一种适用于非均质材料的准协调嵌入式再生核粒子法

RyanT. Schlinkman[1], Jonghyuk Baek[1], FrankN.Beckwith[2], Stacy M. Nelson[2], 和 J. S. Chen[1*]

[1]加州大学圣迭戈分校

[2]桑迪亚国家实验室，阿尔伯克基，新墨西哥州

摘要

本文提出一种准协调嵌入式再生核粒子法（QCE-RKPM），用于模拟非均质材料。该方法采用了有限元法（FEM）等基于网格的方法所不具备的技术，并避免了当前基于网格方法的嵌入式和浸入式公式中的许多缺点。不同材料域分别进行离散化，从而避免耗时的共形网格划分。在该方法中，通过对背景积分平滑单元进行准协调四叉树细分，修正前景（夹杂）与背景（基体）域积分平滑单元的叠加。由于材料界面附近的背景积分平滑单元具有非协调特性，本文引入变分一致（VC）域积分修正，以恢复积分约束，从而以较小的计算代价实现最优收敛率。还可轻松引入带面积（体积）修正的额外界面积分平滑单元；尽管这些单元是非协调的，但在非协调单元上采用变分一致积分，可进一步提高伽辽金解的精度与稳定性。为通过具有增强强制性的无罚Nitsche方法恰当地逼近材料界面处的弱不连续性，前景离散化表面上的界面节点

也与背景离散化共享。因此，该方法无需使用任何可调参数（例如罚函数型方法所涉及的参数）来确保界面相容性。这种无网格公式的优势在于，它避免了基于网格的浸入式和嵌入式方法中的许多不稳定性。本文通过若干算例展示了 QCE-RKPM 的有效性。

关键词：无网格建模、再生核粒子法、非均质材料、嵌入式离散化、准协调、四叉树细分

1. 引言

大量涉及非均质材料的工程问题，已采用有限元法（FEM）并配合贴体网格进行建模。在这类网格中，两种不同材料的离散化在其界面处相互协调，从而允许界面两侧出现梯度跳跃。然而，构建此类网格可能相当耗时且复杂，尤其是在几何形状复杂的三维情况下。缩短非均质材料网格划分时间的一种方法是采用嵌入式或浸入式方法；这两种方法均可为不同材料创建彼此独立且通常均匀的离散化，并在分析过程中处理网格间的通信。然而，手动网格划分时间的减少，是以增加算法复杂度为代价的，因为必须在维持稳定性和精度的同时，对两种材料之间施加约束。

“浸入式方法”是指这样一类方法：其弱形式方程假定采用重叠网格，因此在前景域下方布置一个虚拟背景域。

这些方法可根据约束类型分为：1）界面约束浸入方法（ICIMs），仅在界面上施加相容性约束；2）体积约束浸入方法（VCIMs），将整个重叠区域内的背景变形约束为随前景运动。最早提出的界面约束浸入方法是 Peskin 提出的浸入边界法（IBM）[1, 2]（参见有限元法的 [3, 4, 5] 及其混合版本），该方法利用狄拉克δ函数的平滑近似来分配流固耦合（FSI）力并插值速度。然而，为防止流体从固体边界[4]处泄漏，IBM 严格限制了前景与背景之间的网格尺寸比。此外，平滑的狄拉克δ函数会将解扩散到多个网格单元上，而不是在界面处形成法向梯度的尖锐不连续性，因此 IBM 只能达到一阶精度，除非加入更复杂的处理步骤[6, 7]。Bazilevs 等人提出的一种较新的界面约束浸入方法公式[8, 9]采用由等几何分析样条[10] 离散的均匀背景网格，以近似背景网格和前景网格的动量方程。这种方法的一个问题是，对于断裂和碎裂中的不连续运动学，背景近似不期望地过于平滑，从而导致损伤区的尺寸随背景网格[11]变化。体积约束浸入方法始于 Glowinsky 等人的分布式拉格朗日乘子法[12]，该方法使用拉格朗日乘子（LM），要求近似空间满足 LBB条件[13, 14]。近年来，体积约束浸入方法的发展包括浸入式有限元方法（IFEM）[15,16] 和修正浸入有限元法（mIFEM）[17]，它们利用再生核（RK）近似[18, 19] 在固体与流体之间插值速度，并将流固耦合力视为体积体力。然而，与所有体积约束浸入方法一样，流体中的平滑近似会将界面的影响扩散到多个单元上，导致较低的收敛率 [20]。变分

用于非均质材料的多尺度浸入法（VMIM） [21] 采用再生核粒子法（RKPM），结合体积拉格朗日乘子和背景近似的变分多尺度分解[22, 23] ，从而实现基于残差的稳定化，并抑制由较大的固体与流体网格尺寸比引起的泄漏失稳[24]。但同样地，它也会因界面附近插值误差较大而导致收敛率较低[21]。VCIM无需沿界面进行繁琐的轮廓积分，因而十分有效；但要达到最优收敛率，就需要直接处理界面处的梯度不连续[25]。此外，VCIM还需要某种形式的稳定化[21, 26]。“嵌入式方法”是指不存在重叠网格的方法；对于基体域与夹杂域的协调性（允许法向梯度不连续），则通过切割单元、聚合单元、使用替代域等技术来处理。切割单元方法要么为与界面相交的单元增加额外自由度（例如 CutFEM [27, 28]），要么将原始单元划分为更小的“积分单元”（例如不连续性增强有限元法（DE-FEM）[29, 30, 31]）。然而，切割或划分单元可能需要复杂的计算几何算法；更重要的是，这会产生所谓的小切割单元问题，即单元可能以任意方式被切割，使一侧留下非常小或狭长的单元[32]。这会导致临界时间步长极小，并产生病态刚度矩阵。为减轻切割单元问题的影响，人们提出了多种方法，例如采用幽灵罚项[32, 33, 34], 、气泡函数[35, 36],、对 Nitsche 积分中的梯度进行精细加权[37, 38], ，或直接舍弃有问题的自由度 [31]。有限单元法（FCM） [39, 40, 41, 42] 采用自适应积分方案，将单元细分为子单元（而非子元素），以布置

求积点，从而更好地近似边界/界面，并避免产生小单元问题。然而，为了准确近似待积分区域，必须多次划分单元，这会导致域积分的计算开销很大[41]。

移位边界/界面方法（SBM/SIM）[43, 44, 45] 在替代区域（例如，完全位于界面内的所有单元）上进行积分，并通过泰勒级数展开，将界面条件从真实界面移至替代界面；该展开涉及被界面切割的单元的梯度。这样，该方法无需切割单元即可保持最优收敛阶（类似思路见 [46, 47] ）。然而，转移算法涉及可能较为复杂的最近点投影过程；为避免收敛率降低，诺伊曼边界条件的转移需要采用高阶近似 [48] 或稳定化的等阶混合方法[49] 。在聚合有限元法（AgFEM）[50, 51, 52], 中，被界面切割的单元与界面内的单元合并，并将存在问题的自由度约束为无问题自由度的线性组合（类似方法见[53, 54, 55, 56]）。这种方法可避免小切割单元并实现最优收敛率，但聚合和约束过程中可能会引入误差。

本文提出了一种属于嵌入式方法范畴的公式，但其独特之处在于采用了无网格方法专有的技术，并避免了上述公式因依赖基于网格的方法而产生的诸多问题。首先，通过叠加方式对背景（基体）和前景（夹杂）分别进行离散。随后，在需要时对

背景积分平滑单元进行准协调四叉树细分（基于网格的方法无法实现这一点）。由于积分平滑单元失去了协调性，我们以极低的计算成本采用变分一致（VC）域积分修正 [57]，以恢复伽辽金精确性所需的积分约束、提高精度并实现最优收敛率。两个区域共用界面节点，这提供了足够的强制性，因此无需使用尼采罚参数。因此，与大多数浸入式和嵌入式方法不同，该公式无需设置任何可调参数来保证界面相容性。我们选择的无网格方法是再生核粒子法（RKPM），因此将该公式称为准协调嵌入式 RKPM（QCE-RKPM）。

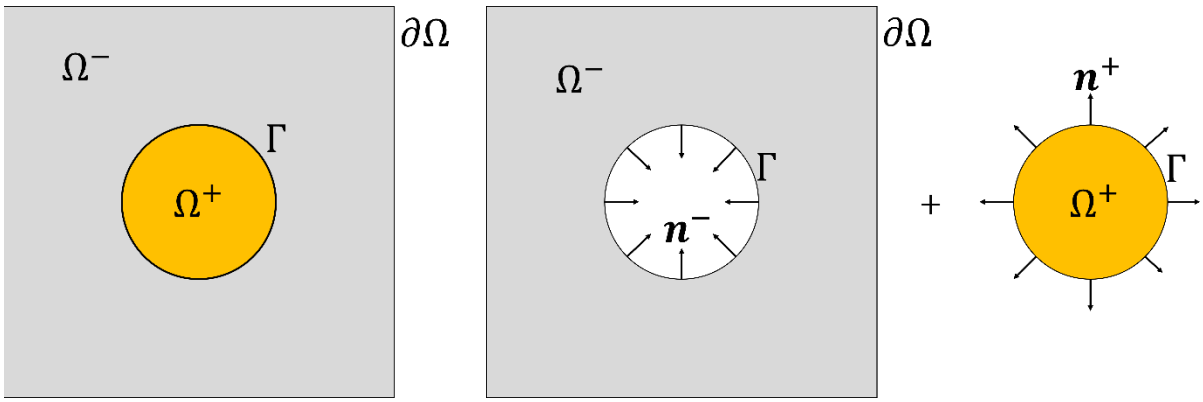
本文其余部分安排如下。第 2 节详细介绍非均质材料的方程。第 3 节综述再生核近似，并讨论无网格方法中的区域积分。第 4 节详细介绍背景域从浸入状态到准协调嵌入区域的离散化过程。第 5 节通过数值算例展示本方法的有效性，第 6 节总结研究结果。

2. 控制方程

2.1. 强形式

考虑一个非均质固体区域 Ω，由基体区域 Ω^- 和夹杂区域 Ω^+组成，其中 $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}^+ \cup \overline{\Omega}^-$。两种材料之间的界面记为 Γ，其中$\Gamma = \overline{\Omega}^+ \cap \overline{\Omega}^-$。基体材料具有外边界 $\partial\Omega$，该边界由

诺伊曼 $\partial\Omega_N$ 和狄利克雷 $\partial\Omega_D$ 部分组成，使得 $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$ 和 $\partial\Omega_N \cap \partial\Omega_D = \emptyset$，示意见图1(a)。



(a) (b)

图1：（a）由基体Ω^- 和夹杂 Ω^+ 材料组成的非均质材料域，其外边界为$\partial\Omega$，两种材料之间的界面为 Γ；以及（b）分离的基体域与夹杂域及其在界面上的外法向量

我们的控制方程是线弹性材料的平衡方程:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_N \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_D, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\big), \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{4}$$

其中:

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{b}^-, & \boldsymbol{x} \in \Omega^- \\ \boldsymbol{b}^+, & \boldsymbol{x} \in \Omega^+, \end{cases} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{u}^-, & \boldsymbol{x} \in \Omega^- \\ \boldsymbol{u}^+, & \boldsymbol{x} \in \Omega^+, \end{cases} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{C}^-, & \boldsymbol{x} \in \Omega^- \\ \boldsymbol{C}^+, & \boldsymbol{x} \in \Omega^+, \end{cases} \tag{7}$$

因此:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{-}(\boldsymbol{u}^{-}) = \boldsymbol{C}^{-}:\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{-}), & \boldsymbol{x} \in \Omega^{-} \\ \boldsymbol{\sigma}^{+}(\boldsymbol{u}^{+}) = \boldsymbol{C}^{+}:\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{+}), & \boldsymbol{x} \in \Omega^{+}, \end{cases} \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ 是柯西应力张量，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ 是体力向量，$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ 是 $\partial\Omega_N$ 上的外法向量，$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ 是 $\partial\Omega_N$ 上的给定牵引力向量，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 是位移向量，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 是 $\partial\Omega_D$ 上的给定位移向量，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ 是弹性本构张量，且 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{2}(\nabla\otimes\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\otimes\nabla)$ 是小应变张量。此外，界面 Γ 上的连续性和平衡条件为:

$$\boldsymbol{u}^{+} - \boldsymbol{u}^{-} = \boldsymbol{0}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{+}(\boldsymbol{u}^{+}) \cdot \boldsymbol{n}^{+} + \boldsymbol{\sigma}^{-}(\boldsymbol{u}^{-}) \cdot \boldsymbol{n}^{-} = \boldsymbol{0}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma, \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{n}^{+}$ 和 $\boldsymbol{n}^{-}$ 分别为夹杂和基体一侧在Γ 上的外法向量，如图1(b)所示。

2.2. 弱形式

为开始推导式（1）至式（4）的弱形式，我们将式（1）乘以检验函数$\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$，并在区域$\Omega$上积分:

$$\left(\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\right)_{\Omega} + \left(\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\right)_{\Omega} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{11}$$

其中，$(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ 是Ω中的内积，并且

$$\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \delta\boldsymbol{u}^{-}, & \boldsymbol{x} \in \Omega^{-} \\ \delta\boldsymbol{u}^{+}, & \boldsymbol{x} \in \Omega^{+}. \end{cases} \tag{12}$$

根据公式（5）至（8）和（12）的定义，公式（11）可按区域拆分：

$$\left(\delta\boldsymbol{u}^{-},\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{-}(\boldsymbol{u}^{-})\right)_{\Omega^{-}}+(\delta\boldsymbol{u}^{-},\boldsymbol{b}^{-})_{\Omega^{-}}=\boldsymbol{0}, \tag{13}$$

$$\left(\delta\boldsymbol{u}^{+},\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{+}(\boldsymbol{u}^{+})\right)_{\Omega^{+}}+(\delta\boldsymbol{u}^{+},\boldsymbol{b}^{+})_{\Omega^{+}}=\boldsymbol{0}. \tag{14}$$

对包含应力散度的项进行分部积分，并利用高斯定理，可得：

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^{-}),\boldsymbol{\sigma}^{-}(\boldsymbol{u}^{-})\right)_{\Omega^{-}}-\left(\delta\boldsymbol{u}^{-},\boldsymbol{n}^{-}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{-}(\boldsymbol{u}^{-})\right)_{\Gamma}=(\delta\boldsymbol{u}^{-},\boldsymbol{b}^{-})_{\Omega^{-}}+(\delta\boldsymbol{u}^{-},\boldsymbol{t})_{\partial\Omega_{N}}, \tag{15}$$

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^{+}),\boldsymbol{\sigma}^{+}(\boldsymbol{u}^{+})\right)_{\Omega^{+}}-\left(\delta\boldsymbol{u}^{+},\boldsymbol{n}^{+}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{+}(\boldsymbol{u}^{+})\right)_{\Gamma}=(\delta\boldsymbol{u}^{+},\boldsymbol{b}^{+})_{\Omega^{+}}. \tag{16}$$

注意，将 $\boldsymbol{n}^{-}=-\boldsymbol{n}^{+}$ 代入界面平衡（10），我们得到 ：

$$\boldsymbol{\sigma}^{+}(\boldsymbol{u}^{+})\cdot\boldsymbol{n}^{+}=\boldsymbol{\sigma}^{-}(\boldsymbol{u}^{-})\cdot\boldsymbol{n}^{+}. \tag{17}$$

这意味着 $\boldsymbol{\sigma}^{+}(\boldsymbol{u}^{+})$、 $\boldsymbol{\sigma}^{-}(\boldsymbol{u}^{-})$或两者的应力线性组合可在界面牵引项中互换使用。将界面上的应力线性组合定义为：

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{u})\equiv\alpha\boldsymbol{\sigma}^{+}(\boldsymbol{u}^{+})+(1-\alpha)\boldsymbol{\sigma}^{-}(\boldsymbol{u}^{-}) \tag{18}$$

其中$\alpha\in[0,1]$。我们可以将（18）重新整理为$\overline{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\sigma}^{-}(\boldsymbol{u}^{-})+\alpha(\boldsymbol{\sigma}^{+}(\boldsymbol{u}^{+})-\boldsymbol{\sigma}^{-}(\boldsymbol{u}^{-}))$，并利用由(17)，可得：

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}^{+}=\boldsymbol{\sigma}^{+}(\boldsymbol{u}^{+})\cdot\boldsymbol{n}^{+}=-\boldsymbol{\sigma}^{-}(\boldsymbol{u}^{-})\cdot\boldsymbol{n}^{-}. \tag{19}$$

将（19）代入（15）和（16），得：

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^-),\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\Omega^-}+\left(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{n}^+\cdot\overline{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{u})\right)_{\Gamma}=(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{b}^-)_{\Omega^-}+(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{t})_{\partial\Omega_N},\tag{20}$$

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^+),\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_{\Omega^+}-\left(\delta\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{n}^+\cdot\overline{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{u})\right)_{\Gamma}=(\delta\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{b}^+)_{\Omega^+},\tag{21}$$

or:

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^-),\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\Omega^-}+\alpha\left(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_{\Gamma}+(1-\alpha)\left(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\Gamma}\\&\quad=(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{b}^-)_{\Omega^-}+(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{t})_{\partial\Omega_N},\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^+),\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_{\Omega^+}-\alpha\left(\delta\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_{\Gamma}-(1-\alpha)\left(\delta\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\Gamma}\\&\quad=(\delta\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{b}^+)_{\Omega^+},\end{aligned}\tag{23}$$

由于无网格形函数不具有克罗内克δ性质，我们采用 Nitsche 方法施加狄利克雷边界条件。其弱形式为：求（$\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{u}^-$）$\in H^1$（$\Omega^+$）$\times H^1$（$\Omega^-$），使得 $\forall$（$\delta\boldsymbol{u}^+,\delta\boldsymbol{u}^-$）$\in H^1$（$\Omega^+$）$\times H^1$（$\Omega^-$）

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^-),\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\Omega^-}+\alpha\left(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_{\Gamma}+(1-\alpha)\left(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\Gamma}\\&\quad-\left(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{n}^-\cdot\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\partial\Omega_D}-(\boldsymbol{\sigma}^-(\delta\boldsymbol{u}^-)\cdot\boldsymbol{n}^-,\boldsymbol{u}^-)_{\partial\Omega_D}+\beta(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{u}^-)_{\partial\Omega_D}\\&\quad=(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{b}^-)_{\Omega^-}+(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{t})_{\partial\Omega_N}-(\boldsymbol{\sigma}^-(\delta\boldsymbol{u}^-)\cdot\boldsymbol{n}^-,\boldsymbol{g})_{\partial\Omega_D}+\beta(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{g})_{\partial\Omega_D},\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^+),\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_{\Omega^+}-\alpha\left(\delta\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_{\Gamma}-(1-\alpha)\left(\delta\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\Gamma}\\&\quad=(\delta\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{b}^+)_{\Omega^+},\end{aligned}\tag{25}$$

