arXiv:2304.06012v2 [math.MG] 8 Apr 2024

无限生成吸引子的参数化

EVE SHAW 和 VYRON VELLIS

Abstract. 无限迭代函数系（IIFS）是定义在紧致度量空间上的可数个压缩映射的集合。本文研究这类系统的吸引子可由单位区间上的连续映射或 H¨older 连续映射参数化的条件。

1. Introduction

迭代函数系是数学中构造分形集最标准、最经典的方法之一。迭代函数系（简称 IFS）是完备度量空间 X 上的有限个 $\mathcal{F}$ 压缩映射的集合。Hutchinson [Hut81] 证明，对每个迭代函数系 $\mathcal{F}$，都存在唯一的非空紧集 $K \subset X$（称为 $\mathcal{F}$ 的吸引子），使得 $K = \bigcup_{\phi\in\mathcal{F}} \phi(K)$。迭代函数系 $\mathcal{F}$ 的相似维数 是下列方程的唯一解。

$$\psi_{\mathcal{F}}(t) := \sum_{\phi\in\mathcal{F}} \mathrm{Lip}(\phi)^t = 1 \tag{1.1}$$

其中，Lip(ϕ) 表示所有使 ϕ 为 L-Lipschitz 的 $L > 0$ 的下确界。在本文其余部分，我们只考虑非退化的真压缩映射，即始终假设 Lip(ϕ) $\in$ (0，1)。

迭代函数系 $\mathcal{F}$ 的相似维数与其吸引子 K 的豪斯多夫维数之间的联系由 Hutchinson [Hut81] 建立。他证明，若 $\mathcal{F}$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上、满足开集条件的相似变换迭代函数系，则 $\dim_H(K)$ =s-dim($\mathcal{F}$)。回顾一下，定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的相似变换是伸缩变换与等距变换的复合。定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的迭代函数系 $\mathcal{F}$ 满足开集条件（缩写为 OSC），是指存在一个非空开集 $U \subset \mathbb{R}^n$，使得对所有 $\phi \in \mathcal{F}$，$\phi(U) \subset U$，并且对所有互不相同的 $\phi, \phi' \in \mathcal{F}$，$\phi(U) \cap \phi'(U) = \emptyset$。许多著名的分形（如标准康托尔集、谢尔宾斯基地毯、冯·科赫雪花等）都是相似变换迭代函数系的吸引子。

Date: 2024 年 4 月 9 日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 28A80；次要分类号 26A16、28A75、53A04。*Key words and phrases.*H¨lder 曲线、参数化、无限迭代函数系。V.V. 获得了 NSF DMS 基金 1952510 和 2154918 的部分资助。

满足开集条件的平面情形。关于开集条件的必要性，另见 [Sch94, Sch96,FF15, FHOR15]。

动力系统理论中的一个自然问题，是迭代函数系吸引子的正则性，以及它是否存在由单位区间给出的“良好”参数化。Hata [Hat85] 证明，若迭代函数系的吸引子 K 是连通的，那么它就是一条曲线的像，也就是说，是 $[0,1]$在某个连续映射下的像。第二位作者与 Badger [BV21]改进了 Hata 的结果，证明若迭代函数系 $\mathcal{F}$ 的吸引子 K 是连通的，那么对于任意 $\alpha > \text{s-dim}(\mathcal{F})$，它都是 $[0,1]$ 在某个 $\frac{1}{\alpha}$-H¨older 连续映射下的像。在额外假设 $X = \mathbb{R}^n$ 成立，且$\mathcal{F}$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上并满足开集条件的相似变换迭代函数系时，Remes [Rem98] 此前证明，吸引子是 $[0,1]$ 在某个 $\frac{1}{\alpha}$-H¨older 连续映射下的像，而且实际上可以有 $\alpha = \text{s-dim}(\mathcal{F})$。Remes 的结果是尖锐的：若 $\alpha < \text{s-dim}(\mathcal{F})$，则不存在 $\frac{1}{\alpha}$-H¨older 参数化。Remes 定理中的假设 $X = \mathbb{R}^n$ 可替换为假设$\mathcal{H}^{\text{s-dim}(\mathcal{F})}(K) > 0$ [BV21]。本文此处及后文中，$\mathcal{H}^\alpha$ 表示 Hausdorff α维测度。

在他们广受赞誉的论文中，Mauldin 和 Urba´nski [MU96]（另见 [Mau95]）进一步拓展了Hutchinson理论，并引入了无限迭代函数系（简称IIFS）的概念；也就是说，它是在紧致度量空间 X 上由可数无穷多个压缩映射构成的集合。自引入以来，IIFS 在分形几何、几何群论和数论中一直发挥着重要作用；参见 [MU99, HU02, MU02, UZ02, KZ06, MSU09, JR12, SW15, RGU16, BF23] 及其中的参考文献。

与大多数文献不同，我们不假设压缩映射是共形的，甚至不要求它们是单射。给定紧致度量空间 X 上的一个 IIFS $\mathcal{F} = \{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$，我们将 $\mathcal{F}$ 的吸引子定义为

$$K = \bigcup_{(i_n)\subset\mathbb{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_{i_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_n}(X).$$

在无限情形下，吸引子 K 可能不是紧致的。此外，尽管 $K = \bigcup_{\phi\in\mathcal{F}} \phi(K)$，满足此性质的 X 可能有多个非空子集。如果进一步假设每个 $\phi_i \in \mathcal{F}$ 都是单射，且每个 $x \in X$ 至多包含于有限多个 ϕ_i（X）中，那么

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}} \phi_{i_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_n}(X). \tag{1.2}$$

在无限情形下，式 (1.1) 中的辅助函数 $\psi_{\mathcal{F}}$ in 对所有 $t > 0$ 要么都为无穷大，要么在某个 $a \geq 0$ 对应的区间 (a,∞) 上连续且严格递减。因此，与有限情形不同，方程 (1.1) 可能无解。我们将无限迭代函数系 $\mathcal{F}$ 的相似维数定义为

$$\text{s-dim}(\mathcal{F}) := \inf\{t \geq 0 : \psi_{\mathcal{F}}(t) \leq 1\}.$$

根据法图引理，上述下确界实际上是最小值。与有限情形一样，若 $\mathcal{F}$ 是作用于 $X = U \subset \mathbb{R}^n$ 上的相似变换无限迭代函数系，其中 U 是一个有界

区域，且满足开集条件，那么吸引子 K 的豪斯多夫维数等于 s-dim($\mathcal{F}$) [MU96, 推论 3.17]。

本文旨在研究无限迭代函数系吸引子的可参数化性。在无限情形下，会出现一个有趣的二分现象。一方面，在命题 2.1 中，我们证明：如果无限迭代函数系 $\mathcal{F}$ 的吸引子 K 是连续统，且 s-dim($\mathcal{F}$) $=1$，那么 K 是一条线段；类似现象也见 [MMU01]。另一方面，当相似维数大于 1 时，Hata 定理和 Badger-Vellis 定理均不成立，即使相似维数与 1 的差距任意小。

定理 1.1。 *(1)* 对每个 $\epsilon>0$，都存在一个定义在单位正方形 $[0,1]^2$ 上、满足开集条件的相似变换无限迭代函数系，使得 $\text{s-dim}(\mathcal{F})<1+\epsilon$，且其吸引子是连续统，但不是路径连通的。*(2)* 对每个 $\epsilon>0$，都存在一个定义在单位正方形 $[0,1]^2$ 上、满足开集条件的相似变换无限迭代函数系，使得 $\text{s-dim}(\mathcal{F})<1+\epsilon$，且其吸引子是一条曲线的像，但不是一条 *Hölder* 曲线的像。

虽然第一个例子或许并不太令人意外，但第二个例子还有一个额外性质：任意两点之间都存在一条吸引子中的 Lipschitz 曲线将它们连接起来。这两个例子有一个共同之处：吸引子内部都存在一个“坏的 1-骨架”，它不是某条曲线的像（在第一个例子中），也不是某条 H¨older 曲线的像（在第二个例子中）。我们证明，若不存在这种坏结构，吸引子便具有良好的参数化。

定理 1.2. 设 $\mathcal{F}=\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是紧致度量空间上的一个无限迭代函数系，其吸引子 K 是紧致的，$\lim_{i\to\infty}\text{Lip}(\phi_i)=0$，并且存在一条曲线 $\gamma\colon[0,1]\to K$，其像对所有 i 都与 $\phi_i(K)$ 相交。

(1) 吸引子 K 是某条曲线的像。*(2)* 若 γ 是 $\frac{1}{s}$*-H¨older* 的，对某个 $s\geq 1$ 成立，则对每个 $\alpha>\max\{s,\text{s-dim}(\mathcal{F})\}$，吸引子 K 都是某条 $\frac{1}{\alpha}$*-H¨older* 曲线的像。

我们将以下问题留作开放问题：在定理的第二部分中，能否取 $\alpha=\max\{s,\text{s-dim}(\mathcal{F})\}$；即使对于迭代函数系，这一点也尚不清楚。此外，当 $\mathcal{F}$ 有限时，定理 1.2 两部分中曲线 γ 的存在性由 [BV21，定理 1.1]保证。最后，条件 $\lim_{i\to\infty}\text{Lip}(\phi_i)=0$ 是定理 1.2 的必要条件；参见 §3.1。

