帮助学生成为熟练的问题解决者 第二部分：一个来自 wav 的示例 es

Chandralekha Singh[1] 和AlexandruMaries[21]匹兹堡大学物理学与天文学系，宾夕法尼亚州匹兹堡，15260，美国[2] 辛辛那提大学物理学系，俄亥俄州辛辛那提，OH 45221，美国

帮助学生成为熟练的问题解决者是物理课程的主要目标之一。在本文的第1部分中，我们总结了与物理教学相关的有关问题求解的大量研究；在本文中，我们将讨论一个大学物理入门中波情境下问题求解的具体实例。这项研究旨在考察绘制示意图如何影响学生的问题解决表现。一门大学物理入门课程被分成三个习题课班级，在每周测验中分别接受与图示相关的不同指导：一组获得了一幅示意图，另一组被要求绘制一幅示意图，第三组为对照组，未获得任何有关图示的指导。我们发现，获得示意图的学生表现显著差于另外两组学生。此外，我们发现，无论处于哪种条件下，将示意图作为问题解决过程一部分绘制出来的学生总体表现更好，尽管他们主要采用数学方法来解决问题。最后，我们对解决同一道题的学生进行了出声思维访谈，以进一步了解他们的解题方法，以及即使在主要采用数学方法的情况下，绘制示意图为何仍然有用。

Keyw词：问题求解；认知负荷；表征；波；大学物理入门 s

I. 引言

大学物理入门是一门颇具挑战性的学科，至少部分原因在于，学生很少将他们在物理学中学习的抽象概念与更具体、有助于理解的表征联系起来，除非有明确旨在帮助他们的教学策略。即使有指导和支架式支持，学生往往仍采用以公式为中心的问题求解策略，而这类策略可能并不要求他们理解物理概念。遗憾的是，在传统教学的大学物理入门课程中，这些较差的策略反而可能得到奖励 [1]。

多重表征在问题求解中的益处早已在物理教育研究中得到证实 [1-20], ，因此，许多研究者设计了明确强调多重表征的教学策略 [3, 4, 6, 20, 21] ；另一些研究者则开发了隐含侧重多重表征的策略 [22-27]。例如，范·赫弗伦（Van Heuvelen）的方法[3] 首先确保学生在熟悉的情境中运用多种表征探索概念的定性本质，然后再引入数学的复杂性。许多其他研究者强调，学生应熟练掌握不同概念表征之间的转换 [6, 28] ，并指出，当学生能够熟练运用多重表征时，会产生显著的积极学习效果 [29]。然而，必须谨慎关注多样表征模式在教学中的运用，因为由此可能产生特定的学习困难 [30] ： 在缺乏支持的情况下，学生面对以不同表征方式呈现的同一问题时，可能会采取不同的处理方式 [30, 31]。

在解题的初步概念分析和规划阶段，一种有用的表征是对题目所描述物理情境绘制示意图。研究表明，解题时采用图示表示优于仅使用文字表述 [6]。因此，物理学专家在尝试解决问题时会自然而然地使用图示，这并不令人意外 [3, 4,22, 32, 33]。然而，普通物理学生需要明确的指导，才能理解绘制

示意图是将给定信息整理并简化为更适合进一步分析的表征的重要步骤 [34]。因此，许多致力于帮助学生掌握有效问题解决技能的研究者，都试图让学生认识到，绘制示意图这一步对解决物理问题有多重要。在牛顿力学中，Reif [1, 2] 建议绘制若干图示：一幅呈现问题描述的图示，其中包含所有物体；并为每个需要单独考虑的子系统各绘制一幅图示。此外，他还详细说明了学生绘制这些图示时应采取的具体步骤：(a) 描述运动和相互作用；(b) 先识别相互作用的物体，再识别力；(c) 区分远程相互作用和接触相互作用；(d) 在接触点标注作用力与反作用力对的大小。其他研究者也在帮助学生学习问题求解技能的方法中强调了图示的重要性，并发现学生的问题解决方法有显著改善 [3]。以往研究表明，即使绘制图示不会带来额外奖励，绘制图示的学生也更善于解决问题 [35]。一项关于自发绘制受力图 (FBDs) [36] 如何影响问题求解 [37] 的研究表明，只有绘制正确受力图才能提高学生的成绩；绘制错误受力图的学生，表现并不比不绘制任何图示的学生好。

本研究探讨学生对机械波概念的理解，重点关注圆柱管中驻波的谐波。关于儿童 [38, 39], 中学生和高中生 [40-43], 本科入门阶段学生 [44, 45], 高年级本科生 [46], 以及物理教师候选人[47]对机械波的概念认识，已有研究进行了探讨。Eshach 和 Schwartz [40] 研究了 Reiner [48] 早先提出的发现是否同样适用于机械波：学生在学习科学时带来的初始知识往往是“基于物质的”（Reiner 将其称为“物质图式”）。他们发现，学生在某些方面确实持有这种观点。然而，有时学生所感知到的、与声波相关联的“物质”，与其他“常规”物质有所不同。之后，Eshach 及其同事 [49] 开发了一种统计工具，用于估算学生的心智模型。Wittmann [50] 也发现，学生讨论波时，常采用侧重于类物体属性的推理；这可能会妨碍将学生对机械波的理解从基于物质的本体论转变为事件序列这一目标。此外，Wittmann 和 Hrepic [51, 52] 致力于识别学生对机械波的心智模型，并探讨如何利用对这些心智模型的了解来改善学生对机械波的理解。用于识别这些心智模型的一种工具是 Wittmann 的波诊断测试 [53], ，这是一份开放式问卷。另一方面，Tonghchai 等人开发了一种针对机械波的选择题评估工具 [54] ，并利用该工具 [55] 评估学生的概念认识是否一致。他们发现，学生在不同情境下解答涉及机械波的问题时，表现并不一致；其他研究者在物理学的其他领域也发现了类似现象 [56-60]。对其他类型波的理解，例如光波 [61] 和电磁波 [62] ，也已有研究。然而，多重表征的运用及其在理解机械波方面的作用，尚未得到深入研究。在少数探讨非语言表征对理解声波所起作用的研究者中，Eshach 和 Schwartz [40] 发现，学生在解释自己对声波的理解时会运用各种各样的非语言表征。在他们对高中生进行访谈时，允许学生通过绘画或手势来阐明自己的推理。他们在研究结论中指出，学生使用的这些非语言表征可以成为良好的起点，帮助学生构建正确的视觉表征，从而充分理解波传播现象。

本文介绍了一项研究，探讨在测验中给出一道与管中驻波有关的问题时，向代数型大学物理入门课程的学生提供示意图

与要求他们自行绘制示意图（但不作进一步说明）相比，会如何影响他们的答题表现。研究还将这些学生的表现与一个对照组进行了比较；对照组在解答同一道驻波问题时，没有收到任何与示意图有关的指示。此外，在期中考试中还给出了另一道类似的问题，所有普通物理学生均未收到有关示意图的指示。本研究的主要目标是考察不同干预措施如何影响学生的问题解决表现，并进一步探讨绘制示意图如何影响学生的问题解决表现，尤其是在学生所选解题方法主要涉及方程运算的情况下。我们发现：1）明确被要求绘制示意图的学生，比另外两组学生绘制了更多有效示意图；2）获得示意图的学生表现显著逊于另外两组学生。此外，在测验题和期中考试题中，采用数学方法且绘制了有效示意图的学生，都比采用数学方法但未绘制有效示意图的学生表现更好。我们还发现，许多采用数学方法的学生在解答涉及管中驻波的问题时，难以对两个方程进行符号运算。为了更好地理解这些发现，我们对另一门代数型大学物理入门课程的八名学生进行了出声思维访谈。这些访谈有助于提出或佐证对课堂测验定量结果的可能解释。

II. 方法论

a. 参与者

一门以代数为基础的课程中，有118名普通物理学生，被分为三个不同的习题课班。所有习题课都采用传统教学方式，由助教（TA）讲解与作业题类似的问题，然后在习题课结束时安排一次15-20分钟的测验。所有习题课班的学生参加相同的讲座，完成相同的作业，并参加相同的考试和测验。这些学生主修生物科学或健康相关专业，主要是大三和大四学生。此外，这是他们大学物理入门课程序列的第二学期。

