arXiv:2304.06195v1 [math.FA] 13 Apr 2023

INVA $A_{cb}(G)$与 $A_M(G)$的对偶中的不变子空间

BRIAN FORREST、JOHN SAWATZKY 和 AASAIMANI THAMIZHAZHAGAN

ABSTRACT. 设 G 为一个局部紧群。本文研究代数 $A_M(G)$ 和 $A_{cb}(G)$ 的对偶中的各种不变子空间；前者和后者分别是通过取傅里叶代数 $A(G)$ 在乘子代数 $MA(G)$ 和完全有界乘子代数 $M_{cb}A(G)$ 中的闭包而得到的。特别地，我们将重点考察这些不变子空间之间的各种函子性质和包含关系，其中包括一致连续泛函空间、几乎周期泛函空间以及弱几乎周期泛函空间。

在其他结果中，我们证明：如果 $\mathcal{A}(G)$是 $A_M(G)$或 $A_{cb}(G)$，那么$UCB(\mathcal{A}(G)) \subseteq WAP(G)$ 当且仅当 G为离散群。我们还证明，如果 $UCB(\mathcal{A}(G)) = \mathcal{A}(G)^*$，那么 G 的每个 amenable 闭子群都是紧致的。

令 $i : A(G) \to \mathcal{A}(G)$ 为自然嵌入。我们证明，若 X 是 $\mathcal{A}(G)^*$ 的任意一个包含 $L^1(G)$ 的闭拓扑内化子空间，则 $i^*(X)$ 在$A(G)$中闭，当且仅当 G 是可 amenable。

[1]

1. INTRODUCTION

设 G 是一个局部紧群。 G 的傅里叶代数是一个代数 $A(G)$，它由 G 上在逐点运算下的连续函数构成，包含 G 在希尔伯特空间$L^2(G)$上的左正则表示的所有系数函数 $u(x) = \langle \lambda(x)f, g\rangle$ 。作为群冯·诺伊曼代数的自然预对偶， $A(G)$继承了相应范数，从而成为一个巴拿赫代数

$$VN(G) = \overline{\operatorname{span}\{\lambda(x) | x \in G\}}^{-WOT} \subseteq B(L^2(G))$$

其中，对每个 x、$y \in G$ 和 $f \in L^2(G)$，都有 $\lambda(x)f(y) = f(x^{-1}y)$。若 G 是阿贝尔群，则通过经典傅里叶变换，$A(G)$作为巴拿赫代数与 $L^1(\hat{G})$等距同构，并且 $VN(G)$可与 $L^\infty(G)$等同，其中 G 是G的庞特里亚金对偶。

ˆ 对于阿贝尔群 G， $L^\infty(G)$ 中有若干个著名的 C^*-子代数，且已得到深入研究。其中包括一致连续函数空间 ˆ ˆ$UCB(G)$、几乎周期函数空间 $AP(G)$、弱几乎周期函数空间 ˆ ˆ$WAP(G)$ 和 $C_0(G)$，以及在无穷远处消失的连续函数空间。所有这些空间都通过傅里叶变换在 $VN(G)$ 中诱导出相应的子空间。特别地，我们将 $VN(G)$ 中分别对应于 $UCB(G)$、 $AP(G)$ 和 $WAP(G)$ 的子空间称为 $A(G)$ 上的一致连续、几乎周期和弱几乎周期泛函

[1]日期：2023年4月14日。2000年数学主题分类。主要分类 43A07、43A22、46J10；次要分类 47L25。关键词和短语。傅里叶代数、乘子、Arens正则性、一致连续泛函。拓扑不变均值 本研究部分得到加拿大自然科学与工程研究委员会的资助。1

ˆ。 $C_0(G)$ 的像是约化群 C^*-代数 $C^*_\lambda(G)$。这些空间的一个共同性质是，它们在 $VN(G)$ 上 $A(G)$ 的自然模作用下保持不变。

当 G 是非阿贝尔群时， $A(G)$ 与 $L^1(G)$ 之间仍存在对偶关系，但由于缺少庞特里亚金对偶群，这种关系要复杂得多。不过，仍可为 $VN(G)$ 的上述所有子空间定义类似的版本；事实上，这也可以抽象地推广到任意交换巴拿赫代数。特别是对于傅里叶代数，已有大量研究探讨上述子空间的性质，重点关注其结构所揭示的底层群的信息。示例可参见 [7], [9], [10], [12] 和 [13]。

本文主要关注非 amenable 群，以及由傅里叶代数导出的两个巴拿赫代数的对偶中的类似不变子空间： $A_M(G)$ 和 $A_{cb}(G)$；它们分别是其乘子代数和完全有界乘子代数中 $A(G)$ 的闭包。具体而言，我们将考察与这些子空间相关的各种函子性质和包含性质。在其他结果中，若 $\mathcal{A}(G)$ 是 $A_M(G)$ 或 $A_{cb}(G)$，我们将刻画离散群：它们恰是满足 $UCB(\mathcal{A}(G)) \subseteq WAP(\mathcal{A}(G))$ 的局部紧群。我们还证明，若 $UCB(\mathcal{A}(G)) = \mathcal{A}(G)^*$，则 G 的每个 amenable 闭子群都是紧致的。特别地， G 有一个开紧子群。

$A(G)$ 以压缩映射嵌入 $A_M(G)$ 和 $A_{cb}(G)$，且当且仅当 G 不可 amenable 时，该嵌入的值域为真子空间。若令 $i\colon A(G) \to \mathcal{A}(G)$ 为自然嵌入，我们将证明，若 X 是上文提到的 $\mathcal{A}(G)^*$ 的任一包含 $L^1(G)$ 的闭子空间，则 $i^*(X)$ 在 $A(G)$ 中闭，当且仅当 G 可 amenable。

2. Preliminaries and Notation

本文中， $\mathcal{A}$ 始终表示一个巴拿赫代数。在此情形下，关于模作用， $\mathcal{A}^*$成为一个巴拿赫 $\mathcal{A}$-双模。

$$\langle u \cdot T, v\rangle = \langle T, vu\rangle \text{ and } \langle T\square u, v\rangle = \langle T, uv\rangle$$

对所有 u、 $v \in \mathcal{A}$ 和 $T \in \mathcal{A}^*$ 均成立。注意，当 $\mathcal{A}$ 是交换的时， $\langle u \cdot T$、 $v\rangle = \langle T\square u$、 $v\rangle$，而本文的大部分内容通常都属于这种情况。事实上，从此处起，除非另有说明，我们假设所考虑的每个巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 都是交换的。

2.1. 注记。众所周知，有两种自然的乘积可用于将 $\mathcal{A}$ 的乘法扩展到其第二对偶 $\mathcal{A}^{**}$。本文选择以下 Arens 乘积：

A1) $\langle u \cdot T$、 $v\rangle = \langle T$、 $vu\rangle$ 对于每个 u、 $v \in \mathcal{A}$ 和 $T \in \mathcal{A}^*$。 A2) $\langle n \odot T$、 $u\rangle = \langle n$、 $u \cdot T\rangle$ 对于每个 $u \in \mathcal{A}$ 和 $T \in \mathcal{A}^*$ 以及 $n \in \mathcal{A}^{**}$。 A3) $\langle m \odot n$、 $T\rangle = \langle m$、 $n \odot T\rangle$ 对于每个 $T \in \mathcal{A}^*$ 和 m、 $n \in \mathcal{A}^{**}$。

