g_3 分别表示纽结的四属和三属。因此，根据定理 2.15，我们知道 $h($ $S^3_{+1}(K))<0$ 。

注 2.17。 定理 2.13 中线性无关性的证明使用了同调3球面的同调协边不变量 $r_0(Y) \in (0,\ \infty]$ 。若我们假设

$$r_0(S^3_{1/n}(K)) \neq r_0(S^3_{1/m}(K')),$$

我们还可以区分 $M_n(K)$ 和 $M_m(K')$对于不同的纽结 K, K' 和正整数 n 和 m，其中 $M_n(K)$和 $M_m(K')$ 是在定理 1.1 中得到的奇异4维流形。例如，由于 $S^3_{1/2}(T_{2,}$ $_{2n+1}\#T_{2,2n+1}) = \Sigma(\mathrm{Wh}(T_{2,2n+1}))$，有人讨论 [82] 说

$$r_0(\Sigma(\mathrm{Wh}(T_{2,2n+1}))) > r_0(\Sigma(\mathrm{Wh}(T_{2,2(n+1)+1}))),$$

其中 Wh 表示正带尖点的怀特黑德双结卫星操作。因此，对于 $K_n = T_{2,2n+1}\#T_{2,}$ $_{2n+1}$，如果 $m \neq n$，实际上可以区分定理 1.1 中的 $\partial M_2(K_n)$ 和$\partial M_2(K_m)$。

3. Small exotic manifolds

本节将致力于给出定理 1.1 的证明，提供人 y
小型异态流形的例子。

3.1. **定理 1.1 的证明**。 在开始证明之前，由于我们使用了两种不同的理论：Heegaard Floer 理论和 Seiberg–Witten Floer 理论，因此先回顾 Frøyshov 型不变量之间的关系：

注 3.1。 正如 [67,注 11], 中所指出的，等式

$$\frac{1}{2}d(Y, \mathbb{F}_2) = \delta(Y) \tag{17}$$

对每个定向同调 3-球 Y都成立。这是 Kutluhan、Lee 和 Taubes 所建立的 Heegaard Floer 同调与单极 Floer 同调之间的同构的推论[61], [62], [63], [59], [60] ；或者，也可由 [25] [26][24] Colin、Ghiggini 和 Honda 建立的结果以及 [96] Taubes 的结果得出，并结合 [65]Lidman 和 Manolescu 的工作。（关于 $\mathbb{Q}$-分次的比较，参见 [90], [28] 和 [45]。）

为证明定理1.1，我们使用下述 Akbulut–Ruberman技术 [7]：

定理 3.2 ([7], 定理 1.1)。 设 W 是一个带边界的紧致光滑4维流形。假设存在一个同胚 $F\colon W \to W$，使得 $F|_{\partial W}$不能延拓为 W上的微分同胚。那么，存在 W 中的两个光滑紧致余维0 子流形 M 和 M'，满足以下条件：

(a) M和 M'是异态的，即 M和 M'同胚但不同胚，*(b)* ∂M 和 $\partial M'$ 彼此微分同胚，且它们与 ∂W光滑同调协边，*(c)* M和 M'与 W同伦等价。

为了将定理 3.2 应用于我们的情形，我们将构造一个微分同胚τ'： $Y_n' = -S^3_{1/n}(K)$ $\#S^3_{1/(n-1)}(K) \to Y_n'$，使得

(i) τ' 可延拓为 W_{2n} 的一个同胚，且 (ii) τ'

不能延拓为 W_{2n} 的一个微分同胚。

第一条结论由 [36, 定理 1.5 的补充说明]得出。

定理 *1.1* 的证明。我们定义

$$\tau' := \tau \# \operatorname{id} : Y_n' = -S^3_{1/n}(K) \# S^3_{1/(n-1)}(K) \to -S^3_{1/n}(K) \# S^3_{1/(n-1)}(K) = Y_n',$$

其中 τ 是 $S^3_{1/n}$（K）上的微分同胚，它是通过延拓 K 的强对合得到的，构造见 [31, 引理 5.2]。

为了将定理 3.2 应用于（W_{2n}, τ'），我们提出以下断言：

断言 3.3. 微分同胚 τ' 不能光滑地延拓到 W_{2n} 上（作为微分同胚）。

从现在起，为简便起见，我们将 $S^3_{1/n}$（K）记作 Y_n（K）。首先注意到，对于任意 $n \geq 1$，存在一个四维流形 X_n^4（K），使得 b^+（X_n（K））=1，且 ∂X_n（K）$= Y_n$（K）。这可由二柄体的柯比图得到，如图 9 所示。注意，若 n 为偶数，则 X_n（K）是自旋流形。本段接下来的内容运用 [31, 第 5], 节中的分析，因此我们将从简叙述。首先， τ 在 Y_n（K）上的作用对应于由 X_n 的边界上的强对合所诱导的微分同胚，如图 9 所示。接着，将其延拓至二柄体，便得到 τ 到 X_n 的一个延拓，记作 f。注意， H^2（X_n（K））$\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$；在同构 H^2（X_n（K））$\cong H_2$（X_n（K ∂X_n（K））下，第二上同调的生成元对应于附加的两个 2-把手的余核。同样，由 [31, 第 5] 节可知， f 会反转余核的定向，因而在 H^2（X_n（K））上对两个坐标均作用为 -1。这又意味着 f 会共轭任意自旋 ^{c}-结构。特别地，当 n 为偶数时，存在唯一的自旋结构 $\mathfrak{s}_0$，使得 f^*（$\mathfrak{s}_0$）$= \mathfrak{s}_0$。现在我们断言， f 会反转 H^+（X_n（K））的定向。为此，令 a 和 b 为 H^2（W）的生成元，它们由图 9 中给出的 2-把手的余核得到，附着球面的定向任取。可以验证，$(a+b)$ 生成 H^+（X_n（K））， 特别是 H^+（X_n（K））是一维的，因此 f 会反转其定向。现在我们来定义一个负定余边界 W_n（K），其从 Y_n（K）到 Y_{n-1}（K），构造依据图 9 所示的柯比图。

由此可得，该协边 $\widetilde{W_n(K)}$ 关于 两个边界分支上的 τ 作用是等变的，也就是说，存在一个 $W_n(K)$的微分同胚 h，它在每个连通分支上都限制为强对合 τ。注意， $W_n(K)$的交形式为（-1），由 -1框架的2-手柄的子午线生成。再次由 [31, 第 5] 节可知， h 在 $\widetilde{H_2(W_n(K)\ \partial W_n(K))}$上作用为乘以 -1，这反过来意味着 h 是自旋^c-共轭的。也就是说，

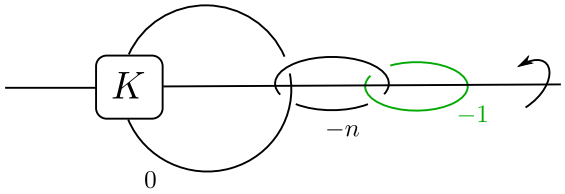


FIGURE 9.黑色部分：由两个 2-把手给出的四维流形 X_n ，其中有 $\partial X_n = Y_n$。 X_n 继承了由图示对称性诱导的微分同胚。绿色部分：等变协边$\sim W_n(K)$，由附着一个（-1）-框架的绿色 2-把手的迹给出。

令 $\mathfrak{s}$ 为自旋^{c}结构，使得 $c_1(\mathfrak{s})$生成 $H^2(\widetilde{W}_n(K))$，则 $h^*(\mathfrak{s}) = \bar{\mathfrak{s}}$.$\widetilde{}$特别地，（$W_n(K)$ $\mathfrak{s}$，h）按照定义1.6的意义是自旋^c-反转的。

为导出矛盾，假设断言 3.3 不成立。于是存在一个微分同胚 $\tilde{\tau}'$：$W_n(K)$ $\to W_n(K)$，它延拓了 τ'。现在，由于在连通和 $-S^3_{1/n}(K)\#S^3_{1/(n-1)}(K)$ 的颈部周围， $\tau' = \tau\#\mathrm{id}$ 是恒等映射，因此可以假设$\tilde{\tau}'$ 在 $W_n(K)$颈部某点的某个小开邻域上是恒等映射。通过添加一个 1-把手并以恒等映射延拓 $\tilde{\tau}'$，我们得到一个从（$S^3_{1/n}(K)$ τ）到（$S^3_{1/(n-1)}(K)$，id）的等变协边。注意，此处底层协边$\widetilde{}$是 $W_n(K)$。因此，为了证明断言 3.3，只需证明以下断言：

$\widetilde{}$**断言 3.4**。 不存在 W_{2n}（K） 上的微分同胚，其在 τ 上的限制为 Y_{2n}（K），并且在 Y_{2n-1}（K）上为恒等映射。

$\widetilde{}$为简化记号，从此处起，我们将 $W_n(K)$ 记作 $W_n(K)$。为导出矛盾，我们假设存在这样的延拓，记为 g。根据 g 在 $H^2(W_{2n}(K))$ 上的作用方式，我们分两种情况讨论。

在 $g_* = 1$ 下断言 3.4 的证明。首先，假设 g 在 $H^2(W_{2n}(K))$ 上的作用是恒等映射。现在让我们考虑

$$Z_{2n}(K) := X_{2n}(K) \cup_{Y_{2n}(K)} W_{2n}(K),$$

配备了通过将 f 在 $X_{2n}(K)$上与g拼接而得到的微分同胚 $\tilde{g}$ 。令 $\tilde{\mathfrak{s}}$ 为 $Z_{2n}(K)$上的自旋^c-结构，该结构同样通过拼接 $\mathfrak{s}_0$ 和$\mathfrak{s}$得到。注意， $\partial Z_{2n} = Y_{2n-1}(K)$和 $b^+(Z_{2n})$ $= 1$，此外， $\tilde{g}$ 保持了 $Z_{2n}(K)$ 上的自旋^c-结构 $\tilde{\mathfrak{s}}$。因此$(Z_{2n},\ \tilde{g},\ \tilde{s})$ 满足定理 2.1 的假设，这意味着

$$\delta(Y_{2n-1}(K)) \geq \frac{c_1(\tilde{\mathfrak{s}})^2 - \sigma(Z_{2n}(K))}{8} = 0. \tag{18}$$

现在由式（17）可得，

$$d(Y_{2n-1}(K)) = 2\delta(Y_{2n-1}(K)).$$

注意，对一个纽结进行 $+(1/n)$ 手术所得的 d-不变量，与对其进行 $(+1)$ 手术所得的 d-不变量相同。因此由式（16）可得

$$d(Y_{2n-1}(K)) = d(S^3_{+1}(K)) = -2V_0(K)$$

这与式（18）一起，和假设 $V_0(K) > 0$ 矛盾。

$g_* = -1$**下断言 3.4 的证明**

现在假设 g 在 $H^2(W_{2n}(K))$ 上的作用是乘以 (-1)。考虑 $h \circ g$ 在 $W_{2n}(K)$ 上的作用，并注意到 $h \circ g$ 限制在 $Y_{2n}(K)$ 上时是恒等映射，而$Y_{2n-1}(K)$ 是 τ。此外，$h \circ g$现在在 $H_2(W_{2n}(K))$ 上的作用是平凡的。因此可知，下图在链同伦意义下交换：

$$\begin{array}{ccc} CF(Y_{2n}(K)) & \xrightarrow{F_{W,\mathfrak{s}}} & CF(Y_{2n-1}(K)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau} \\ CF(Y_{2n}(K)) & \xrightarrow[F_{W,\mathfrak{s}}]{} & CF(Y_{2n-1}(K)). \end{array}$$

因此，由定理 2.12 可得

$$\underline{d}_\tau(Y_{2n}(K), \mathrm{id}) \leq \underline{d}_\tau(Y_{2n-1}(K), \tau). \tag{19}$$

此外，定义 2.6 表明 $d_\tau(Y_{2n}(K),\ \mathrm{id}) = \underline{d}(Y_{2n}(K))$。现在，我们构造图 10 所示的一个协边 $W'_{2n-1}(K)$，从 $Y_{2n-1}(K)$ 到 $Y_{2n-3}(K)$：在

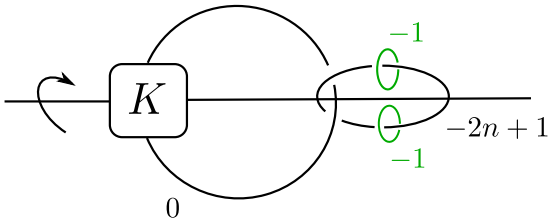


FIGURE 10. 由绿色的（-1）框架 2-把手诱导的等变协边 $W'_{2n-1}(K)$。

在定理 1.6]，的证明中，已证明 $W'_{2n-1}(K)$ 是一个等变、自旋^c 保持的（对于某个自旋^c 结构，例如 $\mathfrak{s}'$）、负定协边，且具有 $\Delta(W'_{2n-1}(K)\ \mathfrak{s}') = 0$，从 $(Y_{2n-1},\ \tau)$ 到 $(Y_{2n-3},\ \tau)$。特别地，再次由定理 2.12 可得：

$$\underline{d}_\tau(Y_{2n-3}(K), \tau) \leq \underline{d}_\tau(Y_{2n-1}(K), \tau). \tag{20}$$