其中 β 是罚参数。

备注2.1

或者，也可以从以下势能推导出对称弱形式：

$$\begin{aligned}\Pi = &\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^-), \boldsymbol{C}^-\!:\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\Omega^-} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^+), \boldsymbol{C}^+\!:\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^+)\right)_{\Omega^+} - (\boldsymbol{u}^-, \boldsymbol{b}^-)_{\Omega^-} \\ &- (\boldsymbol{u}^-, \boldsymbol{t})_{\partial\Omega_N} - (\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{b}^+)_{\Omega^+} - (\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}^+, \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-)_\Gamma \\ &- (\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\cdot\boldsymbol{n}^-, \boldsymbol{u}^- - \boldsymbol{g})_{\partial\Omega_D} + \frac{\beta}{2}(\boldsymbol{u}^- - \boldsymbol{g}, \boldsymbol{u}^- - \boldsymbol{g})_{\partial\Omega_D}.\end{aligned} \tag{26}$$

对势能取变分并令其等于零，再根据检验函数将方程拆分为两部分并重新排列，可得:

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^-), \boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\Omega^-} + \alpha\left(\delta\boldsymbol{u}^-, \boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_\Gamma + (1-\alpha)\left(\delta\boldsymbol{u}^-, \boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_\Gamma \\ &\quad + (1-\alpha)(\boldsymbol{\sigma}^-(\delta\boldsymbol{u}^-)\cdot\boldsymbol{n}^+, \boldsymbol{u}^- - \boldsymbol{u}^+)_\Gamma - \left(\delta\boldsymbol{u}^-, \boldsymbol{n}^-\cdot\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\partial\Omega_D} \\ &\quad - (\boldsymbol{\sigma}^-(\delta\boldsymbol{u}^-)\cdot\boldsymbol{n}^-, \boldsymbol{u}^-)_{\partial\Omega_D} + \beta(\delta\boldsymbol{u}^-, \boldsymbol{u}^-)_{\partial\Omega_D} \\ &\quad = (\delta\boldsymbol{u}^-, \boldsymbol{b}^-)_{\Omega^-} + (\delta\boldsymbol{u}^-, \boldsymbol{t})_{\partial\Omega_N} - (\boldsymbol{\sigma}^-(\delta\boldsymbol{u}^-)\cdot\boldsymbol{n}^-, \boldsymbol{g})_{\partial\Omega_D} + \beta(\delta\boldsymbol{u}^-, \boldsymbol{g})_{\partial\Omega_D},\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^+), \boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_{\Omega^+} - \alpha\left(\delta\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_\Gamma - (1-\alpha)\left(\delta\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_\Gamma \\ &\quad + \alpha(\boldsymbol{\sigma}^+(\delta\boldsymbol{u}^+)\cdot\boldsymbol{n}^+, \boldsymbol{u}^- - \boldsymbol{u}^+)_\Gamma = (\delta\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{b}^+)_{\Omega^+}.\end{aligned} \tag{28}$$

此弱形式与式（24）和（25）中给出的弱形式唯一的区别，是增加了界面项 $-(\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\delta\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}^+, \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-)_\Gamma$。此弱形式本质上是无罚项的 Nitsche′方法，用于实现界面相容性。文献[58] 已证明，若前景离散化与背景离散化共享界面节点，则无需添加界面罚项即可增强强制性。

我们发现，对于将在第 4 节讨论的所提方法，式（24）和式（25）中的 α 取任何值都能得到同样好的近似。这与有限元法的切割单元技术不同，后者必须仔细平衡界面梯度，以避免基体矩阵病态以及临界时间步长过小 [37, 38]。为简单起见，我们仅将夹杂界面应力用于界面项（即 $\alpha = 1$）。由此得到数值算例所用的弱形式:

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^-),\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\Omega^-}+\left(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_{\Gamma}-\left(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{n}^-\cdot\boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^-)\right)_{\partial\Omega_D}\\&-(\boldsymbol{\sigma}^-(\delta\boldsymbol{u}^-)\cdot\boldsymbol{n}^-,\boldsymbol{u}^-)_{\partial\Omega_D}+\beta(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{u}^-)_{\partial\Omega_D}\\&=(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{b}^-)_{\Omega^-}+(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{t})_{\partial\Omega_N}-(\boldsymbol{\sigma}^-(\delta\boldsymbol{u}^-)\cdot\boldsymbol{n}^-,\boldsymbol{g})_{\partial\Omega_D}+\beta(\delta\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{g})_{\partial\Omega_D},\end{aligned}\tag{29}$$

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^+),\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_{\Omega^+}-\left(\delta\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{n}^+\cdot\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^+)\right)_{\Gamma}=(\delta\boldsymbol{u}^+,\boldsymbol{b}^+)_{\Omega^+}.\tag{30}$$

3. 变分一致再生核粒子法

本节将详细介绍再生核近似，并讨论适用于所提嵌入式方法的稳定化节点积分。矩阵形式见附录。

3.1. 再生核近似

如图2所示，再生核（RK）近似 [18, 19] 基于一组对区域 Ω 进行离散的NP 散布节点构造。

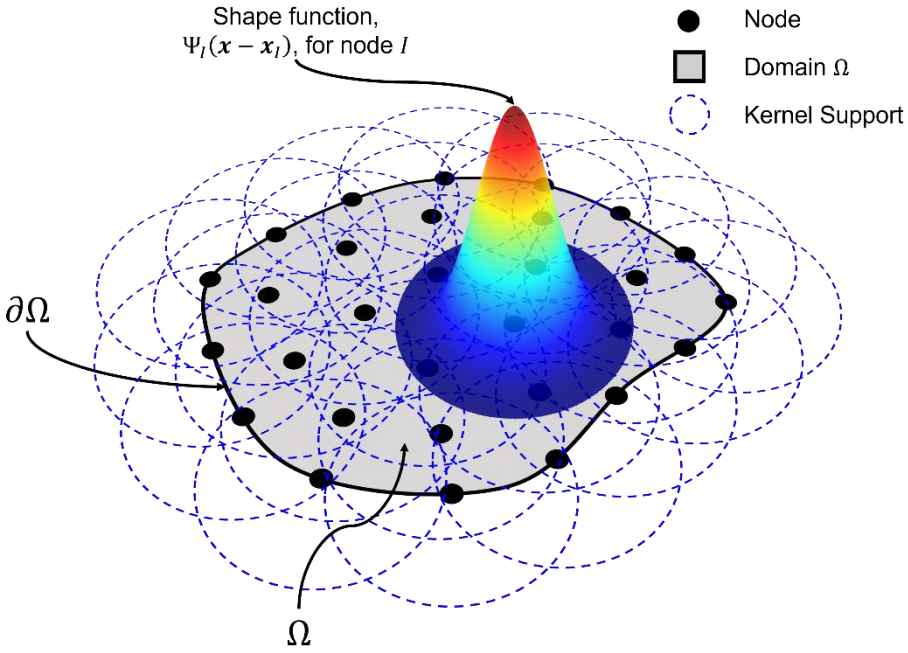


图2：区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 由一组节点离散化。每个节点都有一个圆形核支撑域，其中定义了形函数 Ψ_I 。

令 $u^h(\boldsymbol{x})$ 为 $u(\boldsymbol{x})$ 的近似；再生核近似如下 [19]：

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x})\, u_I, \tag{31}$$

其中，u_I 是与节点 I关联的广义系数，$\Psi_I(\boldsymbol{x})$是与节点 I 关联的再生核近似函数，表示为：

$$\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \mathbf{H}^T(\mathbf{0})\, \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{x})\, \mathbf{H}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)\, \phi_a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I), \tag{32}$$

其中，$\phi_a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)$ 是核函数，用于定义近似的局部性和光滑性（即连续阶数）。再生核近似中常用的核函数是三次B样条核，它具有 C^2 连续性：

$$\phi_a(z) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4z_I^2 + 4z_I^3, & 0 \le z_I \le \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3}(1 - z_I)^3, & \frac{1}{2} < z_I \le 1 \\ 0, & z_I > 1 \end{cases}, \qquad z_I = \frac{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I\|}{a_I}, \tag{33}$$

而 $\mathbf{M}(\boldsymbol{x})$ 是矩量矩阵：

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{H}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I)\, \mathbf{H}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I)\, \phi_a(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I), \tag{34}$$

其中，$\mathbf{H}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I)$ 是单项式的基向量：

$$\mathbf{H}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I) = [1, x_1 - x_{1I}, x_2 - x_{2I}, x_3 - x_{3I}, (x_1 - x_{1I})^2, \dots, (x_3 - x_{3I})^n]. \tag{35}$$

这里 $\mathbf{H}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I)$ 的基函数阶次为 n，可在近似中保证 n^{th} 阶完备性。 n:

$$\sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x})\, x_{1I}^i x_{2I}^j x_{3I}^k = x_1^i x_2^j x_3^k, \qquad 0 \le i + j + k \le n. \tag{36}$$

为了使矩量矩阵可逆，待求值点 $\boldsymbol{x}$ 必须被至少与基向量 [59] 维数相等的核支撑域覆盖；这些核支撑域中的点在二维情况下须非共线，在三维情况下须非共面。

备注 3.1

1. 在存在凹特征（微观结构中常见）的情况下使用无网格方法时，需要采用视线算法来确定节点对求值点 [60, 61] 的影响。节点的核支撑域覆盖求值点这一事实，并不足以确定其影响；节点还需要在材料体内部与求值点之间具有一条

视线。例如，考虑图3。节点1的核支撑域覆盖节点2、3和4，以及区域内的其他节点。节点1在区域内部与节点2之间具有视线；由于区域边界以直线连接节点1和节点3，节点1与节点3之间也具有视线。虽然节点4位于节点1的核支撑域内，但从节点1到节点4画一条直线会经过区域外部，因此在节点4处求值时，节点1的核函数值为零。

2. 视线算法会产生不连续的核函数，从而导致近似中出现不理想的不连续性。另一种在处理凹特征的同时保持近似连续性的方法，是使用衍射核支撑域 [62, 61, 63]，使其绕过拐角弯曲，例如图3中的节点3。为简便起见，本文采用视线方法。

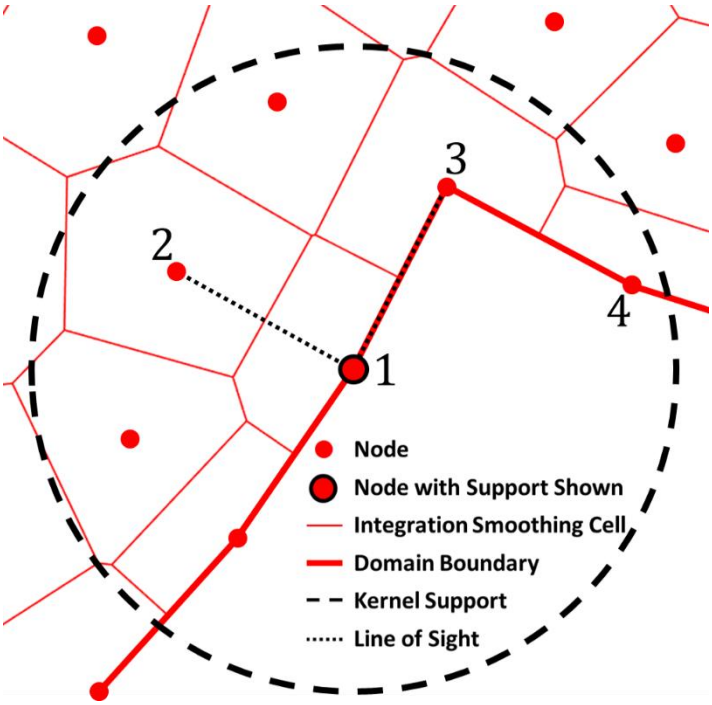


图3：视线示例

3.2. 区域积分

3.2.1. 稳定化协调/非协调节点积分

有限元法中常用的高斯求积规则并不适用于无网格方法，因为无网格离散化中不存在网格。尽管曾使用独立于离散化点的“背景”网格来定义高斯求积，但几乎不可能使网格与再生核函数的核支撑域相匹配，如图3所示，这会导致积分误差，进而降低无网格方法的收敛率[64, 65, 57, 59]。人们也考虑过更高阶的求积。例如，在实际应用中，式（33）中的三次B样条核与线性基底结合使用时，至少需要 5th 阶高斯求积规则才能达到足够的精度，但这种做法在计算上难以实现 [57, 59, 66, 67]。另一种方法是直接节点积分（DNI），即将积分点设在节点处；这对于无网格方法而言很自然，但会低估应变能，并产生虚假的零能模态 [65]。

传统积分方法的这些问题促使人们开发了稳定协调节点积分（SCNI） [65], ，该方法在协调的节点“积分平滑单元”上计算平滑梯度，而不是直接在节点积分点处求导，见图4。引入了以下平滑梯度[65]：

$$\widetilde{\Psi}_{I,i}(\boldsymbol{x}_L) = \frac{1}{V_L}\int_{\Omega_L} \Psi_{I,i}(\boldsymbol{x})\, d\Omega = \frac{1}{V_L}\int_{\partial\Omega_L} \Psi_I(\boldsymbol{x})\, n_i(\boldsymbol{x})\, d\Gamma, \tag{37}$$

其中，$\widetilde{\Psi}_{I,i}(\boldsymbol{x}_L)$是节点$I$ 的i^{th} 方向上的平滑形函数梯度，该梯度在位于$\boldsymbol{x}_L$的节点L 的单元上为常数， V_L 是积分所用的节点单元体积

与节点 L相关联的平滑单元 Ω_L ，而 n_i 是积分平滑单元边界 $\partial\Omega_L$上的外法向量的i^{th} 分量；参见图4。已有研究表明，SCNI满足积分约束，并在Galerkin近似中达到线性精确性 [65, 57]。协调积分平滑单元可通过多种方式构造，包括Voronoi图、Delaunay三角剖分，或基于有限元网格构造，要求各单元的边界彼此协调。

为模拟极端变形和碎裂问题，研究人员开发了 SCNI 的一种非协调对应方法——稳定非协调节点积分（SNNI）[68, 69]。在 SNNI 中，积分平滑单元由简单几何形状构成，例如以节点为中心的立方体或球体，且其体积与相应协调单元的体积相等。图4展示了 SCNI 和 SNNI 单元的二维示例。

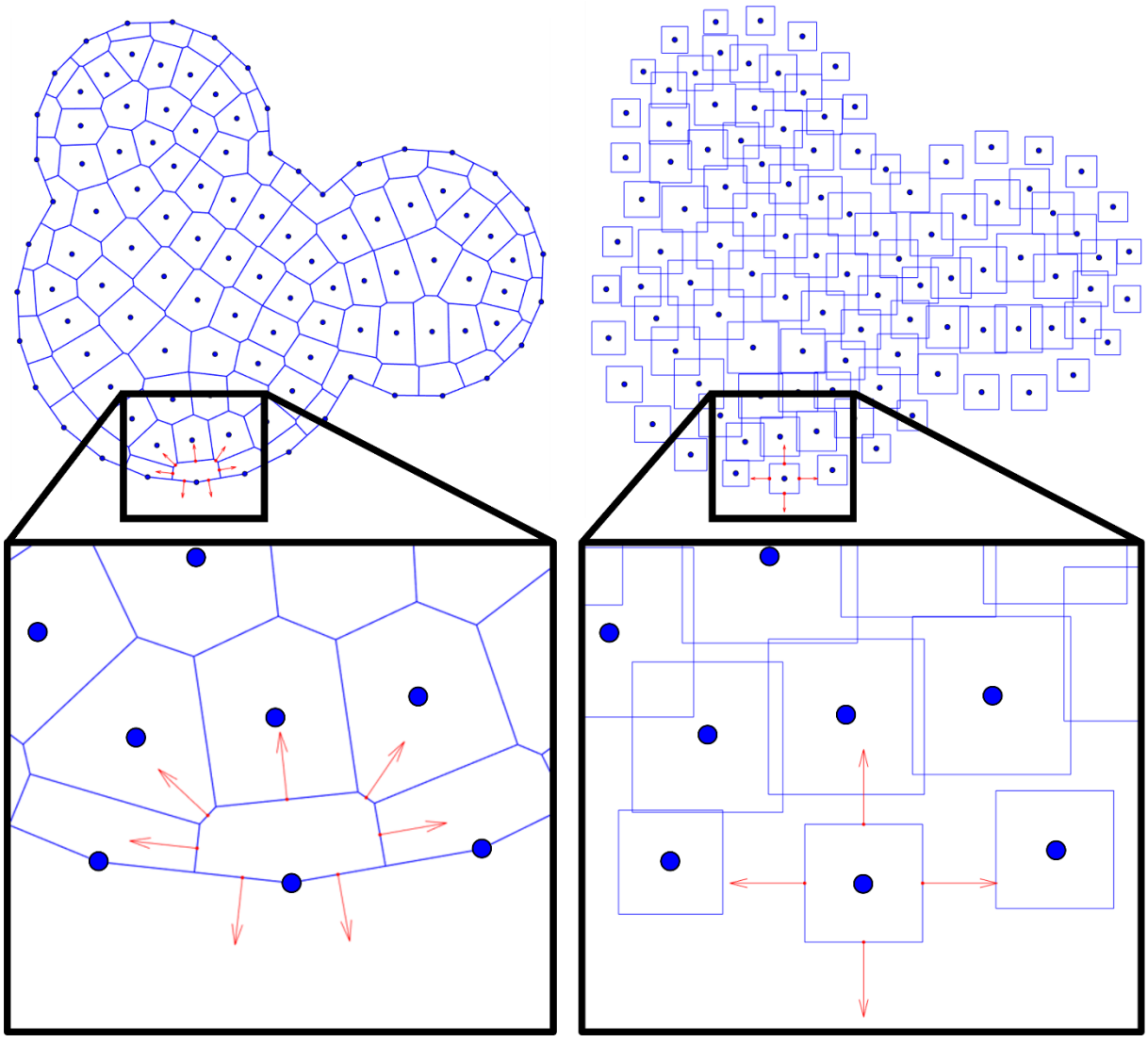


图4：平滑积分单元；SCNI 使用 Voronoi 图实现协调性（左），SNNI 使用方形非协调单元（右）；红色箭头表示单元在单元边界评估点处的外法向量

3.2.2. 非协调节点积分的变分一致修正

对于所提出的准协调嵌入式 RKPM 公式，将采用 SNNI，这对确保所提方法的有效性和可靠性至关重要。由于 SNNI 中的积分平滑单元不再彼此协调，SNNI 失去了一级变分一致性，因此也失去了最优收敛率。为恢复变分一致性，

针对不具备变分一致性的积分方法（包括 SNNI），研究者提出了变分一致修正，并将其称为变分一致性 SNNI（VC-SNNI）[66]。该修正使采用协调或非协调积分平滑单元的节点积分能够在任意基函数阶次下实现变分一致性。

