陶伯型恒等式与 Wile E. Coyote 物理学的联系

Roberto Camassa[a], RichardM. McLaughlin[a,*]

[a]数学系，北卡罗来纳大学，教堂山，北卡罗来纳州，*27599*，美国

arXiv:2304.06127v1 [math.DS] 12 Apr 2023

摘要

本文研究处于张力作用下释放的垂直悬挂的弹簧—质量系统的运动，重点关注底部质量块的延迟时间尺度如何随弹簧常数和质量块变化。这种“悬挂时间”令人想起《歪心狼与哔哔鸟》动画片；本文通过底部质量块的拉普拉斯变换的远场渐近展开对其进行量化，并利用陶伯型恒等式和明确的留数计算，将这些渐近结果与质量块的短时动力学联系起来。研究表明，这一延迟时间尺度可能出人意料地会在顶部“巨石”的大质量极限下达到最大值。文中还介绍了实验，并将实验结果与理论预测进行比较。该系统是普通微分方程课程中讲授弹簧—质量系统动力学的一个有趣实例，而且得出这些理论预测并不需要进行任何简正模计算。

关键词：Road Runner、Wile E. Coyote、悬空时间、陶伯型恒等式

1. 引言

弹簧—质量系统的演化受到广泛关注，原因在于它可用于对许多不同的物理系统和生物系统进行建模，在极限情况下与波动力学相关联，并且是许多常微分方程教材中展示正规模态分解的简单示例 [1]。

本文考察一个较少受到研究但令人兴奋的例子：一个最初处于动态平衡的悬挂的弹簧质点系统，突然从其顶部悬挂点释放，随后在瞬态弹簧力和重力作用下演化；其中，前者假设遵循胡克定律，后者则假设为恒定力。

我们将看到，这种有趣的动力学呈现出令人联想到著名《歪心狼与哔哔鸟》动画片中Wile E. Coyote的行为：在动画片里，WileE.Coyote 经常被哔哔鸟戏弄，从悬崖上跌落，通常还有一块巨石从他上方坠落。在这些情况下，Wile E. Coyote经常会短暂地停顿片刻，在坠落延迟期间没有明显的力可以解释这一现象，随后才坠向峡谷底部。我们的动力学通过实验、计算和分析，展示了类似的延迟时间尺度。

*通讯作者电子邮箱：camassa@amath.unc.edu (Roberto Camassa)、rmm@email.unc.edu (Richard M. McLaughlin)

我们通过解析方法将这一时间尺度量化为质量块的数量与质量以及弹簧常数数值的函数。

本研究给出了一个可能是最简单的物理示例，展示了陶伯型恒等式的威力：它将函数的短时间渐近行为与其拉普拉斯变换的远场展开联系起来。因此，这也是一个极佳的示例，可用于任何层次的常微分方程课程中研究耦合系统。

在第 2 节中，我们描述实验并讨论实验观察结果。在第 3 节中，我们建立数学模型，描述由 $n-1$ 个弹簧连接的 n 个质点构成的线性耦合系统；这些质点最初悬挂在上方，随后从悬挂点突然释放。我们计算平衡时的初始质量分布，接着求出底部质量块的短时间渐近行为，并证明其变化十分平缓，按 $C_n t^{2n}$ 的尺度变化。在第 4 节中，我们定量比较实验中的动力学与质点—弹簧模型的动力学，重点关注渐近预测如何估算实验中的悬挂时间尺度。在第 5 节中，我们讨论这些结果，以及连续介质极限下相关的数学差异；同时比较并辨析关于偏微分方程中信息有限传播和无限传播的常见相似之处与误解，例如波动方程和热方程中的情形。

2. Wile E. Coyote 物理学：下落的拉伸质量—弹簧系统 s

接下来，我们概述使用 3 根线性胡克定律弹簧连接 4 个质量块所做的实验。我们使用 Edgertronic 高速数码摄像机，以每秒 1000 帧的帧率拍摄系统。图 1 展示了顶部质点释放后，系统行为在等时间间隔下的一系列画面：在本次实验的顶部面板中，顶部弹簧上没有连接质量块；第一幅画面显示的是顶部弹簧释放前处于静力平衡状态的悬挂系统。之后的画面以 0.03 秒为均匀间隔呈现。最后，底部面板展示了著名卡通片中的一个 Wile E. Coyote 延迟下落片段。完整的演变过程请参阅配套视频。值得注意的是几个现象。首先，在经过一段可观察到的延迟之前，底部三个质量块几乎没有运动。约 0.17 秒后，底部质量块开始下落。

这些弹簧使用 Porter Spring Winders 工具在内部绕制而成。在图2中，我们展示了三根弹簧各自的胡克弹簧常数测量结果。具体做法是，对不同质量载荷下每根弹簧的静力平衡位移进行成像，并将力与位移关系数据拟合为直线。其斜率即为弹簧常数，单位为达因/厘米。顶部弹簧的弹簧常数为 $k_1 = 13,761$ 达因/厘米，中间弹簧为 $k_2 = 15,112$ 达因/厘米，底部弹簧为 $k_3 = 15,723$ 达因/厘米。需要注意的是，尽管这些弹簧的绕制程度相同，但在实验过程中，顶部和中间弹簧承受了更大的载荷，因此相较于底部弹簧，它们被拉伸得更长且强度有所减弱。每根弹簧的质量为 4.44 克。底部质量块为 $m_4 = 107.28$ 克，第三个质量块为 $m_3 = 106.56$ 克，第二个质量块为 $m_2 = 107.5$克。在本次试验中，我们没有在顶部弹簧的顶端连接质量块，$m_1 = 0$ 克。由于系统正在被释放，系统的运动将取决于弹簧质量（它们不会在正常模态中立即发挥作用