除入门课程学生外，本研究还将其中一道题提供给了参加助教培训课程的26名物理学一年级研究生（在本研究中视为物理学专家），以评估物理学专家使用图示方法解题的频率（据推测，这种方法更接近专家式方法）。我们还希望比较研究生在这道题上的平均得分与入门课程学生的平均得分。为确保研究生不会仅仅因为不记得相关方程而使用示意图，研究中提供了这些方程。

b. 本研究采用的干预措施

在整个学期的习题课测验中，三个小组拿到的题目相同，但接受了以下不同的干预措施：在每道测验题中，第一个干预组（称为“仅提示组”或“PO”）会在题目描述中收到明确提示或指示，要求他们画一幅示意图；第二个干预组（称为“仅示意图组”或“DO”）会收到一幅由教师绘制的示意图，旨在帮助他们解题；第三组为对照组，题目描述中既没有提供示意图，也没有明确要求他们画示意图（称为“无支持组”或“NS”）。

不同习题课小组的规模从 22 名到 55 名学生不等，因为学生并未

被分配到某个特定的习题课，以便他们可以参加自己想去的任何一节习题课。出于同样的原因，每个习题课小组的规模也会因周而异，不过变化没有那么剧烈，因为大多数学生（≈ 80%）会固定参加某一节习题课。此外，每项干预措施并未与某一特定习题课相匹配。例如，某一周，NS是周二的习题课，而另一周，NS 则属于不同的习题课小组。这一点很重要，因为这意味着个别学生每周接受的干预措施各不相同；我们也不认为会因同一组学生始终接受相同的干预措施而产生累积效应。

c. 使用的题目、正确解答和评分标准

本研究使用的两道题都涉及管中的驻波。其中一道题出现在实施了干预措施的测验中，另一道题出现在没有采取干预措施的期中考试中，所有学生收到的指示都相同。

- 测验题："一根充有空气的管只有一端开口，长度为 1.5 m。该管中形成了三次谐波驻波。波节与相邻波腹之间的距离是多少？"我们注意到，DO 组的学生除了看到题目陈述外，还得到了空管的示意图。PO 干预组的学生被明确要求在上述题目陈述之后画一张示意图，而对照组（NS）的学生只看到了题目陈述。

- 期中考试题：期中考试中的题目与测验题相同，唯一不同之处在于管的两端都开口，而不是只有一端开口。所有学生只收到了题目陈述，没有提供示意图，也没有要求他们画示意图。

解决这道测验题有两种方法（期中考试题也可以采用非常相似的策略来解决，不过所用的是两端都开口的管）。一种方法是像图1所示，画出题目所涉及的驻波。（请注意，在图1中，我们选择用位移而非气体的密度或压强变化来表示波，因为课堂上重点讲解的是位移。）例如，可以看出，管内可以容纳三个波节到波腹的距离；又因为管长为 $L = 1.5$ m，波节与相邻波腹之间的距离为 1.5/3 = 0.5 m。这种图示方法更接近专家式方法，因为它要求理解物理概念的图示表示（三次谐波驻波），以及该概念如何应用于仅一端开口的管（闭口端为波节，开口端为波腹）。

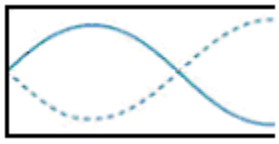


图 1：一端开口的管内驻波的 3rd 次谐波。

解决这个问题的第二种方法（与期中考试题的第二种方法非常相似）是使用长度为 L、仅一端开口的管中驻波第 nth 次谐波频率的方程 $f_n = \frac{nv}{4L}$，以及波速 v、频率 f 和波长 λ 之间的关系，即 $v = f\lambda$。然后，可根据 L 和 n 求出波长，最后将波长除以 4，得到波节与相邻波腹之间的距离。我们把后一种方法称为"数学"方法，因为它不一定需要理解其中涉及的物理原理：学生可以通过对两个方程进行运算，求出目标变量，而无需充分理解其背后的物理概念。

DO 中的学生没有获得图1中的示意图，因为这会大大降低题目的难度。相反，他们得到的是一幅部分示意图：管的横截面图，但没有呈现管中的波。设计者希望学生把这幅部分示意图视为完成图示的提示，从而更有可能采用专家式的图示方法。

为确保评分的一致性，我们为每道分析的问题制定了评分量规，并用其确保由两位不同评分者独立评分的20%数据具有至少90%的评分者间信度（其余数据由一位评分者评分）。每道题评分量规的制定都经历了一个迭代过程。在制定评分量规期间，两位评分者分别讨论了学生的得分，并将这些得分与使用先前版本评分量规所得的分数区分开来；如果双方一致认为该版本的评分量规过于严格或过于宽松，就会对其进行调整。每次调整评分量规后，都会使用改进后的评分量规重新计算所有学生的得分。由于这些问题有两种解题方法，一种主要依靠示意图，另一种主要基于数学运算，因此我们分别制定了评分量规，用于评价采用这两种方法的学生表现。表1概述了用于给采用数学方法的学生评分（测验和期中考试题目均适用）的评分量规，总分为10分。

必须强调的是，一端开口的管只能产生奇次谐波，因此n 公式$f_n = \frac{nv}{4L}$ 中只能取奇数值。然而，根据驻波的 n 倍频率必须等于基频的 n 倍这一约定，三次谐波对应于$n = 3$ （而不是n的第三个可能值，即 5）。即使在研究生中，这也是一个常见的混淆来源。我们调查了几名物理学研究生，发现他们中的大多数人将三次谐波与n的第三个可能值，即 5，联系起来；但根据这一约定，这是不正确的。同样，他们错误地认为，三次谐波的图示表示对应于在一端开口的管中绘制驻波的第三种可能方式，而根据同一约定，这实际上对应于五次谐波。由于许多专家都会混淆五次谐波和三次谐波，研究人员认为不应因这种混淆而扣入门课程学生的分。然而，我们还采用另一种方式进行了数据分析：如果将三次谐波误认为五次谐波，或使用 n = 5，则从满分 10 分中扣除 1 分。所有结果在定性上完全相同：在一种情况下（不因这一错误扣分）得出统计显著差异的每一项比较，在另一种情况下（因这一错误扣除 1 分）也同样得出了统计显著差异。在此，我们报告采用不因将三次谐波误认为五次谐波而处罚学生的评分方法所获得的结果。

表1显示，评分标准分为两部分：正确与错误想法。表1还显示，在正确思路部分，问题被划分为不同的部分，并为每个部分分配了分值（最高总分为10分）。每位学生起始得分均为10分；在错误想法部分，列出了学生在各部分中常见的错误，以及因每种错误而扣除的分数。需要注意的是，每个错误都与特定部分相关（标记为1和2的错误分别对应第一部分和第二部分，标记为3.1和3.2的两个错误对应第三部分，依此类推），并且对于每个部分，评分标准扣除的分数不能超过该部分的分值。例如，第3部分中的两个错误（3.1和3.2）互不兼容。同样，错误4.1与第4部分中的所有其他错误互斥，而错误4.3和4.4也互斥。最后，如果学生犯的错误并不常见，且未列入评分标准，则应归入标记为4.4的错误。

此外，还制定了一套评分标准，用于评估学生运用图示方法的表现。评分标准概要见表2。

表1：用于评定采用数学方法的学生在测验中表现的评分标准摘要（满分10分）。

正确思路		
第1节	使用了给出的方程 $f_n = \frac{nv}{4L}$	1 p
第2节	选择了 $n = 3$ 或 $n = 5$	1 p
第3节	写出 $v = f\lambda$	3 p
第4部分	正确求出 λ	2 p
第5节	将 λ 除以 4，计算波节与波腹之间的距离	2 p
第6节	答案的单位正确	1 p
错误想法		
第1节	使用了错误的方程	-1 p
第2节	选择的 n 值不是 3 或 5	-1 p
第3节	3.1 未写出 $v = f\lambda$	-3 p
	3.2 尝试写出 $v = f\lambda$，但出错了（即写成类似 $v =$ 的内容 f/λ）	-2 p
第4部分	4.1 未求出 λ	-2 p
	4.2 使用了不同于声波的 v 值	-1 p
	4.3 出错并获得了错误的 λ	-1 p
	4.4 不清楚 λ 的计算方式或存在其他错误	-1 p
第5节	未将 λ 除以 4 得出答案，或未得出答案	-2 p
第6节	单位错误	-1 p