然后，我们反复应用类似的等变协边来获得

$$\underline{d}_\tau(Y_{2n-1}(K), \tau) \leq \underline{d}_\tau(Y_1(K), \tau). \tag{21}$$

现在，我们声称

$$\underline{d}_\tau(Y_1(K), \tau) \leq \underline{d}_\tau(A_0(K), \tau).$$

要看出这一点，按照 [32] 我们构造一个 U-等变映射，

$$F : CF(Y_1(K)) \to A_0(K)$$

该映射在关于 U 局部化后诱导同调同构，并且在同伦意义下与 τ 在 $CF(Y_1(K)$和 $A_0(K)$ 上的诱导作用相交织。该映射构造为两个映射的复合。首先，我们定义一个 τ-等变、保持自旋^{c}的协边映射 f'_W

$$f_{W',\mathfrak{s}_0} : CF(Y_1(K)) \to CF(S^3_{+m}(K)).$$

此处，W' 由图 11 给出，m 是一个很大的正整数，而 W 上的 $\mathfrak{s}_0$ 是 W' 上的唯一自旋结构（注意，W' 没有扭转，因此它有唯一的

自旋结构）[3]。由图 11 可知， W' 是 τ-等变的，并且由于

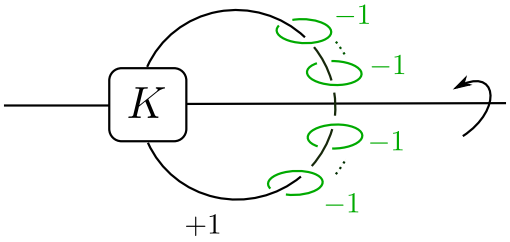


FIGURE 11. 由绿色（-1）框架化 2-把手诱导的等变协边 W'。

$\mathfrak{s}_0$ 是唯一的自旋结构，W' 保持自旋^c。现在我们考虑大手术同伦等价$\Gamma_{n,\,0}$ 从 [86]:

$$\Gamma_{n,0} : CF(S^3_{+m}(K), [0]) \to A_0(K).$$

由等变手术公式 [70] 可知，$\Gamma_{n,\,0}$ 与 τ在 $CF(S^3_{+n}(K), [0])$和 $A_0(K)$上的作用在同伦意义下交织（τ在$A_0(K)$上诱导一个作用）。现在我们将局部映射 F 定义为:

$$F := \Gamma_{n,0} \circ f_{W',\mathfrak{s}_0}.$$

按构造，该映射保持分次，并且与 τ 两端上的作用相交织。 F 的存在性意味着（参见 [31, 命题 4.10]的证明）

$$\underline{d}_\tau(Y_1(K), \tau) \le \underline{d}_\tau(A_0(K), \tau). \tag{22}$$

结合上述不等式 (19)、(20)、(21)、(22)，得到:

$$-2V_0(K) = d(Y_{2n}(K)) = \underline{d}_\tau(Y_{2n}(K), \mathrm{id}) \le -2\underline{V}^\tau_0(K).$$

这与以下假设矛盾:

$$\underline{V}^\tau_0(K) > V_0(K) > 0.$$

因此，我们已经证明，不存在微分同胚 g，使其定义在 $W_{2n}(K)$ 上，在 $Y_{2n}(K)$ 上限制为 τ，并且在 $Y_{2n-1}(K)$ 上为恒等映射。

这就完成了断言 3.4 的证明，因此断言 3.3 成立，即不存在 τ' 的光滑微分同胚延拓: $Y'_{2n} = -S^3_{1/2n}(K)\#S^3_{1/(2n-1)}(K) \to Y'_{2n}$ 到 W_{2n}。另一方面， τ' 可以延拓为 W_{2n} 上的同态 F_{2n}。现在我们将定理 3.2 应用于 $(W_{2n},\ F_{2n},\ \tau')$，得到 W_{2n} 中满足以下条件的光滑紧致余维零4维流形 M_n 和 M'_n :

- M_n 和 M'_n 是异态的，
- $\partial M_n = \partial M'_n$ 与 ∂W_{2n}光滑同调协边，且
- M_n 和 M'_n 与 W_{2n}同伦等价。

由于我们假设 $h(S^3_1(K)) < 0$，根据定理 2.13，我们知道 $\{S^3_{1/n}(K)\}$ 是同调协边群中的线性无关集。因此，特别地，如果 $n \neq n'$，∂W_{2n} 和 $\partial W_{2n'}$ 彼此不同调协边。因此，特别地， ∂M_n 和 $\partial M_{n'}$ 不微分同胚，等价地说，不同胚。

□

[3]我们还假设 m 为奇数，因此 S^3_{+m}（K）上存在唯一的自旋结构

3.1.1. 例 *1.3* 的证明。 我们注意到，在例 1.3 中给出的具体例子满足定理 1.1 的所有假设:

例*1.3*的证明。 对于奇整数 n，命题2.10确认

$$(K_n := T_{2,2n+1}\#T_{2,2n+1}, \tau\#\tau)$$

满足

$$\underline{V}_0^{\tau}(T_{2,2n+1}\#T_{2,2n+1}) > V_0(T_{2,2n+1}\#T_{2,2n+1}) > 0.$$

另一方面，例2.16确认有

$$h(S^3_1(K_n)) < 0.$$

证明至此完成。 □

让我们以几点备注结束本节。首先，请注意，在定理 1.1的证明中，我们从流形 W_n 所使用的唯一信息是：它是从$(S^3_{1/2n}(K)$ $\tau)$到 $(S^3_{1/(2n-1)}(K)$ $\tau)$的等变、负定余边界，其交叉形式为 (-1)，并且在 H_2 上作用为 $-$id。因此，我们立即得到以下对断言 3.3 的直接推广。

命题 3.5。 令 n 为任意正整数，且 (K,τ) 为 S^3 中的一个强可逆结，满足以下条件

$$\underline{V}_0^{\tau}(K) > V_0(K) > 0 \ and \ h(S^3_1(K)) < 0.$$

设 W_{2n} 为任意具有交叉形式 (-1) 的4维流形，且 $\partial W_{2n} := S^3_{1/2n}(K)\#S^3_{1/(2n-1)}(K)$ 。如果微分同胚 $\tau\#\tau$ 可延拓到 W_{2n}，并且在 $H_2(W_{2n})$ 上作用为 $-$恒等，那么微分同胚 $\tau\#$ id 不能延拓到 W_{2n}。

最后，对于熟悉对合 Heegaard Floer 同调的读者，我们指出，可以利用对合 Heegaard Floer 同调构造具有 $b_2 = 1$ 的异态流形。事实上，根据定理 1.1 证明中的讨论，只需展示一个三元组 $(Y,\ W,\ \tau)$，使得 Y 是一个整同调球，它是某个单连通四维流形 W 的边界，并且 Y 配备了一个微分同胚 τ，使得 τ 无法光滑地延拓到 W 上。利用 [31] 中发展的不变量，可以构造这样的三元组 $(Y,\ \tau,\ W)$。例如，如果 $(Y,\ \tau)$ 的 τ 类和 $\iota\circ\tau$ 类对于 $(Y,\ \tau)$ 非平凡，就足以达到此目的。然而，据作者所知，构造这样一对 $(Y,\ \tau)$ 需要 W 是一个 cork（可缩流形）与对纽结进行 (±1)-手术所得流形的边界连通和。相比之下，我们考虑的四维流形 W，也就是 W_{2n}，并不具有这种显而易见的分解，无法表示为两个四维流形（其边界非-S^3 ）的边界连通和。例如，对于定理 1.1 中的配对 $(Y,\ \tau)$，由于缺少等变映射锥公式，我们目前还无法计算它们的 $\iota\circ\tau$ 类。

4. Strong cork detection

在本节中，我们使用族 Seiberg–Witten 理论来检测强软木塞。首先建立所需的工具。

4.1. **强软木塞检测工具**。

定理 1.7 的证明。设 (Y,ϕ) 和 $(X,\mathfrak{s},\Phi)$ 如假设所述。现在反设 (Y,ϕ) 不是强软木塞。特别地，存在 $\mathbb{Z}_2$-同调球面 W_0，使得 ϕ 可以延拓到 W_0 上。令 $\mathfrak{s}_0$ 为 W_0 上唯一的自旋结构 $\tilde{}$，因此 ϕ 到 W_0 的延拓（记为 Φ）保持 $\mathfrak{s}_0$。现在我们沿着 Y 将 W_0 与 X 粘合。将所得四维流形记为 $W' := X \cup_Y W_0$。我们还将 X 上的自旋^{c}结构 $\mathfrak{s}$ 与 $\mathfrak{s}_0$ 拼接，得到一个自旋^{c}结构 $\mathfrak{s}'$。最后，对 $W_0 \subset W'$ 去掉一个小球，使得 Φ 固定该小球。接着对三元组 $(W',\mathfrak{s}',\Phi\cup\tilde{\Phi})$ 应用定理 2.1，但 $\delta(S^3) = 0$，因此立即得到矛盾。故 (Y,τ) 确实是一个强软木塞。□

定理 *1.8* 的证明。证明与定理 1.7 的证明完全相同。假设 $(Y,\ \phi)$ 和 $(X,\ \mathfrak{s},\ \Phi)$ 满足假设。现在，为了导出矛盾，我们假设$\tilde{}(Y,\ \phi)$ 不是强软木塞。与之前一样，我们构造 $(W',\ \mathfrak{s}',\ \Phi\cup\Phi)$，然后对其应用定理 2.3，得到矛盾。因此，$(Y,\ \tau)$ 实际上是一个强软木塞。

□

4.2. **微分同胚在 $b^+ = 1$ 边界上的（不可）延拓性**。在本小节中，我们将证明，我们的形式体系有时会阻碍将三维流形上的某些微分同胚延拓到其所围成的四维流形上。值得注意的是，这些边界将具有 $b^+ = 1$。本小节中建立的结果将有助于我们之后构造强软木塞的例子。

定理 4.1。设 n 为任意奇正整数，且令 τ 为.....上的对合

(1) $-\Sigma(2,\ 3,\ 6n+1)$，

(2) $-\Sigma(2,\ 2n+1,\ 4n+3)$。

如图 *12* 所示。则 τ 无法延拓到任何自旋4维流形 X，其边界为 $b^+(X) = 1$、$b_1(X) = 0$ 和 $\sigma(X) < 0$，且保持 $H^+(X)$ 的定向。

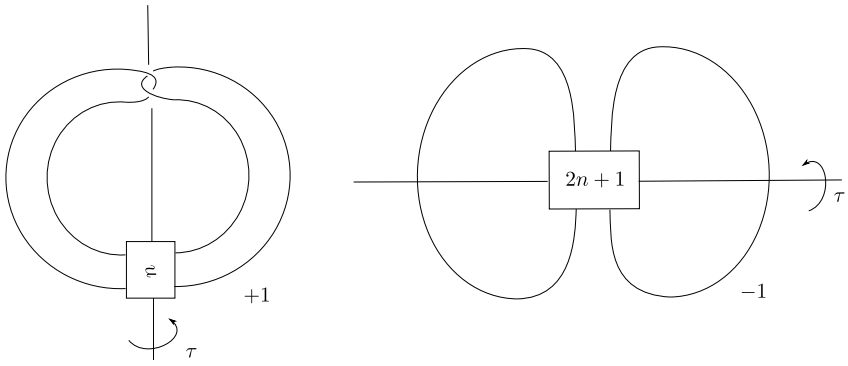


FIGURE 12. 左：$\Sigma(2,\ 3,\ 6n+1)$ 表示为对扭结纽结进行手术，并附有 τ。右：$\Sigma(2,\ 2n+1,\ 4n+3)$ 表示为对环面纽结进行手术，并附有 τ。

证明。首先，对于两族布里斯科恩球面中的每一个成员（带有所指定的定向），在 [31, 引理7.7 和7.8] 作者构造了一个负定的、自旋^c-共轭的协边 W，其交叉形式

