arXiv:2304.06108v1 [math.SP] 12 Apr 2023

关于具有两点边界条件的狄拉克算子根函数系的完备性

Alexander Makin

摘要。 本文研究具有可积复值势和非正规边界条件的狄拉克算子根函数的完备性。我们还得到了所研究算子的基本解系的显式形式。

1. 引言

本文研究狄拉克系统

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

其中 $\mathbf{y} = \mathrm{col}(y_1(x)\ y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

函数 $P, Q \in L_1(0,\pi)$，满足两点边界条件

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{y}) &= a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(\pi) + a_{14}y_2(\pi) = 0, \\ U_2(\mathbf{y}) &= a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(\pi) + a_{24}y_2(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

其中系数 a_{jk} 是任意复数，且矩阵的各行

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

线性无关。

将算子 $\mathbb{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ 视为空间 $\mathbb{H} = L_2(0,\pi) \oplus L_2(0,\pi)$ 中的线性算子，其定义域为 $D(\mathbb{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] \oplus W_1^1[0,\pi] : \ \mathbb{L}\mathbf{y} \in \mathbb{H}, U_j(\mathbf{y}) = 0 (j = 1, 2)\}$。

用 A_{jk} $(1 \le j < k \le 4)$ 表示由矩阵 A 的第 j 列和第 k 列组成的行列式。已知边界条件 (2) 可分为三类：

1）正则条件；2）非正则条件；3）退化条件。

数学主题分类（2020）。主要分类：34L40；次要分类：34L10。关键词：狄拉克算子，非正则和退化边界条件，根函数系的完备性

若边界条件（2）是正则的，则称其为正则边界条件。

$$A_{14}A_{23} \neq 0.$$

边界条件 (2) 称为非正则，如果

$$A_{14}A_{23} = 0, \quad (A_{12} + A_{34})(|A_{23}| + |A_{14}|) \neq 0$$

如果它们被称为退化，则

$$A_{14}A_{23} = 0, \quad (A_{12} + A_{34})(|A_{23}| + |A_{14}|) = 0.$$

由 [1] 可知，具有正则边界条件的问题(1)、(2)的根函数系在 $\mathbb{H}$中是完备的。如果条件 (2)不正则，完备性性质本质上取决于势V，特别是在这种情况下，未扰动算子的根函数系

$$B\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}, \quad U(\mathbf{y}) = 0 \tag{3}$$

在 $\mathbb{H}$ [1]中并不完备。在 [2-5], ，A.V. Agibalova、A.A. Lunyov、M.M.Malamud和L.L. Oridoroga获得了关于狄拉克算子(1)、(2)以及更一般的一阶系统的根向量完备性（不完备性）的大量结果。在所有上述论文中，作者都对所研究算子的系数的光滑性提出了某些条件。例如，对于问题(1)、(2)，函数 P、Q 至少必须在基本区间的端点处连续。最近，在 [6] ，A.P.Kosarev和 A.A.Shkalikov 建立了问题(1)、(2)类型的根函数系的完备性，条件是系数绝对连续，并且在基本区间的端点处满足一些附加条件。

本文旨在考察问题 (1)、(2) 的根函数系的完备性，条件是边界条件非正则且势为 $V \in L_1(0,\pi)$。

2. 预备知识

记为

$$E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e_{11}(x,\lambda) & e_{12}(x,\lambda) \\ e_{21}(x,\lambda) & e_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix} \tag{4}$$

边界条件为 $E(0,\lambda) = I$ 的方程 (1) 的基本解系矩阵，其中 I 是单位矩阵。众所周知 [7], [8] ，

$$\begin{gathered} e_{11}(x,\lambda) = e^{ix\lambda}(1+o(1)) + e^{-i\pi\lambda}o(1), \quad e_{12}(x,\lambda) = e^{ix\lambda}o(1) + e^{-ix\lambda}o(1), \\ e_{21}(x,\lambda) = e^{ix\lambda}o(1) + e^{-ix\lambda}o(1), \quad e_{22}(x,\lambda) = e^{ix\lambda}o(1) + e^{-ix\lambda}(1+o(1)) \end{gathered} \tag{5}$$

当 $\lambda \to \infty$ 在 $x \in [0,\pi]$ 中一致时。

问题 (1)、(2) 的特征值是特征方程的根。

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

其中

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(E^{[1]}(\cdot,\lambda)) & U_1(E^{[2]}(\cdot,\lambda)) \\ U_2(E^{[1]}(\cdot,\lambda)) & U_2(E^{[2]}(\cdot,\lambda)) \end{vmatrix},$$

$E^{[k]}(x,\lambda)$ 是矩阵 (4) 的第 k 列。

文献 [7] 通过变换算子方法证明，问题 (1)、(2) 的特征行列式 $\Delta(\lambda)$ 可化为以下形式

$$\begin{gathered} \Delta(\lambda) = A_{12} + A_{34} + A_{32}e_{11}(\pi,\lambda) + A_{14}e_{22}(\pi,\lambda) + A_{13}e_{12}(\pi,\lambda) + A_{42}e_{21}(\pi,\lambda) = \\ = \Delta_0(\lambda) + \int_0^\pi r_1(t)e^{-i\lambda t}dt + \int_0^\pi r_2(t)e^{i\lambda t}dt, \end{gathered} \tag{6}$$

其中函数

$$\Delta_0(\lambda) = A_{12} + A_{34} - A_{23}e^{i\pi\lambda} + A_{14}e^{-i\pi\lambda}$$

i是问题 (3) 的特征行列式，函数 $r_j \in L_1(0,\pi)$、 $j=1,$ 2.