表2：用于评定采用图示方法的学生在测验中表现的评分标准（满分10分）。

正确思路		
第1节	画出了正确驻波的示意图	4 p
第2节	正确使用示意图得出答案	5 p
第3节	答案的正确单位	1 p
错误想法		
第1节	1.1 示意图是一种未清楚标明波节位置的正弦波。和波腹	-1 p
	1.2 示意图在端点处有两个波节或两个波腹	-2 p
	1.3 示意图不代表三次谐波或五次谐波*（如果端点是一个波节和一个波腹）	-1 p
	1.4 示意图不代表三次谐波**（如果两个端点都是波节或都是波腹）	-1 p
第2节	2.1 得出的答案既不是波节与波腹之间的距离，也不是两个波节之间的距离（根据学生的示意图）	-4 p
	2.2 正确使用了示意图，但求出的是两个波节之间的距离	-2 p
	2.3 不清楚答案是如何得出的，或存在其他错误	-1 p
第3节	单位错误	-1 p

* 鉴于许多专家也会混淆一端开口的管中驻波的三次谐波和五次谐波，因此两幅示意图均被视为正确。

** 对于两端均开口或均封闭的管，专家不会遇到困难，因为所有谐波都可能出现，包括偶次谐波。因此，我们认为学生在这些情况下应该知道如何绘制三次谐波。

表2中所示评分标准摘要的基本形式与表1中的相同；它包含相同的两个主要部分（正确与错误想法），并将问题划分为若干节，列出学生在每一节中常犯的错误。在第1节中，错误1.4和1.3互不相容；在第2节中，错误2.1和2.2互不相容。与数学方法所用的评分标准类似，我们留出了一个小小的余地（标为2.3），以应对学生的错误未在评分标准中明确列出的情况（这种情况极为罕见，不到5%）。

我们注意到，这些评分标准在处罚可视为类似的错误方面，设计得彼此相近。例如，由于专家意见不一，数学方法所用的评分标准将n =3和 $n = 5$ 都视为正确。同样，图示方法所用的评分标准不会因学生在一端开口的管中的驻波图上画出五次谐波而非三次谐波而扣分。既然这一混淆在一套评分标准中不扣分，在另一套中也不扣分。另一个例子是数学评分标准第5节中的错误与图示评分标准中标为2.2的错误之间的对应关系。采用数学方法并正确求出波长的学生，必定理解波节和波腹的含义，并将波长除以四。要用驻波的图示表示来确定两者之间的距离，同样需要理解波节和波腹的含义。因此，这些错误受到同等处罚（扣2分）。

d. 研究问题

我们在学生所解决的问题背景下考察了以下研究问题：

研究问题1：入门课程学生与研究生（第一年博士生）的问题解决表现有何差异？研究问题2：不同干预措施对学生的问题解决表现有何影响？研究问题3：绘制示意图对学生的问题解决表现有何影响？研究问题4：学生运用数学方法解决问题的熟练程度如何？学生运用数学方法时常见的困难有哪些？研究问题5：学生在运用图示解决这些问题时常遇到哪些困难？

关于有效示意图，我们认识到，从绘制某一特定类型的示意图中能获得多少价值，以及个人如何运用示意图（及其绘制过程）来解决问题，取决于个人的专业水平。然而，就本研究而言，如果根据对问题进行的认知任务分析，该示意图能够帮助学生解决问题，那么就将其视为有效示意图。有效示意图分为两大类：三次谐波示意图（无论正确与否）和一个波长的示意图（无论绘制的是驻波还是单个正弦波）。即使学生尝试绘制三次谐波时所画的示意图并未呈现三次谐波，或未呈现正确情境下的三次谐波（一端开口、另一端封闭的管），仍将其视为有效示意图。这是因为可以运用专家式方法，通过这些示意图解决问题。第二类示意图（单个正弦波或驻波的一个波长示意图）之所以被视为有效示意图，是因为它可用于确定波节与相邻波腹之间的距离占波长的几分之几（另一类有效示意图也可用于此目的）。

为了回答前四个研究问题以及研究问题4的第一部分，我们使用从本科生和研究生中收集的定量数据，并进行了方差分析（ANOVA）[63]。为了回答研究问题4的第二部分和研究问题5，我们采用出声思维协议对八名学生进行了访谈，以深入了解他们在解答测验题时遇到的困难，并进一步探究这些学生表现背后的原因。

这些学生当时就读于同一所大学，选修一门内容相当于第二学期、以代数为基础的大学物理入门课程；与波相关的这些概念都已在课堂讲授和作业中涉及。除学生当时正在修读第二学期课程外，没有其他具体的筛选标准，而且学生的课程成绩各不相同（在第一学期课程中，他们的成绩从 C 到A 不等；在第二学期课程中，在访谈前最近一次考试中，他们的成绩从 56%到 83%不等）。在开展访谈之前，他们还曾通过期中考试接受过与波相关概念的测试。我们发现，他们的一些作业包含了与本研究所分析题目非常相似的问题，而且他们的第一次期中考试中有一道题要求学生画出管中驻波的不同谐波。所有访谈均由第一作者进行；访谈期间，首先要求学生尽其所能解答这道测验题，过程中不打断他们，只有当他们长时间保持沉默时，才要求他们出声说明思路。学生尽其所能完成题目后，如果他们在某个环节的推理不清楚，研究者会提出澄清性问题；此外，也会提出与其解题方法其他具体方面相关的问题。研究者还要求他们使用另一种方法解答管的问题（也就是说，如果学生使用数学方法解答，就询问他/她是否可以使用图示方法解答，反之亦然）。如果学生发现使用任一方法解题都有困难，研究者通常会提出旨在提供支架并引导他们的问题（结果部分提供了一些例子）。每次访谈持续 1到 1.5 小时（学生还解答了与其他研究相关的若干其他问题），并进行了录音。在每次访谈期间，采访者密切关注学生的解题方法，并全程认真记录，记下学生写了什么以及在什么时间写下的内容。每当他注意到某件值得特别关注的事情时，便连同时间戳一起记录下来。这样，采访者之后就能重新查看访谈中的相应部分，同时参考学生的作答（访谈结束后收集）和音频记录，从而更好地了解学生当时在做什么，以及他/她可能遇到的具体困难。随后，研究者将这些特定片段整理成文字，并对学生的困难加以解释；之后，两位作者共同讨论这些片段，并决定哪些片段能够说明文章中所涉及的较为普遍的困难。

III. 结果

研究问题1：入门课程学生与研究生（一年级博士生）在问题解决表现方面有何差异?

这道测验题还给一组参加助教培训课程的 26 名一年级研究生作答（在本研究中，他们是物理学专家）。对于一名物理学研究生来说，使用数学方法求解波长是一道直接的数学练习。然而，我们发现，其中 76% 的人选择通过绘制示意图来解决问题（完全忽略了提供给他们的方程），从而证实了我们的假设：专家更有可能遵循图示方法来解决这道题。普通物理学生和研究生在这道测验题上的表现列于图 2 中。柱状图上的数字表示每组中的学生人数，误差线表示标准误。

研究生与入门课程学生之间的成对 t 检验 [63] 显示，采用图示方法的研究生表现优于采用相同方法的入门课程学生（$p < 0.001$，科恩 d 值 = 1.07）。此外，研究生的总体得分高于入门课程学生（$p < 0.001$，科恩 d 值 = 0.574）。对于采用数学方法的研究生与入门课程学生之间的比较，由于该组研究生人数较少（10 人），不适合进行 t 检验，但两组之间似乎差异不大。

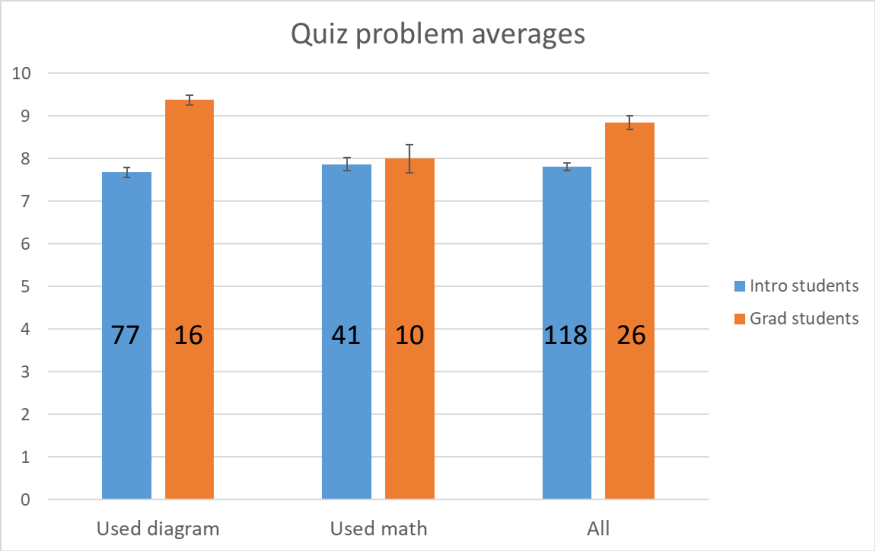


图 2：入门课程学生和研究生在测验题上的表现，按解题方法分类（满分 10 分）。

RQ2：不同的干预措施如何影响学生的问题解决表现?