从这里开始，我们将采用以下定义和记号约定。

2.2. 定义。我们称该空间为

$$UCB(\mathcal{A}) = \overline{\operatorname{span}\{v \cdot T \mid v \in \mathcal{A}, T \in \mathcal{A}^*\}}^{-\|\cdot\|_{\mathcal{A}^*}}$$

$\mathcal{A}$ 上的一致连续泛函。

如果 $T \in \mathcal{A}^*$ 在 $\mathcal{A}$ 上满足以下条件，我们称其为（弱收敛）几乎周期泛函：

$$\{u \cdot T \mid u \in \mathcal{A}, \|u\|_{\mathcal{A}} \leq 1\}$$

在 $\mathcal{A}^*$ 中相对（弱收敛）紧致，我们将 $\mathcal{A}$ 上所有（弱收敛）几乎周期泛函构成的空间记作 $AP(\mathcal{A})$（$WAP(\mathcal{A})$）。

2.3. 定义. 我们称闭子空间 $X \subseteq \mathcal{A}^*$ 为不变的，若对每个 $u \in \mathcal{A}$ 和 $T \in X$，都有 $u \cdot T \in X$。

给定一个闭不变子空间 X。若对每个 $m \in X^*$ 和 $T \in X$，都有 $m \odot T \in X$，则称 X 是拓扑内化的。

2.4. 注. 若 X 是拓扑内化的，则可仿照我们对 $\mathcal{A}^{**}$ 所做的处理，通过定义使 X^* 成为一个巴拿赫代数

$$\langle m \odot n, T\rangle = \langle m, n \odot T\rangle$$

对 m、$n \in X^*$ 和 $T \in X$。

Grothendieck 的一个众所周知的判据指出，$T \in \mathcal{A}^*$ 是弱收敛几乎周期的，当且仅当对于 $\mathcal{A}$ 中的两个网 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega_1}$ 和 $\{v_\beta\}_{\beta\in\Omega_2}$，有

$$\lim_\alpha \lim_\beta \langle T, u_\alpha v_\beta\rangle = \lim_\beta \lim_\alpha \langle T, u_\alpha v_\beta\rangle$$

只要两个极限都存在。由此可以证明，若 $\mathcal{A}$ 是交换巴拿赫代数，且 X 是拓扑内化的，则 X^* 是交换的，当且仅当 $X \subseteq WAP(\mathcal{A})$。（参见 [3] 和 [16]。）

以下三个命题将会派上用场。

2.5. 命题。设 $\mathcal{A}$ 是交换巴拿赫代数。那么 $UCB(\mathcal{A})$、$AP(\mathcal{A})$ 和 $WAP(\mathcal{A})$ 均为 $\mathcal{A}^*$ 的不变子空间。

证明。$UCB(\mathcal{A})$ 是不变的，这显然成立，因为对每个 $T \in \mathcal{A}^*$，都有 $u \cdot T \in UCB(\mathcal{A})$。

令 $T \in (W)AP(\mathcal{A})$。令 $v \in \mathcal{A}$。不失一般性，我们可以假设 $\|v\|_{\mathcal{A}} = 1$。由于

$$\{u \cdot (v \cdot T) \mid u \in \mathcal{A}, \|u\|_{\mathcal{A}} \le 1\} \subset \{u \cdot T \mid u \in \mathcal{A}, \|u\|_{\mathcal{A}} \le 1\}$$

我们有 $\{u \cdot (v \cdot T) \mid u \in \mathcal{A},\ \|u\|_{\mathcal{A}} \le 1\}$ 是相对（弱）紧致的，因此 $v \cdot T \in (W)AP(\mathcal{A})$。

□

2.6. 命题。设 $\mathcal{A}$ 是交换巴拿赫代数。则 $UCB(\mathcal{A})$ 在拓扑意义下是内向的。

证明。设 $m \in UCB(\mathcal{A})^*$，并设 $T = u \cdot T_1 \in UCB(\mathcal{A})$。令 $v \in \mathcal{A}$。则

$$\begin{aligned}
\langle m \odot T, v\rangle &= \langle m, v \cdot T\rangle \\
&= \langle m, v \cdot (u \cdot T_1)\rangle \\
&= \langle m, uv \cdot T_1\rangle \\
&= \langle m \odot T_1, uv\rangle \\
&= \langle u \cdot (m \odot T_1), v\rangle.
\end{aligned}$$

由此可得 $m \odot T = u \cdot (m \odot T_1) \in UCB(\mathcal{A})$。此外，若 $T \in \operatorname{span}\{u \cdot T_1 | u \in \mathcal{A}, T_1 \in \mathcal{A}^*\}$，则 $m \odot T \in UCB(\mathcal{A})$ 也成立。

最后，假设 $\{T_n\} \subset UCB(\mathcal{A})$，并且 $\lim_{n\to\infty} T_n = T$。如果 $u \in \mathcal{A}$ 与 $\|u\|_{\mathcal{A}} \leq 1$。那么对于 $m \in UCB(\mathcal{A})^*$,

$$|\langle m \odot T, u\rangle - \langle m \odot T_n, u\rangle| = |\langle m, u \cdot (T - T_n)\rangle| \leq \|m\|_{UCB(\mathcal{A})^*}\|T - T_n\|_{\mathcal{A}^*}.$$

由此可得 $\lim_{n\to\infty} m \odot T_n = m \odot T$。由于 $\text{span}\{u \cdot T_1 | u \in \mathcal{A}, T_1 \in \mathcal{A}^*\}$ 在 $UCB(\mathcal{A})$ 中稠密，因此对于每个 $m \in UCB(\mathcal{A})^*$ 和 $T \in UCB(\mathcal{A})$，都有 $m \odot T \in UCB(\mathcal{A})$。也就是说，$UCB(\mathcal{A})$ 是拓扑内化的。

□

2.7. 命题。设 X 是 $WAP(\mathcal{A})$ 的闭不变子空间，则 X 是拓扑内化的。

证明。设 X 是 $WAP(\mathcal{A})$ 的闭不变子空间。设 $T \in X$。设

$$O(T) = \{u \cdot T \mid u \in \mathcal{A}, \|u\|_{\mathcal{A}} \leq 1\}.$$

由于 $T \in WAP(\mathcal{A})$，凸集 $O(T)$ 是相对 $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^{**})$ 紧致的。因此，其 $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^{**})$ 闭包 $O(T)_{\sigma(\mathcal{A}^*,\mathcal{A}^{**})}$ 是弱收敛紧致的，从而也是 X 中的范数闭集。此外，$\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^{**})$ 拓扑和 $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$ 拓扑在 $O(T)_{\sigma(\mathcal{A}^*,\mathcal{A}^{**})}$ 上一致。