变分一致性是指伽辽金方法具备实现 n^{th} 阶伽辽金精确性并达到最优收敛的能力。n^{th} 阶的变分一致性要求具备 n^{th} 阶完备性，这可通过采用 n^{th} 阶基函数的再生核实现；同时还需满足以下形式的 n^{th} 阶积分约束[57]：

$$\hat{\int_{\Omega}} \bar{\Psi}_{I,j}\, \boldsymbol{P}\, d\Omega = \hat{\int_{\partial\Omega}} \bar{\Psi}_{I}\, n_j\, \boldsymbol{P}\, d\Gamma - \hat{\int_{\Omega}} \bar{\Psi}_{I}\, \boldsymbol{P}_{,j}\, d\Omega, \tag{38}$$

其中 $\bar{\Psi}_I$ 是检验函数的近似函数，“^” 在中表示数值积分，且$\boldsymbol{P}$ 是（n-$\hat{\int}$）th 阶单项式向量：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & \cdots & x^{\alpha}y^{\beta} & \cdots & y^{(n-1)} \end{bmatrix}^T. \tag{39}$$

式（38）称为 [66] 中的积分约束。要使任何 Galerkin近似达到所需的变分一致性水平，必须满足以下两点：1）其试函数能够在式（36）中精确再现所需的基函数阶次；2）满足式（38）中的积分约束。对于线性变分一致性，$\boldsymbol{P} = 1$，式（38）可简化为：

$$\hat{\int_{\Omega}} \bar{\Psi}_{I,j}\, d\Omega = \hat{\int_{\partial\Omega}} \bar{\Psi}_{I}\, n_j\, d\Gamma, \tag{40}$$

采用协调积分平滑单元时，可通过式（37）满足该条件。这表明，采用线性基底的SCNI 自动满足一阶变分一致性，无需进行 VC修正。对于不具备变分一致性的积分方法，若希望满足式（38）中的高阶变分一致性，可考虑对试函数梯度进行修正 [66]:

$$\bar{\Psi}_{I,j} = \Psi_{I,j} + \Theta_I \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\zeta}_{Ij}, \tag{41}$$

其中，$\bar{\Psi}_{I,\ j}$ 为修正后的试函数梯度，Θ_I 为:

$$\Theta_I = \begin{cases} 1, & \mathrm{supp}(\Psi_I) \neq 0 \\ 0, & \mathrm{else} \end{cases}, \tag{42}$$

其中，$\boldsymbol{\zeta}_{Ij}$ 是每个节点I 和方向j对应的未知系数列向量。将（41）中的修正试函数梯度代替（38）中的标准试函数梯度并重新整理:

$$\int_{\Omega}^{\wedge} \Theta_I \, \boldsymbol{P} \, \boldsymbol{P}^T d\Omega \; \boldsymbol{\zeta}_{Ij} = \int_{\partial\Omega}^{\wedge} \Psi_I \, n_j \, \boldsymbol{P} \, d\Gamma - \int_{\Omega}^{\wedge} \left(\Psi_I \, \boldsymbol{P}_{,j} + \Psi_{I,j} \, \boldsymbol{P} \right) d\Omega, \tag{43}$$

or:

$$\boldsymbol{M}_I \boldsymbol{\zeta}_{Ij} = \boldsymbol{r}_I^j, \tag{44}$$

$$\boldsymbol{M}_I = \int_{\Omega} \Theta_I \, \boldsymbol{P} \, \boldsymbol{P}^T d\Omega, \tag{45}$$

$$\boldsymbol{r}_I^j = \int_{\partial\Omega}^{\wedge} \Psi_I \, n_j \, \boldsymbol{P} \, d\Gamma - \int_{\Omega}^{\wedge} \left(\Psi_I \, \boldsymbol{P}_{,j} + \Psi_{I,j} \, \boldsymbol{P} \right) d\Omega, \tag{46}$$

其中，$\boldsymbol{r}_I^j$ 是未进行 VC修正的公式（38）的残差。一旦求解出（43）中的$\boldsymbol{\zeta}_{Ij}$,

修正测试函数梯度 (41) 可以计算得到。利用修正测试函数梯度，弹性的 Galerkin近似可表示为：

$$\int_{\Omega}^{\wedge} \bar{\boldsymbol{B}}_I^T \, \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega}^{\wedge} \boldsymbol{\Psi}_I^T \, \boldsymbol{\eta}^T \, \boldsymbol{\sigma} \, d\Gamma + \int_{\Omega}^{\wedge} \boldsymbol{\Psi}_I^T \, \boldsymbol{b} \, d\Omega, \tag{47}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{B}}_I$ 是节点I 的修正应变-位移矩阵，由根据公式(41)计算得到的修正测试函数梯度组成。将$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}$ 代入(47)的左端，刚度矩阵为：

$$\boldsymbol{K}_{IJ} = \int_{\Omega}^{\wedge} \bar{\boldsymbol{B}}_I^T \, \boldsymbol{C} \, \boldsymbol{B}_J \, d\Omega, \tag{48}$$

这是一种Petrov-Galerkin公式。已在[57] 中证明，当$\boldsymbol{\zeta}_{Ij}$ 中的系数足够小时，这种形式是稳定的。

对于本文中的示例，我们使用线性基底，并力求实现一阶变分一致性。对于线性基底 $\boldsymbol{P} = 1$，公式（44）至（46）变为：

$$M_I \zeta_{Ij} = r_I^j, \tag{49}$$

$$M_I = \int_{\Omega}^{\wedge} \Theta_I \, d\Omega, \tag{50}$$

$$r_I^j = \int_{\partial\Omega}^{\wedge} \Psi_I \, n_j \, d\Gamma - \int_{\Omega}^{\wedge} \Psi_{I,j} \, d\Omega. \tag{51}$$

3.2.3. 自然稳定化节点积分

尽管采用线性基函数的 SCNI 和 VC-SNNI 实现了一阶变分一致性，但它们仍然是节点积分方法，因此属于降阶积分方法。因此，这些积分方法仍可能激发非物理的低能量模态，从而需要使用稳定化方法加以补救 [70, 71, 66]。无需可调参数且计算效率最高的稳定化方法是自然稳定化节点积分（NSNI）[66]。NSNI 将应变-位移基体展开为泰勒级数 [72, 73, 74]：

$$\widehat{\boldsymbol{B}}_I(\mathbf{x}_L) = \widetilde{\boldsymbol{B}}_I(\mathbf{x}_L) + (x - x_L) \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}}^{\nabla}_{Ix}(\mathbf{x}_L) + (y - y_L) \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}}^{\nabla}_{Iy}(\mathbf{x}_L) + (z - z_L) \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}}^{\nabla}_{Iz}(\mathbf{x}_L), \tag{52}$$

其中，$\widetilde{\boldsymbol{B}}_I$ 是根据式（37）由 SCNI 或 VC-SNNI 得到的平滑形函数梯度基体，$\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\nabla}_{Ix}$、$\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\nabla}_{Iy}$和 $\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\nabla}_{Iz}$ 分别是沿x、y和z方向的隐式梯度的平滑梯度：

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\nabla}_{Ix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,xx} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,yx} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,zx} \\ \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,yx} & \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,xx} & 0 \\ \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,zx} & 0 & \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,xx} \\ 0 & \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,zx} & \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,yx} \end{bmatrix}, \tag{53}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\nabla}_{Iy} = \begin{bmatrix} \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,xy} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,zy} \\ \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,yy} & \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,xy} & 0 \\ \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,zy} & 0 & \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,xy} \\ 0 & \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,zy} & \widetilde{\Psi}^{\nabla}_{I,yy} \end{bmatrix}, \tag{54}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_{Iz}^{\nabla}=\begin{bmatrix}\widetilde{\Psi}_{I,xz}^{\nabla} & 0 & 0\\ 0 & \widetilde{\Psi}_{I,yz}^{\nabla} & 0\\ 0 & 0 & \widetilde{\Psi}_{I,zz}^{\nabla}\\ \widetilde{\Psi}_{I,yz}^{\nabla} & \widetilde{\Psi}_{I,xz}^{\nabla} & 0\\ \widetilde{\Psi}_{I,zz}^{\nabla} & 0 & \widetilde{\Psi}_{I,xz}^{\nabla}\\ 0 & \widetilde{\Psi}_{I,zz}^{\nabla} & \widetilde{\Psi}_{I,yz}^{\nabla}\end{bmatrix}, \tag{55}$$

其中，$\widetilde{\Psi}_{I,}{}^{\nabla}{}_{ij}$ 表示使用j^{th}方向的隐式梯度形函数得到的i^{th}方向平滑梯度。j^{th}方向的隐式梯度形函数定义如下：

$$\Psi_{I,j}^{\nabla}(\boldsymbol{x})=\mathbf{H}_j^T\,\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{x})\,\mathbf{H}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)\,\phi_a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I), \tag{56}$$

其中，线性基底的 $\mathbf{H}_j$ 具有以下取值：

$$\mathbf{H}_x^T=[0,-1,0,0], \tag{57}$$
$$\mathbf{H}_y^T=[0,0,-1,0], \tag{58}$$
$$\mathbf{H}_z^T=[0,0,0,-1]. \tag{59}$$

注意，(56)与标准再生核形函数方程(32)具有相同的形式，唯一的区别在于用$\mathbf{H}_j^T$ 替代$\mathbf{H}^T(\mathbf{0})$。因此，NSNI稳定化仅需极少的计算量。

使用(52)中的NSNI，经过VC修正的刚度矩阵变为：

$$\int_{\Omega}^{\hat{}}\widehat{\boldsymbol{B}}_I^T\boldsymbol{C}\,\widehat{\boldsymbol{B}}_J\,d\Omega=\sum_{L=1}^{NP}\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_I^T\,\boldsymbol{C}\,\widetilde{\boldsymbol{B}}_J\,V_L+\widetilde{\boldsymbol{B}}_{Ix}^{\nabla\,T}\boldsymbol{C}\,\widetilde{\boldsymbol{B}}_{Jx}^{\nabla}\,M_{Lx}+\widetilde{\boldsymbol{B}}_{Iy}^{\nabla\,T}\boldsymbol{C}\,\widetilde{\boldsymbol{B}}_{Jy}^{\nabla}\,M_{Ly}+\widetilde{\boldsymbol{B}}_{Iz}^{\nabla\,T}\boldsymbol{C}\,\widetilde{\boldsymbol{B}}_{Jz}^{\nabla}\,M_{Lz}\right), \tag{60}$$

其中，$\widehat{\boldsymbol{B}}_I$ 是经VC修正的展开应变-位移矩阵，$\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{B}}}_I$ 是根据（41）以及（53）至（59）由SCNI或SNNI得到的经VC修正的平滑应变-位移矩阵，M_{Lx}、M_{Ly}和M_{Lz} 是关于节点L的惯性矩。在（60）中，我们假设

当节点位于各自节点单元的质心时，一次惯性矩和惯性积为零。尽管边界节点并不位于其单元中心，但我们通过数值实验发现，二次惯性矩足以稳定这些节点。

正如我们将在第 4 节中展示的，背景基体域由协调平滑积分单元构成，但界面附近的单元不协调；而前景夹杂域则完全由协调单元构成。因此，背景域和前景域将分别采用经 NSNI 稳定化的 VC-SNNI 和 SCNI。对于所有其他体积分，例如体力项，则采用直接节点积分。

4. 准协调嵌入离散

本文提出的准协调嵌入（QCE）离散分为三个阶段，本节将详细阐述各阶段几何操作背后的原理。全文将介绍这一无网格策略相较于标准浸入方法，以及源自有限元法等基于网格的方法的嵌入式方法所具有的优势。

4.1. 初始浸入状态

为避免耗时的保形离散，背景域和前景域分别进行离散化，并且如图5所示，前景离散化最初嵌入背景离散化中。背景和

前景域称为重叠区域，而重叠区域中的背景离散化称为虚拟离散化。

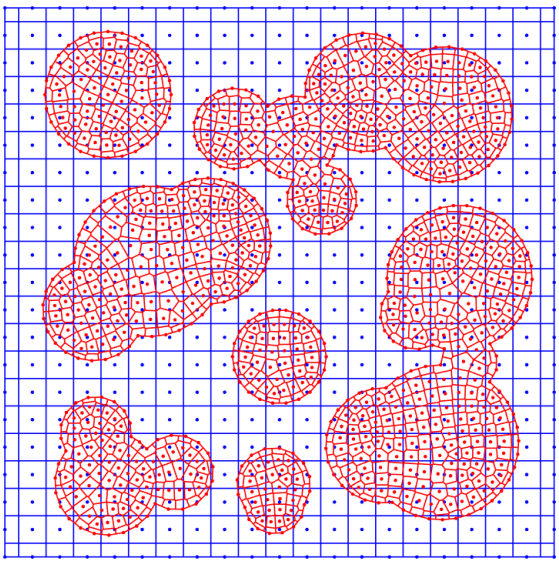


图5：Bac　景和前景平滑积分单元在初始浸入状　e

4.2. 非协调四叉树细分

浸入式方法（尤其是 VCIM）存在的一个问题是，由于该近似在界面处具有连续性，会导致背景解“模糊”。例如，在模拟复合材料中夹杂的脱粘时，准确捕捉界面处的弱不连续性至关重要。浸入式方法的第二个问题是，离散化比（背景域与前景域之间）必须保持在一定范围内，以避免刚度矩阵病态。在我们提出的框架中，我们移除了虚拟域节点和平滑单元，从而避免背景近似模糊以及刚度矩阵病态。对于采用再生核近似的 RKPM，这些离散化单元用作计算节点面积（体积）的“参考”，并用作 SCNI 或 SNNI 应变平滑的积分平滑单元。

为使矩阵积分点以非协调方式满足一阶积分约束，可通过校正这些单元的面积（体积），轻松弥补完全移除与界面相交的虚拟平滑积分单元所产生的间隙。当背景与前景节点间距比过大（反之亦然）时，可系统地插入节点和平滑积分单元，见图 6。

确定背景平滑积分单元的细分层级（记为 n_R）的一种简单策略如下：

$$n_R = \begin{cases} \lfloor n_{log} \rfloor, & n_{log} > 0 \\ 0, & n_{log} \le 0' \end{cases} \tag{61}$$

$$n_{log} = \log_2(\mathcal{R}'), \tag{62}$$

$$\mathcal{R}' = \begin{cases} \lceil \mathcal{R} \rceil, & \mathcal{R} \bmod 1 \ge k,\ \mathcal{R} > 1 \\ \lfloor \mathcal{R} \rfloor, & \mathcal{R} \bmod 1 < k,\ \mathcal{R} > 1, \\ 1, & \mathcal{R} \le 1 \end{cases} \tag{63}$$

$$\mathcal{R} = \frac{h^-}{h^+_{\mathrm{Intf}}}, \tag{64}$$

其中，n_R 是与界面相交的背景平滑积分单元被细分的次数，$\lfloor \cdot \rfloor$ 是向下取整函数，可将小数向下舍入到最近的整数；$\lceil \cdot \rceil$ 是向上取整函数，可将小数向上舍入到最近的整数；k 是介于 0 和 1 之间的实数；R 是节点间距比；h^- 是四叉树细分前的均匀背景节点间距；h^+_{Intf} 是界面上夹杂节点的平均节点间距。在我们的示例中，如图 6 所示，我们采用了 $k = 0.5$，这样除非 $\mathrm{R} \le 1$，式 (63) 会将 R 舍入到最近的整数。这种四叉树细分可在材料界面附近实现平滑的离散密度过渡。在以下情况下也可以采用类似的策略：

背景离散密度高于前景离散密度。图 7(a) 和图 7(b) 分别展示了单层和双层非共形四叉树细分的中间状态。还可以考虑这种具有可变细分层级的非共形四叉树细分策略，如图 7(c) 所示。

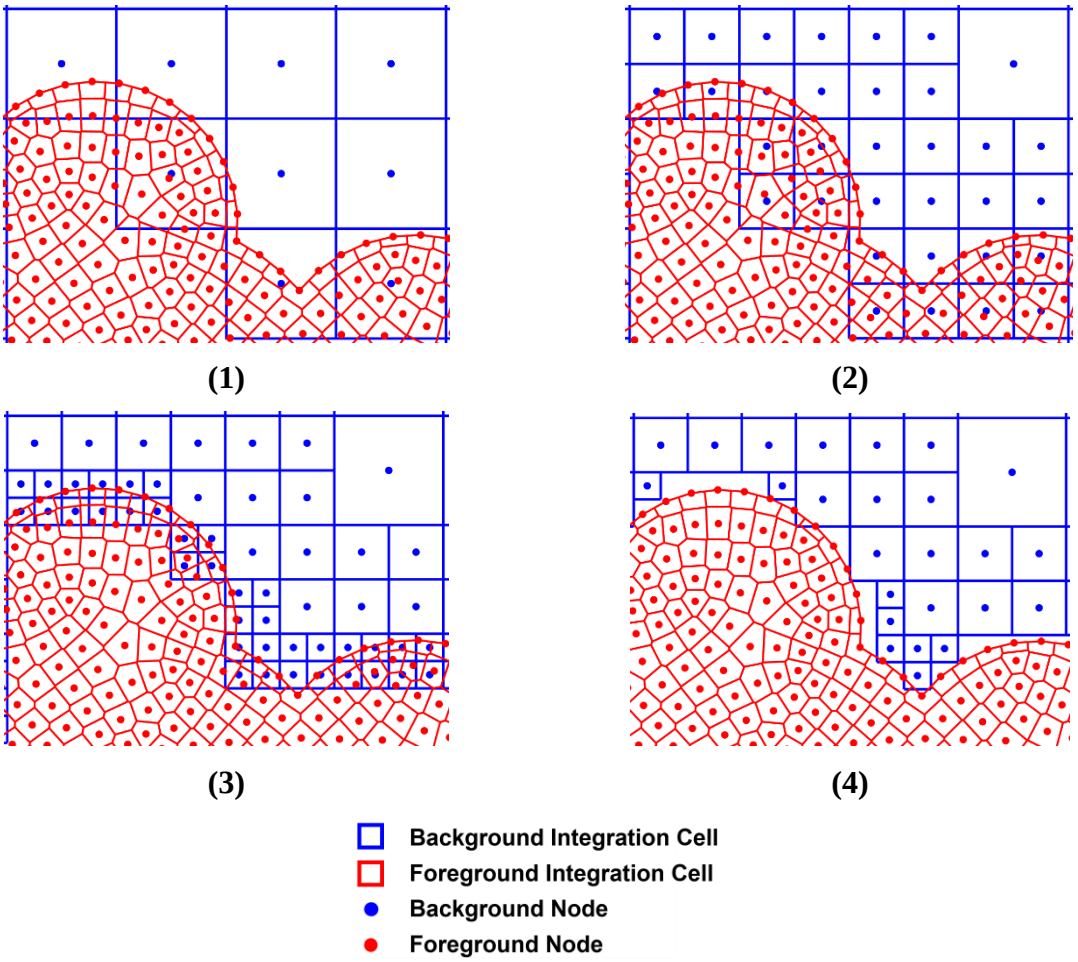
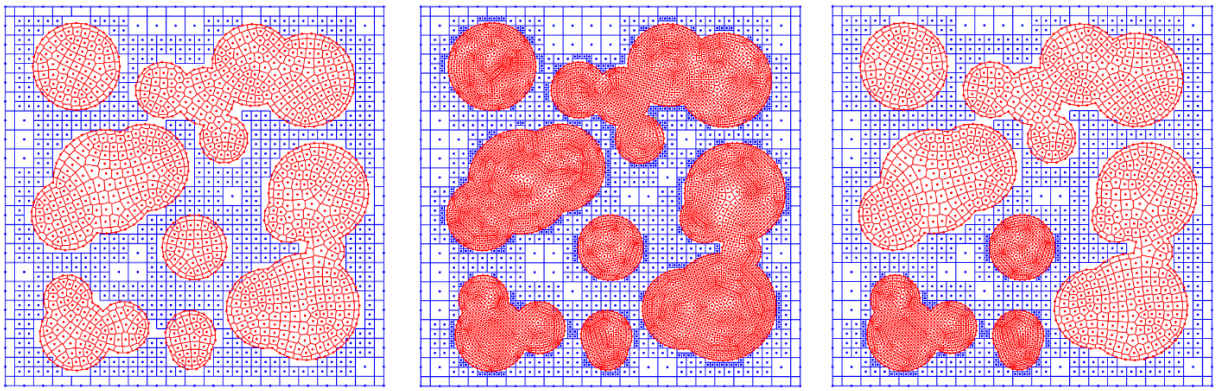