定理 1.1 中两个例子的构造见第 3 节，我们在第 2 节证明定理 1.2。

1.1. 符号记法。 在本文中及下文里，给定一个可数（无限或有限）集合 A 和一个整数 $n\geq 0$，我们用 A^n 表示由 A 组成的长度为 n的词的集合，约定 $A^0=\{\varepsilon\}$，且 ε为空词。我们用 $A^*=\bigcup_{n\geq 0}A^n$ 表示，并用 $A^{\mathbb{N}}$表示由 A中的字母构成的无限词的集合。给定 $w=i_1i_2\cdots\in A^{\mathbb{N}}$，我们记 $w(n)=i_1\cdots i_n$为 w的截断子词。

给定一个迭代函数系或无限迭代函数系 $\mathcal{F} = \{f_i : i \in A\}$ 以及一个有限词 $w = i_1 \cdots i_n \in A^n$，我们用 $|w|$ 表示 w 的长度 n，并

$$f_w = f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_n}.$$

给定量 $x, y \geq 0$ 和常数 $a > 0$，若存在一个至多依赖于 a 的常数 C，使得 $x \leq Cy$，则记作 $x \lesssim_a y$。若 C 是普适的，则记作 $x \lesssim y$。若 $x \lesssim_a y$ 且 $y \lesssim_a x$，则记作 $x \simeq_a y$。

2. Parametrizations of infinite IFS attractors

本节证明定理 1.2。我们首先证明一个简单事实：如果一个无限迭代函数系的相似维数等于 1，且其吸引子是一个连续统，那么该吸引子就是一条线段。Hutchinson 曾针对欧几里得空间上的有限相似变换迭代函数系证明了这一点 [Hut81，注 3.4]。

命题 2.1。设 K 是紧致空间上的有限或无限迭代函数系 $\mathcal{F}$ 的吸引子。若 K 是一个连续统，且 $\text{s-dim}(\mathcal{F}) = 1$，则 K 与一条闭线段等距。

证明。令 $\mathcal{F} = \{\phi_i : i \in A\}$。我们首先断言 $\mathcal{H}^1(K) \leq \operatorname{diam} K$。固定$\delta > 0$，并令 $n \in \mathbb{N}$ 满足：对所有 $w \in \mathbb{N}^n$，均有 $(\operatorname{diam} K) \operatorname{Lip}(\phi_w) < \delta$。由于$\psi_{\mathcal{F}}(1) \leq 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1_\delta(K) \leq \sum_{w \in A^n} \operatorname{diam} \phi_w(K) &\leq \operatorname{diam} K \sum_{i_1,\ldots,i_n \in A} \operatorname{Lip} \phi_{i_1} \cdots \operatorname{Lip} \phi_{i_n} \\ &= \operatorname{diam} K (\psi_{\mathcal{F}}(1))^n \leq \operatorname{diam} K\end{aligned}$$

取 $\delta \to 0$ 即得该断言。因此，根据 AO17，定理 4.4]，K 是 $[0,1]$ [的 Lipschitz 像。固定 $p, q \in K$，使得 $d(p, q) = \operatorname{diam} K$，并固定一条端点为 p, q 的弧 $\gamma \subset K$。注意

$$\operatorname{diam} K = \mathcal{H}^1(K) \geq \mathcal{H}^1(\gamma) \geq \operatorname{diam} \gamma = \operatorname{diam} K.$$

因此，$K = \gamma$。对于每个 $x, y \in \gamma$，记 $\gamma(x, y)$ 为 γ 上端点为 x, y 的子弧。

令 $x, y \in \gamma$ 满足 x 位于 p 和 y 之间。于是，

$$\begin{aligned}\operatorname{diam} \gamma &\leq d(p, x) + d(x, y) + d(y, q) \\ &\leq \mathcal{H}^1(\gamma(p, x)) + \mathcal{H}^1(\gamma(x, y)) + \mathcal{H}^1(\gamma(y, q)) \\ &= \mathcal{H}^1(\gamma) \\ &= \operatorname{diam} \gamma.\end{aligned}$$

因此，对所有 $x, y \in \gamma$，均有 $\mathcal{H}^1(\gamma(x, y)) = d(x, y)$，由此可得 K 与长度为 $\operatorname{diam} K$] 的线段 $[0,$ 等距。□

第 2 节的其余部分将用于证明定理 1.2。此后，我们假设在一个紧致空间X 上有一个无限迭代函数系 $\mathcal{F} = \{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$，使得 K 是紧致的，$\lim_{i\to\infty} \operatorname{Lip}(\phi_i) = 0$，且存在一条曲线

$\gamma\colon [0,1]\to K$ 其像与每个集合 $\phi_i(K)$ 相交。我们进行一些标准化简。

首先，若 K 是一个点，则定理的断言显然成立。因此，我们可以假设 K 非退化，并且通过缩放度量，也可以假设 $\operatorname{diam}(K)=1$。其次，由于 $\lim_{i\to\infty}\operatorname{Lip}(\phi_i)=0$，我们可以假设

$$\operatorname{Lip}(\phi_1)=\max_{i\in\mathbb{N}}\operatorname{Lip}(\phi_i).$$

第三，必要时，通过沿 γ 的像反向遍历，我们可以假设 $\gamma(0)=\gamma(1)$。对于 γ 的像中的任意点 p，通过对 γ 重新参数化，我们可以假设 $\gamma(0)=\gamma(1)=p$。此外，对于 γ 的像中的任意 p，q，通过对 γ 重新参数化，我们可以假设存在 $[a,b]\subset[0,1]$，使得 $\gamma(a)=p$ 且 $\gamma(b)=q$。

在此处以及本节余下部分，给定 $w=i_1i_2\dots i_n\in\mathbb{N}^*$，我们记

$$L_w=\operatorname{Lip}(\phi_{i_1})\operatorname{Lip}(\phi_{i_2})\dots\operatorname{Lip}(\phi_{i_n})$$

按照约定 $L_\varepsilon=1$。注意，一般而言，$L_w\geq\operatorname{Lip}(\phi_w)$。

2.1. IIFS吸引子的道路连通性。 定理 1.2 的证明的第一步是以下引理，该引理表明 K 是路径连通的。

引理 2.2. 设 $w\in\mathbb{N}^*$ 和 x、$y\in\phi_w(K)$。存在一个连续映射$f\colon [0,1]\to\phi_w(K)$，使得 $f(0)=x$ 且 $f(1)=y$。如果 γ是某个 $s>s\text{-}\dim(\mathcal{F})$ 的 $\frac{1}{s}$-*Hölder* 映射，且 *Hölder* 常数为 H_0，那么 f 可以选为 $\frac{1}{s}$-*Hölder* 映射，其 *Hölder* 常数为 $H\lesssim_{\psi_{\mathcal{F}}(s),\,s,\,H_0,\,L_1}L_w$。

证明。显然，我们可以假设 $x\neq y$。此外，只需假设 $w=\varepsilon$，并且不存在 $j\in\mathbb{N}$ 使得 x，$y\in\phi_j(K)$，否则我们可以转而考虑最长公共词。根据库拉托夫斯基嵌入定理，我们还可以假设 K 是 ℓ_∞的子集。

我们构造连续映射序列 $(f_n\colon [0,1]\to\ell_\infty)_{n\geq0}$、有限个闭非退化区间的序列 $(\mathscr{B}_n)_{n\geq0}$、$(\mathscr{E}_n)_{n\geq0}$，它们属于 $[0,1],$，以及一个满足以下性质的单射 $\mathbf{w}\colon \bigcup_{n\geq0}\mathscr{E}_n\to\mathbb{N}^*$。

(P1) 对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$\mathscr{B}_n\cup\mathscr{E}_n$ 中的区间仅在端点处相交，并且所有这些区间的并集为 $[0,1]$。（P2) 对于每个 $J\in\mathscr{E}_n$，存在唯一的 $S\in\mathscr{B}_{n+1}$ 使得 $S\subset J$。反之，对于每个 $S\in\mathscr{B}_{n+1}\setminus\mathscr{B}_n$，存在唯一的 $J_S\in\mathscr{E}_n$ 使得 $S\subset J_S$。（P3)对于任意 $n\geq0$ 和任意 $J\in\mathscr{E}_{n+1}$，存在唯一的 $J'\in\mathscr{E}_n$ 使得 $J\subset J'$。此外，存在 $u\in\mathbb{N}^*$ 使得 $|u|>0$ 且$\mathbf{w}(J)=\mathbf{w}(J')u$。（P4) 对于每个 $n\geq0$ 和 $J\in\mathscr{E}_n$，存在互不相同的 $i,j\in\mathbb{N}$，使得 $f_n|J$ 是一个线性映射，将 $\phi_{\mathbf{w}(J)i}(K)$ 中的左端点和 $\phi_{\mathbf{w}(J)j}(K)$中的右端点映射到相应位置。

(P5) 对于每个 $n \geq 1$，以及每个 $S \in \mathscr{B}_n$，都存在一个闭的非退化区间 I 和一个线性映射 $\zeta : S \to I$，使得

$$f_{n+1}|S = f_n|S = \phi_{\mathbf{w}(J_S)} \circ (\gamma|I) \circ \zeta.$$

(P6) 对每个 $n \geq 0$、$f_n(0) = x$ 和 $f_n(1) = y$。

(P7) 对每个 $n \geq 0$，以及每个 $J \in \mathscr{E}_n$、$\|f_n - f_{n+1}\|_{J,\,\infty} \leq 2L_{\mathbf{w}(J)}$。

在构造 $(f_n)_n$、$(\mathscr{B}_n)_n$、$(\mathscr{E}_n)_n$ 之前，$\mathbf{w}$ 我们指出，**(P3)** 和简单的归纳法可推出