接下来，令 $m \in X^*$。不失一般性，我们可以假设 $\|m\|_{X^*} = 1$。令 $M \in \mathcal{A}^{**}$ 为 m 在 $\mathcal{A}^*$ 上的一个扩张，且满足 $\|m\|_{X^*} = \|M\|_{\mathcal{A}^*} = 1$。于是，由戈德斯廷定理，存在 $\mathcal{A}$ 中的一个网 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$，使得 $\|u\|_\alpha \leq 1$，并且 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ 在 $\mathcal{A}^{**}$ 上的弱* 拓扑下收敛到 M。由此可知，若 $u \in \mathcal{A}$ 且 $T \in X$，则

$$\langle M \odot T, u\rangle = \langle M, u \cdot T\rangle = \lim_{\alpha\in\Omega}\langle u_\alpha, u \cdot T\rangle = \lim_{\alpha\in\Omega}\langle u_\alpha \cdot T, u\rangle.$$

但这表明

$$M \odot T \in \overline{O(T)}^{\sigma(\mathcal{A}^*,\mathcal{A})} \subset X.$$

此外，若 $u \in \mathcal{A}$ 且 $T \in X$，则

$$\langle M \odot T, u\rangle = \langle M, u \cdot T\rangle = \langle m, u \cdot T\rangle = \langle m \odot T, u\rangle.$$

因此 $m \odot T \in X$。由此可知，X 是拓扑内化的。

□

2.8. 定义。设 I 是 $\mathcal{A}$ 中的一个闭理想。令

$$Z(I) = \{x \in \Delta(\mathcal{A}) \mid u(x) = 0 \text{ for all } u \in I\}.$$

给定一个闭集 $E \subseteq \Delta$（$\mathcal{A}$），令

$$I(E) = \{u \in \mathcal{A} \mid u(x) = 0 \text{ for all } x \in E\}.$$

我们称闭集 $E \subseteq \Delta(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的谱合成集，如果唯一的闭理想 I 是 $\mathcal{A}$，且 $Z(I) = E$ 是 $I(E)$。

3. Multipliers of the Fourier Algebra

设 G 是一个局部紧群。我们用 $A(G)$ 和 $B(G)$ 表示 G 的傅里叶代数和傅里叶–斯蒂尔切斯代数；它们是定义在 G 上的连续函数构成的巴拿赫代数，最早由 [5] 引入。$A(G)$ 的乘子是一个（必然有界且连续的）函数 $v\colon G \to \mathbb{C}$，满足 $vA(G) \subseteq A(G)$。对于 $A(G)$ 的每个乘子 v，由 $M_v(u) = vu$ 定义的 $A(G)$ 上的线性算子 M_v，对每个 $u \in A(G)$，根据闭图定理都是有界的。$A(G)$ 的乘子代数是闭子代数

$$MA(G) := \{M_v : v \text{ is a multiplier of } A(G)\}$$

$B(A(G))$的，其中 $B(A(G))$表示从$A(G)$到 $A(G)$的所有有界线性算子构成的代数。在本文中，我们通常用 v 代替算子M_v，并用 $\| v \|_{MA(G)}$ 表示 $B(A(G))$中 M_v 的范数。

3.1. 定义。
设 $\mathcal{Q}_M(G)$是 $L^1(G)$关于范数的完备化

$$\|f\|_{\mathcal{Q}_{A_M(G)}(G)} = \sup\left\{\int_G f(x)v(x)dx \mid v \in MA(G), \|v\|_{MA(G)} \le 1\right\}.$$

那么 $\mathcal{Q}_M(G)^* = MA(G)$。

设 G 为一个局部紧群，并令 $VN(G)$ 表示其群冯·诺伊曼代数。对偶

$$A(G) = VN(G)_*$$

赋予 $A(G)$ 自然的算子空间结构。借助这一算子空间结构，我们可以将 cb-乘子代数定义为 $A(G)$ 的

$$M_{cb}A(G) := CB(A(G)) \cap M(A(G)),$$

其中 $CB(A(G))$ 表示从 $A(G)$ 到其自身的所有完全有界线性映射所构成的代数。令 $\| v \|_{cb}$ 表示算子 M_v 的 cb-范数。众所周知，$M_{cb}(A(G))$ 是 $CB(A(G))$ 的闭子代数，因此相对于范数 $\| \cdot \|_{cb}$，它是一个（完全压缩的）巴拿赫代数。

3.2. 定义。
令 $\mathcal{Q}_{cb}(G)$ 为 $L^1(G)$ 关于范数

$$\|f\|_{\mathcal{Q}_{cb}(G)} = \sup\left\{\int_G f(x)v(x)dx \mid v \in M_{cb}A(G), \|v\|_{cb} \le 1\right\}.$$

则 $\mathcal{Q}_{cb}(G)^* = M_{cb}A(G)$。

众所周知，一般而言，

$$A(G) \subseteq B(G) \subseteq M_{cb}(A(G)) \subseteq M(A(G))$$

并且，对于 $v \in A(G)$

$$\| v \|_{A(G)} = \| v \|_{B(G)} \ge \| v \|_{cb} \ge \| v \|_M .$$

若 G 是一个可 amen 群，则有

$$B(G) = M_{cb}(A(G)) = M(A(G))$$

且该

$$\| v \|_{B(G)} = \| v \|_{cb} = \| v \|_M$$

对任意 $v \in B(G)$。

3.3. 定义。给定一个局部紧群 G，令

$$A_M(G) \stackrel{def}{=} A(G)^{-\|\cdot\|_M} \subseteq M(A(G)).$$

and

$$A_{cb}(G) \stackrel{def}{=} A(G)^{-\|\cdot\|_{cb}} \subseteq M_{cb}(A(G)).$$

3.4. 备注。代数 $A_{cb}(G)$ 由第一作者在 [6] 中引入，当时记作 $A_0(G)$。在那篇论文中，我们证明，对于 $\mathbb{F}_2$（即由两个生成元生成的自由群），$A_{cb}(G)$ 具有许多可 amen 群的傅里叶代数所特有的性质。特别是，已知代数 $A_{cb}(\mathbb{F}_2)$ 具有有界近似单位。对于那些 $A_{cb}(G)$ 具有有界近似单位的局部紧群 G，称为弱可 amen 群。所有可 amen 群都是弱可 amen 的，但许多经典非 amen 群，例如 $\mathbb{F}_2$ 和 $SL(2,\mathbb{R})$，也是弱可 amen 的。若局部紧群 G 的 $A(G)$ 中存在一个近似单位 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$，且它在范数 $\|\cdot\|_M$ 下有界，则称该群为 M-弱可 amen。

3.5. 注记。令 $\mathcal{A}(G)$ 表示 $A_M(G)$ 或 $A_{cb}(G)$。考虑以下映射及其伴随映射：

$$i_{\mathcal{A}} : A(G) \to \mathcal{A}(G)$$
$$i_{\mathcal{A}}^* : \mathcal{A}(G)^* \to VN(G)$$
$$i_{\mathcal{A}}^{**} : VN(G)^* \to \mathcal{A}(G)^{**},$$