$(-1, -1, \cdots, -1)$（奇数个）到 $-S^3$，其关于布里斯科恩球面上的 τ 和 $-S^3$ 上的恒等映射是等变的。具体来说，这些协边是通过反转在引理 7.7 和 7.8] 的证明中构造的那些协边得到的。我们用 f 表示 W 上相关的微分同胚，用 $\mathfrak{s}$ 表示被它共轭的自旋^{c}结构。为导出矛盾，假设上述两个族中的某个成员（记作 Σ_0）确实存在一个自旋界，其满足 $b^+(X) = 1$ 且 $\sigma(X) < 0$，从而 τ 可作为 $\tilde{\tau}$延拓到其上，并保持 $H^+(X)$ 的定向。令$Z := X \cup_{\Sigma_0} W$。将 $\mathfrak{s}$ 与来自 X的自旋结构拼接，便得到 Z上的一个自旋^{c}结构 $\tilde{\mathfrak{s}}$，它被 $\tilde{\tau} \cup f$共轭。因此，对元组 $(Z, \tilde{\mathfrak{s}}, \tilde{\tau} \cup f)$ 应用定理 2.3，便得到矛盾：

$$\delta(S^3) \geq \frac{c_1(\tilde{\mathfrak{s}})^2 - \sigma(Z)}{8} > 0.$$

□

现在，我们对布里斯科恩球面族的映射类群中的另一个元素陈述一个类似的结果。

定理 4.2. 设 n 为任意奇正整数，且 σ 为作用于

(1) $-\Sigma(2, 3, 6n+1)$；

(2) $-\Sigma(2, 2n+1, 4n+3)$。

如图 *13* 所示。于是，σ 无法延拓到任何自旋4维流形 X，其边界为 $b^+(X) = 1$、$b_1(X) = 0$ 和 $\sigma(X) < 0$，并反转 $H^+(X)$的定向。

证明。和之前一样，对于布里斯科恩球面的两个族中的每个成员，在[31, 引理 7.7 和 7.8] 的证明中，作者构造了一个负定、自旋^{c}保持的协边 W，其交叉形式为 $(-1, -1, \cdots, -1)$（奇数个），并$-S^3$ 且该协边在布里斯科恩球面上关于 σ 等变，在 $-S^3$上关于 id 等变。再次通过反证，假设上述两个族中有某个成员

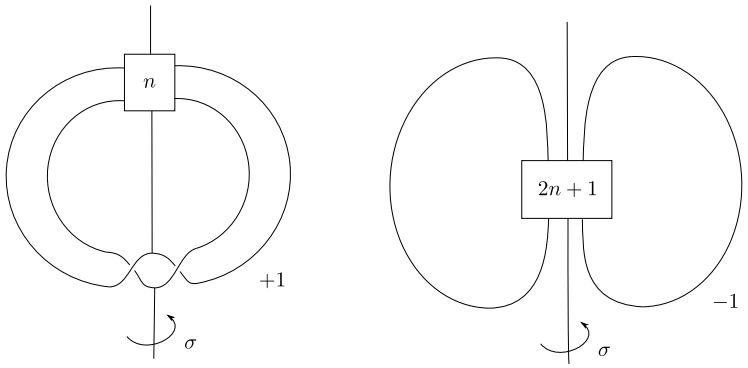


FIGURE 13. 左侧： $\Sigma(2,3,6n+1)$，带有 σ。右侧： $\Sigma(2,2n+1,4n+3)$，带有 σ。

某些族，比如 Σ_0，确实存在一个自旋界，其中 $b^+(X) = 1$ 和 $\sigma(X) < 0$，因此σ 可作为 $\tilde{\sigma}$ 延拓到其上，同时保持 $H^+(X)$ 的定向。我们定义元组 $(Z, \tilde{\mathfrak{s}}, \tilde{\sigma} \cup f)$，与定理 4.1 的证明中完全相同。这里唯一的区别是

f 保留了 $\mathfrak{s}$，因此 $\tilde{\sigma} \cup f$ 保留了 $\tilde{\mathfrak{s}}$。然后我们将定理 2.1 应用于元组 $(Z, \tilde{\mathfrak{s}}, \tilde{\sigma} \cup f)$，从而得到矛盾：

$$\delta(S^3) \geq \frac{c_1(\tilde{\mathfrak{s}})^2 - \sigma(Z)}{8} > 0.$$

□

示例 4.3。我们注意到，定理 4.1 和 4.2 中的两族布里斯科恩球面都确实以具有 $b^+(X) = 1$, $b_1(X)$ 和 $\sigma(X) < 0$ 的四维流形为边界。事实上，Saveliev 在 [93] 证明了，$-\Sigma(2, q, 2qk+1)$ 以一个单连通、自旋的四维流形为边界$X_{q,k}$ 其交叉形式为

$$\left(\frac{q+1}{4}\right)(-E_8) \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

这里，E_8 是秩 8 的正定非退化双线性形式。特别是，将 $q = 3$ 与 $k = n$、$q = 2n+1$ 与 $k = 1$ 放入 $-\Sigma(2, q, 2qk+1)$，分别得到布里斯科恩球面 $-\Sigma(2,3, 6n + 1)$ 和 $-\Sigma(2, 2n + 1, 4n + 3)$ 的相应界。

当然，我们可以修改定理 4.1 和 4.2 的假设，从而得到更一般的结论。为求完整，现将其列于下文。

定理 *4.4.* 设 (Y, ϕ) 是一个整同调球与其上的微分同胚 ϕ 所组成的一对。假设存在一个等变、保自旋^c、负定的协边 W，从 (Y, ϕ) 到 (Y_0, id)，其中 Y_0 是某个整同调球。那么 ϕ 不能延拓到任何自旋四维流形 X 上，该流形以 $b^+(X) = 1$、$b_1(X) = 0$ 和 $\sigma(X) < 0$ 为边界，并反转 $H^+(X)$ 的定向。若 W 反而是反自旋^{c}的，那么 ϕ 不能延拓到 X上，同时保持$H^+(X)$ 的定向。

证明。与定理 4.1 和 4.2 的证明类似。 □

4.3. **强软木塞的例子**。我们现在运用障碍来展示强软木塞的例子。在深入证明之前，我们回顾一下，形如 $\Sigma(p, q, r)$的 Brieskorn同调球的映射类群是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [18, 77]，除非该球是 S^3 或 $\Sigma(2,3,5)$。为便于论证，我们现在将建立若干引理。

引理 4.5. 设 Y_n 是定理 *4.1* 中布里斯科恩球面族的任意一个成员，并赋予微分同胚 τ。那么 τ 是 Y_n 的映射类群中的非平凡元。

证明。如果 τ 在 Y_n 中同伦于恒等映射，那么 τ 将可延拓至例 4.3 中所描述的负定、单连通、自旋边界（记作 Z_n），并保持 $H^+(Z_n)$ 的定向。这与定理 4.1 矛盾。□

引理 4.6. 设 X_n 由图 *14* 中给出的管道图定义。则$\partial X_n = -\Sigma(2,3, 6n+1)$，其中 n为奇正整数。此外，图 *14* 中描绘的强对合τ 可延拓至 X_n，并反转 $H^+(X_n)$的定向。

证明。第一个断言由 [93]，参见例 4.3可得。根据 [31, 第5]节中类似的推理，可知 τ能够延拓到 2-把手体上。我们现在断言，τ 在 $-\Sigma(2,3, 6n+1)$上是映射类群中的非平凡元。对此有许多不同的证明方法。例如，经过一系列

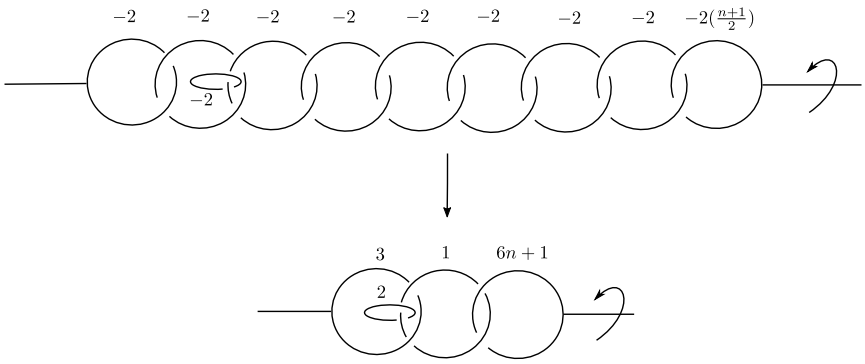


FIGURE 14.顶部： X_n 的管道图，边界为 $-\Sigma(2,3,6n+1)$。底部：经过等变爆破和消爆后的 X_n 图。

等变爆破和吹下后，可以看出 τ 实际上由 $-\Sigma(2,3,6n+1)$上的复共轭作用诱导而来（将布里斯科恩球面与奇点链等同之后）；根据 [18, 77], 参见图 14可知，它是布里斯科恩球面映射类群中的非平凡元。现在假设将 τ 延拓到 X_n 会保持 $H^+(X_n)$ 的定向。那么，我们可以对 $-\Sigma(2,3,6n+1)$上的 τ 作同痕变形，使其与引理 4.5 中的 τ 一致，并应用定理 4.1 得出矛盾。□

引理 4.7。令 σ 为定理 *4.2* 中 $-\Sigma(2,3,6n+1)$ 上的微分同胚，其中 n 为奇数。则 σ 是 $-\Sigma(2,3,6n+1)$ 的映射类群中的平凡元素。

证明。假设它是非平凡的映射类元素。那么我们可以对其进行同痕变形，使其等于 τ，这由引理4.6 得出。然后根据引理 4.6 σ 延拓到 X_n上，反转 $H^+(X)$的定向，这与定理 4.2 矛盾。□

备注 4.8。引理 4.6 和引理 4.7 对族 $-\Sigma(2,\ 2n+1,\ 4n+3)$ 也成立，证明类似。为简洁起见，此处略去证明。

现在我们可以给出强软木塞的例子了。

定理 *1.9* 的证明。我们认为有必要简要概述证明，以阐明主要思路。假设我们想证明 $(Y,\ \phi)$ 是一个强软木塞。我们的策略是

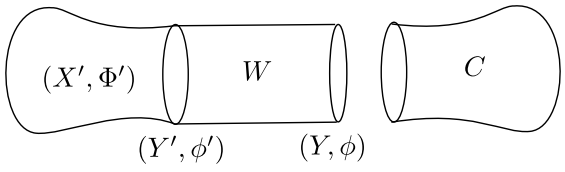


FIGURE 15. 证明中使用的四维流形的示意图 X 。

为了构造满足定理 1.7 或定理 1.8 假设的 $(X,\mathfrak{s},\Phi)$ 与 (Y,ϕ)，步骤如下。我们首先寻找一组合适的 (Y',ϕ')，使得 Y' 是一个四维流形 X' 的边界，并且该流形满足以下条件：

(a) 存在一个微分同胚 Φ'，定义于 X' 上，并且在边界上限制为 ϕ'；(b) X' 具有唯一的自旋结构 $\mathfrak{s}'$。(c) Φ' 改变（或保持） H^+（X'）的定向；(d) $c_1(\mathfrak{s}')^2-\sigma(X')\ 8 = -\sigma(X')\ 8 > 0$。

找到这样一对 (Y', ϕ') 和一个元组 $(X', \mathfrak{s}', \Phi')$ 后，我们将构造一个等变、负定、保自旋^c（或反转自旋^c）的协边 W，从 (Y', ϕ) 到 (Y, ϕ)，并沿 Y' 将其与 X' 粘合。现在定义 $X := X' \cup_{Y'} W$。由此可知， X 将满足定理 1.7 （或 1.8 ）的假设。图15给出了示意图。我们的概述到此结束。

因此，对于每个候选强软木塞 (Y, ϕ)，只需明确构造上述 4-流形 X' 和 W。视具体情形而定， X' 将是定理 4.1 或 4.2 中布里斯科恩球面族的成员之一，而 W 将利用 [31] 中使用的各种等变协边来构造。

(a) 的证明：令 (Y, ϕ) 表示任意一个带有指定对合的手术后的3维流形。令 Y' 为 $-\Sigma(2,3,7)$，令 X' 为来自例 4.3 的 $-\Sigma(2,3,7)$ 的 $-E_8 \oplus H$-界。在这里，我们将 $-\Sigma(2,3,7)$ 视为来自引理 4.6 中管道图边界的流形。我们暂时不明确指定 Y' 上的对合。现在，在 [31, 图 32] 中，作者构造了一个从 (Y, ϕ) 到 $\Sigma(2,3,7)$ 的等变负定协边 W'，并赋予其某个微分同胚 $\mathfrak{f}$。按照 [94], 中所述的算法，我们可以将 $\mathfrak{f}$ 识别为 S^3 中某个纽结的覆盖对合。随后可以验证，当 W' 保持自旋^c 时， $\mathfrak{f}$ 表示 $\Sigma(2,3,7)$ 的映射类群中的非平凡元。然而，如果 W' 反转自旋^c，那么 $\Sigma(2,3,7)$ 上的 $\mathfrak{f}$ 就是映射类群中的平凡元。在这两种情况下，我们都将 W' 反向处理，以得到 W：一个从 $(-\Sigma(2,3,7), \mathfrak{f})$ 到 $(-Y, \phi)$ 的保持/反转自旋^c、等变、负定协边。对于具体的 (Y, ϕ)，先假设 W' 保持自旋 ^{c}。于是，我们可以对 $\mathfrak{f}$ 作同痕变形，使其等于来自引理 4.6 的 τ （位于 $\partial X'$ 上）。因此， $\mathfrak{f}$ 可以延拓到 X'。如上面的证明概要所述，将定理 1.7 应用于 $X := X' \cup_{Y'} W$，我们得到 $(-Y, \phi)$，从而 (Y, ϕ) 是一个强软木塞。