(P8) 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有 $J \in \mathscr{E}_n$、$|\mathbf{w}(J)| \geq n$。

该构造以归纳方式完成。定义 $\mathscr{E}_0 = \{[0,1]\}$、$\mathscr{B}_0 = \emptyset$、$\mathbf{w}([0,1]) = \varepsilon$ 以及 $f_0 : [0,1] \to \ell_\infty$ 为满足 $f_0(0) = x$ 和 $f_0(1) = y$ 的线性映射。性质 **(P4)** 是显然的，而其余性质均为空。

现在假设，对于某个整数 $n \geq 0$，我们已定义连续映射 $f_n : [0,1] \to \ell_\infty$、集合族 $\mathscr{B}_n$, $\mathscr{E}_n$，它们属于 $[0,1],$，以及单射 $\mathbf{w} : \bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{E}_k \to \mathbb{N}^*$，并且满足性质（**P1**）–（**P7**）。新的区间集合族将为

$$\mathscr{B}_{n+1} = \mathscr{B}_n \cup \bigcup_{J \in \mathscr{E}_n} \mathscr{B}_{n+1}(J), \qquad \mathscr{E}_{n+1} = \bigcup_{J \in \mathscr{E}_n} \mathscr{E}_{n+1}(J).$$

如果 $S \in \mathscr{B}_n$，那么我们令 $f_{n+1}|S = f_n|S$。

现在固定 $J \in \mathscr{E}_n$，并记 $J = [t,s]$。根据（P3），存在互不相同的 $i, j \in \mathbb{N}$，使得 $|\mathbf{w}(J)| \geq n$, $f_n(t) \in \phi_{\mathbf{w}(J)i}(K)$，且 $f_n(s) \in \phi_{\mathbf{w}(J)j}(K)$。此外，还存在一个区间 $I = [a,b] \subset [0,1]$，使得 $\gamma(a) \in \phi_i(K)$，且 $\gamma(b) \in \phi_j(K)$。我们考虑三种可能的情形。

情形 *I*：假设 $\phi_{\mathbf{w}(J)} \circ \gamma(a) = f_n(t)$，且 $\phi_{\mathbf{w}(J)} \circ \gamma(b) = f_n(s)$。令$\mathscr{B}_{n+1}(J) = \{J\}$，$\mathscr{E}_{n+1}(J) = \emptyset$，以及 $f_{n+1}|J = \phi_{\mathbf{w}(J)} \circ (\gamma|I) \circ \zeta$，其中 $\zeta : J \to I$是保定向线性映射。

情形 II：假设 $\phi_{\mathbf{w}(J)} \circ \gamma(a) \neq f_n(t)$，且 $\phi_{\mathbf{w}(J)} \circ \gamma(b) = f_n(s)$。令 $z \in (t,s)$，并令 $u \in \mathbb{N}^*$ 为满足下述条件的最短词：存在互不相同的 i、$j \in \mathbb{N}$，使得 $\phi_{\mathbf{w}(J)} \circ \gamma(a) \in \phi_{\mathbf{w}(J)ui}(K)$，且 $f_n(t) \in \phi_{\mathbf{w}(J)uj}(K)$。由 **(P4)** 可得 $|u| \geq 1$。令 $\mathscr{E}_{n+1}(J) = \{[t,z]\}$，$\mathscr{B}_{n+1}(J) = \{[z,s]\}$，并令 $\mathbf{w}([t,z]) = \mathbf{w}(J)u$。在 J 上连续地定义 f_{n+1}，使得 $f_{n+1}|[z,s]$ 与情形 I 中相同，且 $f_{n+1}|[t,z]$ 为线性映射，并满足 $f_{n+1}(t) = f_n(t)$。若$\phi_{\mathbf{w}(J)} \circ \gamma(a) = f_n(t)$，且 $\phi_{\mathbf{w}(J)} \circ \gamma(b) \neq f_n(s)$，则同理可得。

情形 *III*：假设 $\phi_{\mathbf{w}(J)} \circ \gamma(a) \neq f_n(t)$ 且 $\phi_{\mathbf{w}(J)} \circ \gamma(b) \neq f_n(s)$。令$t < z < w < s$，并设 $\mathscr{E}_{n+1}(J) = \{[t,z],[w,s]\}$, $\mathscr{B}_{n+1}(J) = \{[z,w]\}$。关于$\mathbf{w}([t,z])$、$\mathbf{w}([w,s])$和 $f_{n+1}|J$的定义，我们按情形 I、II 处理。

性质（**P1**）–（**P7**）很容易验证。由于$\mathbf{w}$ 在 $\bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{E}_k$上是单射，因此由（**P3**）以及$\mathbf{w}$ 对每个 $J \in \mathscr{E}_n$ 在 $\mathscr{E}_{n+1}(J)$上是单射这一事实可知，$\mathbf{w}$ 在 $\bigcup_{k=0}^{n+1} \mathscr{E}_k$上是单射。最后，由于 f_{n+1} 在 $\mathscr{E}_n$中的区间之外与 f_n 相同，$f_{n+1}|J$ 对所有 $J \in \mathscr{E}_n$都是连续的，并且对所有 $J \in \mathscr{E}_n$都有 $f_{n+1}|\partial J = f_n|\partial J$，因此 f_{n+1} 的连续性得以成立。至此，归纳构造完成。

由（P5）和（P7）可知，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到一个连续映射$f\colon [0,1]\to \ell_\infty$。固定 $J\in\bigcup_{n\ge 0}\mathscr{E}_n$。由（P5）可知，对所有满足 $S\subset J$的 $S\in\bigcup_{n\ge 0}\mathscr{B}_n$，都有 $f(S)\subset\phi_{\mathbf{w}(J)}(K)$。根据这一事实以及（P3）和（P4），可知对所有 $m\ge n$,

$$\sup_{t\in J}\operatorname{dist}(f_m(t),\phi_{\mathbf{w}(J)}(K))\le \max_{\substack{J'\subset J\\ J'\in\mathscr{E}_m}} 2L_{\mathbf{w}(J')}\le 2L_{\mathbf{w}(J)}L_1^{m-n}.$$

由于 K是闭的，因此 $f(J)\subset\phi_{\mathbf{w}(J)}(K)$。这就证明了引理的第一部分。

现在假设 γ是某个 $s>\text{s-dim}(\mathcal{F})$ 上的$\frac{1}{s}$-H¨older 函数，且 H¨older 常数为 H_0。那么，$\psi_{\mathcal{F}}(s)\in(0,1)$。令 $\mathscr{E}=\bigcup_{n\ge 0}\mathscr{E}_n$和 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\ge 0}\mathscr{B}_n$。对每个 $J\in\mathscr{E}$，令

$$\mathcal{M}(J):=\sum_{\substack{J'\in\mathscr{E}\\ J'\subset J}}(L_{\mathbf{w}(J')})^s.$$

由 **w** 的单射性及 (P3)，可知对每个 $J\in\mathscr{E}$

$$(L_{\mathbf{w}(J)})^s\le\mathcal{M}(J)\le\sum_{w\in\mathbb{N}^*}(L_{\mathbf{w}(J)w})^s=(L_{\mathbf{w}(J)})^s\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}L_i^s\right)^n=\frac{(L_{\mathbf{w}(J)})^s}{1-\psi_{\mathcal{F}}(s)}.$$

此情形中的构造唯一的区别在于，我们要求对所有 $S\in\mathscr{B}$ 和所有 $J\in\mathscr{E}$

$$|S|=(L_{\mathbf{w}(J_S)})^s/\mathcal{M}([0,1])\qquad\text{and}\qquad |J|=\mathcal{M}(J)/\mathcal{M}([0,1]).$$

要了解为何这是可能的，请注意，如果对于某个$n\ge 0$，$J\in\mathscr{E}_n$ 和 $\mathscr{B}_{n+1}(J)=\{S\}$，那么

$$|J|=\frac{(L_{\mathbf{w}(J)})^s}{\mathcal{M}([0,1])}+\sum_{\substack{J'\in\mathscr{E}\\ J'\subsetneq J}}\frac{(L_{\mathbf{w}(J')})^s}{\mathcal{M}([0,1])}=|S|+\sum_{J'\in\mathscr{E}_{n+1}(J)}|J'|.$$

我们声称，上面定义的映射 f 是 $\frac{1}{s}$-H¨older 连续的，其 H¨older 常数仅取决于 $\psi_{\mathcal{F}}(s)$、L_1、s 和 H_0。为证明这一断言，固定$p,\ q\in[0,1]$。显然，不妨设 $p\ne q$。存在 $n\in\mathbb{N}$和$J\in\mathscr{E}_n$，使得 $p,\ q\in J$，且 n 是极大的。证明该断言归结为分情形讨论。

情形*1*。假设 $p\in J_1$和 $q\in J_2$，其中 $J_1,\ J_2\in\mathscr{E}_{n+1}(J)$ 彼此不同。一方面

$$|p-q|\ge|S|\gtrsim_{s,\psi_{\mathcal{F}}(s)}(L_{\mathbf{w}(J)})^s$$

另一方面，由（P5）和（P7），$f(p),\ f(q)\in\phi_{\mathbf{w}(J)}(K)$，因此

$$d(f(p),f(q))\le L_{\mathbf{w}(J)}.$$

情形*2*。假设 $p,\ q\in S$其中 $S\in\mathscr{B}_{n+1}(J)$。由（P5），

$$d(f(p),f(q))\le L_{\mathbf{w}(J)}|S|^{-1/s}H_0|p-q|^{1/s}\lesssim_{s,\psi_{\mathcal{F}}(s),H_0}|p-q|^{1/s}.$$