容易看出，在退化边界条件的情况下，特征方程 $\Delta_0(\lambda) = 0$要么无根，要么 $\Delta_0(\lambda) \equiv 0$。

为方便起见，我们列出几个常用关系。设 λ 为复数， $Im\lambda \neq 0$。由 [9, 第 446] 页可得

$$\begin{gathered}\int_0^\infty x^\rho e^{2i\lambda x}dx = \\ \int_0^\infty x^\rho e^{-2Im\lambda x}(\cos(2Re\lambda x) + i\sin(2Re\lambda x))dx = \\ = \frac{\Gamma(\rho+1)}{2^{\rho+1}(Re^2\lambda+Im^2\lambda)^{(\rho+1)/2}} e^{i(\rho+1)\operatorname{arctg}(\frac{Re\lambda}{Im\lambda})}\end{gathered} \tag{7}$$

若 $Im\lambda > 0$ 且

$$\begin{gathered}\int_0^\infty x^\rho e^{-2i\lambda x}dx = \\ \int_0^\infty x^\rho e^{2Im\lambda x}(\cos(2Re\lambda x) + i\sin(2Re\lambda x))dx = \\ = \frac{\Gamma(\rho+1)}{2^{\rho+1}(Re^2\lambda+Im^2\lambda)^{(\rho+1)/2}} e^{i(\rho+1)\operatorname{arctg}(\frac{Re\lambda}{-Im\lambda})}\end{gathered} \tag{8}$$

若 $Im\lambda < 0$, 其中两种情况下均有 $\rho > -1$。

设 $\tau(x)$ 是区间 $[0,\pi]$ 上的连续函数。由 (7)、(8) 可得，对任意 $b \in [0,\pi]$

$$|\int_0^b x^\rho e^{-2|Im\lambda|x}\tau(x)dx| \leq \frac{c}{|Im\lambda|^{\rho+1}}, \tag{9}$$

其中 c 不依赖于 b。

容易看出，对于任意 $b > 0$

$$\begin{gathered}|\int_b^\infty x^\rho e^{-2|Im\lambda|x}e^{2iRe\lambda x}dx| \leq \int_b^\infty x^\rho e^{-2|Im\lambda|x}dx = \\ = \frac{1}{|Im\lambda|^{\rho+1}}\int_{b|Im\lambda|}^\infty t^\rho e^{-2t}dt = \frac{o(1)}{|Im\lambda|^{\rho+1}}\end{gathered} \tag{10}$$

当 $|Im\mu| \to \infty$ 时。

设 $\tau(x)$ 是区间 $[0,\pi]$ 上的连续函数，且 $\tau(0) = 0$。那么，我们有

$$\begin{gathered}|\int_0^\pi x^\rho e^{-2|Im\lambda|x}\tau(x)dx| \leq \int_0^\pi x^\rho e^{-2|Im\lambda|x}|\tau(x)|dx = \\ = \int_0^{\pi/\sqrt{|Im\lambda|}} x^\rho e^{-2|Im\lambda|x}|\tau(x)|dx + \int_{\pi/\sqrt{|Im\lambda|}}^\pi x^\rho e^{-2|Im\lambda|x}|\tau(x)|dx \leq \\ \leq \max_{0\leq x\leq\pi/\sqrt{|Im\lambda|}}|\tau(x)|\int_0^\infty x^\rho e^{-2|Im\lambda|x}dx + \\ + e^{-\pi\sqrt{|Im\lambda|}}\int_0^\pi x^\rho|\tau(x)|dx = \frac{o(1)}{|Im\lambda|^{\rho+1}}\end{gathered} \tag{11}$$

当 $|Im\mu| \to \infty$ 时。

设函数 $\tau(x) \in L_1(0,\pi)$。于是，我们得到

$$\begin{gathered}|\int_0^\pi x^\rho e^{-2|Im\lambda|x}\tau(x)dx| \leq \int_0^\pi x^\rho e^{-2|Im\lambda|x}|\tau(x)|dx = \\ = \int_0^{\pi/\sqrt{|Im\lambda|}} x^\rho e^{-2|Im\lambda|x}|\tau(x)|dx + \int_{\pi/\sqrt{|Im\lambda|}}^\pi x^\rho e^{-2|Im\lambda|x}|\tau(x)|dx \leq \\ \leq \max_{0\leq x\leq\pi/\sqrt{|Im\lambda|}}(x^\rho e^{-2|Im\lambda|x})\int_0^{\pi/\sqrt{|Im\lambda|}}|\tau(x)|dx + e^{-\pi\sqrt{|Im\lambda|}}\int_0^\pi x^\rho|\tau(x)|dx \leq \\ \leq \frac{c_1}{|Im\lambda|^\rho}\int_0^{\pi/\sqrt{|Im\lambda|}}|\tau(x)|dx + e^{-\pi\sqrt{|Im\lambda|}}\int_0^\pi x^\rho|\tau(x)|dx = \frac{o(1)}{|Im\lambda|^\rho}\end{gathered} \tag{12}$$

当 $|Im\mu| \to \infty$ 时。

简单计算表明，如果 $\rho > 0$、 $\lambda > 0$、 $\rho \leq \pi\lambda$，那么

$$\max_{0\leq x\leq\pi} x^\rho e^{-\lambda x} = \frac{\rho^\rho}{\lambda^\rho}e^{-\rho}. \tag{13}$$

3. 主要结果。

首先，我们得到矩阵 (4) 各元素的显式形式。为此，将系统 (1) 改写为标量形式

$$\begin{cases} -iy_1' + P(x)y_2 = \lambda y_1 \\ iy_2' + Q(x)y_1 = \lambda y_2. \end{cases} \tag{14}$$

将(14)的第一个方程乘以 $e^{-i\lambda x}$ ，将(14)的第二个方程乘以 $e^{i\lambda x}$ ，并在区间 $[0,t]$上对所得方程进行积分，我们得到与(1)等价的以下积分方程组

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{i\lambda t}y_1(0) - ie^{i\lambda t}\int_0^t e^{-i\lambda x}P(x)y_2(x)dx \\ y_2(t) = e^{-i\lambda t}y_2(0) + ie^{-i\lambda t}\int_0^t e^{i\lambda x}Q(x)y_1(x)dx. \end{cases} \tag{15}$$

由 (15) 可得,

$$\begin{cases} e_{11}(t,\lambda) = e^{i\lambda t} - ie^{i\lambda t}\int_0^t e^{-i\lambda t_1}P(t_1)e_{21}(t_1,\lambda)dt_1 \\ e_{21}(t,\lambda) = ie^{-i\lambda t}\int_0^t e^{i\lambda t_1}Q(t_1)e_{11}(t_1,\lambda)dt_1, \end{cases} \tag{16}$$

因此,

$$e_{11}(t,\lambda) = e^{i\lambda t} + e^{i\lambda t}\int_0^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1\int_0^{t_1} e^{i\lambda t_2}Q(t_2)e_{11}(t_2,\lambda)dt_2 \tag{17}$$

and

$$\begin{gathered} e_{21}(t,\lambda) = ie^{-i\lambda t}\int_0^t e^{i\lambda t_1}Q(t_1)dt_1(e^{i\lambda t_1} - ie^{i\lambda t_1}\int_0^{t_1} e^{-i\lambda t_2}P(t_2)e_{21}(t_2,\lambda)dt_2) = \\ = ie^{-i\lambda t}\int_0^t e^{2i\lambda t_1}Q(t_1)dt_1 + e^{-i\lambda t}\int_0^t e^{2i\lambda t_1}Q(t_1)dt_1\int_0^{t_1} e^{-i\lambda t_2}P(t_2)e_{21}(t_2,\lambda)dt_2. \end{gathered} \tag{18}$$