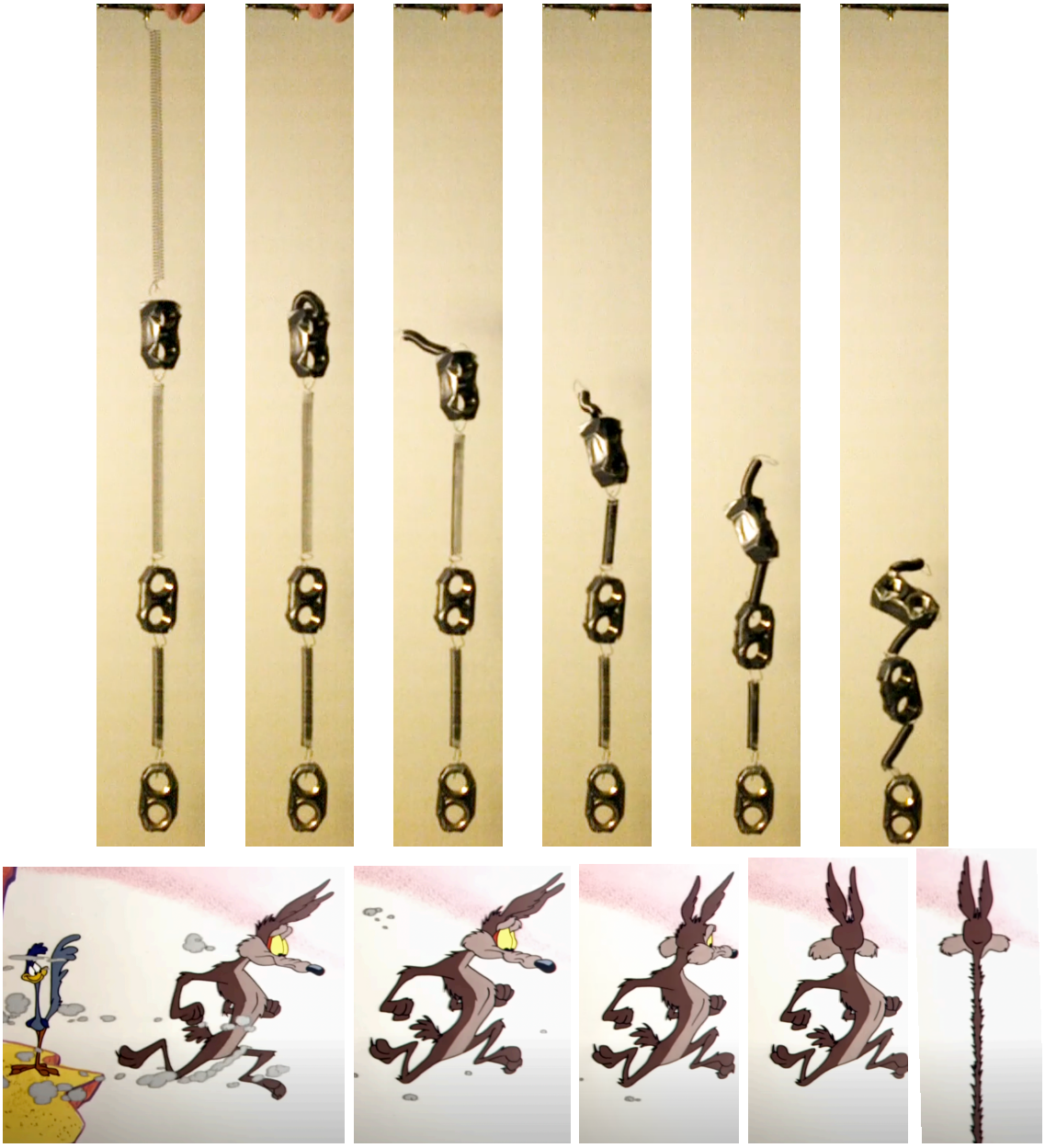


图 1：下落的质弹簧系统：上：起初处于静力平衡，释放顶部弹簧，并以 0.03 秒为间隔观察后续演变。此处顶部弹簧上没有固定明确的顶部质点。下：一组 Wile E. Coyote 蒙太奇画面，展示了坠落前类似的延迟时间尺度。