情形*3*. 假设 $p\in J_1\setminus S$和 $q\in S\setminus J_1$，其中 $J_1\in\mathscr{E}_{n+1}(J)$ 和 $S\in\mathscr{B}_{n+1}(J)$。存在整数 $m\ge n+1$和 $J'\in\mathscr{E}_m$，使得

$p \in J' \subset J_1$、 $J' \cap S \neq \emptyset$，如果 $S' \in \mathscr{B}_{m+1}(J')$，那么 S'将 p与 q分离。令 z为 $J' \cap S$中的唯一点。根据 p情形1， z以及 z情形2， q

$$d(f(p), f(q)) \leq d(f(p), f(z)) + d(f(z), f(q)) \lesssim_{L_1,s,\psi_{\mathcal{F}}(s),H_0} |p-q|^{1/s}$$

这就完成了该断言的证明。 □

2.2. IIFS吸引子的参数化。 定理 1.2 证明的第二步是以下引理，它允许我们重新参数化 γ ，使得 $\phi_i(K)$的原像具有非空内部。

引理 *2.3.* 设 p 属于 γ的像。存在映射 $\Gamma : [0,1] \to K$ 以及一族内部互不相交的非退化闭区间 $\{\mathcal{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ，使得 Γ 与 γ具有相同的像，满足 $\Gamma(0) = \Gamma(1) = p$，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$， $\mathcal{I}_n \subset \Gamma^{-1}(\phi_n(K))$。此外，若 γ 是常数为 H_0的$\frac{1}{s}$ -Hölder连续映射，且$(a_n) \in \ell^1$ 是正数序列，则 Γ 是常数为 $H \leq 2^{1/s} H_0 (1 + \|(a_n)\|_1)^{1/s}$ 的$\frac{1}{s}$ -Hölder连续映射，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$，$|\mathcal{I}_n| = a_n(1 + \|(a_n)\|_1)^{-1}$。

证明。我们不妨设 $\gamma(0) = \gamma(1) = p$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，固定一点$x_n \in \gamma^{-1}(\phi_n(K)) \subset [0,1]$。可能存在某个 $n \neq m$ 使得$x_n = x_m$。令 $\{p_k\}_{k\in B}$ 为集合 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个枚举，其中 B 是有限集，或是 $\mathbb{N}$。对每个 $k \in B$，定义 $A_k = \{n \in \mathbb{N} : x_n = p_k\}$。

对于第一个断言，固定一个收敛到 0 的正数递减序列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$。将 $\mathbb{R}^3$ 与 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 等同，并定义集合

$$E = (\{0\} \times [0,1]) \cup \bigcup_{k\in B} \bigcup_{n\in A_k} \left(\{ te^{2\pi i/n} : t \in [0, b_n] \} \times \{p_k\} \right) \subset \mathbb{R}^3.$$

由于 $b_n \to 0$，不难看出 E 是闭集。此外，存在一个连续递增映射 $\eta :$ $[0,1] \to [0,1]$ ，使得 $\eta(0) = 0$，

$$\max_{n\in A_k} b_n \leq \eta \left(\min_{j\in\{1,\dots,k-1\}} |p_j - p_k| \right) \qquad \text{for all } k \in B$$

and

$$b_n \leq \eta \left(\min_{m\in\{1,\dots,n-1\}} |e^{2\pi i/m} - e^{2\pi i/n}| \right) \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

我们断言，存在一个连续的 $\omega : [0,1] \to [0,1]$，满足 $\omega(0) = 0$，并且对所有 x， $y \in E$，都存在一条曲线 $\sigma : [0,1] \to E$，使得$\sigma(0) = x$、 $\sigma(1) = y$，且其像的直径至多为 $\omega(|x-y|)$。该断言的证明只需进行简单的分类讨论。

如果 $x, y \in \{0\} \times [0,1]$，那么使用线段 $[x,y]$。

如果 $x = (te^{2\pi i/n}, p_k)$并且 $y \in \{0\} \times [0,1]$对于某些 $t \in [0, b_n]$, $n \in A_k$和 $k \in B$，则使用线段 $[x,(0,p_k)] \cup [(0,p_k), y]$的并集。

如果对于某些互不相同的 $t_1, t_2 \in [0, b_n]$,$n \in A_k$ 和 $k \in B$， $x = (t_1 e^{2\pi i/n}, p_k)$ 且 $y = (t_2 e^{2\pi i/n}, p_k)$，则使用线段 $[x,y]$。

如果对于某些 $t_1, t_2 \in [0, b_n]$, $n, m \in A_k$ 满足 $m < n$，且满足 $k \in B$， $x = (t_1 e^{2\pi i/n}, p_k)$ 且 $y = (t_2 e^{2\pi i/m}, p_k)$，则使用线段 $[x, (0, p_k)] \cup [(0, p_k)\ y]$的并集。注意，

$$\begin{aligned} |x - y| &\gtrsim |t_1 - t_2| + \min\{t_1, t_2\}|e^{2\pi i/m} - e^{2\pi i/n}| \\ &\geq |t_1 - t_2| + \min\{t_1, t_2\}\eta^{-1}(\min\{t_1, t_2\}) \end{aligned}$$

而

$$\operatorname{diam}(\sigma([0,1])) \leq t_1 + t_2 \leq |t_1 - t_2| + \min\{t_1, t_2\}.$$

最后，假设对于某些互不相同的 $k, j \in B$, $m \in A_k$, $n \in A_j$, $t_1 \in [0, b_m]$ 和 $t_2 \in [0, b_n]$，有 $x = (t_1 e^{2\pi i/m}, p_k)$ 和 $y = (t_2 e^{2\pi i/n}, p_j)$。那么，

$$|x - y| \gtrsim |p_k - p_j| + |t_1 - t_2|$$

并且，如果 σ 是线段 $[x, (0, p_k)] \cup [(0, p_k), (0, p_j)] \cup [(0, p_j)\ y]$ 的并集，

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(\sigma([0,1])) \leq t_1 + t_2 + |p_k - p_j| &\leq |t_1 - t_2| + \min\{t_1, t_2\} + |p_k - p_j| \\ &\lesssim |x - y| + \eta(|p_k - p_j|) \end{aligned}$$

且该论断的证明完成了。

因此， E 是连通且局部连通的，根据 Hahn-Mazurkiewicz 定理 [HY61, Theorem 3.30], ，存在连续满射 $g\colon [0,1] \to E$。注意，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，原像

$$g^{-1}(\{te^{2\pi i/n} : t \in [0, b_n]\} \times \{x_n\})$$

包含一个非退化闭区间。现在定义 $\tilde{\gamma}\colon\ E \to K$ 通过 $\tilde{\gamma}|\{0\} \times [0,1] = \gamma$，并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $t \in [0, b_n]$， $\tilde{\gamma}(te^{2\pi i/n},\ x_n) = \gamma(x_n)$。那么 $\tilde{\gamma}$是连续的，并且 $\Gamma\colon = \tilde{\gamma} \circ g$ 满足该引理的结论。

对于引理的第二部分，假设 γ 是具有常数 H_0 的$\frac{1}{s}$-Hölder，并假设 $(a_n) \in \ell^1$ 是一个正数序列。定义 E，如上所述，将 b_n 替换为 a_n。然后，

$$\mathcal{H}^1(E) = 1 + \|(a_n)\|_1 < \infty.$$

因此，根据 [AO17，定理 4.4], ，存在一个恒定速度为 $2\mathcal{H}^1(E)$ 的 Lipschitz 满射 $g\colon [0,1] \to E$。因此，对每个 $n \in \mathbb{N}$， $g^{-1}(\{te^{2\pi i/n}\colon\ t \in [0, a_n]\} \times \{x_n\})$ 都包含一个长度为

$$(1 + \|(a_n)\|_1)^{-1} a_n.$$

按上述方式定义 $\tilde{\gamma}$，并注意到 $\tilde{\gamma}$ 是 $\frac{1}{s}$-Hölder 连续的，其常数为 H_0。令$\Gamma := \tilde{\gamma} \circ g$，则对所有 x， $y \in [0,1]$

$$d(\Gamma(x), \Gamma(y)) \leq H_0 |g(x) - g(y)|^{1/s} \leq 2^{1/s} H_0 (1 + \|(a_n)\|_1)^{1/s} |x - y|^{1/s}. \quad \square$$

现在我们可以证明定理 1.2 了。

定理 *1.2* 的证明。 固定 $p_0 \in K$。我们构造一列连续映射 $(f_n\colon\ [0,1] \to K)_{n \geq 0}$、两列闭非退化区间的集族 $(\mathcal{N}_n)_{n \geq 0}$、$(\mathcal{I}_n)_{n \geq 0}$，它们属于 $[0,1]$, ，以及一个双射 $\mathbf{w}\colon\ \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{N}_n \to \mathbb{N}^*$，并满足以下性质。