同理，我们得到

$$\begin{cases} e_{12}(t,\lambda) = -ie^{i\lambda t}\int_0^t e^{-i\lambda t_1}P(t_1)e_{22}(t_1,\lambda)dt_1 \\ e_{22}(t,\lambda) = e^{-i\lambda t} + ie^{-i\lambda t}\int_0^t e^{i\lambda t_1}Q(t_1)e_{12}(t_1,\lambda)dt_1, \end{cases} \tag{19}$$

因此,

$$e_{22}(t,\lambda) = e^{-i\lambda t} + e^{-i\lambda t}\int_0^t e^{2i\lambda t_1}Q(t_1)dt_1\int_0^{t_1} e^{-i\lambda t_2}P(t_2)e_{22}(t_2,\lambda)dt_2 \tag{20}$$

and

$$\begin{gathered} e_{12}(t,\lambda) = -ie^{i\lambda t}\int_0^t e^{-i\lambda t_1}P(t_1)dt_1(e^{-i\lambda t_1} + ie^{-i\lambda t_1}\int_0^{t_1} e^{i\lambda t_2}Q(t_2)e_{12}(t_2,\lambda)dt_2) = \\ = -ie^{i\lambda t}\int_0^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1 + e^{i\lambda t}\int_0^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1\int_0^{t_1} e^{i\lambda t_2}Q(t_2)e_{12}(t_2,\lambda)dt_2. \end{gathered} \tag{21}$$

记

$$p_0(t,\lambda) = \int_0^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1, \tag{22}$$

$$p_1(t,\lambda) = \int_0^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1\int_0^{t_1} e^{2i\lambda t_2}Q(t_2)dt_2\int_0^{t_2} e^{-2i\lambda t_3}P(t_3)dt_3, \tag{23}$$

$$p_n(t,\lambda) = \int_0^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1\int_0^{t_1} e^{2i\lambda t_2}Q(t_2)dt_2\ldots\int_0^{t_{2n}} e^{-2i\lambda t_{2n+1}}P(t_{2n+1})dt_{2n+1} \tag{24}$$

并类似地，记

$$q_0(t,\lambda) = \int_0^t e^{2i\lambda t_1}Q(t_1)dt_1, \tag{25}$$

$$q_1(t,\lambda) = \int_0^t e^{2i\lambda t_1}Q(t_1)dt_1\int_0^{t_1} e^{-2i\lambda t_2}P(t_2)dt_2\int_0^{t_2} e^{2i\lambda t_3}Q(t_3)dt_3, \tag{26}$$

$$q_n(t,\lambda) = \int_0^t e^{2i\lambda t_1}Q(t_1)dt_1\int_0^{t_1} e^{-2i\lambda t_2}P(t_2)dt_2\ldots\int_0^{t_{2n}} e^{2i\lambda t_{2n+1}}Q(t_{2n+1})dt_{2n+1}. \tag{27}$$

也记 $\tilde{p}_n(t,\lambda) = -ie^{i\lambda t}p_n(t,\lambda)$, $\tilde{q}_n(t,\lambda) = ie^{-i\lambda t}q_n(t,\lambda)$。记作

$$g_0(t,\lambda) = 1, \tag{28}$$

$$g_1(t,\lambda) = \int_0^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} e^{2i\lambda t_2}Q(t_2)dt_2, \tag{29}$$

$$\begin{gathered} g_n(t,\lambda) = \int_0^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} e^{2i\lambda t_2}Q(t_2)dt_2 \dots \\ \dots \int_0^{t_{2n-2}} e^{-2i\lambda t_{2n-1}}P(t_{2n-1})dt_{2n-1} \int_0^{t_{2n-1}} e^{2i\lambda t_{2n}}Q(t_{2n})dt_{2n} \end{gathered} \tag{30}$$

并类似地，记作

$$h_0(t,\lambda) = 1, \tag{31}$$

$$h_1(t,\lambda) = \int_0^t e^{2i\lambda t_1}Q(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} e^{-2i\lambda t_2}P(t_2)dt_2, \tag{32}$$

$$\begin{gathered} h_n(t,\lambda) = \int_0^t e^{2i\lambda t_1}Q(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} e^{-2i\lambda t_2}P(t_2)dt_2 \dots \\ \dots \int_0^{t_{2n-2}} e^{2i\lambda t_{2n-1}}Q(t_{2n-1})dt_{2n-1} \int_0^{t_{2n-1}} e^{-2i\lambda t_{2n}}P(t_2)dt_{2n}. \end{gathered} \tag{33}$$

另记 $\tilde{g}_n(t,\lambda) = e^{i\lambda t}g_n(t,\lambda)$, $\tilde{h}_n(t,\lambda) = e^{-i\lambda t}h_n(t,\lambda)$】【。

引理1。 设函数 $f \in L_1(a,x_0)$。那么，对于任意 $n = 1,2,\dots$

$$I_n = \int_a^{x_0} f(x_1)dx_1 \int_a^{x_1} f(x_2)dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{(\int_a^{x_0} f(x)dx)^n}{n!}. \tag{34}$$

证明通过对 n 进行归纳来完成。对于 $n = 1$，无需证明。假设等式（34）对数值 n 成立。那么

$$I_{n+1} = \int_a^{x_0} f(x_1)dx_1 \int_a^{x_1} f(x_2)dx_2 \dots \int_a^{x_n} f(x_{n+1})dx_n = \int_a^{x_0} f(x_1)dx_1 \left(\frac{(\int_a^{x_1} f(x)dx)^n}{n!} \right).$$

分部积分后，我们得到

$$\begin{gathered} I_{n+1} = \frac{(\int_a^{x_0} f(x)dx)^{n+1}}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\int_a^{x_0} f(x_1)dx_1 \left(\int_a^{x_1} f(x)dx\right)^n = \\ = \frac{(\int_a^{x_0} f(x)dx)^{n+1}}{n!} - nI_{n+1}, \end{gathered}$$

因此,

$$(n+1)I_{n+1} = \frac{(\int_a^{x_0} f(x)dx)^{n+1}}{n!},$$

因此,

$$I_{n+1} = \frac{(\int_a^{x_0} f(x)dx)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