图 6：四叉树细分过程：(1) 移除所有完全位于重叠区域内的节点和平滑积分单元。(2) 如果 $n_R \geq 1$，细化距界面在指定距离内或与界面相交的剩余平滑积分单元。(3) 如果 $n_R \geq 2$，则对跨越界面的单元重复上述步骤 (1) 和 (2) $n_R - 1$ 次。(4) 移除所有新的、其单元边界评估点位于重叠区域内的平滑积分单元。



(a) (b) (c)

图7：非协调四叉树细分：（a）一级细分，（b）二级细分，以及（c）可变层级四叉树细分

4.3. 非协调节点积分的积分约束修正

本节研究由于移除重叠平滑单元和四叉树细分而导致的缺失面积（体积）的影响。值得注意的是，在式（44）和（46）的非协调节点积分VC修正中，可以通过残差 $\boldsymbol{r}_I^j$ 修正缺失面积（体积）。如第3.2.2节所述，变分一致（VC）修正会导出Petrov-Galerkin公式，其稳定性取决于残差 $\boldsymbol{r}_I^j$ [57] 的大小。因此，尽管VC修正在式（41）中发挥作用并不要求所有平滑单元的体积都等于计算域的体积，但满足面积（体积）守恒可以减小修正残差 $\boldsymbol{r}_I^j$，从而提高稳定性。用线性函数替换式（41）和（51）一阶积分约束中的RK形函数，可以说明面积（体积）守恒对修正系数的影响。设 $\Psi_I = \Psi = x + y + z$ 的支撑覆盖任意三维区域 Ω 的全部范围。由式（51）可得：

$$r^j = \hat{\int_{\partial\Omega}} (x + y + z)\, n_j \, d\Gamma - \hat{\int_{\Omega}} d\Omega\,, \tag{65}$$

利用高斯定理:

$$\int_{\partial\Omega} x_i \, n_j \, d\Gamma = \int_{\Omega} x_{i,j} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta_{ij} \, d\Omega = V\delta_{ij}. \tag{66}$$

其中 V 是计算域的体积。将 (66) 代入 (65)，得:

$$r^j = V - \hat{V}, \tag{67}$$

其中 $\hat{V}$ 是所有积分平滑单元的总体积:

$$\hat{\int_{\Omega}} d\Omega = \sum_{I=1}^{NC} V_I \equiv \hat{V}, \tag{68}$$

其中 NC 是平滑单元的数量，V_I 是每个平滑单元的体积。由于 $\Psi_I = \Psi$ 的支撑覆盖整个计算域，因此对于 $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$，有 $\Theta_I = \Theta = 1$；又由于积分 (50) 是对所有平滑单元进行的，因此 (50) 可写为:

$$M_I = M = \hat{\int_{\Omega}} \Theta \, d\Omega = \hat{\int_{\Omega}} d\Omega = \sum_{I=1}^{NC} V_I \equiv \hat{V}, \tag{69}$$

因此，(49)变为:

$$\hat{V}\, \zeta_j = V - \hat{V}, \tag{70}$$

or:

$$\zeta_j = \frac{V - \hat{V}}{\hat{V}} = \frac{V}{\hat{V}} - 1, \tag{71}$$

利用(71)，并注意到对于线性基底，$\boldsymbol{P}^T = P = 1$ (41)变为：

$$\bar{\Psi}_{I,j} = \bar{\Psi}_{,j} = 1 + \frac{V}{\hat{V}} - 1 = \frac{V}{\hat{V}}. \tag{72}$$

式（71）和式（72）表明，VC修正在满足变分一致性的同时，还起到了体积校正的作用，其中VC修正的大小部分取决于总积分平滑单元面积（体积）与计算域面积（体积）之间的偏差。

注4.1。尽管积分平滑单元不具协调性，但在其中保持面积（体积）守恒，可以使VC修正主要用于修正积分平滑单元的不协调性，从而得到更加稳定且精确的伽辽金解。如图8所示，只需在界面节点处添加以其为中心的非协调“体积恢复”平滑单元，即可轻松实现积分平滑单元的体积守恒。

注 4.2。界面节点可以由前景域和背景域近似共用，这有以下优点：1）如第 2.2 节所述，增强强制性使得 Nitsche’s 方法无需罚项；2）再生核近似中的单位分解可以在每个子域中保持。

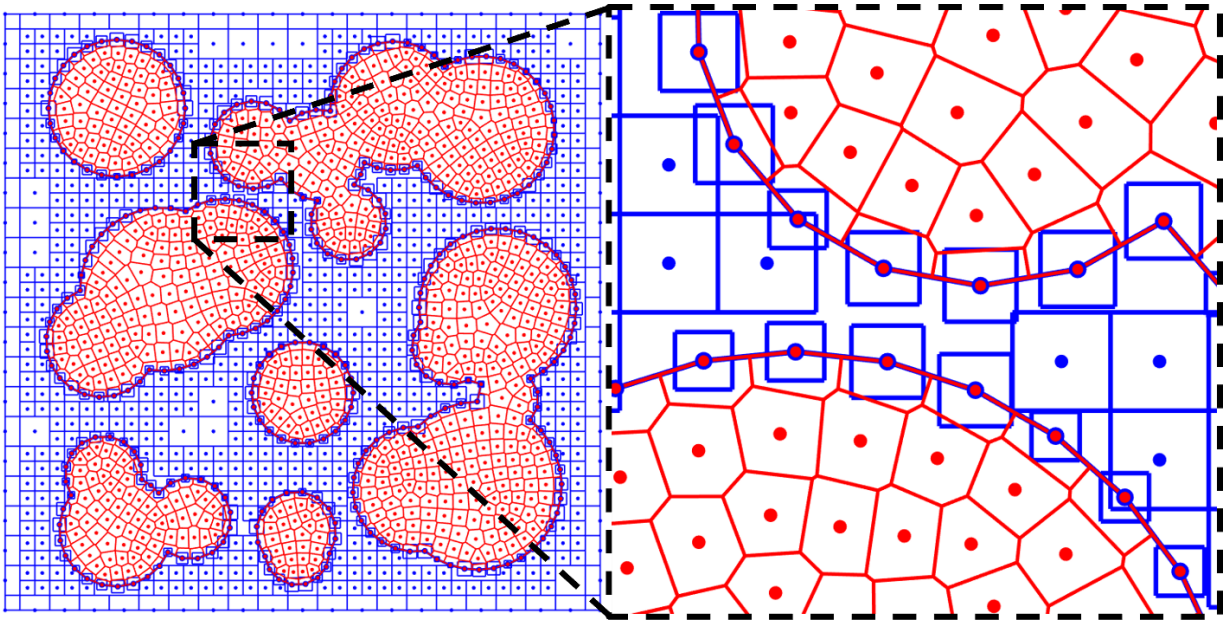


图 8：在界面节点上添加以其为中心的方形非协调积分平滑单元

5. 数值算例

本节通过若干数值算例，并与贴体有限元法和解析解进行比较，展示所提出的 QCE-RKPM 的有效性。对于所有算例，再生核近似采用线性基底和三次B样条核函数，归一化支撑尺寸为 $c = 2.0$，并使用视线算法（见第 3.1 节及第 4.3 节中的修正）确定节点的影响范围。此外，前景域和背景域近似共用界面节点。前景域和背景域的域积分分别采用 SCNI 和 VC- SNNI，而两者的稳定化均采用 NSNI。采用带罚

参数 $\beta = 100\frac{E^-}{}$ h用于施加狄利克雷边界条件，其中 h^- 是四叉树细分之前背景域的原始节点间距。界面附近背景积分平滑单元的四叉树细分遵循第4.2节中给出的策略。为对 QCE-RKPM 结果进行后处理，对于具有积分平滑单元的节点，使用节点平滑梯度计算节点处的应变值；对于不具有积分平滑单元的节点，则使用在该节点处计算的直接梯度。随后利用 RK形函数将这些值插值到高斯点，以同时用于误差计算和等值线绘图。为确保比较公平，有限元法的应变采用在各单元节点处计算的标准形函数梯度来计算，并对节点所属的所有单元中的节点应变取平均值。随后使用单元形函数将平均节点应变值插值到高斯点。为计算误差范数，使用 10th 阶高斯求积以确保足够的精度。

5.1. 一维复合杆

该示例用于考察所提出的QCE-RKPM 中“非协调”积分平滑单元如何影响解的精度和收敛率。如图9所示，在以下研究中，一个固定端复合杆承受不同的载荷和边界条件。线弹性材料属性设定为 $E^+ = 100{,}000$ 和 $E^- = 1{,}000$。

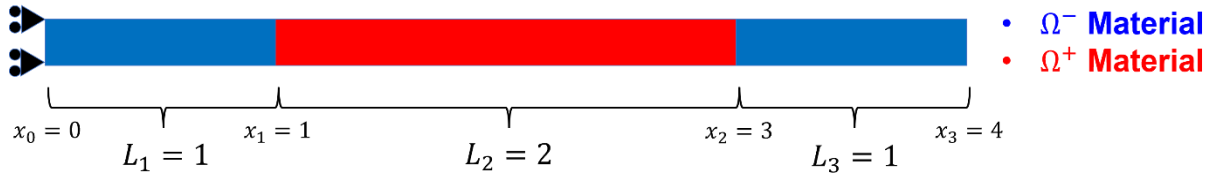


图9：左端固定的复合杆

5.1.1. 含弱不连续的分段线性片测试

在本小节中，在复合杆的右端施加了 $u = g = 0.3$的位移。如图10所示，前景域 Ω^+ 被离散为30个节点，并初始嵌入整个区域 $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^- \cup \bar{\Omega}^+$ ，该区域同样由30个节点离散。这导致前景域的节点间距为背景节点间距的一半，并且如图10所示，它们对应的积分平滑单元在界面处不匹配。

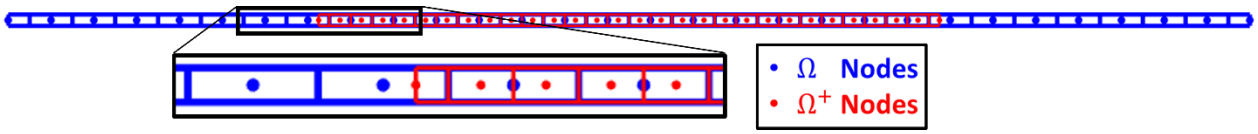


图10：预 QCE 浸入式离散化

如第4.2节所述，完全位于前景离散化内部的背景节点和平滑单元将被删除，而距界面 $1.5h^+$ 以内的背景单元则一分为二。所有仍与界面相交的背景单元都会被移除。为测试第4.3节所述体积恢复积分平滑单元的影响，设置了两种情况：一种包含这些单元（图11(a)），另一种不包含（图11(b)）。最后，前景界面节点与背景离散化共享。

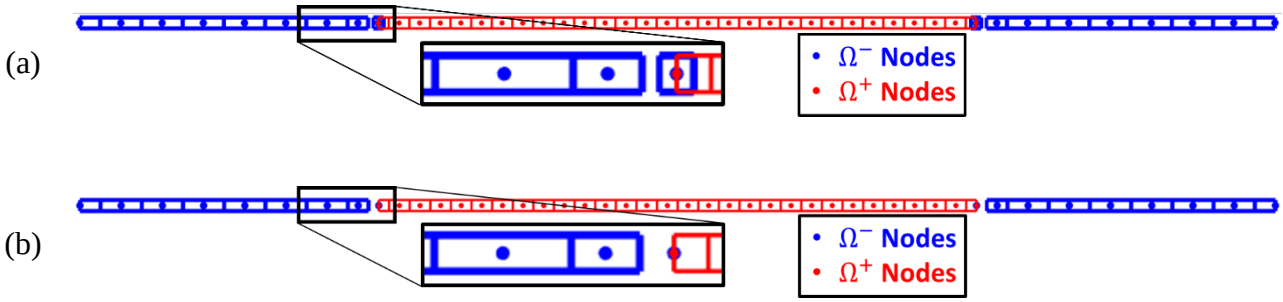


图11：一维杆问题的 QCE-RKPM 离散化：（a）在界面节点周围添加体积恢复单元；（b）不添加体积恢复单元

正如预期的那样，两种QCE-RKPM情况都能在节点处以接近机器精度的精度精确再现解析解；包含体积恢复单元的情况，其L_2 误差范数为1.6×10^{-13} ，不包含这些单元的情况则为1.8×10^{-13} 。QCE-RKPM能够在这一构造问题中获得精确解，归因于VC-SNNI：即使采用非协调积分平滑单元，它仍满足一阶变分一致性。图12展示了位移、应变和应力图。

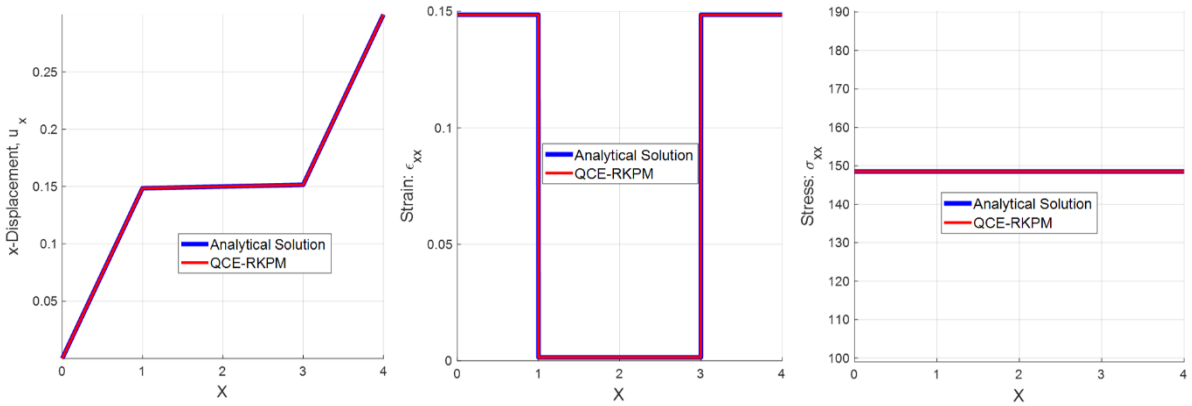


图12：显示　　两种 QCE-RKPM 情况下的水泥（左）、应变（中）和应力（右）图格局

5.1.2. 含弱不连续的分片高阶解

该问题具有分段高阶解，旨在考察 QCE-RKPM 在

采用线性基函数时的收敛特性。复合杆承受如下分段正弦体力载荷：

$$b^{-} = 10\sin\left(\frac{\pi x}{L_1}\right), \qquad 0 \le x \le x_1, \tag{73}$$

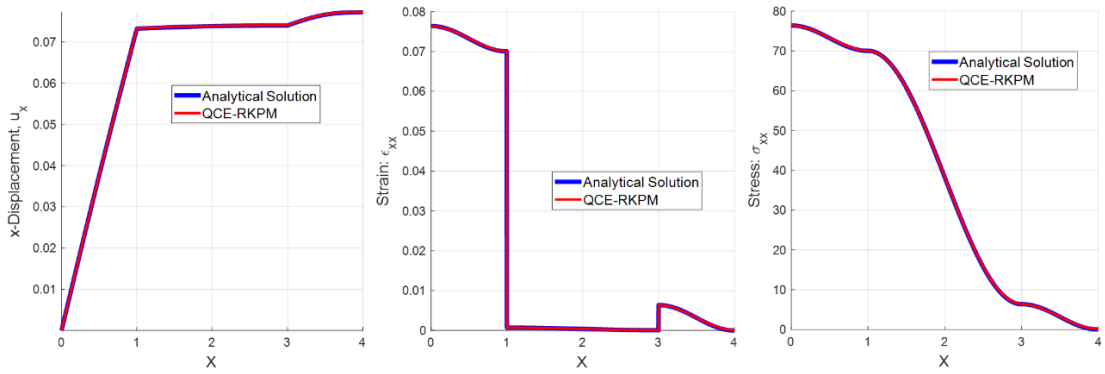
$$b^{+} = 50\sin\left(\frac{\pi (x - x_1)}{L_2}\right), \qquad x_1 \le x \le x_2, \tag{74}$$

$$b^{-} = 10\sin\left(\frac{\pi (x - x_2)}{L_3}\right), \qquad x_2 \le x \le x_3. \tag{75}$$

体力项（见附录中的式（85）和式（91））采用直接节点积分进行积分。

图13展示了图11所示离散化下，QCE-RKPM的位移、应变和应力结果，并与解析解进行了对比。结果表明，采用体积恢复单元的QCE-RKPM情形（图13(a)）与精确解高度吻合；而未采用体积恢复单元的QCE-RKPM情形（图13(b)）虽然在材料界面附近出现了预期的误差，但整体结果仍然非常好。

(a)



(b)