(P1) 对于每个 $n \geq 0$， $\mathscr{N}_n \cup \mathscr{I}_n$ 中的区间至多在端点处相交。(P2) 对于每个 $n \geq 0$、每个 $I \in \mathscr{N}_n$ 和每个 $i \in \mathbb{N}$，存在包含于 I 的内部中的 $I' \in \mathscr{N}_{n+1}$，使得$\mathbf{w}(I') = \mathbf{w}(I)i$。反之，对于每个 $n \geq 0$ 和每个 $I' \in \mathscr{N}_{n+1}$，存在 $I \in \mathscr{N}_n$ 和 $i \in \mathbb{N}$，使得 I' 包含于 I 的内部中，且 $\mathbf{w}(I') = \mathbf{w}(I)i$。(P3) 对于每个 $n \geq 0$ 和每个 $I \in \mathscr{N}_n$，恰好存在两个区间J、 $J' \in \mathscr{I}_{n+1}$包含于 I中。反之，对于每个 $n \geq 0$和每个 $J \in \mathscr{I}_{n+1} \setminus \mathscr{I}_n$，存在唯一的区间 $I_J \in \mathscr{N}_n$ 使得$J \subset I_J$。(P4) 如果 $n \geq 1$、 $I \in \mathscr{N}_{n-1}$和 J、 $J' \in \mathscr{I}_n$包含于 I中，则存在反向线性映射 $\zeta_J \colon J' \to J$，使得$f_n|J' = (f_n|J) \circ \zeta_J$。此外， $f_n|J = g \circ \zeta$其中 $g \colon [0,1] \to \phi_{\mathbf{w}(I)}(K)$是来自引理 2.2的映射，而 $\zeta : J \to [0,1]$ 是一个递增线性映射。(P5)对于每个 $n \geq 0$ 和每个 $I \in \mathscr{N}_n$， $f_n|I$ 是常值的，且其像在 $\phi_{\mathbf{w}(I)}(K)$中。此外， $f_n(I) \subset f_{n+1}(I) \subset \phi_{\mathbf{w}(I)}(K)$。(P6) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，如果 x 不在某个 $I \in \mathscr{N}_n$的内部中，则$f_{n+1}(x) = f_n(x)$。(P7) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $f_n(0) = f_n(1) = p_0$。

对于该构造，应用引理 2.3，得到一个映射 $\Gamma : [0,1] \to K$以及一个集合 $\{\mathcal{I}_i : i \in \mathbb{N}\}$，其中包含 $[0,1]$ 中的闭非退化区间，使得对于每个 $i \in \mathbb{N}$，$\Gamma|\mathcal{I}_i$ 为常值函数，且其像包含于 $\phi_i(K)$中。该断言的证明以归纳方式完成。

对于 $n = 0$，令 $\mathscr{N}_0 = \{[0,1]\}$ 和 $\mathscr{I}_0 = \emptyset$，令 $f_0 : [0,1] \to K$ 为常值映射 p_0，并令 $\mathbf{w}([0,1]) = \varepsilon$。性质 (P1)、(P5) 和 (P7) 显然成立，其余性质则为空真。

假设现在，对于某个 $n \geq 0$，我们定义了一个连续的 $f_n : [0,1] \to K$、区间集合 $\mathscr{N}_n, \mathscr{I}_n$，以及一个双射$\mathbf{w} \colon \mathscr{N}_n \to \mathbb{N}^n$，满足假设 (P1)–(P7)。新的区间集合将是

$$\mathscr{I}_{n+1} = \mathscr{I}_n \cup \bigcup_{I \in \mathscr{N}_n} \mathscr{I}_{n+1}(I), \qquad \mathscr{N}_{n+1} = \bigcup_{I \in \mathscr{N}_n} \mathscr{N}_{n+1}(I).$$

我们设

$$f_{n+1}|[0,1] \setminus \bigcup \mathscr{N}_n = f_n|[0,1] \setminus \bigcup \mathscr{N}_n.$$

现在固定 $I \in \mathscr{N}_n$。由 (P5)，存在 $i \in \mathbb{N}$，使得 $f_n(I) \in \phi_{\mathbf{w}(I)i}(K)$。对 Γ 重新参数化后，我们可以假设 $\Gamma(0) \in \phi_j(K)$，且 0 是 $\mathcal{I}_j$ 的左端点。记 $I = [a,b]$，并令 $a < a_1 < a_2 < b$。设 $\xi_I : [a_1, a_2] \to [0,1]$ 是递增线性映射，并设 $\zeta_I \colon [a, a_1] \to [0,1]$ 和 $\zeta_I' \colon [a_2, b] \to [0,1]$ 是递增线性映射。令

$$\mathscr{N}_{n+1}(I) = \{\xi_I^{-1}(\mathcal{I}_j) : j \in \mathbb{N}\} \qquad \text{and} \qquad \mathscr{I}_{n+1}(I) = \{[a, a_1], [a_2, b]\}$$

并对每个 $j \in \mathbb{N}$ 定义 $\mathbf{w}(\xi_I^{-1}(\mathcal{I}_j)) = \mathbf{w}(I)j$。

令 $g \colon [0,1] \to \phi_{\mathbf{w}(I)}(K)$ 为引理 2.2 中给出的、将 $f_n(I)$ 与 $\phi_{\mathbf{w}(I)}(\Gamma(\mathcal{I}_j))$ 相连接的映射，并定义

(1) $f_{n+1}|[a,a_1]=g\circ\zeta_I$，(2) $f_{n+1}|[a_1,a_2]=\phi_{\mathbf{w}(I)}\circ\Gamma\circ\xi_I$，(3) $f_{n+1}|[a_2,b]=g\circ h\circ\zeta_I'$，其中 $h\colon[0,1]\to[0,1]$，且 $h(x)=1-x$。

由构造以及 Γ 的性质可知，性质 (P1)–(P6) 显然成立。注意，对于所有 $I\in\mathscr{N}_n$，函数 $\mathbf{w}\colon\mathscr{N}_{n+1}(I)\to\{\mathbf{w}(I)i\colon i\in\mathbb{N}\}$ 是双射。因此，$\mathbf{w}:\mathscr{N}_{n+1}\to\mathbb{N}^{n+1}$ 是一个双射。最后，由于 0,1 不属于任何 $I\in\mathscr{N}_n$ 的内部，根据 (P6)，$f_{n+1}(0)=f_{n+1}(1)=p_0$。

接下来要证明 f_{n+1} 的连续性。固定 $x\in[0,1]$。我们只证明 f_{n+1} 在 x 处从右侧连续。为此，固定一个收敛到 x 的序列 $x_m\subset(x,1]$，并考虑以下三种情形。

情形*1*。假设对于所有充分大的 m，$x_m\in[0,1]\setminus\bigcup\mathscr{N}_n$。那么，根据 (P6) 以及 f_n 的连续性，$f_{n+1}(x_m)$ 收敛到 $f_{n+1}(x)$。

情形*2*。假设对于所有 m 充分大，$x_m\in I$ 对于某个 $I\in\mathscr{N}_n$。那么，$f_{n+1}(x_m)$按设计收敛于 $f_{n+1}(x)$。

情形*3*。假设对于所有 m 充分大的值，都存在 $I_m\in\mathscr{N}_n$使得 $x_m\in I_m$，并且集合 $\{I_m\}_m$ 是无限的。固定 $\epsilon>0$，存在 $i_0\in\mathbb{N}$ 使得对于每个 $i\geq i_0$，$L_i<\epsilon/2$。由于集合$\{\mathbf{w}(I_m)\}_m$ 是无限的，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对于每个 $m\geq N$，词 $\mathbf{w}(I_m)$ 中的某个字符大于 i_0。因此，对于每个 $m\geq N$，$L_{\mathbf{w}(I_m)}<\epsilon/2$。根据 f_n 的连续性，我们还可以假设对于每个$m\geq N$，$d(f_n(x),f_n(x_m))<\epsilon/2$。根据 (P5)，对于每个 $m\geq N$，

$$d(f_{n+1}(x),f_{n+1}(x_m))\leq d(f_n(x),f_n(x_m))+d(f_n(x_m),f_{n+1}(x_m))<\epsilon.$$

至此，归纳法完成，同时也完成了 (P1)–(P7) 的证明。

由 (P5) 和 (P6)，

$$\|f_{n+1}-f_n\|_\infty\leq\sup_{I\in\mathscr{N}_n}\|f_n-f_{n+1}\|_{I,\infty}\leq\sup_{I\in\mathscr{N}_n}L_{\mathbf{w}(I)}\leq L_1^n$$

因此，映射 f_n 一致地收敛到连续映射 $f\colon[0,1]\to K$。由 (P5) 以及 $\mathbf{w}$ 的双射性可知，对于所有 $w\in\mathbb{N}^*$，$f([0,1])\cap\phi_w(K)\neq\emptyset$。因此，对于所有 $x\in K$ 和 $n\in\mathbb{N}$，

$$\operatorname{dist}(x,f([0,1]))\leq\inf_{w\in\mathbb{N}^n}\operatorname{diam}\phi_w(K)\leq L_1^n.$$

因此，$K\subset f([0,1])$，进而得到 $f([0,1])=K$。这就证明了定理 1.2 的第一部分。

对于定理的第二部分，假设对于某个 $s>$，γ 是 $\frac{1}{s}$-H¨older 的，其中 dim($\mathcal{F}$)=s，且 H¨older 常数为 H_0。对所有 $w\in\mathbb{N}^*$，定义

$$M_w:=3\sum_{u\in\mathbb{N}^*}(L_{wu})^s.$$

按照引理 2.2 的证明思路可得，对于所有 $w\in\mathbb{N}^*$，

$$M_w=3\,(L_w)^s\,(1-\psi_{\mathcal{F}}(s))^{-1}.$$

对于每个 $i\in\mathbb{N}$ 集合 $a_i=M_i>0$，并注意到 $\|(a_i)\|_1=M_\varepsilon\lesssim_{s,\psi_{\mathcal{F}(s)}}1$。我们在构造的每个阶段应用引理的第二部分。