注1。 类似的论证在许多论文中都可以找到，例如在 [10, 11] 中。**引理2**。以下表示式成立

$$e_{12}(t,\lambda) = -ie^{i\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t,\lambda), \tag{35}$$

$$e_{21}(t,\lambda) = ie^{-i\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty} q_n(t,\lambda), \tag{36}$$

$$e_{11}(t,\lambda) = e^{i\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t,\lambda), \tag{37}$$

$$e_{22}(t,\lambda)=e^{-i\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}h_n(t,\lambda), \tag{38}$$

其中，*(35-38)* 右端的级数对于任意 λ 在区间$[0,\pi]$上一致且绝对收敛。

证明。固定任意复数 λ。记 $\Phi(t)=|e^{-2i\lambda t}P(t)|+|e^{2i\lambda t}Q(t)|$, $M=\int_0^{\pi}\Phi(t)dt$。于是，根据引理 1

$$|p_n(t,\lambda)|\le\int_0^t|e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)|dt_1\int_0^{t_1}|e^{2i\lambda t_2}Q(t_2)dt_2|\dots\int_0^{t_{2n}}|e^{-2i\lambda t_{2n+1}}P(t_{2n+1})|dt_{2n+1}\le$$
$$\le\int_0^t\Phi(t_1)dt_1\int_0^{t_1}\Phi(t_2)dt_2\dots\int_0^{t_{2n}}\Phi(t_{2n+1})|dt_{2n+1}=\frac{(\int_0^t\Phi(y)dy)^{2n+1}}{(2n+1)!}\le\frac{M^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

容易看出，对于 $n=0$，1，...

$$e^{i\lambda t}\int_0^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1\int_0^{t_1}e^{i\lambda t_2}Q(t_2)\tilde{p}_n(t_2,\lambda)dt_2=\tilde{p}_{n+1}(t,\lambda), \tag{39}$$

因此，将（35）右端的级数代入（21），可得恒等式成立。同理，可以证明等式（36-38）。
引理2得证。由（39）可知

$$\int_0^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1\int_0^{t_1}e^{2i\lambda t_2}Q(t_2)p_n(t_2,\lambda)dt_2=p_{n+1}(t,\lambda). \tag{40}$$

改变（40）中的积分次序，可得

$$p_{n+1}(t,\lambda)=\int_0^t e^{i\lambda t_2}Q(t_2)p_n(t_2,\lambda)dt_2\int_{t_2}^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1. \tag{41}$$

为了估计函数 $e_{jk}(\pi,\lambda)$ $(1\le j,k\le 2)$，我们需要以下
引理 3. 设函数 $f\in L_1(0,\pi)$，$0\le a<b\le\pi$。则对 a,b 一致成立

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}e^{-|Im\lambda|b}\int_a^b e^{i\lambda x}f(x)dx=0,\quad \lim_{|\lambda|\to\infty}e^{|Im\lambda|a}\int_a^b e^{-i\lambda x}f(x)dx=0$$

如果 $Im\lambda<0$; 并且

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}e^{Im\lambda a}\int_a^b e^{i\lambda x}f(x)dx=0,\quad \lim_{|\lambda|\to\infty}e^{-Im\lambda b}\int_a^b e^{-i\lambda x}f(x)dx=0$$

如果 $Im\lambda\ge 0$。

引理 3是众所周知的黎曼引理 [1, 引理1.3。1] 的一个无关紧要的推广。设 $0<\varepsilon<\pi/10$。记Ω_ε^+为 $\varepsilon\le\arg\lambda\le\pi-\varepsilon$ 的域，并记 Ω_ε^-为 $-\pi+\varepsilon\le\arg\lambda\le-\varepsilon$ 的域。另记 $\tilde{R}_{12}(t,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{p}_n(t,\lambda)$, $\tilde{R}_{21}(t,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{q}_n(t,\lambda)$。

引理4。假设

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_{\pi-h}^{\pi}P(x)dx}{h^{\rho}}=\nu\ne 0, \tag{42}$$

其中 $\rho>0$。那么，在区域 Ω_ε^+ 内一致地

$$\tilde{p}_0(\pi,\lambda)=\frac{-\nu\lambda e^{-i\pi\lambda}\Gamma(\rho+1)}{2^{\rho}(Re^2\lambda+Im^2\lambda)^{(\rho+1)/2}}e^{i(\rho+1)\operatorname{arctg}(\frac{Re\lambda}{Im\lambda})}+\frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho}}, \tag{43}$$

$$\tilde{R}_{12}(\pi,\lambda)=\frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho}}, \tag{44}$$

and

$$e_{11}(\pi,\lambda)=\frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho}} \tag{45}$$

当 $|Im\mu|\to\infty$ 时。

证明。记$\hat{}P(x)=P(\pi-x)$。由（42）可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h\hat{P}(x)dx}{h^{\rho}}=\nu,$$

因此,

$$\int_0^h\hat{P}(x)dx=\nu h^{\rho}+h^{\rho}\tau(h),$$

其中 $\tau(h)\to 0$ 为 $h\to 0$。分部积分得

$$\begin{gathered}\int_0^{\pi}e^{-2i\lambda t}P(t)dt=e^{-2i\pi\lambda}\int_0^{\pi}e^{2i\lambda s}\hat{P}(s)ds=\\=\int_0^{\pi}\hat{P}(y)dy-2i\lambda e^{-2i\pi\lambda}\int_0^{\pi}e^{2i\lambda s}(\nu s^{\rho}+s^{\rho}\tau(s))ds=\\=\int_0^{\pi}\hat{P}(y)dy-2i\nu\lambda e^{-2i\lambda\pi}\int_0^{\infty}x^{\rho}e^{2i\lambda x}dx+2i\nu\lambda e^{-2i\lambda\pi}\int_{\pi}^{\infty}x^{\rho}e^{2i\lambda x}dx-\\-2i\lambda e^{-2i\lambda\pi}\int_0^{\infty}x^{\rho}e^{2i\lambda x}\tau(x)dx.\end{gathered}$$

这与 (10)、(11) 一起意味着

$$\int_0^{\pi}e^{-2i\lambda t}P(t)dt=-2i\nu\lambda e^{-2i\lambda\pi}\int_0^{\infty}t^{\rho}e^{-2i\lambda t}dt+\frac{e^{2\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho}}.$$