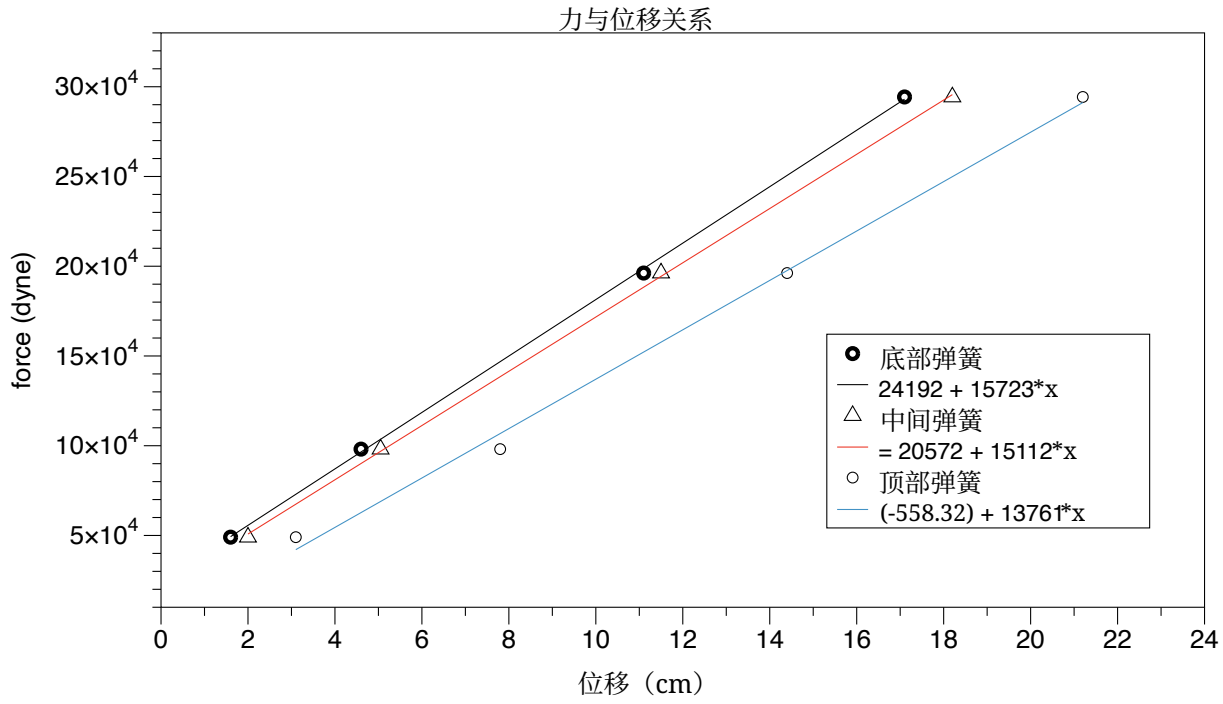


图2：弹簧常数：在静力平衡状态下，通过施加一系列不同的质量载荷，测量三根弹簧的平衡位置，以确定弹簧常数。图中给出了线性拟合，其斜率即为弹簧常数，单位为达因/cm。

用于研究悬挂系统动力学的计算）。因此，在下文的分析中，每根弹簧的质量都分别计入质量块 m_1、 m_2 和 m_3 中。

3. III. 线性耦合质弹簧系统的数学建模

假设我们的 $n-1$ 弹簧常数呈线性关系，胡克弹簧常数为 k_j，正如图2所示数据清楚表明的那样，悬挂系统的动力学可写为

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= k_1(x_2-x_1)-m_1g+N \\ m_j\frac{d^2x_j}{dt^2} &= k_{j-1}(x_{j-1}-x_j)+k_j(x_{j+1}-x_j)-m_jg, \qquad j=2,\cdots,n-1 \\ m_n\frac{d^2x_n}{dt^2} &= k_{j-1}(x_{n-1}-x_n)-m_ng \end{aligned} \tag{1}$$

这里，法向力 $N=\sum_{j=1}^{n} m_jg$ 是使质量系统保持在原位、从而使其初始处于平衡状态所需的力。虽然我们发现这并非必要，但可以通过求解线性方程来确定平衡位置分布 (x_1(0) x_2(0) $\cdots, x_n$(0))。

系统

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -kn-2 & k_{n-2}+k_{n-1} & -k_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1} & k_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ \vdots \\ x_{n-1}(0) \\ x_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sum_{j=2}^{n} m_j)g \\ m_2 g \\ m_3 g \\ \vdots \\ m_{n-1} g \\ m_n g \end{pmatrix} \quad (2)$$

我们注意到，由于该系统具有一个自由度的平移不变性，而这种不变性源于这样一个事实：弹簧长度在计算中无关紧要，因此该矩阵不可逆。通过设定 $x_1(0) = 0$，并将所得系统作为上三角系统求解，可以克服这一问题，从而得到唯一解。由于这个解不会以任何方式影响动力学，因此它并不重要；正如我们接下来将通过对每个质点从全局坐标变换到局部坐标所看到的那样：

$$z_1(t) = x_1(t) \quad (3)$$

$$z_j(t) = x_j(t) - x_j(0), \qquad j = 2, \cdots, n \quad (4)$$

于是，新的方程系统为

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= k_1(z_2 - z_1) + N - \sum_{j=1}^{n} m_j g \\ m_j \frac{d^2 z_j}{dt^2} &= k_{j-1}(z_{j-1} - z_j) + k_j(z_{j+1} - z_j), \qquad j = 2, \cdots, n-1 \quad (5) \\ m_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} &= k_{n-1}(z_{n-1} - z_n) \end{aligned}$$

显然，假设所有初始位置和速度均为零，即对于所有 j，$z_j(0) = \frac{dz_j}{dt}|_{t=0} = 0$，该系统处于平衡状态，因为法向力 N 抵消了第一个方程中的总和。