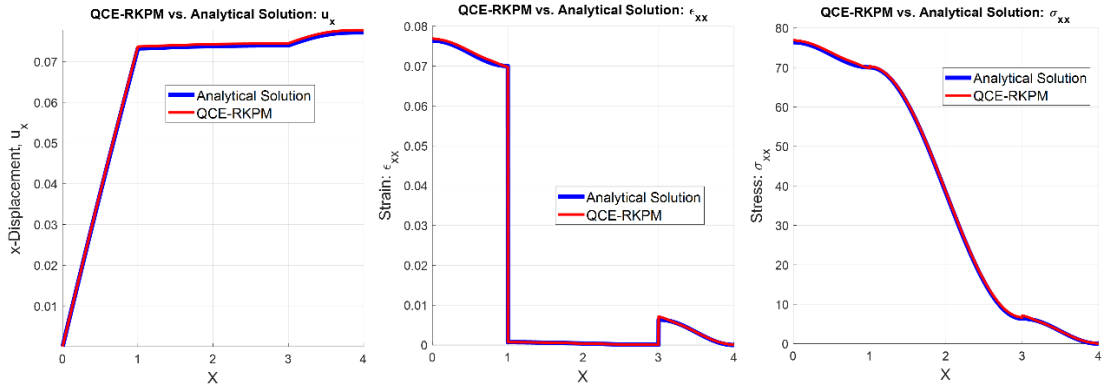


图13：位移（左）、应变（中）和应力（右）图：(a) 使用体积恢复单元的 QCE-RKPM 算例，以及 (b) 不使用这些单元的 QCE-RKPM 算例

图14展示了两种QCE-RKPM情形以及贴体有限元法在L_2 范数和H_1 半范数下的收敛图。图例中的数字表示收敛率。如图14所示，两种QCE-RKPM情形在L_2 范数下均以最优阶收敛，并且由于分别对平滑后的节点应变值和平均后的节点应变值进行了重新插值，在H_1 误差半范数下表现出超收敛。与有限元法相比，QCE-RKPM在L_2 范数下的总体误差较高，而采用体积恢复单元的QCE-RKPM误差水平大致与贴体有限元法相当。

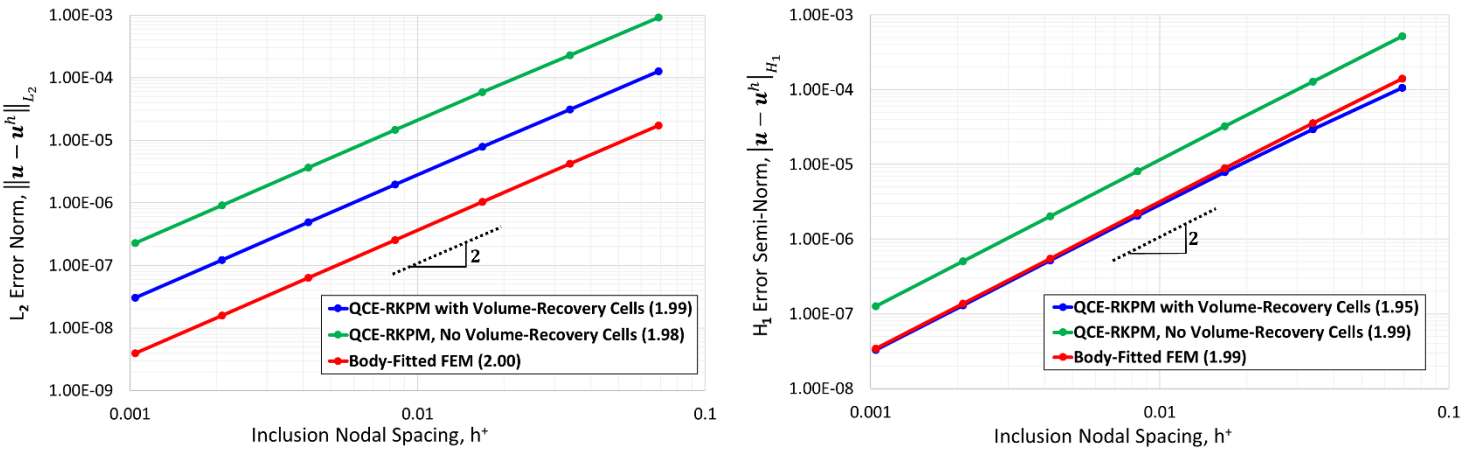


图14：L_2 误差范数（左）和H_1 误差半范数（右）的收敛图

5.2. 受远场牵引作用的无限板中的圆形夹杂

在本例中，如图15所示，直径为$D = 2$ 的圆形夹杂无限板受到远场牵引力$F = 100$ 。

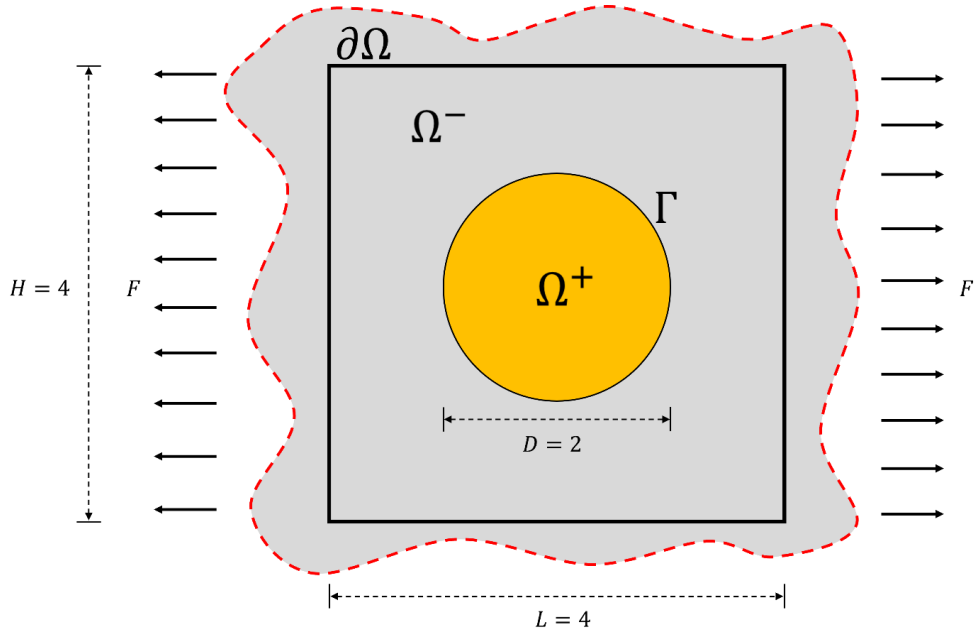
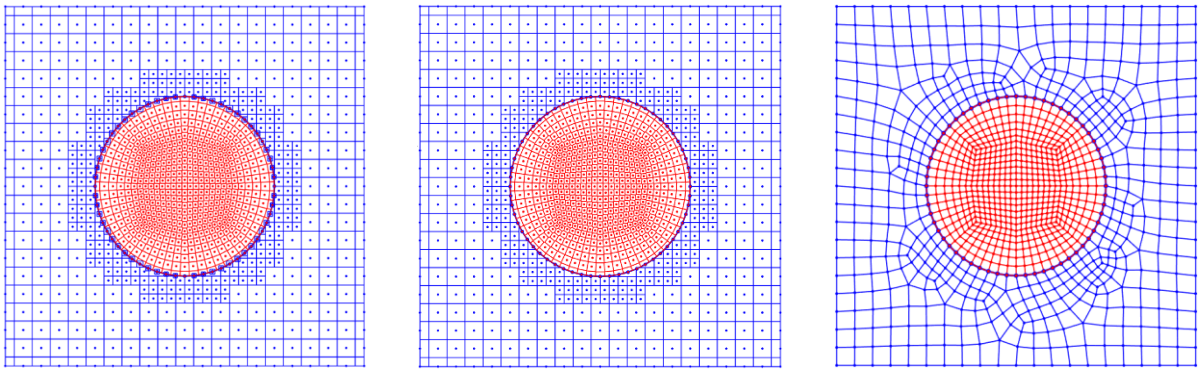


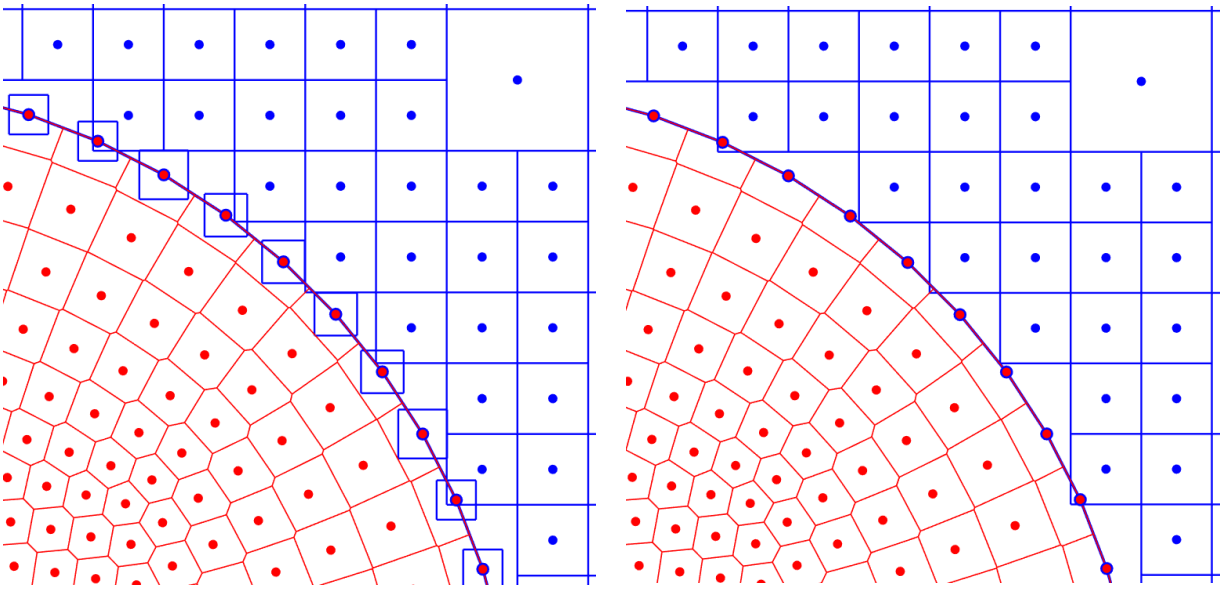
图15：受远场牵引作用的带圆形夹杂的无限板

计算域是一个边长为 4×4 的方形，其外边界为 $\partial\Omega$，背景基体域与前景夹杂域之间的界面为 Γ，如图16所示。此算例采用的弹性模量为 $E^{+} = 100{,}000$ 和 $E^{-} = 1{,}000$，泊松比为 $\nu^{+} = \nu^{-} = 0.3$。该问题按平面应力建模。此问题存在解析解，并将其作为狄利克雷边界条件施加于整个背景外边界 $\partial\Omega$。此问题的解析解可见 [75]。为进行收敛性研究，共运行了三种离散化算例：两种 QCE-RKPM 算例和一种贴体有限元法算例。两种 QCE-RKPM 算例采用初始背景节点间距，约为前景界面节点间距的两倍，并在界面周围进行四叉树细分。第一种 QCE-RKPM 算例采用以界面节点为中心的方形体积恢复型非协调积分平滑单元（图16(a)和图17(a)）；第二种 QCE-RKPM 算例则不使用这些体积恢复积分平滑单元（图16(b)和图17(b)）。请注意，对于图17所示的两种 QCE-RKPM 算例，前景界面节点与背景域共享，以便在无罚Nitsche方法中增强强制性，并确保两个区域内的单位分解，如第2.2节和第4.3节所述。对应的贴体有限元法算例采用渐进式单元细化，与四叉树细化类似，如图16(c)所示，以供比较。



(a) (b) (c)

图16：$h^- = 0.2$、$h^+_{Intf} \approx 0.1$：（a）以界面节点为中心、采用体积恢复积分平滑单元的 QCE-RKPM；（b）不采用体积恢复平滑单元的 QCE-RKPM；（c）逐步细化的贴体有限元法



(a) (b)

图17：（a）图16(a)和（b）图16(b）的放大视图

图18展示了图16中各离散化方案的应变场和σ_{yy} 场，以及解析解。采用体积恢复积分平滑单元的 QCE-RKPM 方案，其等值线图与解析解之间的差异极小，这表明所提出的 QCE-RKPM 无需费力构造贴体离散，便能获得精确解。对于

未采用体积恢复单元的 QCE-RKPM 方案，虽然应变场结果良好，但夹杂区域内的应力与解析解存在偏差。这表明，采用体积恢复单元保持面积（体积）守恒，能够增加积分点数量，并使 VC修正主要用于弥补变分一致性的不足，从而提高近似精度。贴体有限元法的解虽然优于未采用体积恢复单元的 QCE-RKPM 方案，但部分区域显得粗糙且不对称；总体而言，其表现不及采用体积恢复积分平滑单元的 QCE-RKPM 方案。

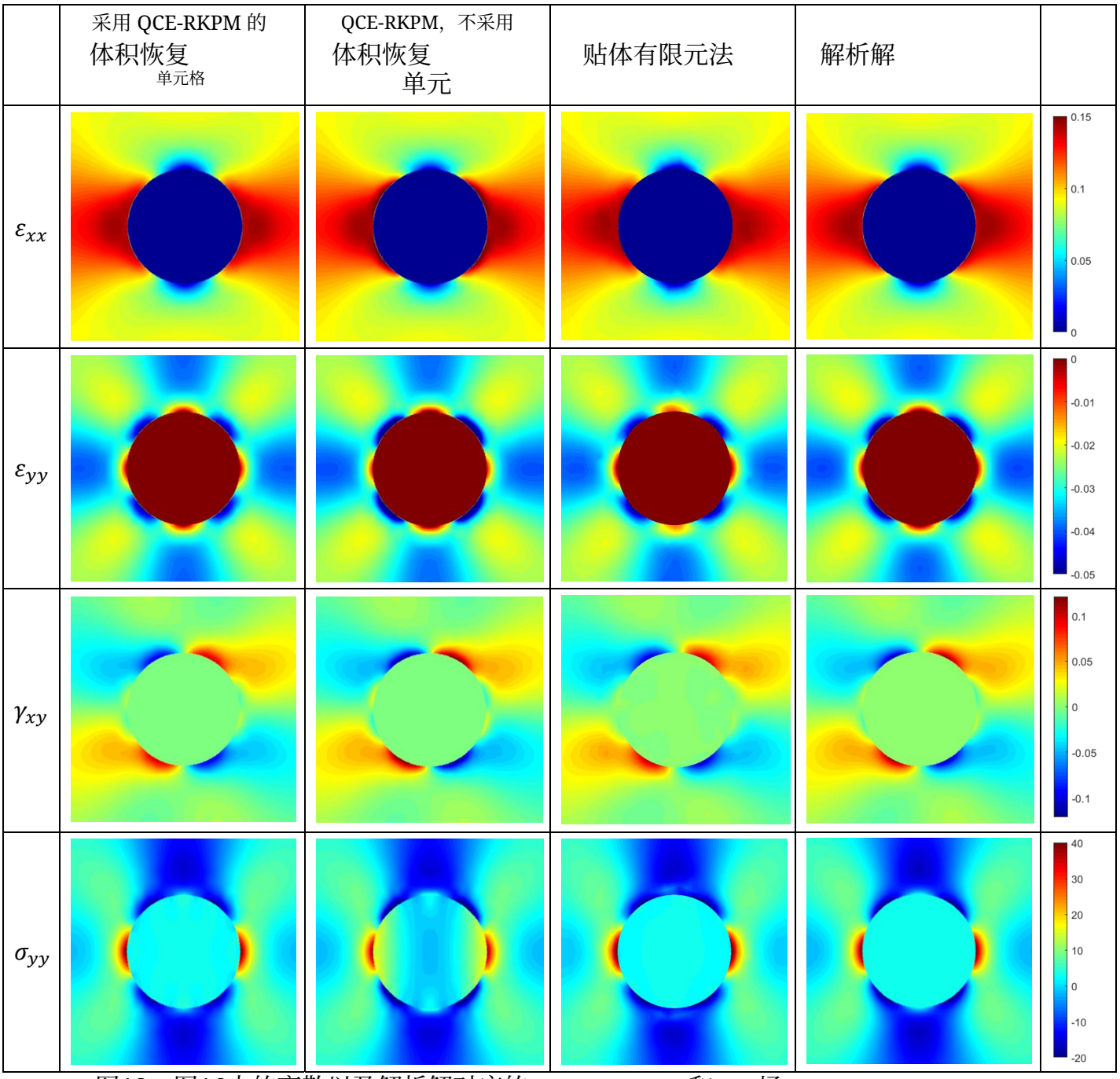


图18：图16中的离散以及解析解对应的ε_{xx}、 ε_{yy}、 γ_{xy}和σ_{yy} 场

图19绘出了图16中各离散化情况下沿$y = 0$ 的法向应变和应力截面。与此类似，这些截面表明，采用体积

恢复单元的QCE-RKPM格式虽然不相容，但无需费力构造贴体网格，其精度仍优于贴体有限元法。图20绘出了最精细情形（$h^{+}_{Intf} \approx h^{-} = 0.0125$）下的法向应变和应力截面，结果表明，随着网格加密，两种QCE-RKPM情形均收敛于解析解。收敛性研究结果见图21。这些图表明，采用体积恢复单元的QCE-RKPM虽然不相容，但仍可实现最优收敛性质；其L_2 误差范数下的总体误差水平与贴体有限元法相近。此外，与贴体有限元法相比，两种QCE-RKPM情形在H_1 误差半范数下均达到超收敛速率，且总体误差水平更优。