如果 W'改为自旋^c-共轭，我们可以将 $\mathfrak{f}$在 $-\Sigma(2, 3, 7)$ 上同痕变形为恒等映射。特别地，$\mathfrak{f}$ 可扩展为保持 $H^+(X')$定向的 X'。再次将定理 1.8 应用于 $X := X' \cup_{Y'} W$，可得 (Y, ϕ) 是一个强软木塞。

()的证明：在定理 1.12] 的证明中，作者构造了一个等变、负定、自旋^c-保留的协边 W'，从 (M_n, τ) 到 $(\Sigma(2, 3, 7)\ \tau)$（此处， $\Sigma(2, 3, 7)$ 和 τ 指的是定理 4.1 中的描述）。因此，我们将W'反向以得到 W，并选取 X'作为 $-\Sigma(2, 3, 7)$ 的 $-E_8 \oplus H$边界。结合引理 4.5 和 4.6，再次可知这一选择足以得出结论。

证明(c)：在 [31, 定理 1.13] 的证明中，作者构造了一个等变的、负定的、自旋^{c}保持协边 W，从 (W_n, τ) 到 $(\Sigma(2, 2n+1, 4n+3)\ \tau)$。同样，参照引理 4.5 和 4.6 τ中的类似论证， $-\Sigma(2, 2n+1, 4n+3)$ 可延拓至 X_n，方法是反转 $H^+(X_n)$ 的定向，其中 n 为奇数。

证明(d)：在 [31, 定理 1.10]的证明中，作者构造了如下对象：

(1) 对于 n 奇数，存在一个从 $(S^3_{+1}(K_{-n,\ n+1},\ \tau)$ 到 $(\Sigma(2,\ 3,\ 6n+1)\ \overline{\sigma})$的等变负定协边界，它是自旋^{c}共轭的。

(2) 对于 n 奇数，存在一个从 $(S^3_{+1}(K_{-n,n+1},\sigma)$ 到 $(\Sigma(2,3,6n+1)\ \tau)$ 的等变负定协边界，它保持自旋^c。(3) 对于 n 偶数，存在一个从 $(S^3_{+1}(K_{-n,n+1},\tau)$ 到 $(\Sigma(2,3,6(n+1)\ +1)\ \tau)$ 的等变负定协边界，它保持自旋^c。(4) 对于 n 偶数，存在一个从 $(S^3_{+1}(K_{-n,n+1},\sigma)$ 到 $(\Sigma(2,3,6(n+1)\ +1)\ \sigma)$ 的等变负定协边界，它是自旋^{c}共轭的。

这里的 τ 和 σ 在 $\Sigma(2,3,6n+1)$ 上，与定理 4.1 和 4.2 中的相同。按照上述方法进行类似的论证，可得以下对象都是强软木塞。

$$\begin{cases}(S^3_1(\overline{K}_{-n,n+1}),\tau) \text{ and } (S^3_1(\overline{K}_{-n,n+1}),\sigma) & \text{if } n \text{ is odd}\\ (S^3_1(K_{-n,n+1}),\tau) \text{ and } (S^3_1(K_{-n,n+1}),\sigma) & \text{if } n \text{ is even.}\end{cases}$$

证明现由以下观察得出：存在一个从 $(S^3_{1/(k+2)}(K)\ \tau/\sigma)$ 到 $(S^3_{1/k}(K)\ \tau/\sigma)$ 的等变负定余边界，它可以同时保持和反转自旋^c，见 [31, 定理 1.6]。将上述余边界以适当方式附加到先前的论证中，可得对于任意奇数 k，对上述纽结进行 $1/k$-手术所得的空间及其相应对合也都是强软木塞。□

注 4.9。 最后，我们以比较本文检测强软木塞的方法与 [31] 中的方法来结束本节。两种方法都依赖于一个中间步骤：构造一个从 cork 到另一个流形（通常是 Seifert 同调球）的等变负定余边界。在 [31] 中，这一步很有用，因为余边界流出端的不变量非平凡（在对该不变量进行明确计算之后）意味着流入端的不变量也非平凡。而在我们的情形中，这个中间步骤使我们能够为 cork 构造一个合适的界，cork 扭转可延拓至该界；进而，这就阻碍了 cork 扭转延拓到任何 $\mathbb{Z}_2$-同调球上。这再次令人想起我们的主要口号。两种方法的有效性都取决于为预期的 cork 构造候选流出端。由于对我们而言，流出端只需满足某些拓扑条件（而不需要明确计算 Floer 理论不变量；对于非 Seifert 同调球，这种计算要困难得多），因此有时我们能更容易地构造候选流出端。例如，在图 14 中，我们可以将任意多个平凡纽结替换为任意一组强可逆纽结，所得的四维流形仍将是候选流出流形（X'，Φ'），用定理 1.9 证明中的说法来说就是如此。下方的图 16 描绘了这样一个情形；然而，对于 K 不是平凡纽结时，我们还没有能说明存在一个以等变负定余边界通向它的 cork 的例子。

5. Exotic embeddings into small 4-manifolds

本节将重点讨论关于将 3 维流形异态嵌入小型4维流形的结果。

5.1. 定理1.13 的证明。

定理1.13由以下一般性结果推导得出：

定理5.1。 设 Y 是一个定向同调 *3*-球。假设存在三个紧致四维流形 X_1 和 X_2，它们具有 $\partial X_1 = Y$ 和 $\partial X_2 = -Y$，并满足以下性质：

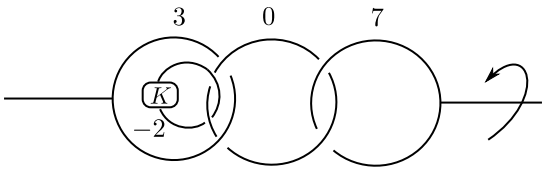


FIGURE 16. （X'， Φ'）的一个候选对象是 K ，即任意强可逆纽结。其构造方法是：将图 14 上半部分中与 K 位置相似的（-2）框架平凡纽结替换为 K，然后进行等变变换（爆破与消爆）。

- $b^+(X_1) = 0$ ，且 X_1 可作把手分解，且该分解仅包含一个 *2*-把手，
- b^+（X_2） $=1$， b_1（X_2） $=0$， X_2 是自旋的，并且 σ（X_2） <0。

那么，存在一对将 Y嵌入 $\mathbb{C}P^2\# -\mathbb{C}P^2$的奇异嵌入。此外，在嵌入像之外与任意连通的光滑四维流形作连通和后，这些嵌入仍然是奇异的。

证明。 我们先说明如何构造两个嵌入。由于 X_1 可以视为结手术的迹，我们可知 X_1 的双具有如下形式:

$$D(X_1) \cong \mathbb{C}P^2\# -\mathbb{C}P^2.$$

现在， Y 的一种嵌入可由包含映射 $\iota: Y \to D(X_1)$ 得到。为了构造另一种嵌入，我们考虑 $\mathbb{C}P^2\# -\mathbb{C}P^2$ 上复共轭的连通和。这给出一个保定向微分同胚 $g: D(X_1) \to D(X_1)$，其在第二同调群上的作用为 (-1)。现在，第二种嵌入由 $g \circ \iota: Y \to D(X_1)$ 得到。我们声称存在一个同胚 $h' : X_1 \to X_1$ ，使得

(i) $(h')^* = -1 : H^2(X_1) \to H^2(X_1)$,
(ii) $h'|_{\partial(X_1)} = \mathrm{id}$.

首先，根据带边界的拓扑4-流形分类定理 [20,21],我们有一个同胚

$$X_2 \cong \begin{cases} -\mathbb{C}P^2\#C \text{ if } \mu(Y) = 0, \\ -\mathbb{C}P^2_{\text{fake}}\#C \text{ if } \mu(Y) = 1, \end{cases}$$

其中 C 是一个由 Y 作为边界的拓扑可缩4-流形，而 $\mathbb{C}P^2_{\text{fake}}$ 是假的 $-\mathbb{C}P^2$。根据 [36, 第371页、定理 1.5、附录], ，单连通闭4维流形的交叉形式的任意自同构都可以由一个同胚实现，因此 $H_2(-\mathbb{C}P^2)$和 $H_2(-\mathbb{C}P_{\text{fake}})$上的（$-1$）乘法分别可以由同胚 h_0： $-\mathbb{C}P^2 \to -\mathbb{C}P^2$ 和同胚h_0： $-\mathbb{C}P^2_{\text{fake}} \to -\mathbb{C}P^2_{\text{fake}}$实现（前者仅由复共轭即可实现）。因此，只需证明以下命题：对于一个闭、定向拓扑4-流形 M 以及一个保向同胚φ： $M \to M$，存在一个同胚 ψ： $M \to M$ ，它与 φ 拓扑同伦，并且逐点固定 M中的一个局部平坦4-圆盘。事实上，一旦证明了这一点，我们就可以对 h_0 进行同痕变形，使其在 $-\mathbb{C}P^2$ 或 $-\mathbb{C}P^2_{\text{fake}}$中具有一个逐点固定的4-圆盘，并且

然后将其通过 C 的恒等映射延拓，得到所需的 $h' : X_1 \to X_1$。我们将在引理 5.2 中证明这一事实，以得到一个不动圆盘。现在我们已经证明了这个断言。

现在，通过沿着边界粘合两份 h'，我们得到一个同胚 $h : D(X_1) \to D(X_1)$，使得 $h^* = -1$。根据 Perron [87] 和 Quinn [89], 的结果，我们看到 h 和 g 是拓扑同伦的。特别地， ι 和 $g \circ \iota$ 是拓扑同伦的。

现在，我们看到 ι 和 $g \circ \iota$ 不是光滑同伦的。若是如此，通过复合同伦，可以假设微分同胚 g 保持连通分支 X_1 和 $-X_1$。于是，作为 g 的限制，我们得到 X_1 上的一个微分同胚 g'，使得

- $(g')^* = -1$,
- $g'|_{\partial X_1 = Y} = \mathrm{id}$.

现在，我们取 $X_1 \cup X_2$ 上对应于 $\mathfrak{s}$ 的一个自旋^c 结构

$$((\text{a generator}), 0) \in H^2(X_1; \mathbb{Z}) \oplus H^2(X_2; \mathbb{Z}).$$

于是，我们有 $g^*\mathfrak{s} \cong \mathfrak{s}_\circ^-$ 注意，定理 2.3 的所有假设都已满足。因此，通过使用定理 2.3，我们得到

$$0 < \frac{c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X_1 \cup X_2)}{8} \leq 0,$$

这与假设矛盾。至此， ι 和 $g \circ \iota$的奇异性证明完成。

现在，我们还证明，将这些光滑嵌入与一个连通的光滑四维流形 M取连通和后，它们仍然是异态的。由于 M 是连通的，有以下两种情况

$$D(X_1)\#M = \begin{cases} (M\#X_1) \cup_Y -X_1, \\ X_1 \cup_Y (-X_1\#M). \end{cases}$$

对于第二种情况，我们的证明无需任何改动。对于第一种情况，鉴于$D(X_1)$具有交换 X_1 和 $-X_1$的对称性，在前面的讨论中只需将 $-X_1$ 换成反向定向即可。至此，证明完成。□

现在，我们利用定理5.1证明定理1.13：

定理*1.13* 的证明。我们定义

$$Y = \Sigma(2,3,7) = S^3_{+1}(4_1) = S^3_{-1}(\mathrm{T}_{2,3})$$

并且 X_2 是一个紧致自旋四维流形，其边界为 $-Y = -\Sigma(2,3,7)$，交叉形式同构于 $-E_8 \oplus H$，其中 H 是$S^2 \times S^2$的交叉形式。关于此类有界流形的存在性，参见例如 [93] 。那么，存在一个负定的 $b^+ = 0$ 和 $b^- = 1$，它是一个边界为 $\Sigma(2,3,7)$的四维流形，由沿右手三叶结进行手术所得的手术迹构成，我们将其记为 X_1 。于是，定理5.1的所有假设均得到满足。至此，证明完成。□

我们给出以下事实的证明，该事实将在定理5.1的证明中用到：

引理 5.2。设 M 是一个闭、连通、定向的拓扑*4*-流形，且 φ: $M \to M$ 是一个保向同胚。那么存在一个同胚 ψ： $M \to M$，它与 φ 拓扑同伦，并逐点固定嵌入在 M 中的某个局部平坦*4*-圆盘 D^4 。