接下来，我们只需将系统 6 中的 $N = 0$ 设为零，即可切断法向力，然后观察系统随后的演化。这等价于释放顶部质点，如前面的实验部分所做的那样。在计算接下来的动力学之前，先对该系统进行无量纲化会很有帮助。令系统的时间尺度由第一个方程的频率决定，$T = \sqrt{\frac{m1}{k_1}}$，系统的长度尺度为 $L = T^2 (\frac{\sum_{j=1}^{n} m_j g}{m_1})$。令 $y_j = \frac{z_j}{L}$，$\tau = \frac{t}{T}$，则无量纲化后的系统为：

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} &= (y_2 - y_1) - 1 \\ \frac{d^2 y_j}{d\tau^2} &= \alpha_j(y_{j-1} - y_j) + \beta_j(y_{j+1} - y_j), \qquad j = 2, \cdots, n \quad (6) \\ \frac{d^2 y_n}{d\tau^2} &= \alpha_n(y_{n-1} - y_n) \end{aligned}$$

其中，无量纲弹簧常数为 $\alpha_j = \frac{m_1}{m_j}\frac{k_{j-1}}{k_1}$ 和 $\beta_j = \frac{m_1}{m_j}\frac{k_j}{k_1}$，对应 $j = 2 \cdots n-1$。

为计算随后的演化，我们计算系统的拉普拉斯变换，$\hat{}y_j(s) = \int_0^\infty dt e^{-s\tau} y_j(\tau)$。由此得到以下矩阵系统：

$$\begin{pmatrix} s^2+1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & s^2+\alpha_2+\beta_2 & -\beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} & s^2+\alpha_{n-1}+\beta_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n & s^2+\alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \\ \hat{y}_3(s) \\ \vdots \\ \hat{y}_{n-1}(s) \\ \hat{y}_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{s} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

设矩阵 A 定义为

$$A = \begin{pmatrix} s^2+1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & s^2+\alpha_2+\beta_2 & -\beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} & s^2+\alpha_{n-1}+\beta_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n & s^2+\alpha_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

求该系统逆矩阵的最快方法是使用克拉默法则。最后一个质点位置的拉普拉斯变换，$\hat{}y_n(s)$，随后可表示为两个行列式之比：

$$\hat{y}_n(s) = \frac{\det B}{\det A}$$

其中矩阵 B 为

$$B = \begin{pmatrix} s^2+1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{s} \\ -\alpha_2 & s^2+\alpha_2+\beta_2 & -\beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} & s^2+\alpha_{n-1}+\beta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

由于 t 稀疏驱动向量，B 的行列式可立即求得为

$$\det B = -\left(\prod_{j=2}^{n} \alpha_j\right) \frac{1}{s}$$

我们指出，对于任意质点的位置，都存在类似且可计算的公式，具体如下。

短时间渐近行为：我们还要指出，正是在这里，陶伯渐近有助于大幅简化 A 的行列式。一般来说，完整的逆变换需要计算 A 的完整行列式，而其逆变换会涉及冗长的留数求和，进而得到系统的标准形分解。但

重要的是要考虑这个实验：动力学中没有观察到振荡，关键在于计算最后一个质点被检测到开始运动之前的短暂延迟。为此，只需计算短时间渐近行为，就足以预测系统的演化。为此，陶伯型恒等式指出，第 n 个质点位置的短时间动力学由拉普拉斯变换在远场、大 s 渐近区域的行为决定。也就是说，我们只需计算 A 的行列式在大 s 下的渐近展开，就能求出解的短时间渐近展开。显然，这取决于矩阵 A具有强对角占优性：

$$\begin{aligned} \det A &= P_{2n}(s) \sim \prod_{j=1}^{n} A_{j,j} && (10)\\ &= \prod_{j=1}^{n}(s^2+\alpha_j+\beta_j) && (11)\\ &\sim s^{2n} \qquad \text{as} \quad s\to\infty && (12) \end{aligned}$$

因此，最后一个质点的位置 $y_n(\tau)$ 的短时间渐近行为由以下布罗姆维奇复积分给出：

$$\begin{aligned} y_n(\tau) &\sim -\frac{(\prod_{j=2}^{n}\alpha_j)}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{s\tau}}{s^{2n+1}}ds && (13)\\ &= -\frac{(\prod_{j=2}^{n}\alpha_j)}{2\pi i}\oint\frac{1+(s\tau)+\cdots\frac{(s\tau)^{2n}}{(2n)!}+\cdots}{s^{2n+1}}ds && (14) \end{aligned}$$

其中，闭合积分沿着任意一条逆时针环绕原点的轮廓计算。结果为：

$$y_n(\tau) \sim -\left(\frac{m_1^{n-1}\prod_{j=2}^{n-1}k_j}{k_1^{n-2}\prod_{j=2}^{n}m_j}\right)\frac{\tau^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{as} \quad \tau\to 0^+ \tag{15}$$

用有量纲形式表示，结果为：

$$z_n(t) \sim -Q\frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{as} \quad t\to 0^+ \tag{16}$$

其中

$$Q = \left(\frac{(\prod_{j=1}^{n-1}k_j)\sum_{j=1}^{n}m_j g}{\prod_{j=1}^{n}m_j}\right)$$