其中 $i_{\mathcal{A}}$ 表示包含映射。由于 $i_{\mathcal{A}}$ 的值域稠密，$i_{\mathcal{A}}^*$ 是单射，因此在 $Range(i_{\mathcal{A}}^*)$ 上可逆，其逆映射为 ${i_{\mathcal{A}}^*}^{-1}$。容易看出，$i_{\mathcal{A}}^*$ 就是限制映射。也就是说

$$i_{\mathcal{A}}^*(T) = T_{|_{A(G)}}.$$

将上述所有映射视为嵌入也很有用。也就是说，当 G 不可 amenable 时，$\mathcal{A}(G)^*$ 可视为 $VN(G)$ 的真子集，而 $VN(G)^*$ 可视为 $\mathcal{A}(G)^{**}$ 的真子集，当然，它们的范数不同。

3.6. 定义。令

$$X_M^\lambda(G) = \{T \in \mathcal{Q}_M(G) \mid \langle u, T\rangle = 0 \text{ for every } u \in A_M(G)\}$$

并令

$$B_M^\lambda(G) = \overline{A_M(G)}^{\text{weak}^*} \subseteq MA(G).$$

Let

$$\mathcal{Q}_M^\lambda(G) = \mathcal{Q}_M(G)/X_M^\lambda.$$

令

$$X_{cb}^\lambda(G) = \{T \in \mathcal{Q}_{A_{cb}(G)}(G) \mid \langle u, T\rangle = 0 \text{ for every } u \in A_{cb}(G)\}$$

并令

$$B_{cb}^\lambda(G) = \overline{A_{cb}(G)}^{\text{weak}^*} \subseteq M_{cb}A(G).$$

Let

$$\mathcal{Q}_{cb}^\lambda(G) = \mathcal{Q}_{cb}(G)/X_{cb}^\lambda.$$

3.7. 注。 $\mathcal{Q}_M(G)$ 和 $\mathcal{Q}_{cb}(G)$ 是群 C^*-代数 $C^*(G)$ 的自然类似物。同样， $\mathcal{Q}_M^\lambda(G))$ 和 $\mathcal{Q}_{cb}^\lambda(G))$ 是约化群 C^*-代数$C_\lambda^*(G)$ 的自然类似物。特别地，我们有

$$(\mathcal{Q}_M^\lambda(G))^* = B_M^\lambda(G)$$

and

$$(\mathcal{Q}_{cb}^\lambda(G))^* = B_{cb}^\lambda(G).$$

此外，我们可以分别将 $\mathcal{Q}_M^\lambda(G)$ 和 $\mathcal{Q}_{A_{cb}(G)}^\lambda(G)$ 识别为由以下元素生成的 $A_M(G)^*$和 $A_{cb}(G)^*$ 的闭子空间

$$\{\phi_f \mid f \in L^1(G)\}$$

其中

$$\langle \phi_f, u\rangle = \int_G f(x)u(x)\ dx.$$

因此，今后我们将把 $\mathcal{Q}_M^\lambda(G)$ 和 $\mathcal{Q}_{cb}^\lambda(G)$ 分别视为 $A_M(G)^*$ 和 $A_{cb}(G)^*$ 的范数闭子空间。此外，为了记号方便，我们通常将泛函 ϕ_f 与函数 $f \in L^1(G)$ 视为相同。

最后，令

$$\mathcal{Q}_M^\delta(G) \overset{def}{=} \overline{\operatorname{span}\{\phi_x \mid x \in G\}}^{-\|\cdot\|_{A_M(G)^*}} \subseteq A_M(G)^*$$

and

$$\mathcal{Q}_{cb}^\delta(G) \overset{def}{=} \overline{\operatorname{span}\{\phi_x \mid x \in G\}}^{-\|\cdot\|_{A_{cb}(G)^*}} \subseteq A_{cb}(G)^*$$

其中，对于每个 $x \in G$ 和每个 $v \in A_M(G)$， $\phi_x(v) = v(x)$，且 $A_{cb}(G)$ 依此类推。特别地，如果 G 是离散的，那么 $\mathcal{Q}_M^\lambda(G) = \mathcal{Q}_M^\delta(G)$，且 $\mathcal{Q}_{cb}^\lambda(G) = \mathcal{Q}_{cb}^\delta(G)$。

4. Invariant Subspaces of $A_{cb}(G)$ or $A_M(G)$ and their functorial properties.

本节将重点关注代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$、 $A_M(G)$ 的一些重要不变子空间及其闭理想。

设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 和 $A_M(G)$ 中的任意一个。我们注意到，虽然根据定义

$$UCB(\mathcal{A}(G)) = \overline{\operatorname{span}\{v \cdot T \mid v \in \mathcal{A}(G), T \in \mathcal{A}(G)^*\}}^{-\|\cdot\|_{\mathcal{A}^*}}$$

但结果表明，实际上我们并不需要线性张成空间。

4.1. 命题。设 $\mathcal{A}(G)$ 是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 和 $A_M(G)$ 中的任意一个。设 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中的一个闭理想，且 $Z(I)$ 是谱合成集。则

$$UCB(I) = \overline{\{v \cdot T \mid v \in \mathcal{A}(G), T \in I^*\}}^{-\|\cdot\|_{I^*}}$$

证明。设

$$j(Z(I)) = \{u \in \mathcal{A}(G) \mid supp(u) \text{ is compact and disjoint from } Z(I)\}.$$

关于 $Z(I)$ 是谱合成集的假设告诉我们， $j(Z(I))$ 在 I 中是稠密的。

设 $u_1, u_2 \in j(Z(I))$ 和 $T_1, T_2 \in I^*$。那么，如果 $K_1 = supp(u_1)$ 且 $K_2 = supp(u_2)$，则 $K = K_1 \cup K_2$ 是一个与 $Z(I)$ 不相交的紧集。由正则性，我们还可以

找到一个 $u \in A(G)$，其紧支集与 Z(I) 不相交，并且满足 $u(x) = 1$ 当 $x \in K$ 时成立。特别地，$u \in j(Z(I))$。此外

$$u \cdot (u_1 \cdot T_1 + u_2 \cdot T_2) = uu_1 \cdot T_1 + uu_2 \cdot T_2 = u_1 \cdot T_1 + u_2 \cdot T_2.$$

因此，$j(Z(I)) \cdot I^*$ 是 $UCB(I)$ 的子空间。

接下来，我们假设 $u \in I$ 和 $T \in I^*$。选取 $\{u_n\} \subset j(Z(I))$，使得 $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{\mathcal{A}(G)} = 0$。由于

$$\|u_n \cdot T - u \cdot T\|_{I^*} \leq \|u_n - u\|_{\mathcal{A}(G)} \|T\|_{I^*}$$

我们有，$j(Z(I)) \cdot I^*$ 在 $UCB(I)$ 中也稠密。

□

4.2. 备注。给定一个理想 $I \in \mathcal{A}(G)$ 和一个 $T \in I^*$，我们称 $x \in G \setminus Z(I)$ 是 T 的支撑点，如果对于 x 的每个邻域 V，都存在一个 $u \in I$，使得$supp(u) \subseteq V$且 $\langle T, u\rangle \neq 0$。我们用 $supp(T)$ 表示 T 的所有支撑点的集合。注意，命题 4.1 表明，$UCB(I)$ 是 I^* 中具有紧支集的那些 $T \in I^*$ 的闭包。