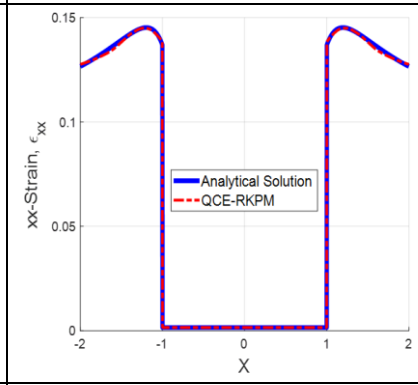
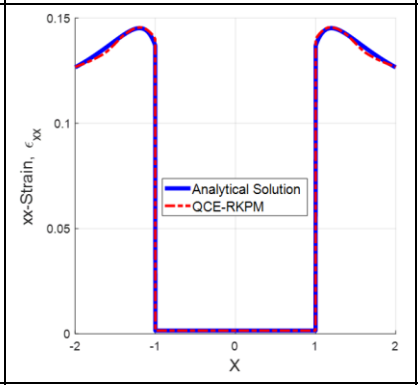
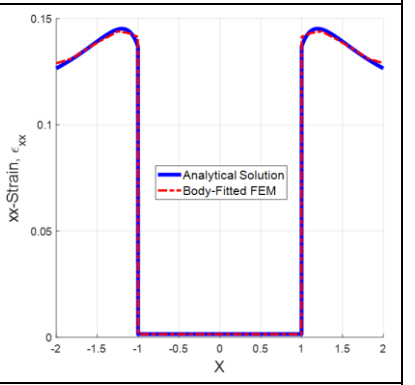
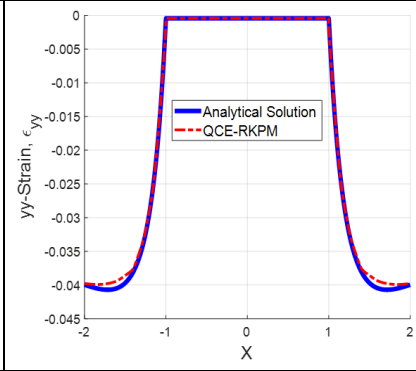
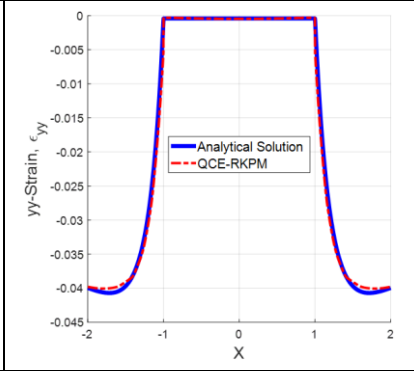
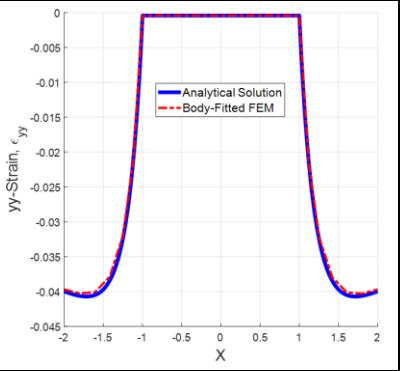
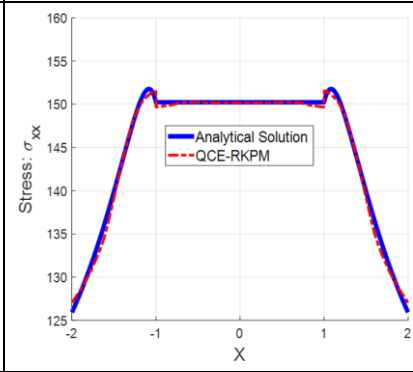
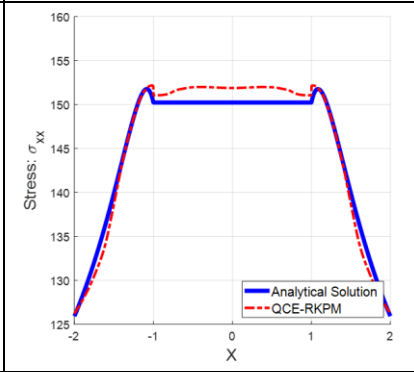
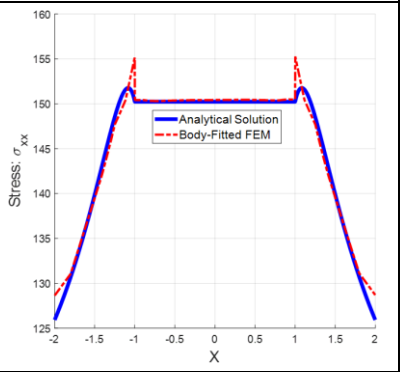
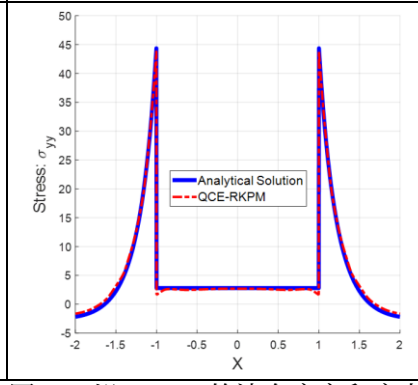
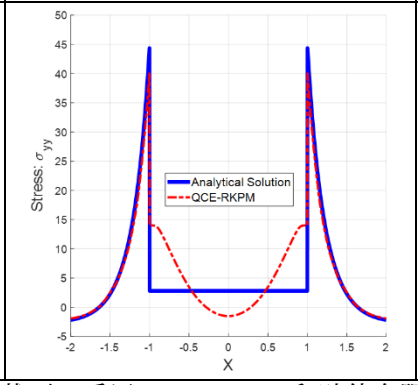
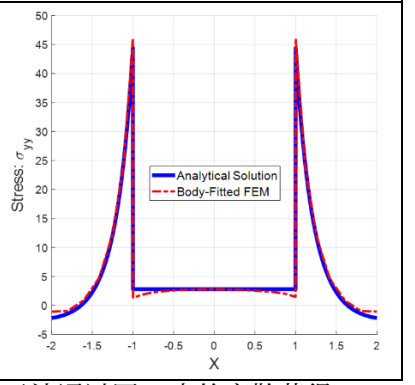
	QCE-RKPM 与体积-恢复单元	QCE-RKPM，无体积-恢复单元	贴体有限元法
ε_{xx}			
ε_{yy}			
σ_{xx}			
σ_{yy}			

图19：沿 $y = 0$ 的法向应变和应力截面，采用 QCE-RKPM 和贴体有限元法通过图16中的离散获得

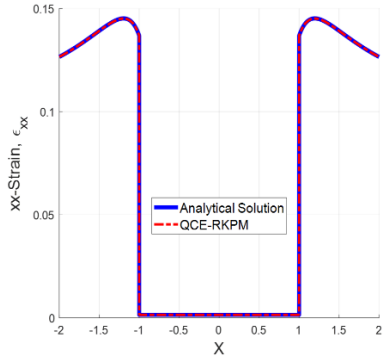
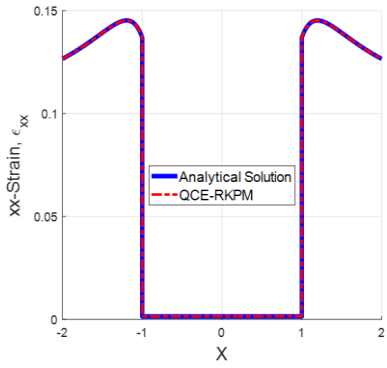
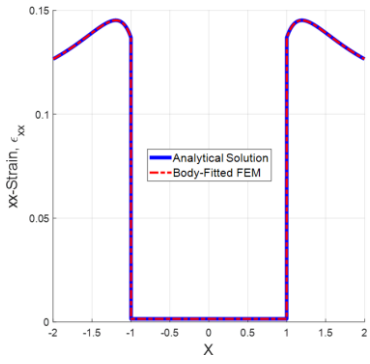
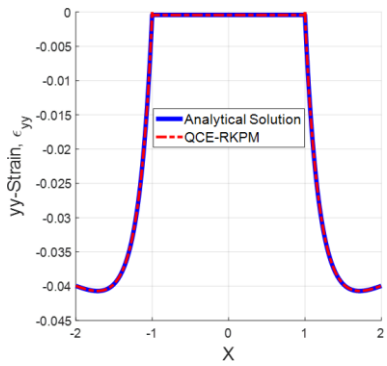
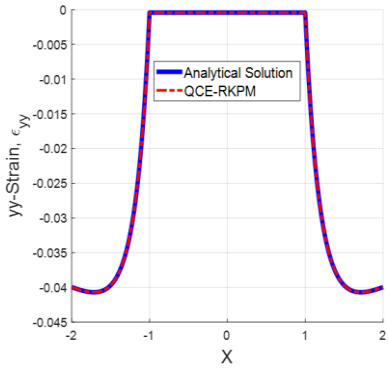
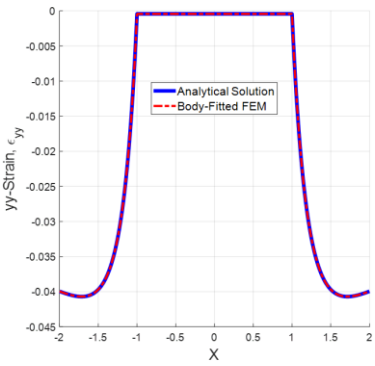
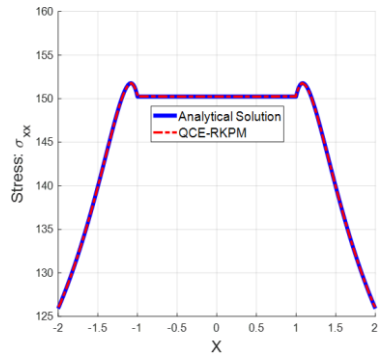
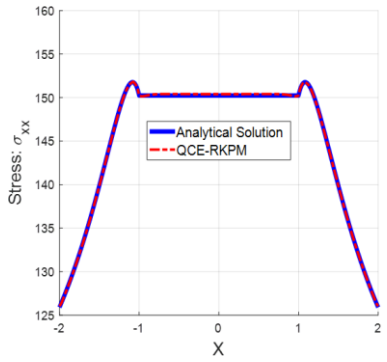
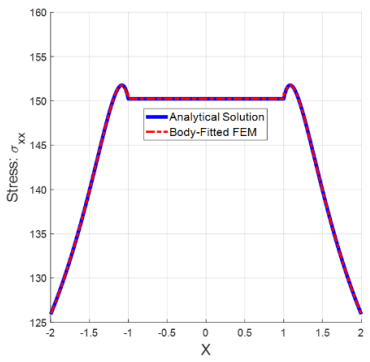
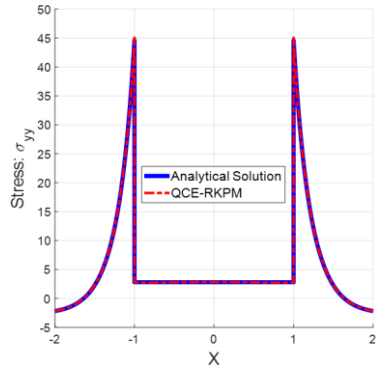
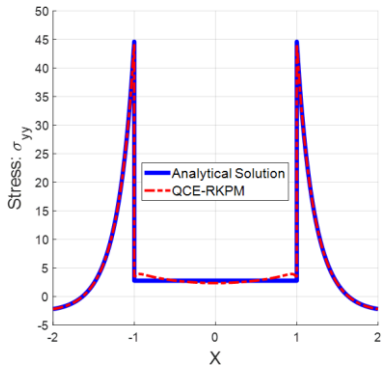
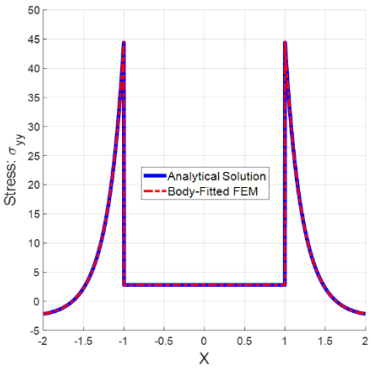
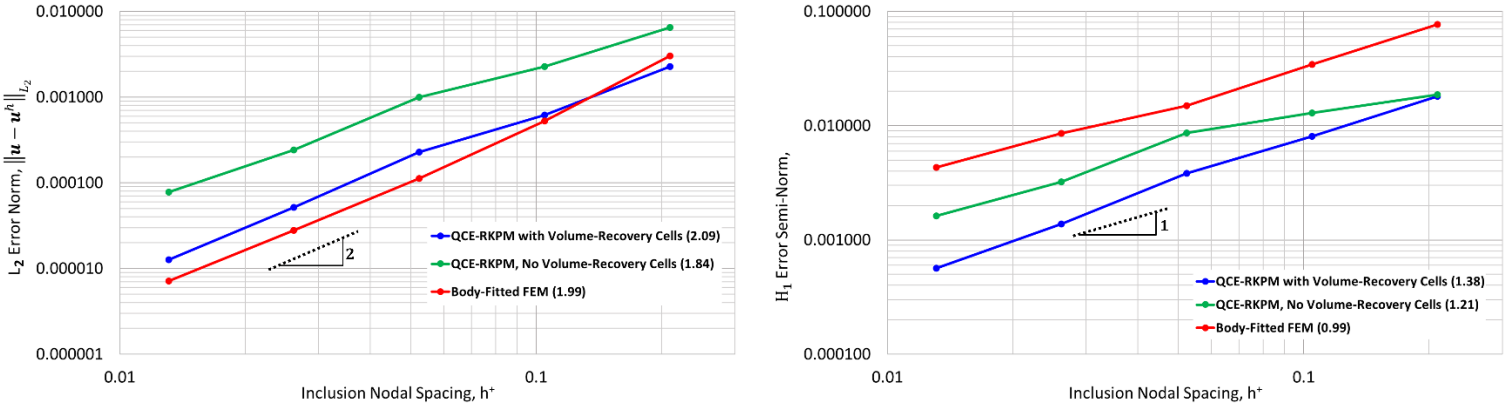
	QCE-RKPM，含体积-恢复单元	QCE-RKPM，不含体积-恢复单元	贴体有限元法
ε_{xx}			
ε_{yy}			
σ_{xx}			
σ_{yy}			

图20：最精细离散化下沿$y = 0$的法向应变和应力剖面（$\mathrm{h}_{\mathrm{Intf}}^{+} \approx \mathrm{h}^{-} = 0.0125$）



F图 21：L_2 误差范数和 H_1 误差半范数的收敛图

5.3. 多夹杂微结构在拉伸与剪切载荷联合作用下

我们的最后一个示例是具有多个任意形状界面的非均质微结构，其中一些界面包含凹特征。图2显示了一种由随机大小的圆形夹杂组成的非均质材料，该材料受到 $\boldsymbol{g} = [0.02, 0.02]$ 的拉伸和剪切组合位移。我们将材料属性设为 $E^- = 1{,}000$, $\nu^- = 0.3$, $E^+ = 100{,}000$, $\nu^+ = 0.3$。

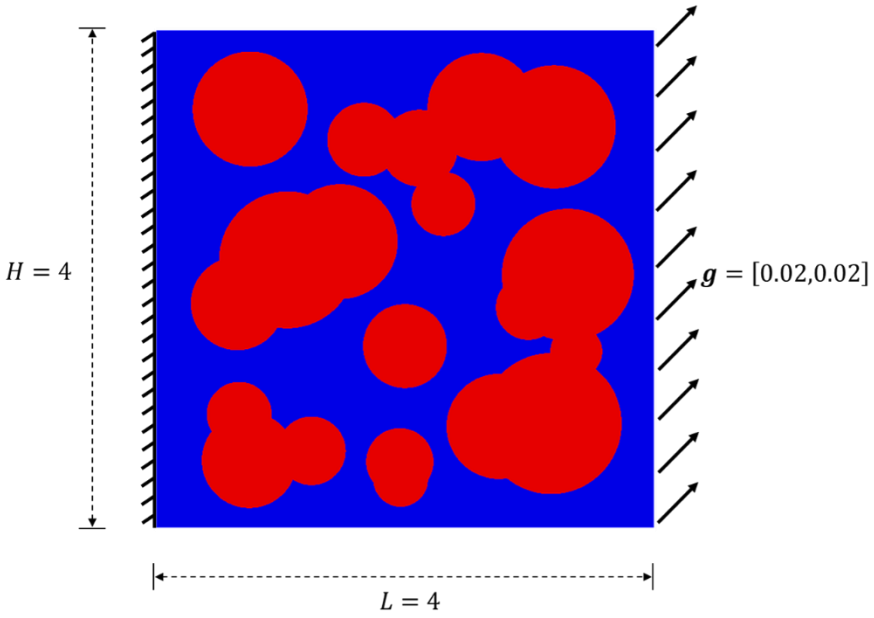
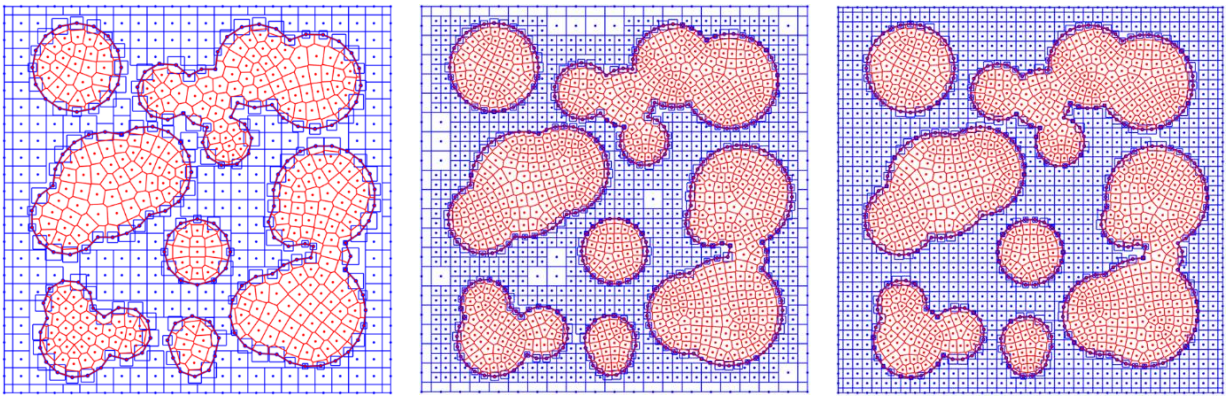


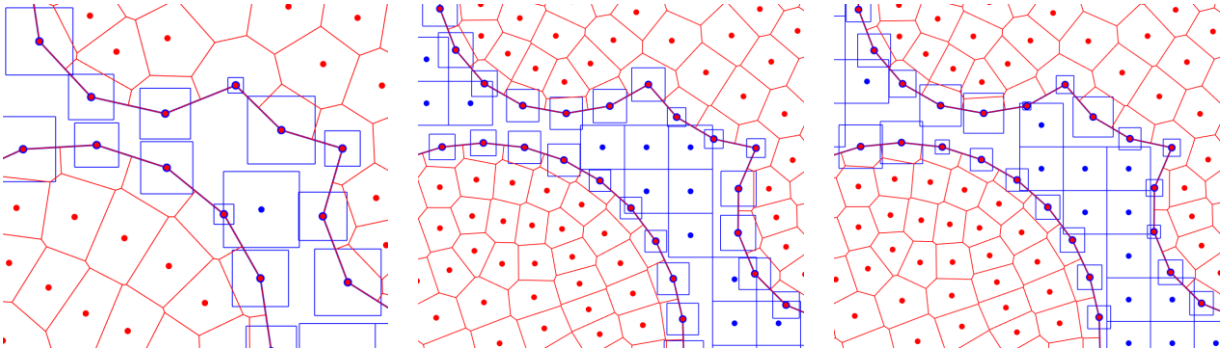
图22：非均质微结构的拉伸与剪切组合载荷

在本研究中，将从粗糙平滑单元离散以及采用和不采用四叉树细分的两种更精细的平滑单元离散中获得的 QCE-RKPM 结果（图23）与从贴体有限元模型中获得的参考解（图 25）进行了比较。如图24所示，所有 QCE-RKPM 算例在界面附近均具有非协调的背景积分平滑单元。图23(a)、(b) 和 (c) 中的 QCE-RKPM离散化分别包含709、1,639和1,839个节点，而图 25 中的有限元法离散化包含424,063个节点。所有 QCE-RKPM离散化均采用体积恢复积分平滑单元以提高精度。有限元法参考解在 Abaqus CAE [76]中运行，并在 MATLAB 中进行后处理。图26所示结果表明，无需构建贴体离散，QCE-RKPM 也能获得与高度细化的贴体有限元法解相近的结果。