这里有几个有趣的极限值得讨论。首先，如果第一个质点（巨石）非常大，比如说相对于其他质量块而言， $m_j = m$当 $j = 2,\cdots,n$，并且取所有弹簧常数相等， $k_j = k$当 $j = 1,\cdots,n-1$，那么前因子为 $Q = (1+{(n-1)_{m_1}}^{m})^{k^{n-1}g}_{m^{n-1}}$，它会随着 m_1 的增加而单调递减，~~在 m_1 很大~~时具有一个非零极限。因此，在保持所有其他参数不变的情况下，增加 m_1 将导致更高的

在 n 个粒子开始运动之前的悬挂时间，最大延迟发生在无限 m_1 的情况下（参见下文关于计算悬挂时间的讨论）。

我们注意到，在无量纲坐标（或采用另一种无量纲化方式）下，对另一种质点趋于零的极限 m_1 进行分析非常有趣；尽管在此极限下幂律不同，但它仍然提供了对短时间幂律动力学的重新推导。为此，考虑上文第 6 式中的系统：当 m_1 很小时，第一个方程写为 $m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -k(z_1 - z_2) - m_1 g - \sum_{j=2}^{n} m_j g$。这里我们已将第一个质点从求和中提取出来。显然，当 m_1 很小时，该方程可由 $z_1 = z_2 - \frac{\sum_{j=2}^{n} m_j g}{k}$ 很好地近似。将其代入第二个方程,一得到一

$$\begin{aligned} m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= \frac{k}{m_2}(z_1 - 2z_2 + z_3) \\ &= k(z_3 - z_2) - \sum_{j=2}^{n} m_j g \end{aligned}$$

注意，与第 (6) 式中的系统相比，这里的系统完全相同，只是彻底移除了第一个质点。这等价于将质点计数器减少至 $n-1$，在第 16 式中结果相同，只需将 n 替换为 $n-1$，并将 j 索引的取值范围从 2 延伸至 n。在这种情况下，短时间行为不那么平坦，其标度为 τ^{2n-2}。

我们还指出，在这个例子中，所谓的陶伯型恒等式可以通过缩放立即得到理解。将矩阵的一般行列式 A 保持为次数为 $2n$的多项式， $P_{2n}(s) = s^{2n} + a_{2n-2}s^{2n-2} + \cdots + a_0$，精确解表示为轮廓积分：

$$y_n(\tau) = \frac{-(\prod_{j=2}^{n} \alpha_j)}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\tau s}}{s P_{2n}(s)} ds$$

其中，轮廓 $\mathcal{C}$ 是一个包含分母所有根的闭合圆。我们可以通过 $z = \tau s$ 对积分进行缩放，结果为

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\tau s}}{s P_{2n}(s)} ds &= \oint_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{e^{z}}{z P_{2n}(\frac{z}{\tau})} dz \\ &= \tau^{2n} \oint_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{e^{z}}{z(z^{2n} + a_{2n-2}\tau^2 z^{2n-2} + \cdots + a_0 \tau^{2n})} dz \\ &\sim \tau^{2n} \oint_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{e^{z}}{z^{2n+1}} dz \qquad \tau \to 0^+ \end{aligned}$$

这里， $\tilde{\mathcal{C}}$ 是按 τ重新缩放后的轮廓。当然，由于路径无关性，该轮廓可以任意拉伸。这为推导出 15 所使用的陶伯尔恒等式提供了依据。

接下来，我们给出第 j 个质点位置的短时间渐近行为。为此，陶伯渐近给出了广义矩阵 B 的远场渐近行为，其中由驱动项替代矩阵 A 的第 j' 列。结果为

$$\det \tilde{B} \sim -\prod_{j=2}^{j} \alpha_j \qquad \tau \to 0^+$$

于是，第 j 个质点的位置 $y_j(t)$ 的短时间渐近行为为（当 $j = 2, \cdots, n$ 时）：

$$\begin{aligned} y_j(t) &\sim -Q_j \frac{t^{2j}}{(2j)!} \quad \text{as} \quad t \to 0^+ \\ Q_j &= \left(\frac{(\prod_{i=1}^{j-1} k_i) \sum_{j=1}^{n} m_j g}{\prod_{i=1}^{j} m_i} \right) \end{aligned}$$

我们注意到，第一个质点满足 $y_1 \sim -\frac{\sum_{j=1}^{n} (m_j g)}{2m_1} t^2$，当 $t \to 0^+$ 时。有趣的是，由于拉伸的弹簧中储存的能量，第一个质点起初所受的加速度远大于重力。当然，直觉告诉我们，这种加速度不可能无限持续，长时渐近也表明了这一点。

长时渐近：首先，请注意，通过对运动方程求和可以立即观察到，系统的质心确实以引力常数 g所对应的加速度下落。人们可能会问，任何单个质点的长时渐近是否也确实以相同的恒定加速度下落？为此，我们可以立即利用类似的陶伯型恒等式，计算最后一个质点 $y_n(\tau)$ 的首阶长时渐近展开，只是在这种情况下取长时间极限。为此，在长时间情形下重复计算：

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\tau s}}{s P_{2n}(s)} ds &= \oint_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{e^z}{z P_{2n}(\frac{z}{\tau})} dz \\ &= \tau^{2n} \oint_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{e^z}{z(z^{2n} + a_{2n-2}\tau^2 z^{2n-2} + \cdots + a_0 \tau^{2n})} dz \\ &\sim \oint_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{e^z}{z(a_0 + a_2 z^2/\tau^2)} dz \qquad \tau \to \infty \end{aligned}$$