证明。 证明与说明连通和是拓扑4-流形上的一个良定义运算的证明类似（例如参见 [37, 第 5.2] 小节）。

设 D 是嵌入在 M 中的局部平坦4-圆盘。由于 M 连通，我们可以在 D 中的点与 $\varphi(D)$ 中的点之间找到一条路径。沿此路径移动 D，并在 $\varphi(D)$ 附近的一个坐标图中缩小 D，我们可以找到一个同胚 $f\colon M \to M$，使得 f 与恒等映射拓扑同伦，且 $f(D) \subsetneq \varphi(D)$。根据 Quinn [88] 在拓扑范畴中的4维环带定理，$\varphi(D) \setminus f(D)$ 与环带 $D^4 \times [0,1]$ 同胚。因此，我们可以找到一个同胚$f'\colon M \to M$，使得 f' 与恒等映射拓扑同伦，且 $f(D) = \varphi(D)$。

我们声称，任意保定向同胚 $g\colon D^4 \to D^4$ 都与一个同胚 $g'\colon D^4 \to D^4$ 拓扑同伦，后者在 D^4 的内部包含一个逐点固定的4-圆盘。此声称完成了引理的证明。事实上，若接受此声称，我们可以取 $\psi\colon M \to M$ 为 $f'^{-1} \circ \varphi$。

为证明该断言，首先注意到存在一个 4-圆盘 D'，它位于 D^4 的内部，并且 $g(D') = D'$，而 $g|_{\partial D'}$ 是 $\partial D'$ 的恒等映射。这可由如下事实推出：$\pi_0(\mathrm{Homeo}^+(S^3)) = 1$，其中 Homeo^+ 表示保定向同胚群。因此，只要我们知道 $\pi_0(\mathrm{Homeo}(D^4, \partial)) = 1$，该断言便得证；其中 $\mathrm{Homeo}(D^4, \partial)$ 表示逐点固定边界的同胚群。然而，这直接由亚历山大技巧得出。至此，断言和引理均得证。□

现在，我们利用对合 Heegaard Floer 理论给出另一种构造异态嵌入的障碍。该障碍以 Hendricks-Manolescu [43] 以及 Hendricks-Manolescu 和 Zemke [44] 的工作中的局部等价表述为基础。具体而言，关于 V- 不变量的定义，请读者参阅 [43, 第 6 节 7]。

定理5.3。 设 K 是一个满足以下条件的纽结：

$$\overline{V}_0(\overline{K}) < 0.$$

那么，$S^3_{-1}(K)$ 存在一对嵌入到 $\mathbb{C}P^2\# -\mathbb{C}P^2$中的奇异嵌入。此外，在任何连通光滑四维流形沿着嵌入像之外的部分取连通和后，这些嵌入仍然是奇异的。

证明。 证明定理5.3的基本策略与定理5.1类似。我们将重复定理5.1证明中的讨论，将 X_1 替换为X，其中 X 是由手术$S^3_{-1}(K)$的手术迹得到的负定四维流形。和之前一样，我们考虑双 $D(X)$，其中一个嵌入由包含映射 $i : Y := S^3_{-1}(K) \to D(X)$给出，另一个嵌入由$g \circ i\colon Y \to D(X)$给出；这里，$g$是 $D(X)$的一个微分同胚，由 $\mathbb{C}P^2\# -\mathbb{C}P^2 \cong D(X)$各分支上的复共轭取连通和得到，而 i是包含映射。于是，定理5.1的证明表明，i和 $g \circ i$ 拓扑同伦。假设 i 和 $g \circ i$ 光滑同伦。那么，定理5.1的证明再次表明，存在一个等变、自旋^c-反向协边，从(S^3, id)到(Y, id)。于是，对合 Heegaard Floer 理论的函子性（例如，对 [31, 定理1.5]的一个修改）表明

$$0 \le \underline{d}(Y).$$

但是，由于 $\overline{V}_0(\overline{K}) < 0$，我们得到 $\underline{d}(Y) < 0$，这就产生了矛盾。稳定化结果的证明与定理5.1的证明相同。

□

注意，取 $K = T_{2,3}$，也可以由定理1.13推出定理5.3。事实上，关于 $V_0(K) < 0$ 的条件对任意正环面纽结 K都成立。

6. Non-smoothable homeomorphisms preserving orientations of H^+

本节中，我们利用定理 2.3 构造不可光滑化同胚。我们的构造确实假设 H^+ 的定向被不可光滑化同胚保持。

6.1. 定理 1.15 的证明。

定理 *1.15* 的证明。 X 的交叉形式可以分解为

$$-E_8 \oplus H \oplus (-1)^{n-1}. \tag{23}$$

设 $A \in \mathrm{Aut}(H_2(X;\mathbb{Z}))$ 为由矩阵给出的自同构。

$$\mathrm{id}_{-E_8 \oplus H} \oplus (-1)^{n-1}$$

沿着上述分解。由于自然映射的满射性

$$\pi_0(\mathrm{Homeo}(X)) \to \mathrm{Aut}(H_2(X;\mathbb{Z}))$$

[36, 定理 1.5，附录], 自同构 A由 X 的一个同胚 f 实现。

同胚 f 保持了 $H^+(X)$ 的定向，因为 $H^+(X)$由 H 的一个元素生成。因此，只需证明 f 不能由微分同胚实现。设 $c \in H^2(X;\mathbb{Z})$ 为给定的特征

$$c = 0 \oplus 0 \oplus (-1)^{n-1}$$

沿着分解 (23)。设 $\mathfrak{s}$ 是 X 上与 c 对应的自旋^c 结构。于是我们有 $f^*\mathfrak{s} \cong \bar{\mathfrak{s}}$。因此，如果 f 是由一个微分同胚实现的，那么由定理 2.3 可得矛盾。证毕。□

7. Relative genus bounds from diffeomorphisms

在本节中，我们将利用族 Frøyshov 不等式，给出四维流形中曲面亏格的下界。我们首先陈述一些一般性结果，随后为 α, β, γ 和 δ 不变量建立某些界，以及亏格界。

7.1.一般结果。对于给定的纽结 K ，其位于 S^3中（更一般地说，位于定向同调 3-球中），双重分支覆盖空间 $\Sigma(K)$具有唯一的自旋结构。与此自旋结构相关联，我们有纽结同伦（同调同伦）不变量

$$\alpha(K) := \alpha(\Sigma(K)), \beta(K) := \beta(\Sigma(K)), \gamma(K) := \gamma(\Sigma(K)), \delta(K) := \delta(\Sigma(K)).$$

这里 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$是 Manolescu引入的自旋有理同调3-球面的Frøyshov 型不变量 [72], ，事实上它们在自旋有理同调协边下是不变量。如果 K 和 K' 光滑同伦，那么 $\Sigma(K)$ 和 $\Sigma(K')$ 是自旋有理同调协边的。因此我们有

$$\alpha(K) = \alpha(K'),\ \beta(K) = \beta(K'),\ \gamma(K) = \gamma(K'),\ \delta(K) = \delta(K').$$

因此，这些给出了函数

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}.$$

映射 $\delta : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$ 已由 Manolescu 和 Owens 在 [74] 中研究。

只需将定理A、B、C的相对版本 [40, 56, 66] 以及相对10/8不等式 [71]应用于双重分支覆盖，我们便得到以下结果，它将用于推导我们的亏格界：

命题 7.1。设 K 是 S^3 中的一个纽结。设 X 是一个定向光滑闭四维流形，满足 $b_1(X) = 0$，且 S 是一个光滑且适当嵌入于 $X \setminus$ 内部 D^4 的曲面，其边界为 K，并且 $[S]$ 可被 2 整除。

- 假设 $2b^+(X) + g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 0$。那么，对于沿 S 的双重分支覆盖空间 $\Sigma(S)$ 上的任意自旋^{c}结构$\mathfrak{s}$，我们有

$$\frac{1}{8}(c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\sigma(X) + \frac{1}{2}[S]^2 - \sigma(K)) \leq \delta(K). \tag{24}$$

- 假设 庞加莱对偶$[S] \equiv w_2(X)$ 且 $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$。那么，有如下结论：*(I)* 假设 $2b^+(X) + g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}(K) = 0$，则

$$-\frac{1}{8}(2\sigma(X) - \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K)) \leq \gamma(K). \tag{25}$$

(II) 假设 $2b^+(X) + g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 1$，则

$$-\frac{1}{8}(2\sigma(X) - \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K)) \leq \beta(K).$$

(III) 假设 $2b^+(X) + g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 2$，那么

$$-\frac{1}{8}(2\sigma(X) - \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K)) \leq \alpha(K).$$

(IV) 我们有

$$-\frac{1}{4}\sigma(X) + \frac{5}{16}[S]^2 - \frac{5}{8}\sigma(K) - \kappa_M(K) \leq 2b^+(X) + g(S),$$

其中 $\kappa_M(K)$ 是 K 的双重分支覆盖空间在唯一自旋结构下的 *Manolescu*的 κ不变量 [71]。

不等式 (IV) 不会用于证明我们的普遍性结果，但为了便于比较，我们陈述了这一约束。

命题 *7.1*的证明。我们应用定理A、B、C以及适用于带边界 [56, 66, 71] 的四维流形的10/8不等式，这些流形是沿挖孔四维流形中的曲面获得的双重分支覆盖空间。在证明中，我们使用 [52, 引理4.2]来根据曲面和基底四维流形描述这些分支覆盖的符号数和 b^+。不等式（IV）已在 [52, 定理 6.1]中陈述。□

为了陈述我们的结果，我们将使用 $\mathcal{C}$ 的以下子群：

定义 7.2。我们定义

$$\mathcal{C}^{wt} := \{[K] \in \mathcal{C} | \text{ There is an oriented } \mathbb{Z}_2\text{-homology 3-sphere}$$
$$Y' \text{ such that } [(Y', \mathrm{id}_{Y'})] = \mathbf{\Sigma}([K]) \in \Theta^{3,\tau}_{\mathbb{Z}_2}\}.$$

我们称群 $\mathcal{C}^{wt}$ 为弱平凡协同类的子群。

回顾一下，在第 1.5 小节中我们定义了同态 $\mathbf{\Sigma}$。请注意，我们有以下包含关系：

$$\mathrm{Ker}\,\mathbf{\Sigma} \subset \mathcal{C}^{wt} \subset \mathcal{C}.$$

7.1.1. 中的元素示例 $\mathcal{C}^{wt}$。本节中，我们给出若干属于 $\mathcal{C}^{wt}$的同伦类示例。

例 7.3. 设 $T_{p,q}$ 是类型为 (p,q) 的环面纽结，其中参数为一对互素整数。那么，$T_{p,q}$ 的双重分支覆盖是一个 Brieskorn 同调 3-球面$\Sigma(2,p,q) = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 | x^2+y^p+z^q = 0\} \cap S^5$。覆盖对合由 x 坐标上的 (-1)-倍乘实现。这可实现为 $\Sigma(2,p,q)$ 上的 Seifert S^1-作用的限制。这意味着该 (-1)-倍乘与恒等映射光滑同伦。因此我们有

$$[T_{p,q}] \in \mathcal{C}^{wt}.$$

这实际上表明 $\mathbb{Z}^\infty \subset \mathcal{C}^{wt}$。

例子 7.4。强负反手征纽结 (K,σ) 是一个光滑纽结 $K \subset S^3$，连同一个光滑的反定向对合 $\sigma : S^3 \to S^3$，满足$\sigma(K) = K$，且 σ 在 K上恰有两个不动点。

在 [2] 中指出，对于给定的强负反手征纽结 K'，

$$K := K' \# (-K')^r$$

给出了核 $\mathbf{\Sigma}$（参见 [2]中围绕问题1.4 的讨论）。此外，$\{K_{m,n}\}$ 中还给出了若干其他位于核 $\mathbf{\Sigma}$ 中的具体示例。在此特别是，[2,定理 1.2 以及问题 1.4] 之后的评论意味着

$$\mathbb{Z}_2^5 \subset \operatorname{Ker} \mathbf{\Sigma}.$$

目前，作者并不知道子群 $\operatorname{Ker} \mathbf{\Sigma}$ 有多大。因此我们提出：

问题 7.5。核 $\mathbf{\Sigma}$有多大?