2.3，其中 $a_i = M_i$ 并且我们可以假设 Γ 是$\frac{1}{s}$ -H¨尔德，常数为$H \lesssim_{s,\psi_{\mathcal{F}}(s)} {}_{L_1} H_0$。

构造中的另一处改动是，我们要求：如果 $n \geq 0$、$I \in \mathscr{N}_n$ 和 $J \in \mathscr{J}_{n+1}(I)$，那么

$$|I| = M_\varepsilon^{-1} M_{\mathbf{w}(I)} \quad \text{and} \quad |J| = M_\varepsilon^{-1} \left(L_{\mathbf{w}(I)}\right)^s.$$

为了解释为何这是可能的，固定 $n \geq 0$ 和 $I \in \mathscr{N}_n$。由引理 2.3

$$\begin{aligned} |I| &= M_\varepsilon^{-1} M_{\mathbf{w}(I)} \\ &= 2M_\varepsilon^{-1} \left(L_{\mathbf{w}(I)}\right)^s + M_\varepsilon^{-1} \left(L_{\mathbf{w}(I)}\right)^s + \sum_{i \in \mathbb{N}} M_\varepsilon^{-1} M_{\mathbf{w}(I)i} \\ &= \sum_{J \in \mathscr{J}_{n+1}(I)} |J| + \left| I \setminus \bigcup \mathscr{J}_{n+1}(I) \setminus \bigcup \mathscr{N}_{n+1}(I) \right| + \sum_{J \in \mathscr{N}_{n+1}(I)} |J|. \end{aligned}$$

我们断言，映射 f_n 的极限 f 是 $\frac{1}{s}$ -H¨older 连续的。为此，固定互不相同的 $p,\ q \in [0,1]$，并令 $n \geq 0$ 为满足存在某个 $I \in \mathscr{N}_n$ 使得 $p,\ q \in I$ 的最大整数。记 $J,\ J'$ 为 $\mathscr{J}_{n+1}(I)$ 中的两个元素，记 I' 为 $I \setminus (J \cup J')$ 的闭包，并记 $\mathcal{B}_I$ 为 I 中不包含在 $\mathscr{N}_{n+1}(I) \cup \mathscr{J}_{n+1}(I)$ 的任何区间内的点集的闭包。该断言的证明分情况讨论。

情形*1*。假设 $p,\ q \in J$或 $p,\ q \in J'$。根据（P6）和引理 2.2，

$$\begin{aligned} d(f(p), f(q)) &= d(g \circ \zeta_I(p), g \circ \zeta_I(q)) \\ &\lesssim_{\psi_{\mathcal{F}}(s), L_1, s, H_0} L_{\mathbf{w}(I)} |J|^{-1/s} |p-q|^{1/s} \\ &\lesssim_{\psi_{\mathcal{F}}(s), s, L_1, H_0} |p-q|^{1/s}. \end{aligned}$$

情形*2*。假设 p 和 q 被 I'、J、 J'中的一个的内部隔开。那么 $|p-q| \gtrsim_{s,\ \psi_{\mathcal{F}}(s)} (L_{\mathbf{w}(I)})^s$同时，根据（P5）， $f(I) \subset \phi_{\mathbf{w}(I)}(K)$和

$$d(f(p), f(q)) \leq L_{\mathbf{w}(I)}.$$

情形*3*. 假设 $p, q \in \mathcal{B}_I$。根据 (P6) 和 f_{n+1} 的设计，$f|\mathcal{B}_I = f_{n+1}|\mathcal{B}_I = \phi_{\mathbf{w}(I)} \circ \Gamma \circ \xi_I$。因此，由引理 2.3 可得

$$d(f(p), f(q)) \lesssim_{H_0, s, \psi_{\mathcal{F}}(s)} L_{\mathbf{w}(I)} |I'|^{-1/s} |p-q|^{1/s} \lesssim_{H_0, \psi_{\mathcal{F}}(s), s} |p-q|^{1/s}.$$

情形*4*. 假设 $p \in I_1$ 和 $q \in I_2$，其中 $I_1,\ I_2 \in \mathscr{N}_{n+1}(I)$。由 n的极大性可知，我们有 $I_1 \neq I_2$。令 $a \in I_1$ 和 $b \in I_2$ 使得 $|a-b| =$dist$(I_1,\ I_2)$。那么，数对 $p,\ a$ 满足情形1或情形2，其中 I 替换为 I_1。对于 $q,\ b$，同样如此。此外，$a,\ b \in \mathcal{B}_I$，因此满足情形3。因此，由三角不等式，

$$d(f(p), f(q)) \lesssim_{\psi_{\mathcal{F}}(s), s, H_0, L_1} |p-q|^{1/s}.$$

情形 *5*。假设对于某个 $I_1 \in \mathscr{N}_{n+1}(I)$ 和 $q \in \mathcal{B}_I,\ p \in I_1$。令$a \in I_1$ 满足 $|a-q| =$dist$(I_1,\ q)$。注意，点 $a,\ p$ 满足以下条件之一。

情形1或情形2（将 I 替换为 I_1），而点 a，q 满足情形3。因此，根据三角不等式，

$$d(f(p),f(q)) \lesssim_{\psi_{\mathcal{F}}(s),s,H_0,L_1} |p-q|^{1/s}.$$

情形6。假设 $p \in J \cup J'$（比如 J）和 $q \in I'$。令 $a \in J$ 使得$|a-q| = \operatorname{dist}(J, q)$。注意，点 a，p满足情形1，而点 a，q满足情形3或情形5。因此，由三角不等式，

$$d(f(p),f(q)) \lesssim_{\psi_{\mathcal{F}}(s),s,H_0,L_1} |p-q|^{1/s}. \qquad \square$$

3. Examples of IIFS

本节给出三个无限迭代函数系的例子。在 §3.1 中，我们证明定理 1.2 中的条件 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Lip}(\phi_n) = 0$ 是必要的；在 §3.2 中，我们证明定理 1.1(1)；在 §3.3 中，我们证明定理 1.1(2)。

3.1. 一个 Lipschitz 范数不趋于零的 IIFS。 在这个例子中，我们使用复坐标。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，定义一个压缩映射 $\phi_n : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$，其作用于闭单位圆盘 $\overline{\mathbb{B}^2}$ 上，由

$$\phi_n(z) = e^{\frac{2\pi i}{n}} \tfrac{1}{2}(\mathrm{Re}(z)+1).$$

注意，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{Lip}(\phi_n) = 1/2$，并令 $\mathcal{F} = \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$。

集合 $G = \{te^{\frac{2\pi i}{n}} : n \in \mathbb{N}, t \in [0,1]\}$；本节所用系统的第一代图像见下方图 1。请注意，该图仅显示了该族中有限多个映射的图像，而这些图像实际上累积于实区间 $[0,1]$。

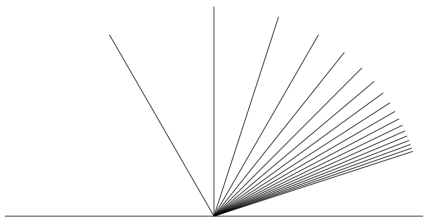


Figure 1. §3.1 中 IIFS 的吸引子

我们声称，G 是 IIFS $\mathcal{F}$ 的吸引子 K。注意，对于所有$n \in \mathbb{N}$，我们有 $\phi_n(\mathbb{B}^2) = \phi_n(G)$。因此，对于所有 $w \in \mathbb{N}^*$，$\phi_w(\mathbb{B}^2) = \phi_w(G)$。此外，很容易看出】【。

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(\overline{\mathbb{B}^2}) = G,$$

由此可得 $K \subset G$。反过来，取 $x \in G$。存在 $n_1 \in \mathbb{N}$，使得 $x \in \phi_{n_1}(\mathbb{B}^2)$。现在假设对于某个 $m \in \mathbb{N}$，我们已定义了一个词 $w \in \mathbb{N}^m$，使得 $x \in \phi_w(\mathbb{B}^2) = \phi_n(G)$。由于 $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(\mathbb{B}^2)$，存在 $n_{m+1} \in \mathbb{N}$，使得 $x \in \phi_{wn_{m+1}}(\mathbb{B}^2)$。它

可知存在一个无限词 $w = n_1 n_2 \cdots \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得 $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \phi_{n_1\cdots n_m}(\mathbb{B}^2)$，由此可得 $G \subset K$。

为完成这个例子，注意到存在一条曲线 $\gamma\colon [0,1] \to K$（即像为原点的常值曲线），其像与每个 $\phi_n(K)$ 都相交；吸引子 K 是一个连续统，但它不是局部连通的。

3.2.**一个吸引子是连续统但非路径连通的无限迭代函数系**。固定 $s > 1$ 并固定 $M \in \mathbb{N}$ 使得 $M >$ 最大值 $\left\{4^{\frac{1}{s-1}},\ 7\right\}$。对每个 $n \in \mathbb{N}$ 令

$$a_n = \frac{1 + M^n(2M+1)^{1-n}}{M+1} \quad \text{and} \quad b_n = M^{-n}(a_n - a_{n+1} - M^{-n}).$$

注意，$a_n \in$（对每个 n，$0,1]$），a_n 严格递减，$a_1 = 1$，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$

$$a_n - a_{n+1} - M^{-n} = \left(\frac{M}{2M+1}\right)^n - M^{-n} > M^{-n}.$$

无限迭代函数系 $\mathcal{F}$ 的构造分为三个子族

$$\mathcal{F} = \{\phi_{n,i}\}_{n,i} \cup \{\tau_{n,i}\}_{n,i} \cup \{\sigma_n\}_n.$$