4.3.定义。令 $\mathcal{A}(G)$表示代数 $A(G)$、$A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中的任一个。给定闭理想 I 在 $\mathcal{A}(G)$ 中，我们定义

$$UCB_c(I) = \{T \in I^* \mid T \text{ has compact support}\}$$

或等价地

$$UCB_c(I) = \{T \in I^* \mid T = u \cdot T_1, u \in I \text{ has compact support and } T_1 \in I^*\}.$$

4.4. 定义。设 X 是 $\mathcal{A}^*$ 的一个包含特征$\phi \in \Delta(\mathcal{A})$ 的闭不变子空间。若 $m \in X^*$ 在 ϕ 处是 X 上的拓扑不变均值，则称 $m \in X^*$ 为 X 上的拓扑不变均值。

$$\|m\|_{X^*} = \langle m, \phi\rangle = 1$$

and

$$\langle m, u \cdot T\rangle = \langle \phi, u\rangle\langle m, T\rangle$$

对所有 $u \in \mathcal{A}$ 和 $T \in X$。我们用 $TIM_{\mathcal{A}}(X, \phi)$表示 ϕ 上的X 的所有拓扑不变均值空间。

4.5.定义。令 $\mathcal{A}(G)$为代数 $A(G)$、$A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 之一。令 $x \in G$定义等距映射 $L_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 通过

$$L_x(u)(y) = u(xy),$$

对每个 $y \in G$。

以下两个命题分别是 [8, 命题 4.3] 和 [8, 命题 4.5]。

4.6. 命题。设 $\mathcal{A}(G)$是代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$或 $A_M(G)$之一。设 $X \subseteq \mathcal{A}(G)^*$ 是 $\mathcal{A}(G)$的闭不变子空间。设 $x \in G$。

i)若 $Y = L_x^*(X)$，则 Y 是 $\mathcal{A}(G)^*$ 的闭不变子空间，并且

$$u \cdot L_x^*(T) = L_x^*(L_x(u) \cdot T)$$

对于每个 $u \in \mathcal{A}$ 和 $T \in X$。

ii)令 $x \in G$。则 $L_x^*(\phi_e) = \phi_x$，其中 e 表示 G 的单位元。

iii) 设 $m \in TIM_{\mathcal{A}(G)}(X, \phi_e)$. 若 $x \in G$，则 $\phi_x \in L_x^*(X)$且 $L_{x^{-1}}^{**}(m) \in TIM_{\mathcal{A}(G)}(L_x^*(X)\ \phi_x)$.

4.7. 命题。设 $\mathcal{A}$（G）为 A_{cb}（G）或 A_M（G）。设 $\mathcal{A}$（G） $\cdot VN$（G） $= \{u \cdot T$: $u \in \mathcal{A}$（G） $T \in VN$（G）$\}$。则

i) $\mathcal{A}(G) \cdot VN(G) \subseteq UCB(A(G))$ ii) $i^*(v \cdot T) = v \cdot i^*(T)$ 对每个 $v \in \mathcal{A}(G)$ $T \in \mathcal{A}(G)^*$。iii) $i^*(UCB(\mathcal{A}(G))) \subseteq UCB(A(G))$。iv) 若 $\mathcal{A}$有有界近似单位，则 $\mathcal{A}(G)\cdot VN(G)\cdot VN(G) = UCB(A(G))$ v) 对每个 $u \in A(G)$ $T \in VN(G)$， $u \cdot T \in i^*(\mathcal{A}(G)^*)$。

现在我们可以将命题 4.7 iii) 中的结果推广到其他重要的不变子空间。

4.8. 命题。设 $\mathcal{A}(G)$ 为 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$。那么

i) $i^*(AP(\mathcal{A}(G)) \subseteq AP(A(G))$。ii) $i^*(WAP(\mathcal{A}(G)) \subseteq WAP(A(G))$。iii) $i^*(\mathcal{Q}_{cb}^{\delta}(G)) \subseteq C_{\delta}^*(G)$ 且 $i^*(\mathcal{Q}_M^{\delta}(G)) \subseteq C_{\delta}^*(G)$。iv) $i^*(\mathcal{Q}_{cb}^{\lambda}(G)) \subseteq C_{\lambda}^*(G)$ 且 $i^*(\mathcal{Q}_M^{\lambda}(G)) \subseteq C_{\lambda}^*(G)$。

证明。

i) 令 $T \in AP(\mathcal{A}(G))$。设 $\{u_n\}$ 是 $A(G)$ 中的一个序列，且对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\|u_n\|_{A(G)} \leq 1$。那么对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\|u_n\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1$。由此可知，存在一个子序列 $\{u_{n_k}\}$，使得 $\{u_{n_k} \cdot T\}$收敛到某个 $T_1 \in AP(\mathcal{A}(G))$。由于

$$i^*(u_{n_k} \cdot T) = u_{n_k} \cdot i^*(T)$$

并且由于 i^* 是范数连续的，我们有 $\{u_{n_k} \cdot i^*(T)\}$ 收敛到 $i^*(T_1)$。

ii)令 $T \in WAP(\mathcal{A}(G))$. .令 $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$为 $A(G)$ 中的一个网，且对每个 $\alpha \in \Omega$都有 $\|u_\alpha\|_{A(G)} \leq 1$。则如前所述，对每个 $\alpha \in \Omega$都有 $\|u_\alpha\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1$。因此，存在一个子网 $\{u_{\alpha_\beta}\}$，使得 $\{u_{\alpha_\beta} \cdot T\}$ 弱收敛到某个 $T_1 \in WAP(\mathcal{A}(G))$。

设 $m \in A(G)^{**}$。则 $i^{**}(m) \in \mathcal{A}(G)^{**}$。由此可得

$$\begin{aligned}
\lim_\beta \langle m, u_{\alpha_\beta} \cdot i^*(T)\rangle &= \lim_\beta \langle m, i^*(u_{\alpha_\beta} \cdot T)\rangle \\
&= \lim_\beta \langle i^{**}(m), u_{\alpha_\beta} \cdot T\rangle \\
&= \langle i^{**}(m), T_1\rangle \\
&= \langle m, i^*(T_1)\rangle.
\end{aligned}$$

这表明 $\{u_{n_k} \cdot i^*(T)\}$ 弱收敛到 $i^*(T_1)$，因此 $i^*(T) \in WAP(A(G))$。iii) 这是显然的，因为滥用记号， $i^*(\phi_x) = \phi_x$ 对每个 $x \in G$ 都成立。

iv) 同样，这是显然的，因为再次滥用记号，$i^*(f) = f$ 对每个 $f \in L^1(G)$ 都成立。

□

值得探讨的是，前一个命题中的包含关系是否可能取等号。如果 G 可 amenable，这显然成立，因为 $A(G) = A_M(G) = A_{cb}(G)$。在[7, 引理 4.7] 中，第一作者与 T. Miao 证明，若 $i^*(UCB(\mathcal{A}(G))) = UCB(A(G))$，则 G 必须是可 amenable 的。事实上，以下结论成立：