(a) (b) (c)

图23：(a) $h^- \approx h^+ \approx 0.175$，包含709个节点；(b) $h^- \approx 0.2$，$h^+ \approx 0.1$，包含1,639个节点；(c) $h^- \approx h^+ \approx 0.1$，包含1,839个节点



(a) (b) (c)

图 24：放大视图：（a）图23(a)、（b）图23(b)和（c）图23(c)

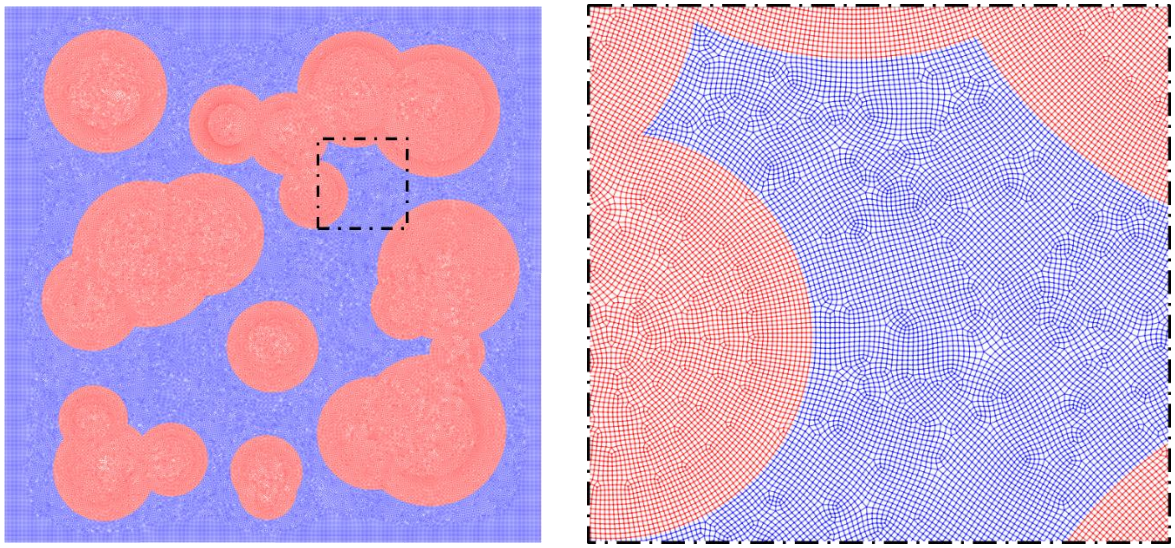


图 25：采用 $h^- = h^+ \approx 0.00625$ 的协调有限元法离散化，共有 424,063 个节点，用作参考解

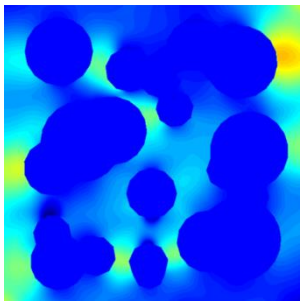
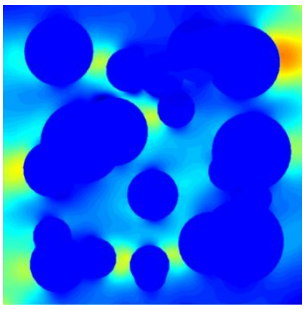
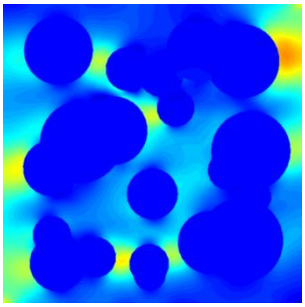
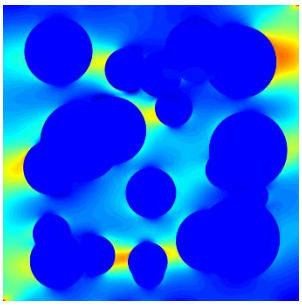
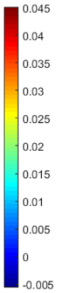
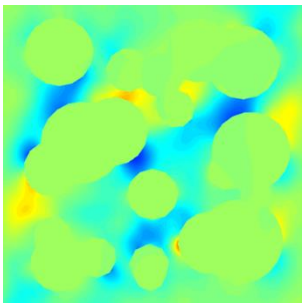
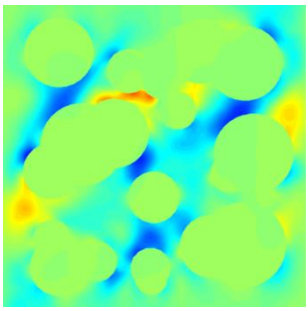
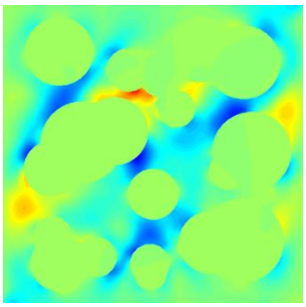
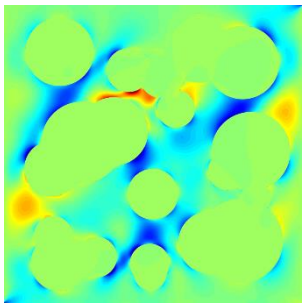
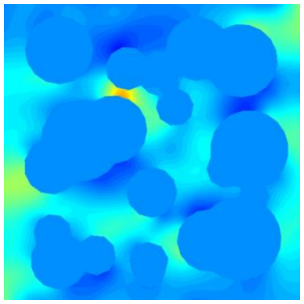
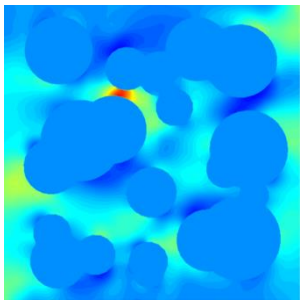
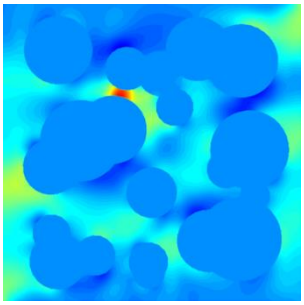
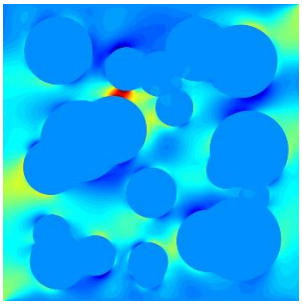
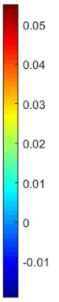
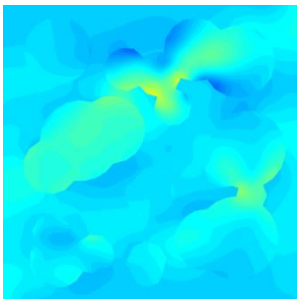
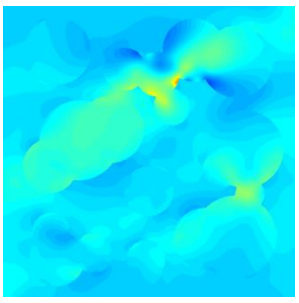
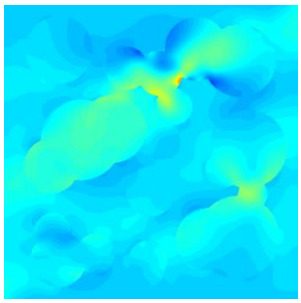
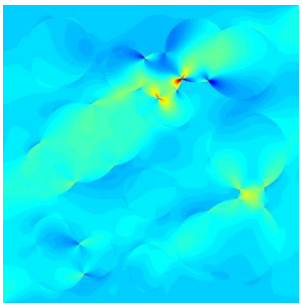
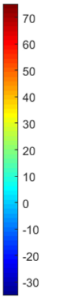
	粗略的 QCE-RKPM 离散化 (图23(a))	更精细的 QCE-RKPM 离散化与四叉树细分 （图23(b)）	更精细的 QCE-RKPM 离散化，未采用四叉树细分 （图23(c)）	有限元法参考结果 采用非常精细的解离散化 （图 25）	
ε_{xx}					
ε_{yy}					
γ_{xy}					
τ_{xy}					

图26：图23所示QCE-RKPM离散化以及图 25所示贴体有限元参考离散化的应变和τ_{xy} 场

6. 总结

本文针对涉及非均质材料的问题，提出了一种准协调嵌入式再生核粒子法（QCE-RKPM）。与标准的基于网格的浸入式和嵌入式方法相比，该方法展现出诸多优势。夹杂域与基体域分别进行离散化，从而避免了耗时的共形网格划分。将夹杂离散嵌入均匀的基体离散中后，便可消除虚拟域；虚拟域正是传统浸入式方法中稳定性和插值误差问题的根源。由于采用非协调离散，为了在 Galerkin近似中满足一阶精确性并实现最优收敛，需要进行 VC修正。此外，还可直接引入带体积校正的界面平滑单元，尽管这会造成非协调，但能进一步提高解的精度。无需顾虑网格连通性和协调性，即可按需添加节点和平滑单元，这一能力是本方法相较于基于网格的方法的一大优势；后者需要采用单元切割、单元聚合或替代域技术。最后，界面上的夹杂节点与基体离散共享，从而为无罚Nitsche方法提供额外的强制性，并确保各子域中近似的单位分解。因此，与大多数浸入式和嵌入式方法不同，我们的公式中无需设置任何用于强制实现界面相容性的可调参数。

QCE-RKPM采用稳定化协调/非协调节点积分、变分一致修正、NSNI稳定化和视线算法实现。文中给出了若干数值算例，表明QCE-RKPM是一种可行的嵌入式方法，可用于模拟非均质材料中的弱不连续。第一个数值算例表明

所提出的QCE-RKPM能够通过含弱不连续的分片线性补丁测试；对于分片高阶解问题，该方法在L_2 范数下达到最优收敛，并在H_1 半范数下呈现超收敛。在一个含圆形夹杂的无限板二维算例中，采用体积恢复单元的QCE-RKPM达到了与贴体有限元法相当的精度，并在L_2 范数下获得最优收敛率。此外，无论是否采用体积恢复单元，QCE-RKPM在H_1 半范数下的总体误差和收敛率均优于贴体有限元法。最后，采用QCE-RKPM模拟了一个多夹杂微结构二维算例，并将结果与高度细化的贴体有限元网格进行比较。相比高度细化的贴体有限元参考解，采用粗得多的离散化的QCE-RKPM仍得到了相近的结果。

总之，我们的方法有别于标准的基于网格的浸入式和嵌入式公式。与一般的浸入式方法不同，我们的公式不涉及虚拟域，因此不存在离散比限制。与 VCIM 不同，我们的方法在界面处呈现清晰的不连续性，能够捕捉梯度跳跃。与标准嵌入式方法不同，我们的公式不会受到小切割单元问题的影响，也不使用替代域或聚合单元。

致谢

谨此衷心感谢桑迪亚国家实验室根据合同协议 1655264 为加州大学圣迭戈分校提供的支持。桑迪亚国家实验室是一家多任务实验室，由桑迪亚国家技术与工程解决方案有限责任公司管理和运营；该公司是霍尼韦尔国际公司的全资子公司，受美国能源部

国家核安全局委托，合同编号为 DE-NA0003525。本文介绍客观的技术成果与分析。本文中可能表达的任何主观看法或意见，并不一定代表美国能源部或美国政府的观点。谨此衷心感谢国家科学基金会通过 CMMI-1826221 号项目资助加州大学圣迭戈分校。

附录：Galerkin 与基体形式

设 $\boldsymbol{u}^{h-}$ 和 $\boldsymbol{u}^{h+}$ 分别为 Ω^- 和 Ω^+ 中 $\boldsymbol{u}^-$ 和 $\boldsymbol{u}^+$ 的再生核近似。将这些近似代入 (29) 和 (30) 的弱形式，得到伽辽金形式：求 $(\boldsymbol{u}^{h+}, \boldsymbol{u}^{h-}) \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-)$，使得 $\forall(\delta\boldsymbol{u}^{h+}, \delta\boldsymbol{u}^{h-}) \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega^-)$

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^{h-}), \boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^{h-})\right)_{\Omega^-} + \left(\delta\boldsymbol{u}^{h-}, \boldsymbol{n}^+ \cdot \boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^{h+})\right)_\Gamma - \left(\delta\boldsymbol{u}^{h-}, \boldsymbol{n}^- \cdot \boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{u}^{h-})\right)_{\partial\Omega_D} \\ &\quad - (\boldsymbol{\sigma}^-(\delta\boldsymbol{u}^{h-}) \cdot \boldsymbol{n}^-, \boldsymbol{u}^{h-})_{\partial\Omega_D} + \beta(\delta\boldsymbol{u}^{h-}, \boldsymbol{u}^{h-})_{\partial\Omega_D} \\ &\quad = (\delta\boldsymbol{u}^{h-}, \boldsymbol{b}^-)_{\Omega^-} + (\delta\boldsymbol{u}^{h-}, \boldsymbol{t})_{\partial\Omega_N} - (\boldsymbol{\sigma}^-(\delta\boldsymbol{u}^{h-}) \cdot \boldsymbol{n}^-, \boldsymbol{g})_{\partial\Omega_D} \\ &\quad + \beta(\delta\boldsymbol{u}^{h-}, \boldsymbol{g})_{\partial\Omega_D},\end{aligned} \tag{76}$$

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}^{h+}), \boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^{h+})\right)_{\Omega^+} - \left(\delta\boldsymbol{u}^{h+}, \boldsymbol{n}^+ \cdot \boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}^{h+})\right)_\Gamma = (\delta\boldsymbol{u}^{h+}, \boldsymbol{b}^+)_{\Omega^+}, \tag{77}$$

分别对背景基体和前景夹杂域采用带有 NSNI稳定化的 VC-SNNI 和 SCNI，得到矩阵形式：

$$\begin{aligned}&\left[\int_{\Omega^-} \widehat{\boldsymbol{B}}_I^{-T} \boldsymbol{C}^- \widehat{\boldsymbol{B}}_J^- \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_D} \boldsymbol{\Psi}_I^{-T} \boldsymbol{\eta}^{-T} \boldsymbol{C}^- \widetilde{\boldsymbol{B}}_J^- \, d\Gamma - \int_{\partial\Omega_D} \widetilde{\boldsymbol{B}}_I^{-T} \boldsymbol{C}^- \boldsymbol{\eta}^- \boldsymbol{\Psi}_J^- \, d\Gamma \right. \\ &\left. + \beta \int_{\partial\Omega_D} \boldsymbol{\Psi}_I^{-T} \boldsymbol{\Psi}_J^- \, d\Gamma\right] \boldsymbol{d}_J^- + \int_\Gamma \boldsymbol{\Psi}_I^{-T} \boldsymbol{\eta}^{+T} \boldsymbol{C}^+ \widetilde{\boldsymbol{B}}_J^+ \, d\Gamma \, \boldsymbol{d}_J^+ \\ &= \int_{\Omega^-} \boldsymbol{\Psi}_I^{-T} \boldsymbol{b}^- d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \boldsymbol{\Psi}_I^{-T} \boldsymbol{t} \, d\Gamma - \int_{\partial\Omega_D} \widetilde{\boldsymbol{B}}_I^{-T} \boldsymbol{C}^- \boldsymbol{\eta}^- \boldsymbol{g} \, d\Gamma + \beta \int_{\partial\Omega_D} \boldsymbol{\Psi}_I^{-T} \boldsymbol{g} \, d\Gamma,\end{aligned} \tag{78}$$

$$\left[\int_{\Omega^+} \widehat{\boldsymbol{B}}_I^{+T} \boldsymbol{C}^+ \widehat{\boldsymbol{B}}_J^+ \, d\Omega - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\Psi}_I^{+T} \boldsymbol{\eta}^{+T} \boldsymbol{C}^+ \widetilde{\boldsymbol{B}}_J^+ \, d\Gamma\right] \boldsymbol{d}_J^+ = \int_{\Omega^+} \boldsymbol{\Psi}_I^{+T} \boldsymbol{b}^+ d\Omega, \tag{79}$$

or:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{K}}_{IJ}^{--} - \breve{\boldsymbol{K}}_{IJ}^{--} - \breve{\boldsymbol{K}}_{IJ}^{--T} + \boldsymbol{K}_{IJ}^{\beta--} & \boldsymbol{K}_{IJ}^{\Gamma-+} \\ \boldsymbol{0} & \widehat{\boldsymbol{K}}_{IJ}^{++} - \boldsymbol{K}_{IJ}^{\Gamma++} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_J^- \\ \boldsymbol{d}_J^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_I^{b-} + \boldsymbol{f}_I^{t-} - \breve{\boldsymbol{f}}_I^{g-} + \boldsymbol{f}_I^{\beta-} \\ \boldsymbol{f}_I^{b+} \end{bmatrix}, \tag{80}$$

其中:

$$\widehat{\boldsymbol{K}}_{IJ}^{--} = \int_{\Omega^-} \widehat{\widehat{\boldsymbol{B}}}_I^{-T} \boldsymbol{C}^- \widehat{\boldsymbol{B}}_J^- \, d\Omega, \tag{81}$$

$$\breve{\boldsymbol{K}}_{IJ}^{--} = \int_{\partial\Omega_D} \boldsymbol{\Psi}_I^{-T} \boldsymbol{\eta}^{-T} \boldsymbol{C}^- \widetilde{\boldsymbol{B}}_J^- \, d\Gamma, \tag{82}$$

$$\boldsymbol{K}_{IJ}^{\beta--} = \beta \int_{\partial\Omega_D} \boldsymbol{\Psi}_I^{-T} \boldsymbol{\Psi}_J^- \, d\Gamma, \tag{83}$$

$$\boldsymbol{K}_{IJ}^{\Gamma-+} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\Psi}_I^{-T} \boldsymbol{\eta}^{+T} \boldsymbol{C}^+ \widetilde{\boldsymbol{B}}_J^+ \, d\Gamma, \tag{84}$$

$$\boldsymbol{f}_I^{b-} = \int_{\Omega^-} \boldsymbol{\Psi}_I^{-T} \boldsymbol{b}^- d\Omega, \tag{85}$$

$$\boldsymbol{f}_I^{t-} = \int_{\partial\Omega_N} \boldsymbol{\Psi}_I^{-T} \boldsymbol{t} \, d\Gamma, \tag{86}$$

$$\breve{\boldsymbol{f}}_I^{g-} = \int_{\partial\Omega_D} \widetilde{\boldsymbol{B}}_I^{-T} \boldsymbol{C}^- \boldsymbol{\eta}^- \boldsymbol{g} \, d\Gamma, \tag{87}$$

$$\boldsymbol{f}_I^{\beta-} = \beta \int_{\partial\Omega_D} \boldsymbol{\Psi}_I^{-T} \boldsymbol{g} \, d\Gamma, \tag{88}$$

$$\widehat{\boldsymbol{K}}_{IJ}^{++} = \int_{\Omega^+} \widehat{\boldsymbol{B}}_I^{+T} \boldsymbol{C}^+ \widehat{\boldsymbol{B}}_J^+ \, d\Omega, \tag{89}$$

$$\boldsymbol{K}_{IJ}^{\Gamma++} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\Psi}_I^{+T} \boldsymbol{\eta}^{+T} \boldsymbol{C}^{+} \widetilde{\boldsymbol{B}}_J^{+} \, d\Gamma, \tag{90}$$

$$\boldsymbol{f}_I^{b+} = \int_{\Omega^+} \boldsymbol{\Psi}_I^{+T} \boldsymbol{b}^{+} d\Omega. \tag{91}$$