首先，对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{1,\dots,M^n\}$，定义 $\phi_{n,\,i}\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ 如下

$$\phi_{n,i}((x,y)) = (a_n - M^{-n}, M^{-n}(i-1)) + M^{-n}(x,y).$$

其次，对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{1,\dots,M^n\}$，定义 $\tau_{n,\,i}\colon\ [0,1]^2 \to [0,1]^2$，使得

$$\tau_{n,i}((x,y)) = \big(a_n - M^{-n} - (i-1)b_n, 0\big) + b_n(x,y) \quad \text{if } n \text{ is even}$$
$$\tau_{n,i}((x,y)) = \big(a_n - M^{-n} - (i-1)b_n, 1-b_n\big) + b_n(x,y) \quad \text{if } n \text{ is odd.}$$

第三，对于 $i \in \{1,\dots,M+1\}$，定义 $\sigma_i\colon\ [0,1]^2 \to [0,1]^2$ 通过

$$\sigma_i((x,y)) = \left(0, \tfrac{i-1}{M+1}\right) + \tfrac{1}{M+1}(x,y).$$

有关本节所用系统的第一代图像，请见下方图 2。请注意，该图仅展示了有限个第一代图像，而这些图像实际上会聚集到正方形左边缘的方框上。

根据 M 的定义，我们现在进行计算。

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{F}}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{M^n} \mathrm{Lip}(\phi_{n,i})^s + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{M^n} \mathrm{Lip}(\tau_{n,i})^s + \sum_{n=1}^{M+1} \mathrm{Lip}(\sigma_n)^s \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} M^{(1-s)n} + \sum_{n=1}^{\infty} M^n b_n^s + (M+1)^{1-s} \\
&\le \frac{2}{M^{s-1}-1} + \frac{1}{(M+1)^{s-1}} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

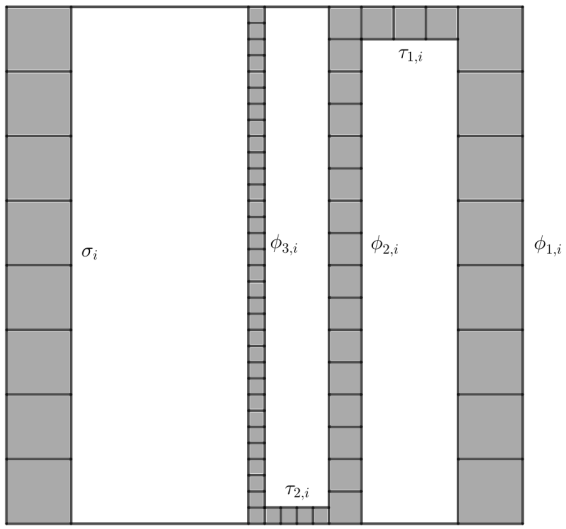


FIGURE 2. 第 3.2 节中无限迭代函数系的第一次迭代。

因此， $\mathcal{F}$ 的相似维数不超过 s。现在我们准备证明定理 1.1 的第一部分。

定理 *1.1(1)* 的证明。 定义 $K_0 = [0,1]^2$，并对每个 $m \in \mathbb{N}$ 定义 $K_m = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(K_{m-1})$。由 (1.2)，$(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是一族嵌套集，且满足 $K = \bigcap_{m\geq 0} K_m$。因此，要证明 K 是一个连续统，只需证明每个 K_m 都是一个连续统。

为证明紧致性，我们采用归纳法。基础情形 $m = 0$ 显然成立。现在假设 K_m 是紧致的。设 (p_k) 是 K_{m+1} 中的一个序列，收敛到某个 $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$。若 $x < \frac{1}{2M-1}$，则对所有充分大的 k，$p_k \in \bigcup_i \overline{\sigma_i(K_m)}$，这是紧致的。若 $x > \frac{1}{2M-1}$，则存在有限集 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$，使得对所有充分大的 k，p_k 包含于 $\bigcup_{f\in\mathcal{F}'} f(K_m)$ 中，而该集合是紧致的。最后，若 $x = \frac{1}{2M-1}$，则 $p \in \bigcup_i \sigma_i(K_m)$。无论哪种情况，均有 $p \in K_{m+1}$。

连通性也通过归纳法证明。$m = 0$ 的情形显然。现在假设对某个 $m \geq 0$，集合 K_m 是连通的。令

$$L = \bigcup_{i=1}^{2M-1} \sigma_i(K_m), \qquad R = K_{m+1} \setminus L = \bigcup_{n,i} \phi_{n,i}(K_m) \cup \bigcup_{n,i} \tau_{n,i}(K_m).$$

注意， L 是连通的，因为对于每个 $i \in \{1, \ldots, 2M-2\}$

$$\sigma_{i+1}((1,0)) \in \sigma_i(K_m) \cap \sigma_{i+1}(K_m)$$

并且根据归纳假设，每个 $\sigma_i(K_m)$ 都是连通的。我们还声称 R 是连通的。这一结论源于集合 $\tau_{n,i}(K_m)$ 和

$\phi_{n,i}(K_m)$ 是连通的，并且根据对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 的事实

$$\phi_{n,i+1}((1,0)) \in \phi_{n,i}(K_m) \cap \phi_{n,i+1}(K_m)$$
$$\tau_{n,i+1}((1,0)) \in \tau_{n,i}(K_m) \cap \tau_{n,i+1}(K_m)$$
$$\tau_{n,M^n}((0,0)) \in \tau_{n,M^n}(K_m) \cap \phi_{n+1,1}(K_m)$$
$$\phi_{n,M^n}((0,0)) \in \tau_{n,1}(K_m) \cap \phi_{n,M^n}(K_m).$$

因此，若我们将 $K_{m+1} = A \cup B$ 划分为互不相交的非空开集 A，B，则必有 $A = L$ 或 $B = L$。然而，R 不是闭集，因为它与 $\{\frac{1}{2M-1}\} \times [0,1]$ 不相交，但其序列闭包包含 $(\frac{1}{2M-1}, 0)$。因此，$\overline{K_{m+1}}$ 是连通的。

为了完成证明，我们证明在 K_1 中不存在一条路径连接 $p = (\frac{1}{2M-1}, 0)$ 和 $q = (1, 0)$。由于这两个点都在 K 中，而 $K \subset K_1$ 后者意味着 K 不是路径连通的。为此，反设 $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to K_1$ 是一个连续映射，且 $f(0) = p$，$f(1) = q$。根据 K_1 的设计，对于任意 $n \in \mathbb{N}$

(1) 对于任意 $t \in [0,1]$，其

$$\tfrac{1}{2M-1} + 2^{-2n} < f_1(t) < \tfrac{1}{2M-1} + 2^{-2n+1} - M^{-2n}$$

我们有 $f_2(t) \leq (2M)^{-2n}$ 且

(2) 对于任意 $t \in [0,1]$ 具有

$$\tfrac{1}{2M-1} + 2^{-2n-1} < f_1(t) < \tfrac{1}{2M-1} + 2^{-2n} - M^{-2n-1}$$

we have that $f_2(t) \geq 1 - (2M)^{-2n-1}$.

由此可知，f_2（从而 f）在 $t = 0$处不连续。 □

3.3. **一个无限迭代函数系，其吸引子是某条曲线的像，但不是某条 H¨older 曲线的像**。取定 $s > 1$ 并取定一个偶整数 $M \geq \max\{10, 7^{\frac{1}{s-1}}\}$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 令

$$a_n = \frac{\log(2)}{M^n \log(n+1)} \quad \text{and} \quad b_n = \frac{4 + 2M(2^{-1} - M^{-1})^n}{M+2}.$$

简单计算可知，对所有 $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} < b_n - 2a_n < b_n$均成立。此外，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 N_n 为满足条件的整数，使得

$$2a_{n+1}^{-1}(b_n - a_n - b_{n+1}) \leq N_n \leq 4a_{n+1}^{-1}(b_n - a_n - b_{n+1}).$$

无限迭代函数系 $\mathcal{F}$ 的构造分为三个子族

$$\mathcal{F} = \{\phi_{n,i}\}_{n,i} \cup \{\tau_{n,i}\}_{n,i} \cup \{\sigma\}.$$

首先，对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{1, \ldots, M^n\}$ 定义$\phi_{n,i}\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ 通过

$$\phi_{n,i}((x,y)) = (b_n - a_n, (i-1)a_n) + a_n(x,y).$$

其次，对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{1, \ldots, N_n\}$，定义 $\tau_{n,\,i}\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ 为

$$\tau_{n,i}((x,y)) = \left(b_{n+1} + (i-1)\tfrac{b_n - a_n - b_{n+1}}{N_n}, 0\right) + \tfrac{b_n - a_n - b_{n+1}}{N_n}(x,y).$$