由 [69] 给出的纽结可能是无穷多个元素的候选者。由于 $\mathcal{C}^{wt}$是纽结同伦群的一个子群，上述三个例子的任意线性组合也是 $\mathcal{C}^{wt}$ 中的一个元素。

7.2. **Manolescu 的 α、β、γ 和 Frøyshov 的 δ。** 我们现在将利用关于 $\mathcal{C}^{wt}$中的纽结的族 Seiberg–Witten 理论，推导出 α、β、γ、δ不变量的各种界。

定理 7.6。令 K 为纽结，位于 S^3 中并满足 $[K] \in \mathcal{C}^{wt}$。令 X 为定向光滑闭四维流形，满足 $b_1(X) = 0$，且 S 为光滑且适当嵌入的曲面，位于 $X \setminus \operatorname{Int} D^4$ 中，由 K 所界定，并且 $[S]$ 可被 2 整除。

- 假设 $g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 1$ 且 $b^+(X) = 0$。那么，对于沿着 S 的双重分支覆盖空间 $\Sigma(S)$ 上的任意自旋^{c}结构 $\mathfrak{s}$，只要满足$\tau^*\mathfrak{s} \cong \mathfrak{s}$，我们就有

$$\frac{1}{8}(c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\sigma(X) + \frac{1}{2}[S]^2 - \sigma(K)) \leq \delta(K). \tag{26}$$

此外，若 $[K] \in$核 $\mathbf{\Sigma}$，在假设 $g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 1$和 $b^+(X) = 0$下，我们有

$$c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\sigma(X) + \frac{1}{2}[S]^2 - \sigma(K) \leq 0.$$

- 假设 庞加莱对偶$[S] \equiv w_2(X)$ 且 $H_1(X;\mathbb{Z}) = 0$。那么，我们有如下结论：

(I) Suppose $g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 1$ *and* $b^+(X) = 0$, *then*

$$-\frac{1}{8}(2\sigma(X) - \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K)) \leq \gamma(K). \tag{27}$$

此外，如果 $[K] \in$ 核 $\mathbf{\Sigma}$，在假设 $g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 1$ 和 $b^+(X) = 0$ 成立时，我们有

$$-2\sigma(X) + \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K) \geq 0.$$

(*II*) 假设 $g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 0$ 且 $b^+(X) = 1$，那么

$$-\frac{1}{8}(2\sigma(X) - \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K)) \leq \beta(K). \tag{28}$$

此外，若 $[K] \in$ 核 $\mathbf{\Sigma}$，在假设 $g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 = 0$ 下，我们有

$$-2\sigma(X) + \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K) \geq 0.$$

*(III)*假设 $2b^+(X) + g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 3$ 且 $b^+(X) = 2$ 或 0，则

$$-\frac{1}{8}(2\sigma(X) - \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K)) \leq \alpha(K). \tag{29}$$

此外，若 $[K] \in$ 核 $\mathbf{\Sigma}$，在假设 $2b^+(X) + g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 3$ 和 $b^+(X) = 0$ 或 2 下，我们有

$$-2\sigma(X) + \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K) \geq 0.$$

证明。将 S 的双重分支覆盖记为 $\Sigma(S)$，其覆盖对合为$\widetilde{\tau}$。现在，由于我们假设 $\widetilde{\tau}|_{\partial(\Sigma(S))=\Sigma(K)}$ 与 (Y', id) 等变地 $\mathbb{Z}_2$- $\mathbb{Z}_2$ 同调协边，我们取一个等变协边 (W, f)，从 $(\Sigma(K)\ \tau)$ 到 (Y', id)，并将其粘合

$$(M, g) := (\Sigma(S) \cup_{\Sigma(K)} W, \widetilde{\tau} \cup_{\tau} f).$$

注意，我们有

$$b^+(M) = b^+(\Sigma(S)) = 2b^+(X) + g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K)$$

$$\sigma(M) = \sigma(\Sigma(S)) = 2\sigma(X) - \frac{1}{2}[S]^2) + \sigma(K)$$

由引理 4.2]。

我们将定理 2.1 和定理 2.2 应用于 (M, g)。让我们确认定理 2.1 和定理 2.2 中的假设对 (M, g) 成立。首先，我们考察关于 δ 的不等式。由于 $g^* : H^+(M) \to H^+(M)$ 的阶为 2，我们考虑特征值分解

$$H^+(M) = H^+(M)_{+1} \oplus H^+(M)_{-1}$$

关于 g^*。这里 $H^+(M)_{\pm 1}$ 是分别对应于特征值 ± 1 的特征子空间。由于我们假设 $\dim H^+(M) = 1$，只需证明 $H^+(M) = H^+(M)_{-1}$。另一方面，标准的 Mayer–Vietoris论证表明 $\dim H^+(M)_{+1} = b^+(X)$。因此，若假设 $b^+(X) = 0$，则定理 2.1 的所有假设对于固定的自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$ 均成立，从而 $g^*\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$。然后，由 $g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 1$，我们得到

$$b^+(M) = 2b^+(X) + g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 1.$$

因此，我们将定理 2.1 应用于分支覆盖 $\Sigma(S)$，并得到

$$\frac{c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(\Sigma(S))}{8} \leq \delta(\Sigma(K), \mathfrak{t})$$

这与引理 4 中的 (26) 等价，其中 $\mathfrak{t}$ 是 $\Sigma(K)$ 上的唯一自旋结构。由此完成了 (26) 的证明。

对于不变量 α、β 和 γ，我们需要 $\Sigma(S)$ 上的一个由覆盖对合保持不变的自旋结构。条件 $\mathrm{PD}[S] \equiv w_2(X)$ 等价于 $\Sigma(S)$ 上存在自旋结构。此外，若假设 $H_1(X;\mathbb{Z}) = 0$，则可以验证 $H^1(\Sigma(S);\mathbb{Z}_2) = 0$。因此，$\Sigma(S)$ 上存在唯一的自旋结构。特别地，M 上自旋结构的同构类在微分同胚 g 下保持不变。关于 α，β 和 γ 的不等式证明类似。因此，我们只说明 β 的证明。此外，我们再次考虑特征值分解

$$H^+(M) = H^+(M)_{+1} \oplus H^+(M)_{-1}.$$

由假设可知，$1 = b^+(X) = \dim H^+(M)$，因此

$$b^+(M) = 2b^+(X) + g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 2$$

特别地，我们有 $\dim H^+(M)_{-1} = 1$。因此，我们看到 g^* 反转了 $H^+(M)$ 的定向。现在我们应用定理 2.2(II) 并得到

$$\frac{-\sigma(\Sigma(S))}{8} \leq \beta(\Sigma(K), \mathfrak{t}).$$

与 [52,引理 4.2], 结合，这就完成了证明。 □

7.3.亏格界。 以下定理是本文中关于亏格界的最一般定理：

定理 7.7。 设 K 是一个纽结，且具有 $[K] \in \mathcal{C}^{wt}$。设 X 是一个定向光滑闭四维流形，具有 $b_1(X) = 0$，并且 S 是一个光滑且适当嵌入的曲面，位于$X \setminus$ 内部 D^4，其边界为 K，满足 $[S]$ 可被 2 整除，且 庞加莱对偶$[S]/2 \equiv w_2(X)$，并且$H_1(X;\mathbb{Z}) = 0$。我们定义

$$i(K, [S], X) := \#\{i \in \{\min\{\gamma(K), \delta(K)\}, \beta(K), \alpha(K)\} \mid i \text{ satisfies } (30)\},$$

其中 (30) 给出的是

$$[S]^2 - 2\sigma(K) > 4\sigma(X) + 16i. \tag{30}$$

假设 $i(K, [S], X) > 0$。那么我们有如下结论：

- *If* $b^+(X) = 0$, *then*

$$g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) \geq \begin{cases} 2 \text{ if } i(K,[S],X) = 1, 2 \\ 4 \text{ if } i(K,[S],X) = 3. \end{cases}.$$

- *If* $b^+(X) = 1$, *then*

$$g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) \geq 1 \text{ if } i(K,[S],X) \geq 2.$$

- *If* $b^+(X) = 2$, *then*

$$g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) \geq 0 \text{ if } i(K,[S],X) = 3.$$

定理 7.7 的证明。 在 [27], 中证明了以下估计：设 $S \subset X \setminus \operatorname{Int} D^4$是一个属为 g、由纽结 $K \subset S^3$ 作为边界的局部平坦适当嵌入曲面。若同调类 $[S] \in H_2(X;\mathbb{Z})$ 可被 2 整除，则

$$\left|\sigma(K) + \sigma(X) - \frac{1}{2}[S]^2\right| \leq b_2(X) + 2g(S)$$

成立。特别是，

$$b^+(X) + g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) \geq 0 \tag{31}$$

成立。首先假设 $b^+(X) = 0$ 且 $i(K) \geq 1$。那么，经过直接计算可知，当且仅当 $b^+(\Sigma(S)) = 0$ 时，(31) 取等。接着，由 (24) 和 (25)，可得

$$\frac{1}{8}(c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\sigma(X) + \frac{1}{2}[S]^2 - \sigma(K)) \leq \delta(K)$$

and

$$-\frac{1}{8}(2\sigma(X) - \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K)) \leq \gamma(K)$$

这与在 $i(K) \geq 1$ 条件下的 (30) 矛盾。因此，(31) 不可能取等。因此我们有

$$g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) \geq 1. \tag{32}$$

我们再次声称 (32) 不可能取等。假设 (32) 取等。那么，由 (26) 和 (27) 可得

$$\frac{1}{8}(c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\sigma(X) + \frac{1}{2}[S]^2 - \sigma(K)) \leq \delta(K)$$

and

$$-\frac{1}{8}(2\sigma(X) - \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K)) \leq \gamma(K)$$

这再次与在 $i(K) \geq 1$ 的条件下的 (30) 矛盾。因此我们得到

$$g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) \geq 2. \tag{33}$$

我们再次声称，当 $i(K) \geq 3$ 时，(33) 不可能取等号。（这里请注意，$i(K) \geq 2$ 还不 够。）假设 (33) 取等号。出于技术原因，我们给 S 添上一条小的 1-手柄，并假设 $g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 3$。于是可以使用 (29)，得到

$$-\frac{1}{8}(2\sigma(X) - \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K)) \leq \alpha(K),$$

这与在 $i(K) \geq 3$ 的条件下的 (30) 矛盾。因此我们得到 (33) 不可能取等号。类似的讨论还表明

$$g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) \geq 4$$

当 $i(K) = 3$ 时，通过使用 (27) 可得。由此完成了 $b^+(X) = 0$ 情形下的证明。

接下来，我们假设 $b^+(X) = 1$。同样，我们假设局部平坦曲面的不等式

$$g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) \geq -1 = -b^+(X) \tag{34}$$

是尖锐的。于是可以看出 $b^+(\Sigma(S)) = 2b^+(X) + g(S) - \frac{1}{4}[S]^2_+ + \frac{1}{2}\sigma(K) = 1$。设 $i(K) = 2$。再次向 S 添加一个小的 1-柄，并假设 $b^+(\Sigma(S)) = 2$

那么可以使用命题 7.1 (II)，这与 $i(K) \geq 2$ 下的 (30) 矛盾。因此，我们有

$$g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) \geq 0.$$

再者，可以使用命题 7.1 (II)，它在$i(K) \geq 2$条件下与 (30) 矛盾。再假设 $g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = 0$。在这种情况下，我们有$b^+(\Sigma(S)) = 2$。再者，可以使用命题 7.1 (II)，它在 $i(K) \geq 2$条件下与 (30) 矛盾。

最后，我们聚焦于 $b^+(X) = 2$ 这一情形。在这种情况下，拓扑亏格界为

$$g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) \geq -3.$$

假设 $g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = -3$。那么， $b^+(\Sigma(S)) = 1$。因此，在 $i(K) \geq 2$ 条件下，可以使用 (7.1) (II)，从而得到与 (30) 矛盾。类似地，可以看出

$$g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) \geq -2$$

在 $i(K) \geq 3$ 下使用 (7.1) (III)。

接下来，我们假设 $g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) = -1$ 在这种情况下，有 $b^+(\Sigma(S)) = 3$。因此，在 $i(K) \geq 3$的条件下，可以使用(27) 得到与 (30) 的矛盾。这就完成了证明。□

我们还将给出由定理 2.3 推导出的另一个亏格界。

定理 7.8。设 K 是 S^3 中满足 $[K] \in$ 核 $\mathbf{\Sigma}$ 的一个纽结。设 X 是一个定向光滑闭四维流形，满足 $b_1(X) = 0$ 且 $b^+(X) = 1$，并且 S 是 $X \backslash$内部 D^4 中一个以 K 为边界的光滑且适当嵌入的曲面，使得 $[S]$ 可被 2 整除。假设分支覆盖 $\Sigma(S)$ 上存在一个自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$，满足 $\tau^*\mathfrak{s} \cong \mathfrak{s}$并且

$$c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\sigma(X) + \frac{1}{2}[S]^2 - \sigma(K) > 0. \tag{35}$$

于是，我们有

$$g(S) \geq \frac{1}{4}[S]^2 - \frac{1}{2}\sigma(K).$$

证明。与定理 7.6 的证明中一样，我们定义

$$(M, g) = (\Sigma(S) \cup_{\Sigma(K)} W, \widetilde{\tau} \cup_{\tau} f)$$

并且有

$$b^+(M) = b^+(\Sigma(S)) = 2b^+(X) + g(S) - \frac{1}{4}[S]^2 + \frac{1}{2}\sigma(K) \tag{36}$$

$$\sigma(M) = \sigma(\Sigma(S)) = 2\sigma(X) - \frac{1}{2}[S]^2 + \sigma(K).$$

由假设 $[K] \in$ 核 $\mathbf{\Sigma}$，我们可以取 W，使得 $\partial W = \Sigma(K)$，因此 M是一个闭4维流形。现在，我们假设 $b^+(M) = 0$。那么，通常的 Frøyshov 不等式意味着

$$c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\sigma(X) + \frac{1}{2}[S]^2 - \sigma(K) \leq 0,$$