将最后一个关系式乘以 $-ie^{i\lambda\pi}$ 并利用(7)，我们得到(43)。L

et us est i伙伴 t he functi关于 $p_n(\pi,\lambda)$. D注释

$$\begin{gathered}F_n(t_2,\lambda)=e^{2i\lambda t_2}Q(t_2)\int_0^{t_2}e^{-2i\lambda t_3}P(t_3)dt_3\dots\\\dots\int_0^{t_{2n-1}}e^{2i\lambda t_{2n}}Q(t_{2n})dt_{2n}\int_0^{t_{2n}}e^{-2i\lambda t_{2n+1}}P(t_{2n+1})dt_{2n+1}.\end{gathered} \tag{46}$$

将 $t_1=\pi-x$ 代入(24)并进行分部积分，我们得到

$$\begin{gathered}p_n(\pi,\lambda)=e^{-2i\lambda\pi}\int_0^{\pi}e^{2i\lambda x}\hat{P}(x)dx\int_0^{\pi-x}F_n(t_2,\lambda)dt_2=\\=e^{-2i\lambda\pi}\int_0^{\pi}(e^{2i\lambda x}\int_0^{\pi-x}F_n(t_2)dt_2)d\int_0^x\hat{P}(y)dy=\\=e^{-2i\lambda\pi}[(e^{2i\lambda x}\int_0^{\pi-x}F_n(t_2)dt_2)\int_0^x\hat{P}(y)dy\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(\int_0^x\hat{P}(y)dy)(e^{2i\lambda x}\int_0^{\pi-x}F_n(t_2,\lambda)dt_2)'dx]=\\=e^{-2i\lambda\pi}[-2i\lambda\int_0^{\pi}(\nu x^{\rho}+x^{\rho}\tau(x))e^{2i\lambda x}(\int_0^{\pi-x}F_n(t_2,\lambda)dt_2)dx+\\+\int_0^{\pi}(\nu x^{\rho}+x^{\rho}\tau(x))e^{2i\lambda x}F_n(\pi-x,\lambda)dx].\end{gathered} \tag{47}$$

我们来估计 (47) 右端方括号中的第一项。由引理 3 可得

$$\begin{gathered}|\int_0^{t_{2n-1}}e^{2i\lambda t_{2n}}Q(t_{2n})dt_{2n}\int_0^{t_{2n}}e^{-2i\lambda t_{2n+1}}P(t_{2n+1})dt_{2n+1}|\le\\\le\int_0^{t_{2n-1}}|Q(t_{2n}|)dt_{2n}\max_{0\le t_{2n}\le t_{2n-1}}|e^{2i\lambda t_{2n}}\int_0^{t_{2n}}e^{-2i\lambda t_{2n+1}}P(t_{2n+1})dt_{2n+1}|\le\\\le\epsilon(\lambda)\int_0^{t_{2n-1}}|Q(t_{2n}|)dt_{2n},\end{gathered} \tag{48}$$

其中，$\epsilon(\lambda)\to 0$ 作为 $\lambda\to\infty$。由于对于任意 j 都有 $t_j\ge t_{j+1}$，由 (46)、(48) 和引理 1 可得

$$\begin{gathered}|\int_0^{\pi-x}F_n(t_2,\lambda)dt_2|\le\epsilon(\lambda)\int_0^{\pi-x}|Q(t_2)|\int_0^{t_2}|P(t_3)|dt_3\dots\\\dots|e^{2i\lambda(t_2-t_3+\dots+t_{2n-2}-t_{2n-1})}|\int_0^{t_{2n-1}}|Q(t_{2n})|dt_{2n}\le\frac{M_1^{2n-1}}{(2n-1)!}\epsilon(\lambda).\end{gathered} \tag{49}$$

结合最后一个不等式与 (9)，可得

$$|2i\lambda\int_0^{\pi}(\nu x^{\rho}+x^{\rho}\tau(x))e^{2i\lambda x}(\int_0^{\pi-x}F_n(t_2)dt_2)dx|\le\frac{c_1M_1^{2n-1}\epsilon(\lambda)}{(2n-1)!|Im\lambda|^{\rho}}. \tag{50}$$

下面估计 (47) 右端方括号中的第二项。显然 y,

$$\int_0^\pi (\nu x^\rho + x^\rho \tau(x)) e^{2i\lambda x} F_n(\pi - x) dx = \int_0^\pi (\nu x^\rho + x^\rho \tau(x)) e^{2i\lambda x} Q(\pi - x) \phi_n(x, \lambda) dx,$$

其中

$$\phi_n(x,\lambda) = e^{2i\lambda(\pi-x)} \int_0^{\pi-x} e^{-2i\lambda t_3} P(t_3) dt_3 \dots$$
$$\dots \int_0^{t_{2n-1}} e^{2i\lambda t_{2n}} Q(t_{2n}) dt_{2n} \int_0^{t_{2n}} e^{-2i\lambda t_{2n+1}} P(t_{2n+1}) dt_{2n+1}.$$

由引理 1 可知

$$|\phi_n(x,\lambda)| \le \int_0^{\pi-x} |P(t_3)| dt_3 \dots$$
$$\dots \int_0^{t_{2n-1}} |Q(t_{2n})| dt_{2n} \int_0^{t_{2n}} |e^{2i(\pi - x - t_3 + \dots + t_{2n} - t_{2n+1})\lambda}| |P(t_{2n+1})| dt_{2n+1} \le \frac{M^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

由此及式 (12) 可得

$$\int_0^\pi (\nu x^\rho + x^\rho \tau(x)) e^{2i\lambda x} F_n(\pi - x) dx = \frac{M^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{o(1)}{|Im\lambda|^\rho}. \tag{51}$$

由式 (47)、(50)、(51) 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |p_n(\pi,\lambda)| = \frac{e^{2\pi|Im\lambda|} o(1)}{|Im\lambda|^\rho}, \tag{52}$$

因此，不等式 (44) 成立。

下面证明关系式 (45)。记

$$G_1(t_2,\lambda) = e^{2i\lambda t_2} Q(t_2),$$

$$G_n(t_2,\lambda) = e^{2i\lambda t_2} Q(t_2) \int_0^{t_2} e^{-2i\lambda t_3} P(t_3) dt_3 \dots \dots \int_0^{t_{2n-2}} e^{-2i\lambda t_{2n-1}} P(t_{2n-1}) dt_{2n-1} \int_0^{t_{2n-1}} e^{2i\lambda t_{2n}} Q(t_{2n}) dt_{2n}$$