第三，我们定义 σ： $[0,1]^2 \to [0,1]^2$ 使得

$$\sigma((x,y)) = \tfrac{4}{M+2}(x,y).$$

有关本节所用系统的第一代图像，请见下方图3。注意，该图仅展示了有限个第一代图像，而这些图像实际上会聚集到正方形左下角的方框上。

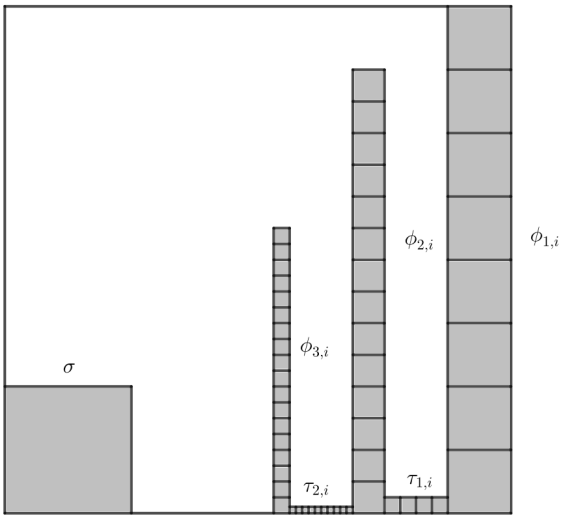


FIGURE 3. §3.3 中无限迭代函数系的第一次迭代。

利用 M 的定义，我们计算得到

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{F}}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{M^n}(\mathrm{Lip}(\phi_{n,i}))^s + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N_n}(\mathrm{Lip}(\tau_{n,i}))^s + (\mathrm{Lip}(\sigma))^s. \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} M^n a_n^s + \sum_{n=1}^{\infty} N_n \left(\frac{b_n - a_n - b_{n+1}}{N_n}\right)^s + \left(\frac{4}{M+2}\right)^s \\
&\le \frac{M^{1-s}}{1-M^{1-s}} + \frac{M^{1-s}}{1-M^{1-s}} + \frac{4^s}{M^s} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

因此， $\mathcal{F}$ 的相似维数至多为 s。

引理 3.1。 *IIFS* $\mathcal{F}$ 的吸引子 K 是一条曲线的像。

证明。 定义 L_b， L_r 分别为单位正方形 $[0,1]^2$的底边和左边。另定义 $K_0 = [0,1]^2$，并对每个 $m \in \mathbb{N}$ 定义$K_m = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(K_{m-1})$。

我们断言，对每个 $f \in \mathcal{F}$, $f(L_b \cup L_r) \subset f(K)$。假设该断言成立，我们注意到集合

$$E = L_b \cup \bigcup_{n,i} \phi_{n,i}(L_r)$$

包含在 K 中，并且按照引理 2.3 的证明进行推导，可知 E 是一条曲线的像。现在，由定理 1.2(1) 可知， K 是一条曲线的像。

为证明该断言，我们证明 $L_b \cup L_r \subset K_m$ 对每个 $m \in \mathbb{N}$都成立。通过一个简单的归纳论证，这立即意味着，对于所有 $f \in \mathcal{F}$， $f(L_b \cup L_r) \subset f(K)$。证明是对 m进行归纳。显然， $L_b \cup L_r \subset K_0$。现在假设，对于某个整数 $m \geq 0$， $L_b \cup L_r \subset K_m$。首先，

$$L_r = \bigcup_{i=1}^{M} \left(\{1\} \times \left[\frac{i-1}{M}, \frac{i}{M} \right] \right) = \bigcup_{i=1}^{M} \phi_{1,i}(L_r) \subset K_{m+1}.$$

其次，

$$\begin{aligned} L_b &= \bigcup_{n=1}^{\infty} ([b_n - a_n, b_n] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ([b_{n+1}, b_n - a_n] \times \{0\}) \cup \left([0, \tfrac{4}{M+2}] \times \{0\} \right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_{n,1}(L_b) \cup \bigcup_{n,i} \tau_{n,i}(L_b) \cup \sigma(L_b) \\ &\subset \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(K_m). \end{aligned}$$

□

定理*1.1(2)* 的证明。我们证明，吸引子 K 的无限迭代函数系 $\mathcal{F}$ 不是某条H¨lder曲线的像。反设存在$\alpha \geq 1$、 $H > 0$和一个满射 $f\colon [0,1] \to K$，使得对于所有 x, $y \in [0,1]$

$$|f(x) - f(y)|^{\alpha} \leq H|x - y|.$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 令

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{M^n} \phi_{n,i}(K).$$

注意，每座“塔” A_n 的高度等于 log(2)/log($n+1$)】【。

回想一下， M 被选为偶数，并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 定义$p_n = \phi_{n,M^n}$((1,1))和$q_n = \phi_{n,\frac{1}{2}M^n}$((1,1))。按照引理 3.1的证明，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，垂直线段 $[q_n, p_n] \subset A_n$。此外，对于任意 $n \in \mathbb{N}$， p_n 是 A_n 中具有最高 y坐标的点，而 q_n 的 y坐标为1 2 log(2)/log($n+1$)。令

$$B_n = \bigcup_{i=\frac{1}{2}M^n+1}^{M^n} \phi_{n,i}(K),$$

我们有 $B_n \cap \overline{K \setminus B_n} = \{q_n\}$。鉴于 B_n 是连通的，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个区间 $I_n \subset [0,1]$，使得

$$\{p_n, q_n\} \subset f(I_n) \subset B_n.$$

由此可得，区间 $I_1, I_2, \ldots$ 两两不相交且

$$1 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{diam} I_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} H^{-1}|p_n - q_n|^{\alpha} = \frac{(\log 2)^{\alpha}}{2^{\alpha} H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(n+1))^{\alpha}}.$$

然而，后一个级数发散，因此我们得出矛盾。 □

References

[AO17] Giovanni Alberti 和 Martino Ottolini。有限长度连续体的结构与 Golab 半连续性定理。 *Nonlinear Anal.*，153：35–55，2017。[BF23] Amlan Banaji 和 Jonathan M. Fraser。无限生成吸引子的中间维数。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，376(4)：2449–2479，2023。[BV21] Matthew Badger 和 Vyron Vellis。迭代函数系的 H¨older 参数化及一种自仿射现象。 *Anal. Geom. Metr. Spaces*，9(1)：90–119，2021。[FF15] ´Abel Farkas 和 Jonathan M. Fraser。豪斯多夫测度与豪斯多夫内容相等的问题。 *J. Fractal Geom.*，2(4)：403–429，2015。[FHOR15] J. M. Fraser、A. M. Henderson、E. J. Olson 和 J. C. Robinson。具有重叠的自相似集的 Assouad 维数。 *Adv. Math.*，273 214，2015 188：–。[Hat85] Masayoshi Hata。自相似集的结构。 *Japan J. Appl. Math.*，2 2 381( )：–414，1985。[HU02] Stefan-M. Heinemann 和 Mariusz Urba ´nski。无限共形迭代函数系的豪斯多夫维数估计。 *Nonlinearity*，15(3)：727–734，2002。[Hut81] John E. Hutchinson。分形与自相似性。 *Indiana Univ. Math. J.*，30 5 713 747，1981 ( )：–。[HY61] John G. Hocking 和 Gail S. Young。 *Topology*。Addison-Wesley Publishing Co., Inc.，Reading, Mass.-London，1961。[JR12] Thomas Jordan 和 Michal Rams。无限迭代函数系的递增数字子系统。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，140(4)：1267–1279，2012。[KZ06] Marc Kesseb¨ohmer 和 Sanguo Zhu。无限迭代函数系的维数集：德克萨斯猜想。 *J. Number Theory*，116(1)：230–246，2006。[Mau95] R. Daniel Mauldin。无限迭代函数系：理论与应用。载于 *Fractal geometry and stochastics (Finsterbergen, 1994)* 37 *Progr.*，第 *Probab.* 91 110 ¨ 1995 *Fractal geometry and stochastics (Finsterbergen, 1994)* 37 *Progr.* 卷，页码 –。 *Probab.* 91 110 ¨ 1995 Birkhauser，Basel，。[MMU01] R. Daniel Mauldin、Volker Mayer 和 Mariusz Urba ´nski。共形迭代函数系连通极限集的刚性。 *Michigan Math. J.*，49(3)：451–458，2001。[MSU09] R. D. Mauldin、T. Szarek 和 M. Urba ´nski。Hilbert 空间上的图导向马尔可夫系统。 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*，147(2)：455–488，2009。[MU96] R. Daniel Mauldin 和 Mariusz Urba ´nski。无限迭代函数系中的维数与测度。 *Proc. London Math. Soc. (3)*，73(1)：105–154，1996。[MU99] R. Daniel Mauldin 和 Mariusz Urba ´nski。共形迭代函数系及其在连分数几何中的应用。 *Trans. Amer. Math.*，( )：–。[MU *Soc.* 351 12 4995 5025, 1999 02] R. Daniel Mauldin 和 Mariusz Urba ´nski。抛物型迭代函数系的分形测度。*Adv. Math.*，168(2)：225–253，2002。[Rem98] Marko Remes。自相似集的 H ¨ *Ann. Acad. Sci.* older 参数化。， *Fenn. Math. Diss.* 112 ( )：68，1998。

[RGU16] Lasse Rempe-Gillen 和 Mariusz Urba ´nski。非自治共形迭代函数系与 Moran 集构造。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，368 3 1979 2017，2016 ( )：–。[Sch94] Andreas Schief。自相似集的分离性质。 *Proc. Amer. Math.* , ( )：–。[*Soc.* 122 1 111 115, 1994
Sch96] Andreas Schief。完备度量空间中的自相似集。 *Proc. Amer. Math.* , ( )：–。[SW15] S. *Soc.* 124 2 481 490, 1996
Seuret 和 B.-W. Wang。共形迭代函数系中的定量回归性质。 *Adv. Math.*，280：472–505，2015。[UZ02] Mariusz Urba ´nski 和 Anna Zdunik。自共形集的调和测度的豪斯多夫维数。 *Adv. Math.*，171(1)：1–58，2002。

Department of Mathematics, The University of Tennessee, Knoxville, TN37966*Email address*: mshaw20@vols.utk.edu

Department of Mathematics, The University of Tennessee, Knoxville, TN37966*Email address*: vvellis@utk.edu