这与（24）相矛盾。

接下来，我们假设 $b^+(\Sigma(S)) = 1$。同样，由于 $g^*\colon\ H^+(M) \to H^+(M)$ 的阶为 2，我们考虑特征值分解

$$H^+(M) = H^+(M)_{+1} \oplus H^+(M)_{-1}.$$

根据假设，我们有

$$\dim H^+(M)_{+1} = 1 \text{ and } H^+(M)_{-1} = \{0\}$$

由此可知，所有定理 2.3 的假设均成立。因此，我们有

$$c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\sigma(X) + \frac{1}{2}[S]^2 - \sigma(K) \leq 0,$$

这就产生了矛盾。因此，我们得到 $b^+(\Sigma(S)) \geq 2$。结合 (36)，证明即告完成。□

7.3.1. 自旋四维流形中的亏格界。本节聚焦于 S^4、$S^2 \times S^2$ 和 $\#_2 S^2 \times S^2$ 中 H-切片亏格的下界。回顾一下，我们用 $g_{X,x}(K)$ 表示闭光滑 4-流形 X 中同调类 $x \in H_2(X; \mathbb{Z})$ 的相对光滑 4-亏格，其中 K。对于 $x = 0$，我们按照引言中的定义，用 $g_X(K)$ 记作 $g_{X,x}(K)$。作为定理 7.7 的推论，令 X 为 S^4、$S^2 \times S^2$ 和 $\#_2 S^2 \times S^2$，即可得到以下亏格界。

推论 7.9. 设 K 是一个纽结，且满足 $[K] \in \mathcal{C}^{wt}$。我们使用

$$i(K) = \#\{i \in \{\min\{\gamma(K), \delta(K)\}, \beta(K), \alpha(K)\} | \sigma(K) < -8i\}.$$

于是得到如下结论：

- 若 $b^+(X) = 0$，则

$$g(S) \geq -\frac{1}{2}\sigma(K) + \begin{cases} 2 \text{ if } i(K) = 1, 2 \\ 4 \text{ if } i(K) = 3. \end{cases}$$

- 若 $b^+(X) = 1$，则

$$g(S) \geq -\frac{1}{2}\sigma(K) + 1 \text{ if } i(K) \geq 2.$$

- 若 $b^+(X) = 2$，则

$$g(S) \geq -\frac{1}{2}\sigma(K) \text{ if } i(K) = 3.$$

证明. 我们令 $S^4, S^2 \times S^2$ 和 $\#_2 S^2 \times S^2$ 分别为 X，并应用定理 7.7。 □

例 7.10. 我们考虑类型为 $T_{3,q}$ 的环面纽结。我们列出 α, β, γ 和 σ 的计算结果。

环面纽结	α	β	γ	σ	$i(K)$
$T_{3,12k-5}$	1	-1	-1	$-8(2k-1)$	$2(k=1)$
$T_{3,12k-1}$	2	0	0	$-16k$	$2(k=1)$
$T_{3,12k+1}$	0	0	0	$-16k$	3
$T_{3,12k+5}$	1	1	1	$-8(2k+1)$	$0(k=0)$

这些对 α, β 和 γ 的计算是在 [72] 中完成的，而符号数的计算是众所周知的。接着，利用推论 7.9，我们得到以下亏格界：

- $6 \leq g_{S^4}(T_{3,7})$, $10 \leq g_{S^4}(T_{3,11})$, $11 \leq g_{S^4}(T_{3,13})$.
- $5 \leq g_{S^2 \times S^2}(T_{3,7})$, $9 \leq g_{S^2 \times S^2}(T_{3,11})$, $9 \leq g_{S^2 \times S^2}(T_{3,13})$.

- $8 \leq g_{\#_2 S^2 \times S^2}(T_{3,\ 13})$.

请注意，对于纽结 $T_{3,\ 7}$ 和 $T_{3,\ 11}$ 的 Milnor 猜想，也可以由我们的不等式加以验证。上述亏格界对同调 S^4、 $S^2 \times S^2$ 和 $\#_2 S^2 \times S^2$ 也分别成立。请注意，我们还可以通过与 $K'\#(-K')^r$ 做连通和来改变纽结同痕类，其中 K' 是一个强负反手征纽结。所得亏格界与上述环面纽结的亏格界相同。注 1.22 中给出的不等式是上述不等式的一部分。

7.3.2. 非自旋四维流形中的亏格界。 我们还给出了非自旋四维流形中的亏格界。我们先考虑 $\#_2\mathbb{C}P^2$ ，并给出定理 1.18 的证明。

定理*1.18* 的证明。 我们设 $X = \#_2\mathbb{C}P^2$ 和 $S = (2,6) \in H_2(X;\mathbb{Z})$。对于满足 $[K] \in$ 核 Σ的纽结 K ，可以看出

$$\alpha(K) = \beta(K) = \gamma(K) = \delta(K) = 0$$

因为 $\Sigma(K)$ 与 S^3 是 $\mathbb{Z}_2$-同调协边的。我们需要检查 $i(K,[S],X) = 3$。这由此得出。

$$[S]^2 = 40, \sigma(K) = 0, \alpha(K) = \beta(K) = \gamma(K) = \delta(K) = 0 \text{ and } \sigma(X) = 2$$

于是所需的不等式由定理 7.7 得出。 □

现在让我们专注于一个非自旋不定四维流形 $\mathbb{C}P^2\# - \mathbb{C}P^2$。

推论 7.11。 设 K 是一个具有 $[K] \in \mathcal{C}^{wt}$ 的纽结。设 a 和 b 是满足 $a/2$、$b/2 \in 2\mathbb{Z}+1$ 的整数。我们使用

$$i(K,a,b) := \#\{i \in \{\min\{\gamma(K),\delta(K)\},\beta(K),\alpha(K)\} | a^2 - b^2 - 2\sigma(K) > 16i\}.$$

令 x 为与 $(a[\mathbb{C}P^1], b[\mathbb{C}P^1])$ 对应的同调类 $x \in H_2(\mathbb{C}P^2\#-\mathbb{C}P^2)$。于是，我们有

$$g_{\mathbb{C}P^2\#-\mathbb{C}P^2,x}(K) \geq 1 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) - \frac{1}{2}\sigma(K) \ \textit{if}\ i(K,a,b) \geq 2.$$

例子 7.12。 为简便起见，我们假设 $a^2 = b^2$。于是，利用推论 7.11，可得以下亏格界：

$$5 \leq g_{\mathbb{C}P^2\#-\mathbb{C}P^2,x}(T_{3,7}),\ 9 \leq g_{\mathbb{C}P^2\#-\mathbb{C}P^2,x}(T_{3,11})$$
$$9 \leq g_{\mathbb{C}P^2\#-\mathbb{C}P^2,x}(T_{3,13}).$$

References

[1] Paolo Aceto、Nickolas A. Castro、Maggie Miller、JungHwanPark 和Andr´as I. Stipsicz, *Slice obstructions from genus bounds in definite 4-manifolds* 2023 arXiv: （），可见于。[2] 2303.10587

Paolo Aceto、Jeffrey Meier、Allison N. Miller、Maggie Miller、JungHwanPark 和Andr´as I. Stipsicz, *Branched covers bounding rational homology balls* 2020 arXiv:2002.（），可见于。[3] 10324

SelmanAkbulut, *An exotic 4-manifold* **33** 1991 2, , 《微分几何杂志》 357 361（），第– 期。[4] ，

A fake compact contractible 4-manifold **33** 1991 2, ，《微分几何杂志》 335 356 1094459（），第 – 期。MR[5] ， *A fake cusp and a fishtail*，《土耳其数学杂志》**23**（1999），第 1 期，19–32。[6]

Selman Akbulut 和Rostislav Matveyev, *Exotic structures and adjunction inequality*，《土耳其数学杂志》**21**（1997），第 1 期，47–53。

[7] Selman Akbulut 和 Daniel Ruberman, *Absolutely exotic compact 4-manifolds*, 《Commentarii Mathematici Helvetici》91（2016），第 1 期，1–19。MR3471934[8] Selman Akbulut 和 Kouichi Yasui, *Small exotic stein manifolds*, 《Commentarii Mathematici Helvetici》85（2010），第 3 期，705–721。[9] , *Cork twisting exotic stein 4-manifolds*, 《微分几何杂志》93（2013），第 1 期，1–36。[10] Antonio Alfieri、Sungkyung Kang 和 Andr

´ *Connected Floer homology of* as I Stipsicz, 《*covering involutions* **377** 2020 3 4, 1427 1452 Mathematische Annalen》（），第 期，–。[11] John A. Baldwin 和 Steven Sivek, *Framed instanton homology and concordance*, 《J. Topol.》 **14** 2021 4, 1113 1175 4332488（），第 期，–。MR, [12] ———— *Framed instanton homology and concordance, ii*, 2022。[13] David Baraglia, *Constraints on families of smooth 4-manifolds from Bauer-Furuta invariants* ———— **21** 2021 1, 317 349 4224743 , 《Algebr. Geom. Topol.》（），第 期，–。MR[14] , *On the slice genus of quasipositive knots in indefinite 4-manifolds*, arXiv 预印本 arXiv:2204.09886（2022）。[15] David Baraglia 和 Pedram Hekmati, *Brieskorn spheres cyclic group actions and the Mil-* , , arXiv 预印本 *nor conjecture* 2208 05143 2022 arXiv:。（）。[16] David Baraglia 和 Hokuto Konno, *On the Bauer-Furuta and Seiberg-Witten invariants of families of 4-manifolds* **15** 2022 2, 505 586 4441598 , 《J. Topol.》（），第 期，–。MR[17] Stefan Bauer 和 Mikio Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I* **155** 2004 19 2025298 , 《数学发明》（），第 1 期，1–。MR[18] Michel Boileau 和 Jean-Pierre Otal, *Scindements de Heegaard et groupe des homéotopies des petites variétés de Seifert* **106** 1991 1, 85 107 , 《数学发明》（），第 期，–。[19] Ciprian Borcea, *Diffeomorphisms of a K3 surface*, 《Math. Ann.》275（1986），第 1 期，1–4。MR849050[20] Steven Boyer, *Simply-connected 4-manifolds with a given boundary*, 《Trans. Amer. Math. Soc.》 **298** 1986 1, 331 357 857447（），第 期，–。MR, [21] ———— *Realization of simply-connected 4-manifolds with a given boundary*, 《Comment. Math. Helv.》 **68** 1993 1, 20 47 1201200（），第 期，–。MR Jim Bryan, Z [22] */2^p actions on spin 4-manifolds* *Seiberg-Witten theory and*, 《数学研究快报》 **5** 1998 1 2, 165 183 1617929（），第 期，–。MR Ryan Budney 和 David Gabai, *Knotted 3-balls in S^4*, 2019。[23] [24] Vincent Colin、Paolo Ghiggini 和 Ko Honda, *The equivalence of Heegaard Floer homology and embedded contact homology iii: from hat to plus* 2012 arXiv:1208.1526（），可见于 。[25] , *The equivalence of Heegaard Floer homology and embedded contact homology via open book decompositions i* 2012 arXiv:1208.1074（），可见于 。[26] , ———— *The equivalence of Heegaard Floer homology and embedded contact homology via open book decompositions ii* 2012 arXiv:1208.1077（），可见于 。[27] ~~Anthony~~ Conway 和 Matthias Nagel, *Stably slice disks of links* **13** 2020 3, , 《J. Topol.》（），第 期，–。MR[28]Daniel Cristofaro-Gardiner, *The absolute gradings on embedded contact homology and Seiberg-Witten Floer cohomology* **13** 2013 4, 2239 2260 , 《Algebr. Geom. Topol.》（），第 期，–。MR3073915[29] C. L. Curtis、M. H. Freedman、W. C. Hsiang 和 R. Stong, *A decomposition theorem for h-cobordant smooth simply-connected compact 4-manifolds* **123** 1996 , 《数学发明》（），第 2 期，343 348 1374205 –。MR[30] Aliakbar Daemi、Hayato Imori、Kouki Sato、Christopher Scaduto 和 Masaki Taniguchi, *Instantons, special cycles, and knot concordance*, 2022。[31] Irving Dai、Matthew Hedden 和 Abhishek Mallick, *Corks involutions and Heegaard Floer* , , , 《欧洲数学会杂志》，。/JEMS/（）。[32]Irving Dai、Sungkyung Kang、Abhishek Mallick、JungHwan Park 和 Matthew Stoffregen, *The* (2, 1)*-cable of the figure-eight knot is not smoothly slice*, arXiv 预印本 arXiv:2207.14187（2022）。[33] Irving Dai、Abhishek Mallick 和 Matthew Stoffregen, *Equivariant knots and knot Floer homology* 2201 01875 2022 , arXiv 预印本 arXiv:。（）。[34] Irving Dai 和 Ciprian Manolescu, *Involutive Heegaard Floer homology and plumbed three-manifolds* **18** 2019 6, 1115 1155 , 《Jussieu 数学研究所期刊》（），第 期，–。