三个不同组在测验题上的平均得分，以及组规模和标准差如图3所示（数字和误差线的含义与图 2中相同）。方差分析表明，各组的表现存在统计显著差异；表 3所示的不同组之间的成对t检验（使用Scheffe 方法校正多重比较）表明，DO 组的学生表现显著差于另外两组的学生，而 PO 组与 NS 组之间不存在统计显著差异。

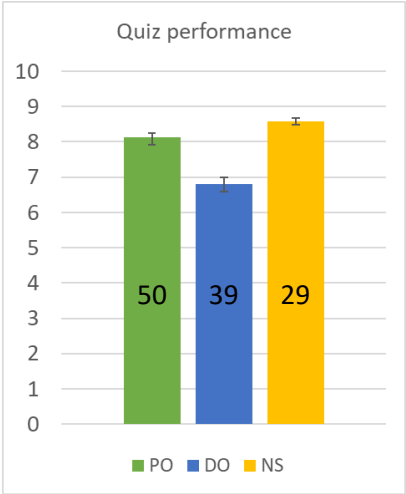


图 3：不同组学生的平均测验成绩（满分 10 分）。

表3：使用 Scheffe方法控制多重比较后，不同组别得分之间比较的 p 值。测验 PO-DO DO-NS PO-NS

	0.016	< 0.001	0.414

RQ3： 绘制示意图如何影响学生的问题- 解决表现?

我们研究了绘制示意图和/或使用图示方法与使用数学方法分别如何影响学生在测验题和期中考试题中的得分。所有学生都根据其使用的是更具专家特征的图示方法（图4中的“使用示意图”）还是主要使用数学方法进行分组。在主要使用数学方法的学生中（如前文所述），我们根据其是否绘制了有效示意图，将学生分为两类。我们希望研究有效示意图是否有助于提高得分（因此，图4中使用数学方法的学生被分为两组：“使用数学方法并绘制有效示意图”和“使用数学方法，不绘制示意图”）。

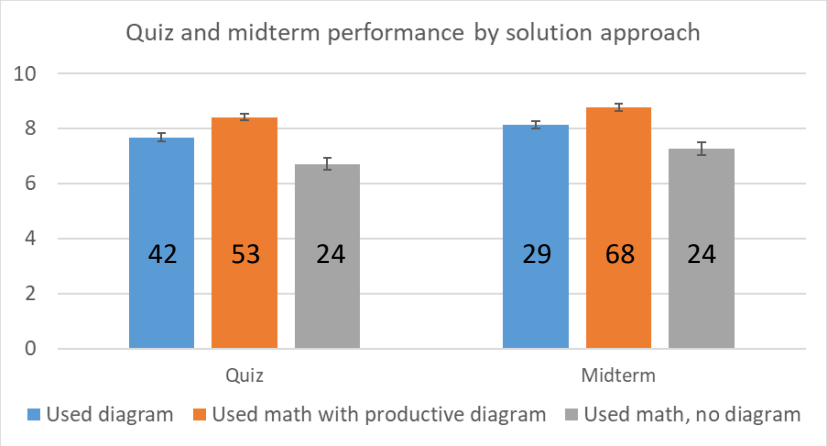


图4：按解题方法分类的学生测验和期中考试平均成绩。

比较学生在测验和期中考试中的表现后发现，图4所示的各组学生（使用示意图的学生、使用数学方法但也绘制了有效示意图的学生，以及使用数学方法但未绘制有效示意图的学生）之间均无统计显著差异。然而，在测验和期中考试中，主要采用数学方法但也绘制了有效示意图的学生，表现均优于选择数学方法但未绘制有效示意图的学生：比较这两组学生所得的测验和期中考试的 p 值/科恩 d 值分别为 0.002/0.900 和 0.006/0.697。这些数值表明，在测验和期中考试中，这两组学生的表现差异都相当大。

研究问题4：学生运用数学方法解决问题的熟练程度如何？学生运用数学方法时常见的困难有哪些？

另一项发现是，主要采用数学方法的普通物理学生在求解波长时遇到了很大困难，因为他们没有代入波速 v 的数值。题目给出了管中波的第 n^{th} 次谐波的频率方程，其中管的一端开口，即 $f(n) = \frac{nv}{4L}$，但没有给出波的波速、频率和波长之间的关系（$v = \lambda f$）。因此，学生必须记住方程 $v = \lambda f$ 才能求出波长。表4列出了在写下 $v = \lambda f$ 的学生中，有多少人能够在不代入波速数值的情况下正确求出波长，有多少人无法做到这一点，以及有多少人代入了某个波速数值（尽管题目并未明确给出该数值）来求解测验题和期中考试题中的波长。

表4显示，在测验和期中考试中，能够从两个方程中消去不需要的量，并且不借助未明确给出的波速数值信息来求解目标变量的学生都不到一半（测验中为48%，期中考试中为36%）。我们注意到，表4中第3类学生所采用的方法（代入波速的一个数值，v）不一定是低效的方法，因为这有助于学生降低认知负荷。然而，许多学生为了求解测验和期中考试中的问题而将一个数值代入波速（尽管求波长时，波速会在两个方程之间相互抵消），这表明相当大比例的学生在

代数型大学物理入门课程中，不习惯通过对两个方程进行符号运算来消去不需要的量并确定目标变量。

表4：能够用代数方法求出波长、无法求出波长，以及为了求出波长而代入波速数值（尽管题目未提供该数值）的学生比例（在写下 v = λf 的学生中），分别针对测验和期中考试。

Quiz	
1. 正确求解λ （采用代数方法，即不代入 v 的数值）	48%
2. 未正确求解 λ，或根本没有求解	10%
3. 通过代入 v 的数值求解 λ	41%
期中考试	
1. 正确求解 λ （使用代数方法，即不代入 v）	36%
2. 未正确求解 λ，或根本没有求解	8%
3. 通过代入 v 的数值求解 λ	55%

正如其他人所指出的，学生并不总能轻易地将数学知识迁移到物理情境中。我们考察了代数基础课程中的学生能否解决一个同构（相似）的纯数学问题。问题如下：

在下面的两个方程中，C 是常数。用 C 表示 x 并求解。写出你的解题过程！

$$\begin{cases} y = \dfrac{C \cdot z}{4} \\ z = x \cdot y \end{cases}$$

这相当于学生采用纯数学方法解答测验和期中考试题目时必须求解的方程组，只要作出以下对应关系：$y \leftrightarrow f, C \leftrightarrow n, z \leftrightarrow v, x \leftrightarrow \lambda$和$4 \leftrightarrow 4L$ （L 给定为1.5米，因此学生可以代入它来求得$4L = 6$）。我们发现，第一学期代数课程开始时，64%的学生能够正确求解这个方程组；第二学期课程开始时，89%的学生能够正确求解这个方程组。将这些百分比与学生在测验和期中考试中使用数学方法、通过代数运算求解题目的比例进行比较，可能并不恰当，因为后者没有代入v的数值；在那些情况下，学生可以选择代入某个未知数（v）的数值，这会大大简化任务。可以合理地认为，部分（甚至大多数）在方程中代入v 数值的学生这样做，是因为否则他们就无法解题。不过，学生在纯数学情境中从二元方程组中求出所需变量，似乎比在物理情境中更为擅长，尤其是第二学期代数班的学生。

访谈中也观察到了这些困难。一些学生最初采用数学方法处理问题，但在难以确定接下来应进行哪些数学步骤后，转而采用示意图方法。例如，Dan 将 $n = 3$ 和 $L = 1.5$ m 代入频率方程，并解出 f/v，得到 1/2（他没有写下 1/m 的单位）。此时，他似乎卡住了，思考了一会儿后，便转而采用示意图方法。出声思维环节结束后，研究人员进一步询问 Dan，他提到自己知道另一个方程 $v = f\lambda$。他指出，解题过程中有一刻曾想过用这个方程求波长。不过，他没有明确写下这个方程，因为不确定它是否能帮助自己确定波长。具体来说，在他转而用……解题之后，使用了这种方法。