($n > 1$). 如上推理，我们得到

$$\begin{gathered} g_n(\pi,\lambda) = \int_0^\pi e^{-2i\lambda t_1} P(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} G_n(t_2) dt_2 = \\ = e^{-2i\lambda\pi} [-2i\lambda \int_0^\pi (\nu x^\rho + x^\rho \tau(x)) e^{2i\lambda x} (\int_0^{\pi-x} G_n(t_2,\lambda) dt_2) dx + \\ + \int_0^\pi (\nu x^\rho + x^\rho \tau(x)) e^{2i\lambda x} G_n(\pi - x, \lambda) dx]. \end{gathered} \tag{53}$$

我们来估计 (53) 右端方括号中的第一项。由引理 3 可得,

$$|\int_0^{t_{2n-1}} e^{2i\lambda t_{2n}} Q(t_{2n}) dt_{2n}| = \epsilon(\lambda), \tag{54}$$

其中当 $\lambda \to \infty$ 时， $\epsilon(\lambda) \to 0$ 。由于对于任意 j， $t_j \ge t_{j+1}$ ，由 (54) 和引理 1 可得,

$$\begin{gathered} |\int_0^{\pi-x} G_n(t_2,\lambda) dt_2| \le \epsilon(\lambda) \int_0^{\pi-x} |Q(t_2)| \int_0^{t_2} |P(t_3)| dt_3 \dots \\ \dots \int_0^{t_{2n-2}} |e^{2i\lambda(t_2 - t_3 + \dots + t_{2n-2} - t_{2n-1})}| |P(t_{2n-1})| dt_{2n-1} \le \frac{M_2^{2n-1}}{(2n-1)!} \epsilon(\lambda). \end{gathered} \tag{55}$$

我们来估计（53）右端方括号中的第二项。显然,

$$\int_0^\pi (\nu x^\rho + x^\rho \tau(x)) e^{2i\lambda x} G_n(\pi - x) dx = \int_0^\pi (\nu x^\rho + x^\rho \tau(x)) e^{2i\lambda x} Q(\pi - x) \kappa_n(x,\lambda) dx,$$

其中

$$\kappa_n(x,\lambda) = e^{2i\lambda(\pi-x)} \int_0^{\pi-x} e^{-2i\lambda t_3} P(t_3) dt_3 \dots$$
$$\dots \int_0^{t_{2n-1}} e^{2i\lambda t_{2n}} Q(t_{2n}) dt_{2n}.$$

由引理 1 可得

$$|\kappa_n(x,\lambda)| \le \int_0^{\pi-x} |P(t_3)| dt_3 \dots$$
$$\dots \int_0^{t_{2n-1}} |Q(t_{2n})| dt_{2n} \int_0^{t_{2n}} |e^{2i(\pi - x - t_3 + \dots + t_{2n})\lambda}| |Q(t_{2n})| dt_{2n} \le \frac{M_2^{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

由此及式（12）可知

$$\int_0^{\pi}(\nu x^{\rho}+x^{\rho}\tau(x))e^{2i\lambda x}G_n(\pi-x)dx=\frac{M_3^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{o(1)}{|Im\lambda|^{\rho}}. \tag{56}$$

由 (53)、(56)、(55) 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(\pi,\lambda)|=\frac{e^{2\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho}}. \tag{57}$$

由关系式 (37) 和 (57) 得到不等式 (45)。

引理5。设

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h P(x)dx}{h^{\rho}}=\nu\neq 0, \tag{58}$$

其中 $\rho>0$。那么，在区域 Ω_{ε}^{-} 上一致地

$$\tilde{p}_0(\pi,\lambda)=\frac{\nu\lambda e^{i\pi\lambda}\Gamma(\rho+1)}{2^{\rho}(Re^2\lambda+Im^2\lambda)^{(\rho+1)/2}}e^{i(\rho+1)\,\mathrm{arctg}(\frac{Re\lambda}{-Im\lambda})}+\frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho}} \tag{59}$$

and

$$\tilde{R}_{12}(\pi,\lambda)=\frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho}} \tag{60}$$

当 $|Im\mu|\to\infty$ 时。

证明。由 (58) 可得

$$\int_0^h P(x)dx=\nu h^{\rho}+h^{\rho}\tau(h),$$

其中，当 $h\to 0$ 时， $\tau(h)\to 0$。分部积分后，我们得到

$$\begin{gathered}\int_0^{\pi}e^{-2i\lambda t}P(t)dt=e^{-2i\pi\lambda}\int_0^{\pi}P(y)dy+2i\lambda\int_0^{\pi}e^{-2i\lambda t}(\int_0^t P(y)dy)dt=\\=e^{-2i\pi\lambda}\int_0^{\pi}P(y)dy+2i\lambda\int_0^{\pi}e^{-2i\lambda t}[\nu t^{\rho}+t^{\rho}\tau(t)]dt=\\=e^{-2i\pi\lambda}\int_0^{\pi}P(y)dy+2i\nu\lambda\int_0^{\infty}t^{\rho}e^{-2i\lambda t}dt-2i\nu\lambda\int_{\pi}^{\infty}t^{\rho}e^{-2i\lambda t}dt+2i\lambda\int_0^{\pi}t^{\rho}e^{-2i\lambda t}\tau(t)dt.\end{gathered}$$

这与（10）、（11）一起意味着

$$\int_0^{\pi}e^{-2i\lambda t}P(t)dt=2i\nu\lambda\int_0^{\infty}t^{\rho}e^{-2i\lambda t}dt+\frac{o(1)}{|Im\lambda|^{\rho}}.$$

将最后一个关系式乘以 $-ie^{i\lambda\pi}$ 并利用（12），得到（59）。

让我们估计函数 $p_0(t,\lambda)$，当 $0\le t\le\pi$ 时。分部积分后，我们得到

$$\begin{gathered}\int_0^t e^{-2i\lambda y}P(y)dy=e^{-2it\lambda}\int_0^t P(y)dy+2i\lambda\int_0^t e^{-2i\lambda y}dy(\int_0^y P(t_1)dt_1)=\\=t^{\rho}e^{-2it\lambda}(\nu+\tau(t))+2i\lambda\int_0^t y^{\rho}e^{-2i\lambda y}(\nu+\tau(y))dy.\end{gathered}$$