[35] S. K. Donaldson, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, 《拓扑学》29 (1990), 第 3 期, 257–315。MR1066174[36] Michael Hartley Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, 《微分几何杂志》17 (1982), 第 3 期, 357–453。[37] Stefan Friedl、Matthias Nagel、Patrick Orson 和 Mark Powell, *A survey of the foundations of four-manifold theory in the topological category* 1910 07372 2019 , arXiv: 。 () 。

[38] Robert Friedman 和 John W. Morgan, *On the diffeomorphism types of certain algebraic surfaces. I* **27** 1988 2, 297 369 , 《微分几何杂志》 925124 () , 第 – 期。MR[39] *Equivariant aspects of Yang-Mills Floer theory* Kim A. Frøyshov, 《拓扑学》41 (2002), 第 3 期, 525–552。MR1910040[40] , *Monopole Floer homology for rational homology 3-spheres*, 《杜克数学杂志》155 (2010 3, 519 576 2738582) , 第 – 期。MR M. Furuta, [41] *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture* **8** 2001 3, , 《数学研究快报》279 291 1839478 () , 第 – 期。MR[42] Sudipta Ghosh、Zhenkun Li 和 C. M. Michael Wong, *On the tau invariants in instanton and monopole Floer theories* 1910 01758 2019 , arXiv: 。 () 。

[43] Kristen Hendricks 和 Ciprian Manolescu, *Involutive Heegaard Floer homology*, 《杜克数学杂志》166 (2017), 第 7 期, 1211–1299。[44] Kristen Hendricks、Ciprian Manolescu 和 Ian Zemke, *A connected sum formula for involutive Heegaard Floer homology* **24** 2018 1183 1245 , 《数学选刊》 () , –。

[45] Yang Huang 和 Vinicius G. B. Ramos, *An absolute grading on Heegaard Floer homology by homotopy classes of oriented 2-plane fields* **15** 2017 1, 51 90 , 《辛几何杂志》 () , 第 – 期。MR3652073[46] Nobuo Iida、Hokuto Konno、Anubhav Mukherjee 和 Masaki Taniguchi, *Diffeomorphisms of 4-manifolds with boundary and exotic embeddings* 2203 14878 2022 , arXiv: 。 () 。

[47] Nobuo Iida、Hokuto Konno 和 Masaki Taniguchi, *A note on generalized Thurston–Bennequin inequalities* 2207 00229 2022 , arXiv: 。 () 。即将在《国际数学杂志》上发表。[48] Nobuo Iida、Anubhav Mukherjee 和 Masaki Taniguchi, *An adjunction inequality for theBauer-Furuta type invariants, with applications to sliceness and 4-manifold topology*, arXiv 预印本 arXiv:2102.02076 (2021)。[49] Boldizs´ar Kalm´ar 和 Andr´as I Stipsicz, *Singular maps on exotic 4–manifold pairs*, 《代数与几何拓扑》13 (2013), 第 3 期, 1709–1731。[50] Yuya Kato, *Nonsmoothable actions of $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ on spin four-manifolds*, 《拓扑学及其应用》307 (2022), 107868。[51] Paul Kirk 和 Charles Livingston, *Twisted knot polynomials: inversion mutation and concordance* **38** 1999 , , 《拓扑学》 () , 第 3 期, 663–。[52] Hokuto Konno、Jin Miyazawa 和 Masaki Taniguchi, *Involutions, knots, and Floer K-theory* (2021), 见 `arXiv:2110.09258`。[53] Hokuto Konno、Anubhav Mukherjee 和 Masaki Taniguchi, *Exotic codimension-1 submanifolds of 4-manifolds and stabilizations* 2022 `arXiv:2210.05029` () , 见 。

[54] Hokuto Konno 和 Nobuhiro Nakamura, *Constraints on families of smooth 4–manifolds from Pin–(2)–monopole* **23** 2023 1, 419 438 4568007 () , 第 – 期。MR[55] *in preparation* Hokuto Konno 和 Hirofumi Sasahira, , [56] Hokuto Konno 和 Masaki Taniguchi, *The groups of diffeomorphisms and homeomorphisms of 4-manifolds with boundary* **409** 2022 108627, 58 , 《数学进展》 () , A 部分, 第 期, 论文编号 。MR4469073[57] Peter. B. Kronheimer 和 Tomasz. S. Mrowka, *Gauge theory for embedded surfaces, i*, 《拓扑学》32 (1993), 第 4 期, 773–826。[58] , *Gauge theory and Rasmussen's invariant*, 《拓扑学杂志》6 (2013), 第 3 期, 659–674。MR3100886[59] C ̧ ̆ *HF=HM IV: The Sieberg-Witten Floer homology and ech correspondence* **24** 2020 7, 3219 3469 4194308 agatay Kutluhan、Yi-Jen Lee 和 Clifford Taubes, , 《几何与拓扑》 () , 第 – 期。MR[60] C ̧ ̆ *HF=HM V: Seiberg-Witten Floer homology and handle additions* **24** 2020 7, 3471 3748 agatay Kutluhan、Yi-Jen Lee 和 Clifford Henry Taubes, , 《几何与拓扑》 () , 第 – 期。MR4194309[61] , HF=HM *I: Heegaard Floer homology and Seiberg-Witten Floer homology*, 《几何与拓扑》24 (2020), 第 6 期, 2829–2854。MR4194305

[62] _____, HF = *II: Reeb orbits and holomorphic curves for the ech/Heegaard Floer cor-* H
respondence **24** 2020 6, 2855 3012 4194306
M, 《几何与拓扑》（），第 – 期。MR[63] , HF
_____ = *III: holomorphic curves and the differential for the ech/Heegaard Floer* HM, 《几何与拓扑》
correspondence **24** 2020 6, 3013 3218 4194307
（），第 – 期。MR[64] Tian-Jun Li 和 Ai-Ko Liu, *Family Seiberg-Witten invariants and wall crossing formulas*,
《分析与几何通讯》9（2001），第 4 期，777–823。MR1868921[65] Tye Lidman 和 Ciprian Manolescu,
gies ´ **399** 2018 +220 , 《星丛》（），vii。
The equivalence of two Seiberg-Witten Floer homolo-
3818611
MR[66] *The surgery exact triangle in* Francesco Lin, Pin(2)*-monopole Floer homology*,
《代数几何与拓扑》17（2017），第 5 期，2915–2960。MR3704248[67] Jianfeng Lin, Daniel Ruberman 和
Nikolai Saveliev, *pole Lefschetz number* 1802 07704, 2018 ,
On the Fryshov invariant and mono-
arXiv: 。即将在《微分几何杂志》（）发表。[68] Charles Livingston,
Computations of the Ozsváth–Szabó knot concordance invariant, 《几何与拓扑》8（2004），第 2 期，735–
742。[69] , *Branched covers and rational homology balls*, 2022。[70] Abhishek Mallick,
Knot Floer homology and surgery on equivariant knots, arXiv 预印本 arXiv:2201.07299（2022）。[71]
Ciprian Manolescu, *On the intersection forms of spin four-manifolds with boundary*, 《数学年刊》359（2014），
第 3–4 期，695–728。MR3231012[72] ,
Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture, 《美国数学会杂志》29（
2016），第 1 期，147–176。MR3402697[73] Ciprian Manolescu, Marco Marengon 和 Lisa Piccirillo,
four-manifolds 2012 12270 2020 , arXiv 预印本
Relative genus bounds at infinite
arXiv:。（）。[74] Ciprian Manolescu 和 Brendan Owens,
of double branched covers **2007** 2007 9, , 《国际数学研究通知》
A concordance invariant from the Floer homology
（），第 rnm077–rnm077 期。[75] Takao Matumoto, *On diffeomorphisms of a K*3 *surface*, 《代数与拓扑理论》
（Kinosaki, 1984），1986年，第616–621页。MR1102278[76] Rostislav Matveyev,
A decomposition of smooth simply-connected h-cobordant 4-manifolds, 《微分几何杂志》44（1996），第 3 期，
571–582。[77] Darryl McCullough 和 Teruhiko Soma,
hyperbolic base orbifold **93** 2013 2, 327 353 , 《微分几何杂志》
The Smale conjecture for Seifert fibered spaces with
（），第 – 期。[78] Jan Montague,
manifolds with boundary 2210 08565 2022 , arXiv 预印本
Seiberg-Witten Floer K-theory and cyclic group actions on spin four-
arXiv:。（）。[79] Jos´e M Montesinos, *Surgery on links and double branched covers of* S^3, 《纽结、群与》
（1975），227–259。[80] John W. Morgan 和 Zolt
´ ´ *Homotopy K*3 *surfaces and mod* 2 *Seiberg-Witten* an Szabo, , 《数学
invariants **4** 1997 1, 17 21 1432806
研究快报》（），第 – 期。MR[81] *Legendrian knots and monopoles*Tomasz
Mrowka 和 Yann Rollin, 《代数几何与拓扑》6（2006），1–69。MR2199446[82] Yuta Nozaki, Kouki Sato 和
Masaki Taniguchi, *homology cobordism group* 2019 arXiv:1905.04001
Interval distantion Floer homology and the
（），参见 。[83] Peter Ozsv
´ ´ ´ *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms* ath 和 Zoltan Szabo,
for four-manifolds with boundary **173** 2003 2, 179 261
《数学进展》（），第 – 期。[84] ,
Knot Floer homology and the four-ball genus **7** 2003 2, , 《几何与拓扑》（），
615 639
第 – 期。[85] , *Holomorphic triangles and invariants for smooth four-manifolds*, 《数学进展》202（2006），
第 2 期，326–400。[86] , *Knot Floer homology and integer surgeries*, 《代数与几何拓扑》8（2008），第 1 期，
101–153。[87] B. Perron, *Pseudo-isotopies et isotopies en dimension quatre dans la catégorie topologique*, 《拓
扑学》 **25** 1986 4, 381 397 862426 （），第 – 期。MR Frank Quinn, 《微分几何杂
[88] *Ends of maps. III. Dimensions* 4 *and* 5
志》17（1982），第 3, 503 521 679069 –期。MR, 《微分几何杂志》24（1986），第 3 期，343–
[89] *Isotopy of* 4*-manifolds*
372。MR868975[90] Vinicius Gripp Barros Ramos, *Absolute gradings on ECH and Heegaard Floer homology*,
《量子拓扑》9（2018），第 2 期，207–228。MR3812797。

[91] Jacob Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus* **182** 2010 2, , 《数学发
419 447 2729272
明》（），第–期。MR[92] Jacob Andrew Rasmussen, *Floer homology and knot complements*, 哈佛大学，2003年。[93] Nikolai Saveliev, *Dehn surgery along torus knots*, 《拓扑学及其应用》**83**（1998），第3期，193–202页。MR1606386[94]， *Invariants for homology 3-spheres*，第140卷，施普林格，2002年。[95] Markus Szymik, *Characteristic cohomotopy classes for families of 4-manifolds*, 《数学论坛》**22**（2010），第3期，509–523页。MR2652709[96] Clifford Henry Taubes, *Embedded contact homology and Seiberg-Witten Floer cohomology I* **14** 2010 5, 2497 2581 , 《几何与
2746723
拓扑》（），第–期。MR[97] *Diffeomorphisms of* 4*-manifolds* C. T. C. Wall, ，
《伦敦数学会杂志》**39**（1964），131–140页。MR163323[98] Tadayuki Watanabe, *Theta-graph and diffeomorphisms of some 4-manifolds*（2020），可见于 arXiv:2005.09545。[99] Edward Witten, *Monopoles and four-manifolds*, 《数学研究快报》**1**（1994），第6期，769–796页。MR1306021[100] Kouichi Yasui, *Corks, exotic 4-manifolds and knot concordance*, arXiv预印本arXiv:1505.02551，即将在《微分几何杂志》发表（2015）。

Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro, Tokyo 153-8914, Japan*Email address*: konno@ms.u-tokyo.ac.jp

Department of Mathematics, Rutgers University, Hill Center, Busch Campus, 110 Frelinghuysen Road Piscataway, NJ 08854, USA*Email address*: abhishek.mallick@rutgers.edu

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University, Kitashirakawa Oiwake-cho, Sakyo-ku, Kyoto 606-8502, Japan*Email address*: taniguchi.masaki.7m@kyoto-u.ac.jp