一个有趣的问题是：矩阵的特征多项式的系数如何依赖于矩阵本身的系数？这有时会用所谓的牛顿恒等式来描述。一些结果是已知且显而易见的：最低阶系数 a_0 与矩阵的行列式成正比，而次高次幂项的系数 a_{2n-2} 与矩阵的迹成正比。在本例中，所讨论的矩阵是 A，参数 s 设为零。该矩阵的行列式为零。因此，长时间下的主导渐近行为为：

$$\begin{aligned} y_n(\tau) &\sim \frac{-(\prod_{j=2}^{n} \alpha_j)}{2\pi i} \tau^2 \oint_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{e^z}{z^3 a_2} dz \\ &= -(\prod_{j=2}^{n} \alpha_j) \frac{\tau^2}{2a_2} \qquad \tau \to \infty \end{aligned}$$

因此，长时渐近由系数 a_2 决定。计算这一项需要进行一些余因子展开，结果为

$$a_2 = \frac{(\prod_{j=2}^{n} \alpha_j)}{m_1} \sum_{j=1}^{n} m_j$$

从而得到结果： $z_n(t) \sim -gt^2/2$ 当 $t \to \infty$。这表明，第 n 个质点在长时间下以重力加速度下落，并且修正项是次主导的，也就是说，在长时间下不会观测到大幅振荡。当然，实际实验的持续时间确实足够长，可以观察到这一行为。

最后，我们来讨论短时间渐近行为的修正。只需在 s 关于 $P_{2n}(s)$ 的公式中纳入次高次幂和第三高次幂，即可直接得到这些修正：

$$\begin{aligned} y_n(\tau) &= \frac{-(\prod_{j=2}^n \alpha_j)}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\tau s}}{sP_{2n}(s)} ds \\ &\sim \frac{-(\prod_{j=2}^n \alpha_j)}{2\pi i} \tau^{2n} \oint_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{e^z}{z(z^{2n} + a_{2n-2}\tau^2 z^{2n-2})} dz, \qquad \tau \to 0^+ \\ &\sim \frac{-(\prod_{j=2}^n \alpha_j)}{2\pi i} \tau^{2n} \oint_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{e^z}{z^{2n+1}} (1 - a_{2n-2}\tau^2/z^2) dz \\ &= -\frac{(\prod_{j=2}^n \alpha_j)\tau^{2n}}{(2n)!} \left(1 - \frac{a_{2n-2}\tau^2}{(2n+2)(2n+1)}\right) \end{aligned}$$

这里，系数 a_{2n-2} 等于矩阵 A 的迹，其中包含 $s = 0$。我们注意到，在下文的分析部分中，对于实验所观测到的时间尺度，这一修正非常小；首阶渐近公式能够准确预测实验质量弹簧系统中所有已观测质量块的悬挂时间。

4. IV. 与实验观测结果的模型比较

这里我们首先讨论该公式如何确实为此系统中的悬挂时间设定合适的时间尺度，然后展示我们的渐近公式在短时间内的预测能力。

虽然代数表达式 τ^{2n} 对于任意正的 τ都不为零，但要获取可检测的信息，仪器必须能够测量运动。对于我们的情况，使用高速 Edgertronic 高速摄像机时，我们可以将一个像素的长度设为仪器测量阈值。因此，我们可以将悬挂时间 t_h 定义为从释放顶部质点到摄像机图像中底部质量块移动了可检测距离之间经过的时间。要分辨顶部质点释放与悬挂时间之间的时刻，必须有足够高的帧率。在我们的理论中，悬挂时间由下式给出

$$t_h = \left(\frac{L_p((2n)!)}{Q}\right)^{\frac{1}{2n}} \tag{17}$$

$$= \left(L_p(2n)! \left(\frac{\prod_{j=1}^n m_j}{(\prod_{j=1}^{n-1} k_j)\sum_{j=1}^n m_j g}\right)\right)^{\frac{1}{2n}} \tag{18}$$

其中， L_p 是可探测距离。

或者，我们可以简单地绘制轨迹，并叠加短时间幂律渐近形式。在图 3 中，我们绘制了叠加的短时间渐近理论

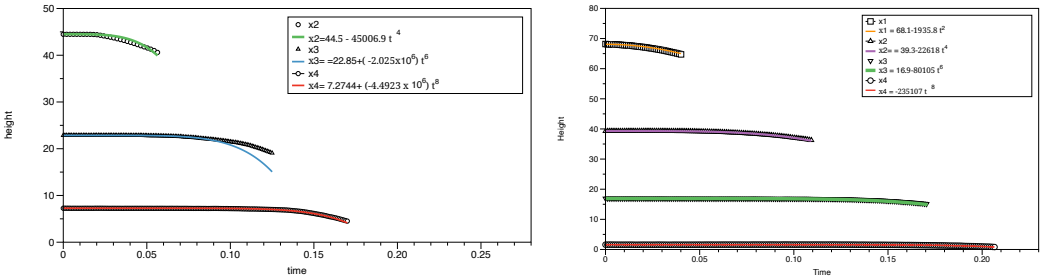


图3：实验质量轨迹与首阶小时间渐近理论曲线的叠加图，无可调参数；图例中报告了以 cgs单位表示的理论值。左图：与图1一样，未附加显式的顶部质点。右图：附加显式顶部质点， $m_1 = 107.7$g。