这与（9）和（13）一起意味着

$$|p_0(t,\lambda)|\le\frac{c_2}{|Im\lambda|^{\rho}}, \tag{61}$$

其中 c_2 不依赖于 t。

我们来估计函数 $p_n(t,\lambda)$，其中 $0\le t\le\pi$。由于 $t_j\ge t_{j+1}$，由 (24)、(61) 和引理 1 可得

$$\begin{gathered}|p_n(t,\lambda)|=|\int_0^t P(t_1)dt_1\int_0^{t_1}Q(t_2)dt_2\ldots\int_0^{t_{2n-1}}e^{-2i\lambda(t_1-t_2+\ldots+t_{2n-1}-t_{2n})}Q(t_{2n})p_0(t_{2n,\lambda})dt_{2n}|\le\\\le\frac{c_3}{|Im\lambda|^{\rho}}\int_0^t|P(t_1)|dt_1\int_0^{t_1}|Q(t_2)|dt_2\ldots\int_0^{t_{2n-1}}|Q(t_{2n})|dt_{2n}\le\frac{c_4M_4^{2n}}{(2n)!|Im\lambda|^{\rho}}.\end{gathered} \tag{62}$$

由 (41)、(61)、(62) 和引理 3 可知

$$|p_{n+1}(t,\lambda)| \le \int_0^t |Q(t_2)||p_n(t_2,\lambda)||e^{2i\lambda t_2}\int_{t_2}^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1|dt_2 \le$$
$$\le \max_{0\le t_2\le t}|e^{2i\lambda t_2}\int_{t_2}^t e^{-2i\lambda t_1}P(t_1)dt_1|\frac{c_5M_5^{2n}}{(2n)!|Im\lambda|^\rho} = \frac{o(1)M_5^{2n}}{(2n)!|Im\lambda|^\rho} \quad (63)$$

$(n=0,1\ldots)$，因此，

$$\sum_{n=0}^\infty |p_{n+1}(t,\lambda)| = \frac{o(1)}{|Im\lambda|^\rho}, \quad (64)$$

因此，不等式（60）成立。

根据上述推理，很容易证明引理6 和7。事实上，由 (22-27)、(35)、(36) 可知，如果在函数 $e_{12}(\cdot,\cdot)$ 的公式 (35)中将 λ 替换为 $-\lambda$，交换函数 P 和 Q，并将函数前面的符号改为相反的符号，那么我们就得到函数 $e_{21}(\cdot,\cdot)$。类似地，由(28-33)、(37)、(38) 可知，如果在函数 $e_{11}(\cdot,\cdot)$ 的公式 (37) 中将 λ 替换为 $-\lambda$，交换函数 P 和 Q，那么我们就得到函数 $e_{22}(\cdot,\cdot)$。

引理 6。假设

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h Q(x)dx}{h^\rho} = \nu \ne 0,$$

其中 $\rho > 0$。那么，在定义域 Ω_ε^+ 中一致地

$$\tilde{q}_0(\pi,\lambda) = \frac{\nu\lambda e^{-i\pi\lambda}\Gamma(\rho+1)}{2^\rho(Re^2\lambda+Im^2\lambda)^{(\rho+1)/2}}e^{i(\rho+1)\operatorname{arctg}(\frac{Re\lambda}{Im\lambda})} + \frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^\rho}$$

and

$$\tilde{R}_{21}(\pi,\lambda) = \frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^\rho}$$

作为 $|Im\mu|\to\infty$。

引理7。假设

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_{\pi-h}^\pi Q(x)dx}{h^\rho} = \nu \ne 0,$$

其中 $\rho > 0$。那么，在区域 Ω_ε^- 上一致地#+#+#+#+

$$\tilde{q}_0(\pi,\lambda) = \frac{-\nu\lambda e^{i\pi\lambda}\Gamma(\rho+1)}{2^\rho(Re^2\lambda+Im^2\lambda)^{(\rho+1)/2}}e^{i(\rho+1)\operatorname{arctg}(\frac{Re\lambda}{-Im\lambda})} + \frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^\rho},$$

$$\tilde{R}_{12}(\pi,\lambda) = \frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^\rho},$$

and

$$e_{22}(\pi,\lambda) = \frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^\rho}$$

如 $|Im\mu|\to\infty$。

我们的主要结果如下。

定理。假设条件 *(65)*、*(66)* 中至少有一个成立。

$$A_{14} \ne 0, \quad (65)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_{\pi-h}^\pi P(x)dx}{h^{\rho_4}} = \nu_4 \ne 0, \quad \lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h Q(x)dx}{h^{\rho_6}} = \nu_6 \ne 0, \quad (|A_{13}|+|A_{42}|)|\rho_4-\rho_6|+|-A_{13}\nu_4+A_{42}\nu_6| > 0, \quad (66)$$

其中 $\rho_4 > 0$、 $\rho_6 > 0$；并且条件 *(67)*、*(68)* 中至少有一个成立

$$A_{32} \ne 0, \quad (67)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h P(x)dx}{h^{\rho_5}}=\nu_5\neq 0,\quad \lim_{h\to 0}\frac{\int_{\pi-h}^{\pi} Q(x)dx}{h^{\rho_7}}=\nu_7\neq 0,\quad (|A_{13}|+|A_{42}|)|\rho_5-\rho_7|+|-A_{13}\nu_5+A_{42}\nu_7|>0, \tag{68}$$

where $\rho_5>0$, $\rho_7>0$.

那么，问题 *(1)*、*(2)* 的根函数系在 $\mathbb{H}$ 中完备且极小。

证明。设 $\lambda\in\Omega_\varepsilon^+$，且令 $|\lambda|$ 足够大。如果（65）成立，那么由（5）可得，th at

$$|e_{22}(\pi,\lambda)|\geq c_6e^{\pi|Im\lambda|},\quad |e_{11}(\pi,\lambda)|=o(1)e^{\pi|Im\lambda|},\quad |e_{12}(\pi,\lambda)|=o(1)e^{\pi|Im\lambda|},\quad |e_{21}(\pi,\lambda)|=o(1)e^{\pi|Im\lambda|}.$$

这与（6）一起意味着

$$|\Delta(\lambda)|\geq c_7e^{\pi|Im\lambda|}. \tag{69}$$

若(66)成立但(65)不成立，则由引理4可知

$$e_{12}(\pi,\lambda)=\frac{-\nu_4\lambda e^{-i\pi\lambda}\Gamma(\rho_4+1)}{2^{\rho_4}(Re^2\lambda+Im^2\lambda)^{(\rho_4+1)/2}}e^{i(\rho_4+1)\operatorname{arctg}(\frac{Re\lambda}{Im\lambda})}+\frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho_4}}. \tag{70}$$

$$e_{11}(\pi,\lambda)=\frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho_4}}. \tag{71}$$