4.9. 定理。令 $\mathcal{A}(G)$为 $A_{cb}(G)$或 $A_M(G)$ 中的任一个。令 X 为 $\mathcal{A}(G)^*$ 的一个闭不变子空间，其中包含 $L^1(G)$。如果 $i^*(X)$ 在 $VN(G)$ 中是闭的，则 G 是可amenable。证明。假设 $i^*(X)$ 在 $VN(G)$ 中是闭的。由于 $i^*(L^1(G)) = L^1(G)$，我们有 $C^*_\lambda(G) \subseteq i^*(X)$。此外，由于 i^* 是连续且单射的，如果 $i^*(X)$ 是闭的，则将 i^* 限制在 X 上是一个同构。特别地，如果令 $u \in \mathcal{A}(G)$，那么 u 在 $C^*_\lambda(G)$ 上定义了一个连续线性泛函。因此 $\mathcal{A}(G) \subseteq B_\lambda(G)$，并且 $\mathcal{A}(G)$上的范数与来自 $B(G)$ 的范数等价。因此 G 是可 amenable 的 [15]。

□

4.10. 备注。令 $\mathcal{A}(G)$ 为 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$。设 H 是 G 的闭子群。那么限制映射 $R: \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(H)$ 是压缩同态。一般来说，我们不知道它是否为满射。事实上，如果 $G = SL(2, \mathbb{R})$ 且 H 是与 $\mathbb{F}_2$ 同构的 G 的闭子群，那么限制映射 $R: A_M(G) \to A_M(H)$ 不是满射 [1,定理 4.3]。不过，在某些情况下，已知限制映射是满射。例如，如果存在一个由在 H 中元素所诱导的内自同构下不变的集合构成的单位元邻域基，我们就称 $G \in [SIN]_H$。如果 $G \in [SIN]_H$，那么 $R: \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(H)$ 是满射 [1, 推论 3.4]。

如果 H 是可 amenable，则 $\mathcal{A}(H) = A(H)$，且 R 的满射性由 Herz 延拓定理 [11]推出。在此情况下，$A(H)$与 $\mathcal{A}(G)/I_{\mathcal{A}(G)}(H)$等距同构。此外，在此情况下，$R^*$ 是从 $VN(H)$到其上的一个 $*$-同态

$$VN_H(G) = \overline{\operatorname{span}\{\phi_x \mid x \in H\}}^{-w*}$$

whi是 $\mathcal{A}(G)^*$中的冯·诺伊曼代数。（参见 [10, 引理3.1]）。此外，

$$VN_H(G) = I_{\mathcal{A}(G)}(H)^\perp.$$

一般来说，我们令

$$\mathcal{A}^*_H(G) = \overline{\operatorname{span}\{\phi_x \mid x \in H\}}^{-w*} = I_{\mathcal{A}(G)}(H)^\perp \subseteq \mathcal{A}(G)^*.$$

4.11. 定义。设 G 是一个局部紧群，H 是一个闭子群，且 $C \geq 1$ 是一个常数。我们称 $\mathcal{A}(H)$在 $\mathcal{A}(G)$中是C-可延拓的，如果对于每个 $v \in \mathcal{A}(H)$ 以及每个$\epsilon > 0$，存在一个 $w \in \mathcal{A}(G)$，使得 $v = w_{|_H}$ 且

$$\|w\|_{\mathcal{A}(G)} \leq (C + \epsilon)\|v\|_{\mathcal{A}(H)}.$$

此外，我们还假设，如果 $v \in A(G)$，那么我们可以选择 $w \in A(G)$。

我们令

$$Ext_{\mathcal{A}(G)} = \{H | \mathcal{A}(H) \text{ is } C\text{-extendable for some } C \geq 1\}.$$

4.12.注记。 $\mathcal{A}(G)$要么是 $A_{cb}(G)$，要么是 $A_M(G)$。假设 $H \in Ext_{\mathcal{A}(G)}$。则$R : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(H)$是满射，其核为 $I_{\mathcal{A}(G)}(H)$，因此 $\mathcal{A}(H)$ 同构于$\mathcal{A}(G)/I_{\mathcal{A}(G)}(H)$。特别地，如果 $\mathcal{A}(H)$ 在 $\mathcal{A}(G)$ 中是 C-可延拓的，那么对于每个 $T \in \mathcal{A}(H)^*$

$$1/C\|T\|_{\mathcal{A}(H)^*} \leq \|R^*(T)\|_{\mathcal{A}(G)^*} \leq \|T\|_{\mathcal{A}(H)^*}$$

且 R^* 是从 $\mathcal{A}(H)^*$ 到 $\mathcal{A}_H^*(G)$的同构。在 $C = 1$的情况下，将 $\mathcal{A}(H)$与 $\mathcal{A}(G)/I_{\mathcal{A}(G)}(H)$自然识别，得到一个等距代数同构。

以下命题由 Kaniuth 和 Lau [10, Lemma 3.2] 针对$A(G)$建立，适用于所有闭子群 H。

4.13. 命题。设 $\mathcal{A}(G)$为 $A_{cb}(G)$或 $A_M(G)$。设 $H \in Ext_{\mathcal{A}(G)}$。设 $R : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(H)$为限制映射。那么

i) $R^*(UCB_c(\mathcal{A}(H)) = UCB_c(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)$ ii) $R^*(UCB(\mathcal{A}(H)) = UCB(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)$ iii) $R^*(AP(\mathcal{A}(H)) = AP(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)$ iv) $R^*(WAP(\mathcal{A}(H)) = WAP(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)$

证明。

i) 若 $T \in (UCB_c(\mathcal{A}(H))$, 则存在一个 $u \in A(G) \cap C_{00}(G)$ 和一个 $T_1 \in \mathcal{A}(G)^*$，使得 $T = u \cdot T_1$。由于 $u \in A(G)$，存在一个 $v \in A(G) \cap C_{00}(G)$，使得$R(v) = u$。

$$\begin{aligned}
\langle R^*(T), w\rangle &= \langle R^*(u \cdot T_1), w\rangle \\
&= \langle u \cdot T_1, R(w)\rangle \\
&= \langle T_1, uR(w)\rangle \\
&= \langle T_1, R(vw)\rangle \\
&= \langle R^*(T_1), vw\rangle \\
&= \langle v \cdot R^*(T_1), w\rangle.
\end{aligned}$$

因此 $R^*(T) = v \cdot R^*(T_1) \in UCB_c(\mathcal{A}(G))$。但我们还有 $R^*(T) \in \mathcal{A}_H^*(G)$。

接下来假设 $T \in UCB_c(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)$。特别地，存在 $T_1 \in \mathcal{A}(H)^*$ 使得 $T = R^*(T_1)$。

令 $K = supp(T)$。由于 $T \in UCB_c(\mathcal{A}(G))$， K是紧致的。因此存在$u \in A(G) \cap C_{00}(G)$，使得 $u(x) = 1$ 对于某个包含K的开邻域中的每个 x。由此可得 $u \cdot T = T$。另请注意， $v = R(u) \in A(H) \cap C_{00}(H)$。特别地， $v \cdot T_1 \in (UCB_c(\mathcal{A}(H))$。我们断言， $R^*(v \cdot T_1) = T$。