根据实验追踪得到的质点高度，对两种不同情况进行比较：后一种情况中，顶部弹簧上除固定的弹簧外没有额外的质量块；前一种情况中则有 $m_1 = 107.7$ 克。这里有几点值得注意。首先，对于左侧没有明确顶部质点的情况，该理论对全部三个质量块的预测都相当不错，其中我们令 m_1 等于顶部弹簧的质量。显然，弹簧质量会通过其提供的惯性影响后续动力学，但与顶部弹簧上明确连接了质点的情况相比，模型的预测效果理应没那么好。右侧面板展示的正是后一种情况，而在这种情况下，这些公式对全部四个质量块的运动都预测得相当准确。还需注意，由于右侧面板中的顶部质量块较大，质点 m_4 的悬挂时间明显长于左侧面板中的悬挂时间。我们的理论也得出了这一预测。其次，加入短时间尺度的渐近修正，并不能显著改善这些时间尺度上的预测。事实上，像上文那样将几何级数截断为两项，会导致两项之间强烈竞争：首阶项为负，修正项为正，从而错误地预测出粒子在更长时间尺度上上升。不过，在实验所涉及的短时间尺度上，这一误差并不可见。值得注意的是，对完整的洛朗展开求和所得的修正项对所有时间都严格为负；但在实验的时间尺度范围内，这一计算结果与上文给出的两项展开无法区分。

关于这些实验的几点说明。首先，第一次试验中没有明确的顶部质点，其照明效果优于第二次实验。其次，第二次试验中，底部质量块出现了一些轻微的离面运动，此外，较差的照明使跟踪变得更加困难。尽管如此，在这种情况下，建模效果要好得多，这同样是因为在这次试验中存在一个定义明确的顶部质点。跟踪是在 Image Tank程序中完成的，使用其中一个颜色（RGB）字段，并跟踪一个轮廓值。

最后，将模型线性质点-弹簧系统的完整动力学与实验轨迹和短时间渐近行为进行比较是很有意义的。通过观察图1中的蒙太奇可以清楚地看出，一旦顶部弹簧塌落到质点上，$m1$，碰撞就不是弹性的，而且除继续由其质点提供惯性外，弹簧基本上不再为系统提供任何内部动力学。一个或许更好的模型应当包含非线性截断机制，以便在弹簧的压缩长度减小到某个阈值以下时移除弹簧。为此，我们更深入地研究了最初几次试验中的底部质量块轨迹，包括其短时间渐近行为以及完整解

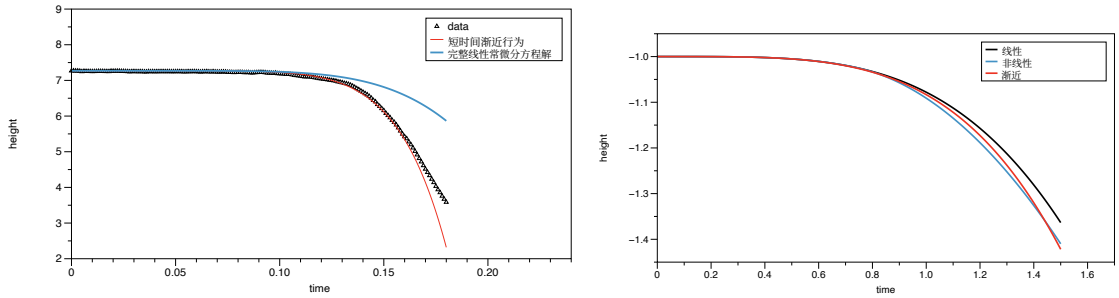


图4：左图：图1所示试验中质点 m_4 以CGS单位表示时的实验结果、渐近解与完整线性解对比。右图：在无量纲坐标下，两个相等质量块和一根弹簧情况下的渐近解、完整线性解与完整非线性解对比。

耦合线性系统的。该比较展示在图 4 的左图中。如前所述，这里的短时间渐近预测非常出色。值得注意的一点是，在最初十分之一秒之后，线性系统的完整解似乎比数据和渐近理论都以更慢的速率下降；在这些时间尺度上，渐近理论对数据的预测或许比完整的线性解更好。这可能是因为碰撞后，弹簧在驱动内部动力学方面的作用停止了。

为了展示并研究这一点，我们可以在系统中引入一种非线性，即设置一个截断机制：当弹簧回缩至未伸长位置时，弹簧力便会消失。为此，利用质心给出的运动积分，对由一根弹簧连接的两个相同质量块组成的系统进行分段求解很有用。在有量纲坐标下：

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k(x-y)f(x-y) - mg \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= k(x-y)f(x-y) - mg \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = \frac{-mg}{k}, \quad x'(0) = y'(0) = 0 \end{aligned}$$