图示方法，并尽其所能尝试解决后，采访者问他是否了解波速、频率和波长之间的联系。此时，Dan 在纸上写下了这个方程，并正确判断出波长应为 2 m。有趣的是，Dan 提到，在访谈的出声思考环节解决问题时，他曾在心里想过是否可以使用这个方程$v = f\lambda$ 以及 $f/v = 1/2$ 来求解波长，但采访者没有进一步追问。然而，他放弃了使用这些方程解决问题，也没有意识到，将方程 $v = f\lambda$ 写在纸上可能会在问题求解过程中减轻认知负荷，并可能有助于促进问题解决过程。此外，尽管 Dan 自己提到曾考虑使用方程 $v = f\lambda$ 以及 $f/v = 1/2$ 来求解波长，但他无法做到这一点，转而采用了另一种方法。然而，当给他一个形如 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$、含有两个未知数的二元方程组（不带物理学情境）时，他能够轻松地求解出变量 x 和 y，而无需付出太多努力。

另一名学生 Karen 在访谈的出声思考环节一开始使用图示方法解决了这个问题。在访谈的第二部分，采访者要求她使用数学方法解决问题，并给了她方程 $v = f\lambda$。此时，Karen 的第一步是将这个方程代入题目所提供的另一个方程中，并代入 $n = 3$和 $L = 1$。5 m。于是她得到了 $f = {}^{3}{(f\lambda)}{4(1.5)}$，这是一种有效的问题解决方法。然而，在这一步之后，她不确定接下来该做什么；思考了一会儿后，她放弃了，并表示自己不知道该如何继续（她没有意识到可以约去方程两边的频率）。随后，采访者给了她一个含有两个未知数的二元方程组（使用传统的 x 和 y 变量，不涉及物理情境），与 Dan 需要解决的方程组类似，而她不费 much effort 就正确地解出了它。在这种情况下，Karen 知道接下来需要做什么；但在管问题的情境中，完成代入步骤后，她无法确定下一步该做什么。她没有意识到 f 出现在方程的两边，可以将其约去；也没有意识到可以将方程两边同时乘以右侧分数的分母，从而得到一个更简单的波长方程。

另一位学生 Tara 从一开始就采用数学方法解决问题。她知道需要用到这两个方程，$f = \frac{nv}{4L}$ and v = *fλ*，便把它们写下来，然后说道：

Tara：“如果我知道 v [波速]，就可以代入这个方程 [$f = \frac{nv}{4L}$]，求出 f，然后再代入这个方程 [v=*fλ*]，求出波长。”

接着，她画出一个行进波的波长，并说她会用所得的波长除以 4，求出波节与波腹之间的距离。此时，她表示自己已经尽力了；从她的话可以看出，由于没有给出波速，她认为自己无法解答这道题。随后，采访者问她：

采访者：“不知道 v 的值，你能解这道题吗？”

Tara：“我能吗？大概可以……”

随后，她思考了一会儿（不到一分钟），试着用这两个方程求出波长，然后说道：

Tara：“我想不出别的办法了。”

采访者：“如果你看这个方程 [（用手指指向 $f = \frac{nv}{4L}$] ）和这个方程 [（用手指指向 $v = f\lambda$]）……”

Tara 在采访者能够提出问题“你能求出 λ 吗？”之前打断了他。 ”:

Tara：“我可以把它们全部代入 [……] 使用代入法 [……] 你可以把频率和波长代入 v [她的意思是把频率乘以波长后代入 v] 给出的方程 [……] 这样就能求出 lambda。”

随后，她正确地求出了波长，并没有代入波速的数值。尽管 Tara 知道如何进行代数代入，但即使在被明确询问能否在不代入波速数值的情况下求解该问题后，她似乎仍未调取这一信息。此外，采访者将她的注意力引向需要进行运算的两个方程后，Tara 立即意识到自己需要做什么；这一事实表明，她先前停顿了大约一分钟思考自己能否在不知道波速的情况下解决问题时，可能并没有关注有关这两个方程的相关信息。

这些访谈实例表明，学生能够在没有物理情境的情况下毫无困难地求解二元联立方程组，但他们未能将数学知识迁移到物理情境中。这种将学习内容从数学情境迁移到物理情境的困难，例如，可能是因为在物理情境中存在其他信息，会分散学生对相关信息的处理注意力，而在进行纯数学练习时则不存在这类干扰。此外，数学在物理课程中的使用方式不同于在数学课程中的使用方式，这也可能导致从一种情境迁移到另一种情境时出现困难。例如，根据两个方程求出波长，$f = \frac{nv}{4L}$，以及 $v = f\lambda$，对学生而言可能比求解含有 x 和 y 变量的一般二元联立方程组更困难（正如访谈中观察到的部分学生的情况）。在前一种情况下，代入这些方程的符号具有物理意义，学生可能更难专注于相关信息（例如，将一个方程代入另一个方程、交叉相乘等），因为这些物理意义增加了第二种情况下不存在的额外信息；在第二种情况下，变量 x 和 y 不具有物理意义（对于包含变量 x、y 和 z 的同构数学问题，也可以作同样的说明）。这在一定程度上可以解释学生在不求助于代入未给出的信息的情况下，根据两个方程求出波长时所表现出的困难；这一点在定量数据和出声思维访谈中均有所观察。

RQ5：学生使用图示解决这些问题时，常见的困难有哪些?

访谈还揭示了普通物理学生在解决问题时，使用图示方法表示管中驻波所遇到的一些困难。例如，Karen 在读完题目后，一开始就指出，管的封闭端将是一个波节，而管的开口端将是一个波腹。随后，她尝试画出该波的三次谐波，她的尝试反映了这一认识。然而，她难以直接画出三次谐波，于是决定先在旁边（而不是管内）画出基频，再逐步画到三次谐波。不过，她在旁边画出的谐波示意图两端都有波节，因此对应的是另一种情形（两端封闭的管）。尽管 Karen 在读完题目后明确指出，管的一端应为波节，另一端应为波腹，但她并未意识到自己在图示中的这一错误。解题时，她似乎忘记了自己最初正确的表述

（即一端应为波节，另一端应为波腹），并使用了她在旁边画出的错误三次谐波（它对应于两端封闭的管中的驻波）来解决问题。

另一名学生 Sara 为一端开口的管中的波画出了 5th 谐波。然而，她所画的波的最后一段（最后 1/4 个波长）在她的示意图中（见图 5）看起来与波的另外两段（各为 1/2 个波长）长度相同。



图5：学生 Sara 绘制的五次谐波示意图（复现）

因此，她将管的长度除以三，得到两个波节之间的距离，然后再将该距离除以二，得到一个波节与一个波腹之间的距离。在她对自己的答案感到满意，并尽其所能完成了这道题后，采访者问她为什么要将管的长度除以三。以下是一段简短的摘录：

Sara：“嗯，根据它对三次谐波的描述，我画出了波，这样这里会有一个波节，那里会有另一个波节[中间的两个波节]，然后剩下的波就向管的外侧展开。假设管是封闭的，我想管的末端会再出现一个波节[右侧]。”

采访者：“是啊，但它不是封闭的。”

Sara：“对，但我以为这些波节 [中间的两个] 会自动把管分成三段。”

采访者：“好，所以你认为这里也是 [在右端] 会有一个波节？”

Sara：“如果它是封闭的 [……] 我知道它不是封闭的，所以不会出现波节，它只是有点向外敞开，但我以为，如果它是封闭的，就会有那个波节，而这些波节 [中间的两个] 会把管分成三段相等的 [……] 长度。”

Sara似乎没有修改自己的示意图以符合题目情境，而是修改了题目，使其符合自己的示意图，结果实际上解答了另一个问题。她也意识到那是一个不同的问题（“我知道它不是封闭的”），但这似乎并没有让她觉得足够矛盾，以至于需要改变自己的示意图或理解。此时，采访者继续追问，以引起她对错误的注意：

采访者：“当然，但你解的是另一个问题，因为你假设它是封闭的，但它并不是。如果它是开放的，会有什么变化？”

Sara：“所以基本上，这个[右边最后一段本应是 1/4 波长]，和这个以及这个[她指着自己画的波的另外两段]不一样。”