设 $w \in \mathcal{A}(G)$。那么

$$\begin{aligned}
\langle R^*(v \cdot T_1), w\rangle &= \langle v \cdot T_1, R(W)\rangle \\
&= \langle T_1, vR(w)\rangle \\
&= \langle T_1, R(uw)\rangle \\
&= \langle R^*(T_1), uw) \\
&= \langle u \cdot T, w\rangle \\
&= \langle T, w\rangle.
\end{aligned}$$

ii) 由于 R^* 连续，且 $UCB_c(\mathcal{A}(H))$ 在 $UCB(\mathcal{A}(H))$ 中稠密，由 i) 可知 $R^*(UCB(\mathcal{A}(H))$ $\subseteq UCB(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)$。

由于 $H \in Ext_{\mathcal{A}(G)}$、$R^*$ 是同构，因此 $R^*(UCB(\mathcal{A}(H))$ 的值域是闭的。现在由 i) 可得 $R^*(UCB(\mathcal{A}(H)) = UCB(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)$ iii) 设 $T \in AP(\mathcal{A}(H))$。设 $\|u\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1$。则 $\|R(u)\|_{\mathcal{A}(H)} \leq 1$。此外，若$v = R(u)$，则对每个 $w \in \mathcal{A}(G)$，我们有

$$\begin{aligned} \langle R^*(v \cdot T), w\rangle &= \langle v \cdot T, R(w)\rangle \\ &= \langle T, R(uw)\rangle \\ &= \langle R^*(T), uw\rangle \\ &= \langle u \cdot R^*(T), w\rangle \end{aligned}$$

由此可得

$$\{u \cdot R^*(T) \mid \|u\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1\} \subseteq R^*(\{v \cdot T \mid \|v\|_{\mathcal{A}(H)} \leq 1\}.$$

由于 $\{v \cdot T \mid \|v\|_{\mathcal{A}(H)} \leq 1\}$ 相对紧致，因此 $R^*(\{v \cdot T \mid \|v\|_{\mathcal{A}(H)} \leq 1\}$ 也相对紧致，从而 $\{u \cdot R^*(T) \mid \|u\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1\}$ 也相对紧致。也就是说

$$R^*(AP(\mathcal{A}(H)) \subseteq AP(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G).$$

接下来假设 $T \in AP(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)$。由此可知，存在一个 $T_1 \in \mathcal{A}(H)^*$，使得 $T = R^*(T_1)$。令 $\{u_n\} \subset \mathcal{A}(H)$，其中 $\|u_n\|_{\mathcal{A}(H)} \leq 1$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，选取 $v_n \in \mathcal{A}(G)$，使得 $\|v_n\|_{\mathcal{A}(G)^*} \leq C + 1$ 且 ${}^{v_n}{}_{|_H} = u_n$。那么，根据上面的计算可知

$$v_n \cdot T = R^*(u_n \cdot T_1).$$

由于 $T \in AP(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)$，因此存在 $\{v_n \cdot T\}$ 的一个子序列 $\{v_{n_k} \cdot T\}$，它在范数下收敛到某个 $S \in \mathcal{A}_H^*(G)$。由于 R^* 是到 $\mathcal{A}_H^*(G)$ 上的同构，存在一个 $S_1 \in \mathcal{A}(H)^*$，使得 $\{u_{n_k} \cdot T_1\}$ 在范数下收敛到 S_1。这表明 $T_1 \in AP(\mathcal{A}(H))$，从而 $R^*(AP(\mathcal{A}(H)) = AP(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)$。iv) $R^*(WAP(\mathcal{A}(H)) \subseteq WAP(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)\}$ 可用与上述 iii) 证明类似的方法推出。

假设 $T \in WAP(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)$. 如前所述，可得存在一个 $T_1 \in \mathcal{A}(H)^*$，使得 $T = R^*(T_1)$。令 $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Omega} \subseteq \mathcal{A}(H)$，其中 $\|u_n\|_{\mathcal{A}(H)} \leq 1$。对每个 $\alpha \in \Omega$，选取 $v_\alpha \in \mathcal{A}(G)$，使得 $\|v_\alpha\|_{\mathcal{A}(G)} \leq C + 1$ 且 ${}^{v_\alpha}{}_{|_H} = u_\alpha$。

由于 $T \in WAP(\mathcal{A}(G)) \cap \mathcal{A}_H^*(G)$，存在 $\{v_\alpha \cdot T\}$的一个子网 $\{v_{\alpha_\beta} \cdot T\}$，它弱收敛到某个 $S \in \mathcal{A}(G)^*$。然而，由于 $\mathcal{A}_H^*(G)$是弱闭的，我们有 $S \in \mathcal{A}_H^*(G)$。特别地，$\{v_{\alpha_\beta} \cdot T\}$ 在$\sigma(\mathcal{A}_H^*(G)\ \mathcal{A}_H^*(G)^*)$拓扑下收敛到 S。此外，对某个 $S_1 \in \mathcal{A}(H)^*$，有 $S = R^*(S_1)$。由于R^*： $\mathcal{A}(H)^* \to \mathcal{A}_H^*(G)^*$ 是一个同构，因此 $\{u_{\alpha_\beta} \cdot T_1\}$ 在 $\mathcal{A}(H)^*$中弱收敛到S_1。因此 $T_1 \in WAP(\mathcal{A}(H))$。

□

注：在前一个命题中，我们不知道一般而言，假设$H \in Ext_{\mathcal{A}(G)}$ 是否足以得到前一个命题中的等式。

4.14. 评注。令 $\mathcal{M}(G)$ 表示 $MA(G)$ 或 $M_{cb}A(G)$，并令 $\mathcal{A}(G)$ 分别表示 $A_M(G)$ 或 $A_{cb}(G)$。令 H 为 G 的一个开子群。令 $\mathcal{M}(G)$ 表示以下二者之一。对于每个 $u \in \mathcal{M}(H)$，我们定义 u° 如下：

$$u^\circ = \begin{cases} u(x) & \text{if } x \in H, \\ 0 & \text{if } x \notin H. \end{cases}$$

然后 $u^\circ \in \mathcal{M}(G)$，其中 $\|u^\circ\|_{\mathcal{M}(G)} = \|u\|_{\mathcal{M}(H)}$。

定义 $\Gamma : \mathcal{M}(H) \to \mathcal{M}(G)$ by $\Gamma(u) = u^\circ$. Then Γ is an isometric 代数同构 from $\mathcal{M}(H)$ onto the 理想 $1_H\mathcal{M}(G)$ of $\mathcal{M}(G)$. Moreover, if $u \in \mathcal{A}(H)$, then $\Gamma(u) = u^\circ \in \mathcal{A}(G)$

注意，如果 $T \in \mathcal{A}(G)^*$ 和 $w \in \mathcal{A}(G)$，那么

$$\begin{aligned} \langle R^* \circ \Gamma^*(T), w\rangle &= \langle \Gamma^*(T), R(w)\rangle \\ &= \langle T, \Gamma(R(w))\rangle \\ &= \langle T, 1_H w\rangle \\ &= \langle 1_H \cdot T, w\rangle. \end{aligned}$$