其中，$\boldsymbol{d}_J^-$ 和 $\boldsymbol{d}_J^+$ 分别为背景和前景广义节点位移。再次，$\widehat{\widehat{\boldsymbol{B}}}_I$ 为经 VC 校正并由 NSNI 稳定化的平滑应变-位移矩阵，$\widehat{\boldsymbol{B}}_I$ 为经 NSNI 稳定化的平滑应变-位移矩阵，$\widetilde{\boldsymbol{B}}_I$ 为平滑应变-位移矩阵，$\boldsymbol{\Psi}_I = \Psi_I \mathbf{I}$ 为多维形函数矩阵，$\mathbf{I}$ 为单位矩阵，而$\boldsymbol{\eta}$ 为界面Γ 或外边界$\partial\Omega$上外法向量分量构成的矩阵。

注 A.1

请注意，为了提高计算效率，域积分中使用的平滑应变-位移矩阵也被用于轮廓积分。根据数值实验，我们发现，在轮廓积分中使用平滑梯度，与使用RK形函数的直接梯度效果同样好。

7. 参考文献

[1] C. S. Peskin，“心脏瓣膜周围的流动模式：一种数值方法”，《计算物理学杂志》，第 10 卷，第 2 期，第 252-271 页，1972年。[2] C. S. Peskin，“浸入边界法”，《纪事数学》，第 11 卷，第 479-517 页，2002年。

[3] D. Boffi 和 L. Gastaldi，《浸入边界法的有限元方法》，Computers & Structures，第81卷，第8-11期，第491-501页，2003年。[4] D. Boffi、L. Gastaldi 和 L. Heltai，《有限元浸入边界法的数值稳定性》，Mathematical Models and Methods in Applied Sciences，第17卷，第10期，第1479-1505页，2007年。[5] B. E. Griffith 和 X. Luo，《混合有限差分/有限元浸入边界法》，International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering，第33卷，第12期，文章编号e2888，2017年。[6] F. Sotiropoulos 和 X. Yang，《用于模拟流固耦合的浸入边界法》，Progress in Aerospace Sciences，第65卷，第1-21页，2014年。[7] W. Kim 和 H. Choi，《流固耦合的浸入边界法：综述》，International Journal of Heat and Fluid Flow，第75卷，第301-309页，2019年。[8] Y. Bazilevs、K. Kamran、G. Moutsanidis、D. Benson 和 E. Oñate，《采用浸入式方法进行空气爆炸流固耦合的新公式。第一部分：基本方法和基于有限元法的模拟》，《计算力学》，第60卷，第83-100页，2017年。[9] Y. Bazilevs、G. Moutsanidis、J. Bueno、K. Kamran、D. Kamensky、M. C. Hillman、H. Gomez 和 J.-S. Chen，《采用浸入式方法进行空气爆炸流固耦合的新公式：第二部分——等几何分析与无网格离散的耦合》，《计算力学》，第60卷，第1期，第101-116页，2017年。[10] J. A. Cottrell、T. J. Hughes 和 Y. Bazilevs，《等几何分析：迈向CAD与有限元分析的集成》，纽约：John Wiley & Sons，2009年。[11] M. Behzadinasab、G. Moutsanidis、N. Trask、J. T. Foster 和 Y. Bazilevs，《采用浸入式方法耦合等几何分析与近场动力学以实现空气爆炸流固耦合》，Forces in Mechanics，第4卷，文章编号100045，2021年。[12] R. Glowinsky、T.-W. Pan、T. I. Hesla、D. D. Joseph 和 J. Periaux，《一种用于模拟流体绕运动刚体流动的分布式拉格朗日乘子/虚拟区域法：颗粒流应用》，《计算力学与工程方法》，第184卷，第2-4期，第241-267页，2000年。[13] I. Babuška，《带拉格朗日乘子的有限元法》，Numerische Mathematik，第20卷，第3期，第179-192页，1973年。[14] D. Boffi、F. Brezzi 和 M. Fortin，《混合有限元方法及其应用》，第44卷，海德堡：Springer，2013年。

[15] L. Zhang, A. Gerstenberger, X. Wang 和 W. K. Liu, 《浸入式有限元方法》, 《计算力学与工程方法》, 第 193 卷, 第 21-22 期, 第 2051-2067 页, 2004 年。[16] L. T. Zhang 和 M. Gay, 《用于流固耦合的浸入式有限元方法》, 《流体与结构杂志》, 第 23 卷, 第 6 期, 第 839-857 页, 2007年。[17] X. Wang 和 L. T. Zhang, 《用于全耦合流固相互作用的修正浸入式有限元方法》, 《计算力学与工程方法》, 第 267 卷, 第 150-169 页, 2013年。[18] W. K. Liu、S. Jun 和 Y. F. Zhang, 《再生核粒子法》, 《国际流体数值方法杂志》, 第 20 卷, 第 8-9 期, 第 1081-1106 页, 1995 年。[19] J.-S. Chen、C. Pan、C. Wu 和 W. K. Liu, 《用于非线性结构大变形分析的再生核粒子法》, 《计算力学与工程方法》, 第 139 卷, 第 1-4 期, 第 195-227 页, 1996 年。[20] X. Wang 和 L. T. Zhang, 《浸入边界法和有限元法中的插值函数》, 《计算力学》, 第 45 卷, 第 4 期, 第 321-334 页, 2010 年。[21] T.-H. Huang、J.-S. Chen、M. R. Tupek、F. N. Beckwith、J. J. Koester 和 H. E. Fang, 《用于非均质材料的变分多尺度浸入式无网格方法》, 《计算力学》, 第 67 卷, 第 4 期, 第 1059-1097 页, 2021年。[22] T. J. Hughes、L. P. Franca 和 M. Balestra, 《计算流体动力学的新型有限元公式: V. 绕过 Babuška-Brezzi 条件: 一种适用于等阶插值的稳定 Stokes 问题 Petrov-Galerkin 公式》, 《计算力学与工程方法》, 第 59 卷, 第 1 期, 第 85-99 页, 1986 年。[23] T. J. Hughes、G. R. Feijóo、L. Mazzei 和 J.-B. Quincy, 《变分多尺度方法——计算力学的一种范式》, 《计算方法与工程》, 第 166 卷, 第 1-2 期, 第 3-24 页, 1998 年。[24] T.-H. Huang、J.-S. Chen、M. R. Tupek、F. N. Beckwith 和 H. E. Fang, 《用于涉及激波的流固相互作用系统的变分多尺度浸入式无网格方法》, 《计算力学与工程方法》, 第 389 卷, 第 114396 页, 2022 年。[25] B. E. Griffith 和 N. A. Patankar, 《流固相互作用浸入式方法》, 《流体力学年度评论》, 第 52 卷, 第 421-448 页, 2020 年。

[26] J. Wang、G. Zhou、M. Hillman、A. Madra、Y. Bazilevs、J. Du 和 K. Su，《用于复合材料分析的一致浸入式体积 Nitsche 方法》，《计算力学与工程方法》，第 385 卷，第 114042 页，2021年。[27] A. Hansbo 和 P. Hansbo，《一种基于 Nitsche 方法的椭圆界面问题非拟合有限元方法》，《计算力学与工程方法》，第 191 卷，第 47-48 期，第 5537-5552 页，2002年。[28] E. Burman、S. Claus、P. Hansbo、M. G. Larson 和 A. Massing，《CutFEM：离散化几何与偏微分方程》，《国际工程数值方法杂志》，第 104 卷，第 7 期，第 472-501 页，2015年。[29] S. Soghrati、A. M. Aragón、C. A. Duarte 和 P. H. Geubelle，《一种用于不连续梯度场问题的界面富集广义有限元法》，《国际工程数值方法杂志》，第 89 卷，第 8 期，第 991-1008 页，2012年。[30] S. Soghrati，《分层界面富集有限元方法：一种用于网格无关模拟的自动化技术》，《计算物理学杂志》，第 275 卷，第 41-52 页，2014年。[31] A. M. Aragón 和 A. Simone，《不连续富集有限元方法》，《国际工程数值方法杂志》，第 112 卷，第 11 期，第 1589-1613 页，2017年。[32] E. Burman 和 P. Hansbo，《使用切割单元的虚拟域有限元方法：II. 一种稳定化 Nitsche 方法》，《应用数值数学》，第 62 卷，第 4 期，第 328-341 页，2012年。[33] P. Hansbo、M. G. Larson 和 S. Zahedi，《一种用于 Stokes 界面问题的切割有限元方法》，《应用数值数学》，第 85 卷，第 90-114 页，2014年。[34] E. Burman 和 P. Hansbo，《使用切割单元的虚拟域方法：III. 一种用于 Stokes 问题的稳定化 Nitsche 方法》，《ESAIM：数学建模与数值分析》，第 48 卷，第 3 期，第 859-874 页，2014年。[35] H. M. Mourad、J. Dolbow 和 I. Harari，《一种用于嵌入界面上 Dirichlet 约束的气泡稳定化有限元方法》，《国际工程数值方法杂志》，第 69 卷，第 4 期，第 772-793 页，2007年。[36] J. E. Dolbow 和 L. P. Franca，《用于嵌入式 Dirichlet 问题的无残差气泡》，《计算力学与工程方法》，第 197 卷，第 45-48 期，第 3751-3759 页，2008年。

[37] C. Annavarapu、M. Hautefeuille 和 J. E. Dolbow，“一种用于界面问题的稳健 Nitsche 公式”，《计算力学与工程方法》，第225–228卷，第44–54页，2012年。[38] W. Jiang、C. Annavarapu、J. E. Dolbow 和 I. Harari，“一种用于基于样条的有限元界面问题的稳健 Nitsche 公式”，《国际工程数值方法杂志》，第104卷，第7期，第676–696页，2015年。[39] J. Parvizian、A. Düster 和 E. Rank，“有限单元法：固体力学嵌入区域问题的 h 和 p 扩展”，《计算力学》，第41卷，第1期，第121–133页，2007年。[40] A. Düster、J. Parvizian、Z. Yang 和 E. Rank，“用于三维固体力学问题的有限单元法”，《计算力学与工程方法》，第197卷，第3768–3782页，2008年。[41] D. Schillinger 和 M. Ruess，“有限单元法：CAD 和基于图像的几何模型高阶结构分析背景下的综述”，《计算工程方法档案》，第22卷，第3期，第391–455页，2015年。[42] D. Kamensky、M.-C. Hsu、D. Schillinger、J. A. Evans、A. Aggarwal、Y. Bazilevs、M. S. Sacks 和 T. J. Hughes，“用于流固耦合的浸入式几何变分框架：在生物假体心脏瓣膜中的应用”，《计算力学与工程方法》，第284卷，第1005–1053页，2015年。[43] A. Main 和 G. Scovazzi，“用于嵌入区域计算的移位边界法。第一部分：Poisson 和 Stokes问题”，《计算物理学杂志》，第372卷，第972–995页，2018年。[44] A. Main 和 G. Scovazzi，“用于嵌入区域计算的移位边界法。第二部分：线性对流–扩散方程和不可压缩 Navier–Stokes 方程”，《计算物理学杂志》，第372卷，第996–1026页，2018年。[45] K. Li、N. M. Atallah、G. A. Main 和 G. Scovazzi，“移位界面法：一种灵活的嵌入界面计算方法”，《国际工程数值方法杂志》，第121卷，第3期，第492–518页，2020年。[46] J. Cheung、M. Perego、P. Bochev 和 M. Gunzburger，“针对具有光滑边界的区域多面体近似的最优精度高阶有限元方法”，《计算数学》，第88卷，第319期，第2187–2219页，2019年。[47] J. Cheung、M. Gunzburger、P. Bochev 和 M. Perego，“一种用于界面和区域分解问题的最优收敛高阶有限元耦合方法”，

《应用数学研究成果》，第 6 卷，第 100094 页，2020 年。

[48] N. M. Atallah、C. Canuto 和 G. Scovazzi，《高阶移位边界法及其分析》，《计算力学与工程方法》，第394卷，第114885页，2022年。[49] L. Nouveau、M. Ricchiuto 和 G. Scovazzi，《采用移位边界法的高阶梯度：椭圆型偏微分方程的嵌入式富集混合形式》，《计算物理学杂志》，第398卷，第108898页，2019年。[50] S. Badia、F. Verdugo 和 A. F. Martín，《用于椭圆问题的聚合非拟合有限元法》，《计算力学与工程方法》，第336卷，第533–553页，2018年。[51] S. Badia、A. F. Martin 和 F. Verdugo，《用于 Stokes问题非拟合离散的混合聚合有限元法》，《SIAM科学计算杂志》，第40卷，第6期，第B1541–B1576页，2018年。[52] S. Badia、E. Neiva 和 F. Verdugo，《连接幽灵罚项与聚合非拟合方法》，《计算力学与工程方法》，第388卷，第114232页，2022年。[53] A. Johansson 和 M. G. Larson，《用于具有虚拟边界的椭圆问题的高阶间断伽辽金–尼采法》，Numerische Mathematik，第123卷，第4期，第607–628页，2013年。[54] W. Qiu、M. Solano 和 P. Vega，《通过直线三角剖分近似求解曲线界面问题的高阶混合可凝聚不连续伽辽金法》，《科学计算杂志》，第69卷，第3期，第1384–1407页，2016年。[55] P. Huang、H. Wu 和 Y. Xiao，《用于椭圆界面问题的非拟合界面罚有限元法》，《计算力学与工程方法》，第323卷，第439–460页，2017年。[56] E. Burman、P. Hansbo 和 M. G. Larson，《基于扩展有限元空间的 CutFEM》，Numerische Mathematik，第152卷，第2期，第331–369页，2022年。[57] J.-S. Chen、M. Hillman 和 M. Ruter，《伽辽金无网格方法的任意阶变分一致积分》，《国际工程数值方法杂志》，第95卷，第5期，第387–418页，2013年。[58] D. Wang、Y. Sun 和 L. Li，《材料界面的间断伽辽金无网格建模》，《工程与科学计算机建模》，第45卷，第1期，第57–82页，2009年。

[59] T. Belytschko、J.-S. Chen 和 M. Hillman，《无网格与粒子方法》，新泽西州霍博肯：威利出版公司，即将出版。[60] T. Belytschko、Y. Y. Lu 和 L. Gu，《无单元伽辽金方法》，《国际工程数值方法杂志》，第 37 卷，第 2 期，第 229-256 页，1994年。[61] P. Krysl 和 T. Belytschko，《无单元伽辽金方法：连续与不连续形函数的收敛性》，《计算力学与工程方法》，第 148 卷，第 3-4 期，第 257-277 页，1997年。[62] T. Belytschko、Y. Krongauz、D. Organ、M. Fleming 和 P. Krysl，《无网格方法：概述与最新进展》，《计算力学与工程方法》，第 139 卷，第 1-4 期，第 3-47 页，1996年。[63] D. Organ、M. Fleming、T. Terry 和 T. Belytschko，《通过衍射与透明性对非凸体进行连续无网格近似》，《计算力学》，第 18 卷，第 225-235 页，1996年。[64] J. Dolbow 和 T. Belytschko，《无网格方法中伽辽金弱形式的数值积分》，《计算力学》，第 23 卷，第 3 期，第 219-230 页，1999年。[65] J.-S. Chen、C.-T. Wu、S. Yoon 和 Y. You，《伽辽金无网格方法的稳定协调节点积分》，《国际工程数值方法杂志》，第 50 卷，第 2 期，第 435-466 页，2001年。[66] M. Hillman 和 J.-S. Chen，《用于线性与非线性力学的伽辽金无网格方法：快速、收敛且稳定的节点积分》，《国际工程数值方法杂志》，第 107 卷，第 7 期，第 603-630 页，2016年。[67] J.-S. Chen、M. Hillman 和 S.-W. Chi，《无网格方法：20年后的进展》，《工程力学杂志》，第 143 卷，第 4 期，文章编号 04017001，2017年。[68] J.-S. Chen 和 Y. Wu，《非线性固体力学中采用节点积分的拉格朗日与半拉格朗日再生核离散的稳定性》，载于《应用科学计算方法》，多德雷赫特，2007年。[69] P.-C. Guan、J.-S. Chen、Y. Wu、H. Teng、J. Gaidos、K. Hofstetter 和 M. Alsaleh，《半拉格朗日再生核公式及其在土方作业建模中的应用》，《材料力学》，第 41 卷，第 6 期，第 670-683 页，2009年。[70] J.-S. Chen、W. Hu、M. A. Puso、Y. Wu 和 X. Zhang，《用于伽辽金无网格方法稳定化与正则化的应变平滑》，载于《偏微分方程的无网格方法 III》，第 57 卷，柏林，Springer，2007年，第 57-76 页。

[71] M. A. Puso、J.-S. Chen、E. Zywicz 和 W. Elmer，《无网格与有限元节点积分方法》，《国际工程数值方法杂志》，第 74 卷，第 3 期，第 416-446 页，2008年。[72] S. Li 和 W. K. Liu，《再生核分层单位分解，第一部分——公式构建与理论》，《国际工程数值方法杂志》，第 45 卷，第 3 期，第 251-288 页，1999年。[73] S. Li 和 W. K. Liu，《再生核分层单位分解，第二部分——应用》，《国际工程数值方法杂志》，第 45 卷，第 3 期，第 289-317 页，1999年。[74] J.-S. Chen、X. Zhang 和 T. Belytschko，《通过再生核应变正则化构建应变局部化问题的隐式梯度模型》，《计算力学与工程方法》，第 193 卷，第 27-29 期，第 2827-2844 页，2004年。[75] M. L. Kachanov、B. Shafiro 和 I. Tsukrov，《弹性解手册》，多德雷赫特：施普林格科学与商业媒体，2003年。[76] Simulia公司，《Abaqus/CAE用户指南》，Simulia公司，2016年。[在线]。地址：http://130.149.89.49:2080/v2016/books/usi/default.htm。[访问日期：2020]6月10日。