Sara 随后停下来思考她的示意图，并运用“最后一段的长度是另外两段的一半”这一知识，正确求出了一个波节与其相邻波腹之间的距离。与 Karen 类似，Sara 最初在未受打断的情况下解题时，也没有运用自己掌握的知识（波的最后一段比另外两段短）。在采访者明确提醒她注意自己画的示意图，并指出她解的是另一个问题后，Sara 得以调取正确的信息，并根据她所画的五次谐波示意图正确解题。

另一名学生 Brian 在测验题中使用了不适用的信息。他认为，离管的封闭端越远，波节与波腹之间的距离就越小。图 6 展示了 Brian 所画的示意图，其中的驻波离管的封闭端越远，波节之间的距离就越小。不清楚他为什么会这么想，但他明确表示，自己记得教师曾画过一个这样的示意图。教师不太可能画过这种示意图，因为学生使用的教材中没有这样的示意图，也没有讨论驻波的波节间距发生变化的情况。他可能误解了教师所画的某个示意图。

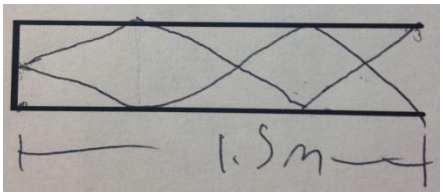


图 6：Brian（学生）绘制的五次谐波示意图。

Brian 没有意识到，他绘制的示意图不适用于题目所描述的情形，因为如果他的推理是正确的，那么题目就应该明确学生需要求出从哪个波节到相邻波腹的距离（根据你选择的波节/波腹不同，在他的情形下这个距离也会不同）。因此，他无法使用这幅示意图解题，随后转而尝试使用数学方法。

访谈中的其他发现

定量研究的主要发现之一是，即使学生在问题求解中主要采用数学方法，一幅好的示意图对于解决与管内驻波相关的问题仍然具有价值。特别是，我们发现，采用数学方法但绘制了有效示意图的学生，其表现优于采用数学方法却没有绘制有效示意图的学生。如前文所述，在为这些问题界定“有效示意图”时，我们认为，任何三次谐波的示意图（无论是否正确）都可能是有效的，因为它为学生提供了对问题进行概念分析和规划的机会，而且学生可以利用绘制该示意图所得的洞见来解决问题。此外，即使选择了主要采用数学方法，绘制有效示意图的过程也有助于从概念上分析问题；这样的示意图还可用于确定波节与相邻波腹之间的距离代表波长的几分之几。另一种可能有用且被认为有效的示意图，是一个驻波或单个正弦波的一个波长的示意图。有趣的是，接受访谈的学生中有一半（四名）选择了数学方法。大多数这些学生（三名）绘制了一个单个正弦波的一个波长的示意图，以确定波节与相邻波腹之间的距离是波长的四分之一（而且他们确实正确地完成了这一点）。一名接受访谈的学生绘制了三次谐波的示意图，但在解决问题时没有明确使用她所绘制的示意图（而只是关注方程）。这名学生将波长除以三（而不是四），以求得波节与波腹之间的距离，因为她声称，为确定波节与相邻波腹之间的距离，需要用波长除以的数字与谐波有关（也就是说，她除以三，是因为问题涉及驻波的三次谐波）。

在采用图示方法的四名学生中，只有一人以专家最可能采用的方式使用了这种方法（也与研究生的方法一致）。他先确定管的长度中可以容纳多少个波节与波腹之间的距离，然后将管的

长度除以这个数。其余三名学生则根据自己画出的三次谐波示意图来确定波长。确定波长后，他们便与采用数学方法确定波长的学生处于同一阶段；和那些学生一样，他们接着确定应将波长除以多少，才能得到波节与相邻波腹之间的距离。为此，三名学生中有一人另外画出了一个单独正弦波的一个波长的示意图（并错误地用它求出波节与波腹之间的距离），另外两人则明确使用了自己画出的三次谐波示意图（并正确地用这些图示求出波节与波腹之间的距离）。受访学生独立解题并出声思考时的表现，以及在被要求澄清先前未说明的要点时所说的话，都表明：为这道题画出三次谐波示意图，甚至画出一个单独正弦波的一个波长，都有助于找出波节与相邻波腹之间的距离和驻波波长之间的关系，因为这能帮助学生聚焦于相关信息，从而继续解题。正如前文所述，那名既没有使用自己画的三次谐波示意图，也没有画出一个单独正弦波的一个波长来确定波长范围内波节与波腹之间距离的受访学生犯了一个错误（由于题目涉及三次谐波，她将波长除以了三）。然而，在其他使用三次谐波示意图或单个正弦波一个波长的示意图来确定波节与波腹之间距离的学生中，只有一人犯了错误（将波长除以了2，而不是4）。访谈表明，即使学生主要采用数学方法，画出有效示意图的学生也表现得更好，因为示意图帮助他们从概念层面思考解题过程。

IV. 总结与讨论

在这篇分为两部分的文章的第一部分中，我们回顾了有关物理学问题求解的研究，这些研究可分为三个相互关联的类别：信息加工与认知负荷、知识组织，以及元认知与问题求解启发式。在第二部分中，我们讨论了一项直接涉及问题求解若干重要方面的研究。我们发现，在主要选择数学方法的学生中，绘制了有效示意图的学生表现优于没有绘制的学生（RQ3）。这一结果与先前的研究一致；该研究发现，即使在选择题考试中，绘制示意图的学生也比不绘制示意图的学生表现更好 [35]。本文介绍的研究并非旨在厘清绘制示意图的学生是否通常具有更专家式的问题求解方法（例如，在概念分析阶段开始绘制或借助绘制示意图），或者绘制示意图这一过程是否无论学生总体采用何种问题求解方法，都能对他们有所帮助。不过，值得注意的是，访谈表明，绘制示意图的学生试图从概念层面理解问题；而明确运用自己所绘示意图的学生，比没有绘制示意图的学生更不容易出错。因此，鼓励学生并帮助他们明确学习良好的问题求解启发式（包括在概念规划阶段绘制示意图），将使他们受益；教师应强调并奖励学生绘制示意图。

我们注意到，出于两个原因，该测验题也向一组研究生进行了施测：一是确认更专家式的方法确实是图示方法，二是获得普通物理学生表现上限的基准。我们发现（研究问题1），即使提供了 n^{th} 谐波频率的方程，大多数研究生仍选择了图示方法，从而确认图示方法是

确实是一种更具专家式的方法。这一发现支持了先前的研究，这些研究强调，专家在进行问题求解时往往会大量使用表征[1-6,9, 13,16,32, 33]。我们还发现，研究生的表现比普通物理学生平均高出约 13%。

此外，我们发现，得到空管示意图的学生，表现显著差于被要求绘制示意图的学生，以及未收到任何关于示意图的指示的学生（RQ2）。在此前的一项研究中，[64], 我们考察了入门课程学生在两道涉及初始和最终情境的静电学问题上的表现，也发现了相同的结果。此外，对于静电学问题，DO组与另外两个干预组之间的分数差异更加明显（得到示意图的学生的平均分比另外两组的平均分低 20% 以上，且 p 值小于 0.001）。参考文献 [64] 中的研究采用了与本文所述相同的方法论。不过，提供给 DO 组学生的示意图，与大多数教师为解答这两道题而最初会绘制的图非常相似，其目的在于提供支架式支持。然而，这些示意图并没有帮助学生解题，反而产生了相反的效果：与另外两组的学生相比，他们的表现从统计学上显著变差。Heckler [65]开展了一项类似研究，发现获得示意图的学生往往会采用更形式化的方法，而不是运用直觉（对于其中一些问题，直觉有时更有效），这导致他们在某些问题上的表现比对照组更差。不过，在其他情况下，研究未发现表现差异。与本研究中参考文献 [64] 和 [65], 所提供的示意图不同，DO 组的学生只得到了一张部分示意图（空管）。提供这张部分示意图，原本是想给学生一个提示，引导他们补全示意图并尝试以类似专家的方式解题（绘制驻波三次谐波的示意图，并用它来解决问题）。然而，与涉及静电学问题的研究类似，我们在这里也发现，提供空管示意图产生了与预期相反的效果。其他研究者发现，[66] 向学生提供示意图带来的益处有限；而在未提供示意图的情况下，学生在解题过程中自行绘制示意图的可能性往往显著更高。这表明，教师或许可以避免直接给学生提供示意图（转而明确要求学生绘制，或对此给予奖励），但如果问题情境复杂，仅靠文字难以解释，则不在此列。