其中，截断函数 $f(x)$ 是一个海维赛德函数：当 $x < L_s$ 时取零值，其中 L_s 是弹簧长度。通过将两个常微分方程相加，该系统可以解耦，得到 $y(t) = -t^2 - 1 - x(t)$。在短时间内，非线性项恒等于一，因此关于 x 的常微分方程可直接解为 $x(t) = -\frac{mg}{2k} - \frac{gt^2}{2} + \frac{mg}{2k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t$。该解在弹簧于 $x(t^*) = L_s$ 处松弛之前有效；此时，x 和 y 均转为纯自由落体运动，其初始位置和速度取自 $t = t^*$。在无量纲坐标下，$y(t)$ 这两种演化的比较结果展示于图 4 的右图中，此处取 $L_s = 1/2$。与左图所报告的实验情形类似，在所描绘的时间尺度内，完整的非线性解比完整的线性解下降得更快。图中还展示了该系统在无量纲坐标下的短时间渐近解 $-1 - t^4/12$。我们指出，也可以对完整系统进行类似分析；但由于这不会影响我们最初建立悬挂时间理论的目标，我们将把这项工作留待未来研究。

5. 讨论

在这里，我们研究了将一个悬挂的弹簧质点系统释放下落的实验，该系统最初处于张力作用下的平衡状态。这些实验显示，底部质量块存在延迟的悬挂时间：顶部质点先被释放并开始下落，而下方其他质量块尚未开始移动。测得这些弹簧均为线性胡克定律弹簧；我们结合克拉默法则与陶伯型恒等式，建立了每个质量块的短时间渐近行为的完整理论，结果表明，$j'th$ 质点的高度按 $C_j t^{2j}$ 下降。该理论在两次实验中得到验证：一次没有明确的顶部质点，另一次则连接了一个顶部质点。与前一种情况相比，后一种情况显示出显著延长的悬挂时间。此外，我们还推导了长时渐近，结果表明，长时间解以重力加速度下落，而修正项是次主导的。最后，我们将完整的线性动力学与实验进行了比较，结果显示出这样的趋势：线性动力学比实验下落得更慢。我们提出并求解了一个带有力截断的非线性模型的二体情形，该模型呈现出相同的趋势。线性理论的成功在一定程度上是可以预期的，因为整个系统都是从静止平衡状态开始的。这意味着，对于具有非线性弹簧定律的一般非线性系统，只要弹簧定律具有非零线性项，它可能也会经历相同的短时间渐近行为。

有几点需要说明。如上所述，短时间渐近行为呈幂律；从数学上看，这意味着任意正时间下所有质量块都在运动。理论预测，第 j 个质量块的下落满足 $Q_j \, {}^{t^{2j}}{}_{(2j)!}$。尽管这些函数在短时间内都不为零，但只有运动超过某个阈值（例如摄像机图像中的一个像素）后，才能测量到运动。此外，沿链条越往后的解就越平缓。这在某种程度上让人想起热方程的一个特殊性质：紧支撑初始数据会在任意正时间下产生非零解，且解会出现在距离紧支撑数据区域任意远的地方。尽管这违反了各种物理原理，但只要注意到解达到可测阈值之前没有信息传播，这种行为便可立即得到纠正。因此，热方程并非以无限速度传播信息，而是遵循通常的扩散标度律，使信息以次弹道（扩散）速率传播。我们指出，热方程在建模上的这一缺陷，可以通过直接使用描述热传输的电报方程进一步修正；该方程在短时间内呈波动性质。Goldstein 的一项研究 [2, 3] 给出了随机游走背景下电报方程的一种有趣推导。这里也可以采用类似的方法：对我们的质点—弹簧系统取连续介质极限，便会得到一个双曲波动方程。这类方程具有信息的弹道式时间传播性质。一个值得探讨的问题是考察我们系统的连续介质极限，尤其是将其作为下落的弹簧玩具的第一个模型；后者具有类似的延迟时间尺度。我们将此留待未来研究。

当然，Wile E. Coyote 总会被聪明的哔哔鸟捉弄，从悬崖上掉下去。我们希望 Wile E. 或许能从这番讨论中吸取教训，并将我们的发现应用于这样的情形：绳索很长、悬垂着，且被切断后仍承受张力。我们的计算对此提供了一些指示，说明在什么时间尺度内，Coyote 可能有时间爬上这根绳子，避免坠落，免于最终却只是暂时的覆灭。

我们认为，除了具有引人入胜的复杂内部动力学外，这个例子还为现代科学领域的高级数学训练提供了令人振奋的新课程内容，因为它展现了出人意料的行为，并进一步提供了一个数据丰富的实验系统，可用于展示如何运用不太熟悉的渐近方法和复分析进行数学建模的威力。

6. 致谢

我们感谢曾任北卡罗来纳大学文理学院院长的 Kevin Guskiewicz，以及曾任理科高级副院长的 Chris Clemens。感谢他们多年来支持我们的跨学科荣誉微分方程课程，在此期间我们探索了这一系统及其他系统。我们感谢 David Adalsteinsson 提供出色的 Image Tank 和 Data Graph 程序。我们感谢 David McLaughlin 的有益讨论，也感谢 Jim Mahaney 对实验的帮助。我们感谢美国国家科学基金会资助，项目编号：DMS-1910824；以及美国海军研究办公室资助，项目编号：ONR N00014-18-1-2490。

参考文献

[1] Boyce 和 Diprima，《初等微分方程》，Wile(y)，2017 年。

[2] S. Goldstein，“关于不连续运动引起的扩散以及电报方程”，Q. J. Mech andApplied Math.，4，129-156，1951 年。

[3] G. I. Taylor，《连续运动的扩散》，《伦敦数学会会刊》(2) 20，196–212，1921年。