同样地，根据引理 6，我们有

$$e_{21}(\pi,\lambda)=\frac{\nu_6\lambda e^{-i\pi\lambda}\Gamma(\rho_6+1)}{2^{\rho_6}(Re^2\lambda+Im^2\lambda)^{(\rho_6+1)/2}}e^{i(\rho_6+1)\operatorname{arctg}(\frac{Re\lambda}{Im\lambda})}+\frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho_6}}. \tag{72}$$

关系式 (6)、(66)、(70-72) 蕴含了

$$|\Delta(\lambda)|\geq\frac{c_8e^{\pi|Im\lambda|}}{|Im\lambda|^{\max(\rho_4,\rho_6)}}. \tag{73}$$

设 $\lambda\in\Omega_\varepsilon^-$，且 $|\lambda|$ 足够大。如果 (67) 成立，则由 (5) 可得

$$|e_{11}(\pi,\lambda)|\geq c_9e^{\pi|Im\lambda|},\quad |e_{22}(\pi,\lambda)|=o(1)e^{\pi|Im\lambda|},\quad |e_{12}(\pi,\lambda)|=o(1)e^{\pi|Im\lambda|},\quad |e_{21}(\pi,\lambda)|=o(1)e^{\pi|Im\lambda|}.$$

这与 (6) 一起意味着

$$|\Delta(\lambda)|\geq c_{10}e^{\pi|Im\lambda|}. \tag{74}$$

如果（68）成立但（67）不成立，则由引理5可知

$$e_{12}(\pi,\lambda)=\frac{\nu_5\lambda e^{i\pi\lambda}\nu_5(\rho_5+1)}{2^{\rho_5}(Re^2\lambda+Im^2\lambda)^{(\rho_5+1)/2}}e^{i(\rho_5+1)\operatorname{arctg}(\frac{Re\lambda}{-Im\lambda})}+\frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho_5}}. \tag{75}$$

同样地，根据引理7，我们有

$$e_{21}(\pi,\lambda)=\frac{-\nu_7\lambda e^{i\pi\lambda}\Gamma(\rho_7+1)}{2^{\rho_7}(Re^2\lambda+Im^2\lambda)^{(\rho_7+1)/2}}e^{i(\rho_7+1)\operatorname{arctg}(\frac{Re\lambda}{-Im\lambda})}+\frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho_7}}. \tag{76}$$

and

$$e_{22}(\pi,\lambda)=\frac{e^{\pi|Im\lambda|}o(1)}{|Im\lambda|^{\rho_7}}. \tag{77}$$

关系式 (6)、(68)、(75-77) 蕴含了

$$|\Delta(\lambda)|\geq\frac{c_{11}e^{\pi|Im\lambda|}}{|Im\lambda|^{\max(\rho_5,\rho_7)}}. \tag{78}$$

结合 (69)、(73)、(74) 和 (78)，我们得到

$$|\Delta(\lambda)|\geq\frac{c_{12}e^{\pi|Im\lambda|}}{|Im\lambda|^{\max(\rho_4,\rho_5,\rho_6,\rho_7)}}$$

如果 $\lambda \in \Omega_\varepsilon^- \bigcup \Omega_\varepsilon^+ (|\lambda| \text{ 充分大})$，那么根据 [2, 定理 2.3]，问题 (1)、(2) 的根函数系在 $\mathbb{H}$中完备且极小。

注 2. 如果函数 $f(x)$ 在点 0 或 π 处连续，那么

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h f(x)dx}{h} = f(0), \quad \lim_{h\to 0} \frac{\int_{\pi-h}^{\pi} f(x)dx}{h} = f(\pi)$$

相应地。如果 $f^{(m)}(0) = 0, m = 0, \dots n-1$, $f_{(n)}(0) = \nu$或 $f_{(m)}(\pi) = 0, m = 0, \dots n-1$, $f_{(n)}(\pi) = \nu (n \geq 1)$, 那么

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h f(x)dx}{h^{n+1}} = \frac{\nu}{(n+1)!}, \quad \lim_{h\to 0} \frac{\int_{\pi-h}^{\pi} f(x)dx}{h^{n+1}} = \frac{\nu}{(n+1)!}$$

相应地。因此，如果函数 P、Q 足够光滑，并且这些函数及其导数在区间 $(0, \pi)$ 两端的取值之间存在某些关系，那么定理的条件将得到满足。

参考文献

[1] V.A. Marchenko。《斯图姆–刘维尔算子及其应用》。Birkhäuser，巴塞尔，1986；基辅，1977。[2] A.A. Lunyov，M.M. Malamud。关于一阶系统边值问题根子空间的完备性与黎斯基底性质及其应用。《谱理论杂志》。2015年，第5卷，第1期，第17–70页。[3] A.A. Lunyov，M.M. Malamud。关于一阶系统根向量的完备性：Regge问题的应用。《数学文献》。2013年，第88卷，第3期，第678–683页。[4] M.M. Malamud，L.L. Oridoroga。关于常微分方程一阶系统边值问题根子空间的完备性。《泛函分析杂志》。2012年，第263卷，第7期，第1939–1980页。[5] A. V. Agibalova，M. M. Malamud，L. L. Oridoroga。关于常微分方程 2×2 一阶系统一般边值问题的完备性。《泛函分析与拓扑方法》。2012年，第18卷，第1期，第4–18页。[6] A. P. Kosarev，A. A. Shkalikov。一阶常微分 2×2 系统解的谱渐近性。《数学札记》。2021年，第110卷，第6期，第967–971页；译自《数学札记》。2021年，第110卷，第6期，第939–943页。[7] A. Lunyov 和 M. Malamud。关于 2×2 狄拉克型算子根向量系统的黎斯基底性质。《数学分析与应用杂志》。2016年，第441卷，第1期，第57–103页。[8] A.M. Savchuk，I. V. Sadovnichaya。具有可求和势的狄拉克系统的带括号黎斯基底性质。《现代数学基础方向》。2015年，第58卷，第128–152页。[9] A.P. Prudnikov，Yu. A. Brychkov 和 O.I. Marichev。《积分与级数》，莫斯科，科学出版社，1981年。[10] F.G. Tricomi。《积分方程》。1957年。纽约：Inc. Publ.。[11] A. M. Savchuk 和 A. A. Shkalikov。具有广义函数系数的常微分方程解的渐近分析。《数学文集》。2020年，第211卷，第11期，第1623–1659页。

电子邮箱：alexmakin@yandex.ru