我们还发现，在解决物理问题的情境中，学生在对两个方程进行符号运算时遇到了很大困难（研究问题4）。然而，当学生需要求解一个不含物理情境的同构二元方程组时，绝大多数学生都能够通过其他变量正确地对方程进行运算并求出目标变量。在访谈中也观察到了学生在物理情境中的数学能力与其在数学情境中的数学能力之间的这种差异；这与以往关于学生在物理情境中运用数学时遇到困难的研究结果一致[67], ，这些研究往往指出，数学在物理课程中的使用方式与其在数学课程中的使用方式截然不同[68,69]。许多学生表示，在利用这两个联立方程求波长之前，需要先代入波速的数值，尽管波速本可以在两个方程之间约去。当被要求在纯数学情境中求解一个二元联立方程组时，所有学生都能轻松完成，这表明，在测验和期中考试题目中包裹数学任务的物理情境，可能使学生更难意识到应如何对方程进行运算以求出目标变量。学生可能并未关注相关的

由于额外的情境信息（物理问题中的变量具有意义，这增加了必须在进行必要的数学运算时加以忽略的额外信息）。访谈表明，在最初的问题解决阶段，一些学生没有提取出与对两个联立方程进行代数运算相关的数学知识，尽管他们知道该如何操作。这可能是因为他们的专业水平所致：在特定时刻，物理情境中需要在其工作记忆中处理的信息过多，从而导致了认知超载[70]。因此，他们更难以将注意力集中在某一时刻必须处理的相关信息上，并作出有助于推进解题过程的决定。例如，如前文所述，一名接受采访的学生无法确定如何解决该问题，除非代入有关波速的信息；但题目并未给出波速，即使采访者明确要求她这样做，她仍然无法确定。然而，一旦采访者将该学生的注意力引向需要进行运算的两个方程，该学生立即意识到了下一步（代数代入），并正确地解决了问题。

此外，在访谈中还观察到，学生采用图示方法解题时也会遇到困难（RQ5）。其中一些困难也可以借助认知负荷理论 [70] 的框架来解释。具体而言，有时学生没有运用自己掌握的波的知识；学生明确提到了这些知识，有时甚至在问题求解的另一阶段短暂运用过这些知识。访谈表明，在问题求解的不同阶段，学生专注于问题的某些方面时会出现认知超载，完全忽略其他重要信息，导致表现下降。

这项研究的一个教学启示是，应通过奖励学生绘制有效示意图，鼓励他们这样做。在众多可能有助于学生学习绘制有效示意图及掌握其他有效物理问题求解方法的框架中，经实践检验的认知学徒制模式或许颇具价值。在这一认知学徒制模式中，教师可以通过示范有效示意图来展示有效的问题求解方法，随后在学生练习这些技能时给予指导和反馈，并随着学生逐渐具备独立能力而逐步撤去支持。这项研究的另一项教学启示是，教师应牢记，代数基础型大学物理入门课程的学生在求解物理问题时可能会出现认知超载，因为他们必须同时处理数学运算并运用基础物理原理，才能在广阔的问题空间中顺利推进。尤其对于代数基础型课程中代数不熟练的大学物理入门学生而言，同时兼顾这两项任务在认知上可能负担很重。他们相当一部分工作记忆可能用于理解数学步骤，或处理相关物理概念。例如，如果学生大量认知资源用于梳理所涉及的数学，而非理解基础物理原理的意义以及为何要运用某些概念，他们可能难以形成清晰的概念心理图景，也可能难以成功求解物理问题。由于数学困难会使学生难以建立良好的物理知识结构，因此应根据学生的物理和数学能力，为其提供适当指导和合适的支架式支持，帮助他们从初始知识状态逐步达到课程目标所要求的最终知识状态。

鉴于本研究中的两项发现印证并强化了前文所述的既有研究（即：1. 绘制示意图的学生表现显著优于不绘制示意图的学生，即使他们主要采用数学方法；以及 2. 为学生提供示意图可能会产生不利影响）

.....他们的问题解决表现），未来研究可通过探究在一个学期内提示学生绘制图示并给予奖励对其问题解决技能的影响，进一步巩固这些研究结果。在本研究中，学生收到的有关图示的指导各不相同，因此无法观察到学生持续接受相同图示指导所产生的累积效应。若学生在整个学期内始终留在三个组别之一，了解可能产生的累积效应将很有益。此外，学生绘制图示或采用有效的问题解决策略并不会得到奖励；鉴于评估会影响学习 [71],，通过成绩激励奖励学生绘制图示，可能会对他们的问题解决表现产生积极影响。访谈得出的另一项主要发现是，认知负荷这一概念有助于理解学生在数学方面遇到的困难。目前，物理教育领域从认知视角出发、在物理情境中探究学生数学困难的研究并不多。鉴于以往研究着重从信息加工和认知负荷的角度探究一般性的问题解决，我们认为，采用这一视角开展研究，将有助于深入理解学生的数学困难（尤其是在物理问题解决情境中）。未来对此开展的研究或可提供重要见解，为有意帮助学生培养有效物理问题解决技能的教育者提供教学启示。

参考文献

1. Heller, J.; Reif, F. 规定有效的人类问题解决过程：物理学中的问题描述。《认知教学》1984, 1, 177-216. 2. Larkin, J.; Simon, H. 为什么一幅示意图（有时）胜过千言万语。《认知科学》1987, 11, 65-99. 3. Van Heuvelen, A. 概述：案例研究物理学。《美国物理学杂志》1991年, 59, 898-907. 4. Reif, F. 1994年密立根讲座：理解和教授重要的科学思维过程。《美国物理学杂志》1994, 63, 17- 32. 5. Zhang, J. 问题求解中外部表征的本质。《认知科学》1997年, 21, 179-217. 6. van Someren, M. 等.《多重表征学习》；Elsevier Science：美国纽约州纽约市，1998年。7. Singh, C. 运用同构问题评估学生在大学物理入门中的专业水平，第一部分：学生在大学物理入门中一对反直觉问题上的表现。《物理评论：物理教育研究专题》2008年, 4, 010104. 8. Lin, S.-Y.; Maries, A.; Singh, C. 学生在大学物理入门中将数学表征转换为图形表征时遇到的困难。AIP Conf. Proc. 2013年, 1513, 250-250. 9. Dunbar, K. 问题求解。载于《认知科学伴侣》；Bechtel, W. 和 Graham, G. 编；Blackwell Publishing：美国马萨诸塞州马尔登，2017年；第289-298页。10. Maries, A.; Singh, C. 学生在解决大学物理入门问题时自行绘制有效示意图是否有益？以两道静电学问题为例。《欧洲物理学杂志》2018年, 39, 015703. 11. Bajracharya, R. 等. 学生解决热力学多重表征偏导数问题的策略。《物理评论：物理教育研究》2019, 15, 020124. 12. Morphew, J. 等. 呈现风格和问题求解尝试对元认知及从解题视频中学习的影响。《物理评论：物理教育研究》2020, 16, 010104. 13. Burkholder, E. 等. 大学物理入门问题求解教学与评估模板。《物理评论：物理教育研究》2020, 16, 010123. 14. Price, A. 等. 对科学与工程领域专家问题解决过程的详细刻画：教学与评估指南。CBE-Life Sci. Educ. 2021年, 20, 1-15. 15. Conceição, T.; Baptista, M.; Ponte, J.P. 课程研究作为改变中学职前物理教师在教学中使用多重表征实践的一种方式。《科学教育》2021 11, 791. 16. Ibrahim, B., & Ding, L. 序列式与同时式综合问题求解：学生视线转换的比较，《物理评论：物理教育研究》2021年, 17, 010126. 17. Vignal, M., & Wilcox, B. 研究物理专业学生在问题求解过程中自发绘制和受提示绘制的示意图。《物理评论：物理教育研究》2022, 18, 010104. 18. Koenig, K. 等. 通过交互式视频增强教程促进问题求解。《物理教师》2022, 60, 331-334. 19. Reinhard, A. 等. 评估元认知反思练习对问题求解能力的影响。《物理评论：物理教育研究》2022, 18, 010109。

20. Testa, I.; Catena. D. 高中生在数学和物理中线性关系不同表征之间转换时的表现。《科学教育》2022, 12, 776. 21. Kirstein, J.; Nordmeier, V. 物理实验的多媒体表征。《欧洲物理学杂志》2007, 28, S115-S126. 22. Coletta, V.P.; Phillips, J.A. 培养大学物理入门力学中的思维与问题求解技能。AIP Conf. Proc. 2010年, 1289, 13 16- . 23. Clement, J. 科学问题求解中生成类比的观察方法。《认知科学》1998, 12, 563-586. 24. DeMul, F.; Batlle, C.M.; DeBruijn, I.; Rinzema, K. 如何鼓励大学生解决需要数学技能的物理问题：“冒险式问题求解”方法。《欧洲物理学杂志》2003, 25, 51-61. 25. Marušić, M.; Erceg, N.; Sliško J. 部分指定的物理问题：大学生的态度与表现。《欧洲物理学杂志》2011年, 32, 711-722. 26. Bolton, J.; Ross, S. 培养学生的物理问题求解技能。《物理教育》1997年, 32, 176-185. 27. Mashood, K.; Singh, V. 关于一般问题求解技能可迁移性及物理学教学潜力的大规模研究。《物理教育》2013年, 48, 629-635. 28. Van Heuvelen, A.; Zou, X. 功—能过程的多重表征。《美国物理学杂志》2001年, 69, 184-194. 29. Lesh, R.; Post, T.; Behr, M. 数学学习与问题求解中的表征及表征间转换。载于《数学教学与学习中的表征问题》；Janvier, C. 编；Lawrence Erlbaum Associates：美国新泽西州希尔斯代尔，1987年；第33页。30. Meltzer, D. 学生问题求解表现与表征模式之间的关系。《美国物理学杂志》2005, 73, 463 478- . 31. Ibrahim, B.; Rebello, N.S. 运动学与功中的表征任务形式和问题求解策略。《物理评论：物理教育研究专题》2012, 8, 010126. 32. Larkin, J. 物理学中的熟练问题求解：一种层级规划方法。J. Struct. Learn. 1980, 6, 121-130. 33. Harper, K. 学生的问题求解行为。《物理教师》2006, 44, 250-251. 34. McDermott, L.; Rosenquist, M.L.; van Zee, E. 学生在联系图表与物理学时遇到的困难：运动学实例。《美国物理学杂志》1987, 55, 503-513. 35. Mason, A.; Singh, C. 通过与同伴反思，帮助学生学习有效的问题求解策略。《美国物理学杂志》2010, 78, 748 754- . 36. Court, J.E. 受力图。《物理教师》1993, 31, 104–108. 37. Rosengrant, D. 等. 受力图——必要还是充分。AIP Conf. Proc. 2005, 790, 177-200. 38. Mazens, K. 物理学中的概念转变：6至10岁儿童对声音的朴素表征。在雅典举行的EARLI会议上发表的论文（1997），第1–9页。39. Mazens K.; Lautrey, J. 物理学中的概念转变：儿童对声音的朴素表征。《认知发展》2003, 18, 159–176. 40. Eshach, H.; Schwartz, J. 声音的本质？中学生对声音的朴素实体主义。《国际科学教育杂志》2007, 28, 733-764. 41. Boyes, E.; Stanisstreet, M. 学生关于视觉与听觉观念的发展——光和声音的传播路径。Res. Sci. Tech. Educ. 1991年, 9, 223-251. 42. Houle M.E.; Barnett, G.M. 在实施一项以城市鸟类交流为主题、技术增强型探究课程后，学生对声波的概念认识。J. Sci. Educ. Tech. 2008年, 17, 242-251. 43. Katsarova K.; Raykova Z. 利用探究方法研究机械波的机会。AIP Conf. Proc. 2021年, 2075, 180019. 44. Linder, C.J.; Erickson, G.L. 对高等教育阶段物理学学生声音概念化的研究。《国际科学教育杂志》1989, 11, 491- 501. 45. Linder, C.J. 大学物理学生对影响声传播速度因素的概念化。《国际科学教育杂志》1993年, 15, 655-662. 46. Rhoads, T.R.; Roedel, R.J. 波概念测验——一种基于布卢姆分类法的认知工具。在28th 年度前沿教育会议上发表的论文，亚利桑那州坦佩市坦佩米申棕榈酒店，1999年。47. Tumanggor, A.M.R.; Supahar; Kuswanto, H.; Ringo, E.S. 使用四层诊断测试工具检测物理教师候选人的错误概念：机械波概念案例。J. Phys.: Conf. Ser. 2020, 1440, 012059. 48. Reiner, M.; Slotta, J.D.; Chi M.T.H.; Resnick, L.B. 朴素物理推理：对基于实体的概念认识的坚持。《认知教学》2000, 18, 1-34. 49. Volfson, A.; Eshach, H.; Ben-Abu, Y. 初步开发一种简单的统计工具，用于根据诊断测试估计心智模型状态。《物理评论：物理教育研究》2021年, 17, 023105. 50. Wittmann, M.; Steinberg, R.N.; Redish, E.F. 理解并影响学生对声波的推理。《国际科学教育杂志》2003, 25, 991-1013. 51. Wittmann, M.; Steinberg, R.N.; Redish, E.F. 理解学生如何理解机械波。《物理教师》1999, 37, 15-16. 52. Hrepic, Z.; Zollman, D.; Rebello, N.S. 识别学生关于声音传播的心智模型：概念整合在理解概念转变中的作用。《物理评论：物理教育研究专题》2010, 6, 020114. 53. Wittman, M. 理解学生如何逐渐理解物理学：以机械波为例。博士论文，马里兰大学（1998）。

54. Tongchai, A.; Sharma, M.D.; Johnston, I.D.; Arayathanitkul, K.; Soankwam, C. 机械波概念调查的开发、评估及其应用展示。《国际科学教育杂志》2009年，31，2437。55. Tongchai, A.; Sharma, M.D.; Johnston, I.D.; Arayathanitkul, K.; Soankwam, C. 学生对波传播的概念认识是否一致：机械波概念调查的发现。《物理评论：物理教育研究专题》2011年，7，020101（2011年）。56. Frank, B.W.; Kanim, S.E.; Gomez, L.S. 解释学生对运动问题回答的差异。《物理评论：物理教育研究专题》2008年，4，020102。57. Clough, E.E.; Driver, R. 研究学生在不同任务情境中运用概念框架的一致性。《科学教育》1986年，70，473-496。58. Palmer, D. 学生运用另类概念的程度有多一致？《科学教育研究》1993年，23，228-235。59. Finegold, M.; Gortsky, P. 学生对力的概念与物理系统的关系：寻求一致性。《国际科学教育杂志》1991年，13，97-113。60. Watson, J.R.; Prieto, T.; Dillon, J.S. 学生对燃烧的解释是否一致。《科学教育》1997年，81，425-443。61. Kryjevskaia, M.; Stetzer, M.R.; Heron, P. 学生在以波长为单位测量距离时遇到的困难：是缺乏基本技能，还是未能迁移？《物理评论：物理教育研究专题》2013年，9，010106。62. Singh, C. 用同构问题评估学生的大学物理入门专业水平，第二部分：考察若干潜在因素对问题求解与迁移的影响。《物理评论：物理教育研究专题》2008年，4，010105。63. Glass, G.V.; Hopkins, K.D. 《教育与心理学中的统计方法》；Allyn & Bacon：美国马萨诸塞州波士顿，1996年。64. Maries, A.; Singh, C. 学生在求解大学物理入门问题时自行绘制有效示意图是否有益？以两个静电学问题为例。《欧洲物理学杂志》2018年，39，015703。65. Heckler, A.F. 提示物理初学者绘制受力图所带来的一些后果。《国际科学教育杂志》2010年 32 1829。66. Chen, Z; Demirci, N.; Choi, Y.-J.; Pritchard, D.E. 要不要画图？利用大规模开放在线课程实验考察问题示意图的必要性。《物理评论：物理教育研究专题》2017年，13，010110。67. Redish, E.F. 在物理学中运用数学：概述。《美国物理学杂志》2021年，59，314。68. Tuminaro, J.; Redish, E.F. 理解学生在物理学数学问题求解中的糟糕表现。《美国物理联合会会议论文集》2004年，720，11。69. Redish, E.F. 物理课程中的问题求解与数学运用。论文发表于世界物理教育展望会议，印度德里，2005年8月21日至26日。70. Sweller, J. 问题求解过程中的认知负荷：对学习的影响。《认知科学》1988年，12，257-285。71. 美国国家研究委员会。《了解学生所知：教育评估的科学与设计》。评估基础委员会。Pellegrino, J.W., Chudowsky, N., Glaser, R. 编；美国国家科学院出版社：美国华盛顿哥伦比亚特区，2001年。