那就是 $R^* \circ \Gamma^*(T) = 1_H \cdot T$。

如果 $T \in \mathcal{A}(G)^*$、$v \in \mathcal{A}(G)$ 和 $u = R(v)$，那么对于 $w \in \mathcal{A}(H)$，我们有

$$\begin{aligned} \langle \Gamma^*(v \cdot T), w\rangle &= \langle v \cdot T, w^\circ\rangle \\ &= \langle T, vw^\circ\rangle \\ &= \langle T, (uw)^\circ\rangle \\ &= \langle \Gamma^*(T), uw\rangle \\ &= \langle u \cdot \Gamma^*(T), w\rangle \end{aligned}$$

因此 $\Gamma^*(v \cdot T) = R(v) \cdot \Gamma^*(T)$。

最后，由于 H 是开集，我们可以定义一个从 $\mathcal{A}(G)$ 到理想 $I_{\mathcal{A}(G)}(G\backslash H)$ 的投影 P_H，定义为 $P_H(u) = 1_H u$。P_H的核是理想 $I_{\mathcal{A}(G)}(H)$。此外，$P_H = \Gamma \circ R$。

4.15. 命题。令 $\mathcal{A}(G)$ 表示 $A_M(G)$ 或 $A_{cb}(G)$。设 H 是 G的一个开子群。那么

i) $\Gamma^*(\mathcal{A}(G)^*) = \mathcal{A}(H)^*$ 且 $\Gamma^*_{|_{1_H \cdot \mathcal{A}(G)^*}}$ 是从 $1_H \cdot \mathcal{A}(G)^*$到 $\mathcal{A}(H)^*$的等距同构。

ii) $\Gamma^*(UCB(\mathcal{A}(G))) = UCB(\mathcal{A}(H))$，且 $\Gamma^*_{|_{1_H \cdot UCB(\mathcal{A}(G))}}$是从 $1_H \cdot UCB(\mathcal{A}(G))$ 到 $UCB(\mathcal{A}(H))$ 的等距同构。iii) $\Gamma^*(AP(\mathcal{A}(G))) = AP(\mathcal{A}(H))$，且 $\Gamma^*_{|_{1_H \cdot AP(\mathcal{A}(G))}}$是从 $1_H \cdot AP(\mathcal{A}(G))$ 到 $AP(\mathcal{A}(H))$ 的等距同构。iv) $\Gamma^*(WAP(\mathcal{A}(G))) = WAP(\mathcal{A}(H))$，且 $\Gamma^*_{|_{1_H \cdot WAP(\mathcal{A}(G))}}$是从 $1_H \cdot WAP(\mathcal{A}(G))$ 到 $WAP(\mathcal{A}(H))$ 的等距同构。V) $\Gamma^*(Q^\delta_M(G)) = Q^\delta_M(H)$，且 $\Gamma^*_{M|_{1_H \cdot Q^\delta_M(G)}}$是从 $1_H \cdot Q^\delta_M(G)$ 到 $Q^\delta_M(H)$ 的等距同构。

vi) $\Gamma^*(Q^\delta_{cb}(G)) = Q^\delta_{cb}(H)$，且 $\Gamma^*_{|_{1_H \cdot Q^\delta_{cb}(G)}}$ 是从 $1_H \cdot Q^\delta_{cb}(G)$ 到 $Q^\delta_{cb}(H)$ 的等距同构。

vii) $\Gamma^*(Q^\lambda_M(G)) = Q^\lambda_M(H)$，且 $\Gamma^*_{|_{1_H \cdot Q^\lambda_M(G)}}$ 是从 $1_H \cdot Q^\lambda_M(G)$ 到 $Q^\lambda_M(H)$ 的等距同构。

viii) $\Gamma^*(Q^\lambda_{cb}(G)) = Q^\lambda_{cb}(H)$，且 $\Gamma^*_{|_{1_H \cdot Q^\lambda_{cb}(G)}}$ 是从 $1_H \cdot Q^\lambda_{cb}(G)$ 到 $Q^\lambda_{cb}(H)$ 的等距同构。

证明。

i) 我们首先证明 Γ^* 是满射。假设 $T \in \mathcal{A}(H)^*$。令 $S = R^*(T)$。我们断言 $T = \Gamma^*(S)$。令 $u \in \mathcal{A}(G)$。于是

$$\begin{aligned} \langle \Gamma^*(S), u\rangle &= \langle S, \Gamma(u)\rangle \\ &= \langle R^*(T), u^\circ\rangle \\ &= \langle T, R(u^\circ)\rangle \\ &= \langle T, u\rangle \end{aligned}$$

接下来我们证明 $ker(\Gamma^*) = 1_{G\setminus H} \cdot \mathcal{A}(G)^*$。令 $1_{G\setminus H} \cdot T \in 1_{G\setminus H} \cdot \mathcal{A}(G)^*$，并令 $u \in \mathcal{A}(H)$。于是

$$\begin{aligned} \langle \Gamma^*(1_{G\setminus H} \cdot T), u\rangle &= \langle 1_{G\setminus H} \cdot T, \Gamma(u)\rangle \\ &= \langle 1_{G\setminus H} \cdot T, u^\circ\rangle \\ &= \langle T, 1_{G\setminus H} u^\circ\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

假设 $T \in \mathcal{A}(G)^*$，但 $T \notin 1_{G\setminus H} \cdot \mathcal{A}(G)^*$。那么存在 $x \in H \cap supp(T)$。特别地，由于 H 是 x 的开邻域，存在 $v \in \mathcal{A}(G)$，使得 $v(x) \neq 0$，其中 $supp(v) \subseteq H$ 且 $\langle T, v\rangle \neq 0$。令 $u = R(v)$。那么$u^\circ = v$，因此

$$\langle \Gamma^*(T), u\rangle = \langle T, \Gamma(u)\rangle = \langle T, u^\circ\rangle = \langle T, v\rangle \neq 0.$$

最后，我们证明 $\Gamma^*_{|_{1_H \cdot \mathcal{A}(G)^*}}$ 是等距映射。显然，$\|\Gamma^*\|_{B(\mathcal{A}(G)^*, \mathcal{A}(H)^*)} \leq 1$。

设 $T \in 1_H \cdot \mathcal{A}(G)^*$ 满足 $\|T\|_{\mathcal{A}(G)^*} = 1$。设 $\epsilon > 0$。那么存在$v \in \mathcal{A}(G)$，使得 $\|v\|_{\mathcal{A}(G)} = 1$ 满足

$$|\langle T, v\rangle| > 1 - \epsilon.$$

注意，由于 $T \in 1_H \cdot \mathcal{A}(G)^*$，我们有 $T = 1_H \cdot T$，因此若 $w = 1_H v$，则 $\|w\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1$ 并且

$$|\langle T, v\rangle| = |\langle T, w\rangle| > 1 - \epsilon.$$

设 $u = R(v)$。那么 $\|u\|_{\mathcal{A}(H)} \leq 1$ 并且

$$|\langle \Gamma^*(T), u\rangle| = |\langle T, \Gamma(u)\rangle| = |\langle T, w\rangle| > 1 - \epsilon.$$

ii) 我们只需证明 $\Gamma^*(UCB(\mathcal{A}(G))) = UCB(\mathcal{A}(H))$。

我们首先注意到，对于任意 $T \in \mathcal{A}(G)^*$，都可以写成

$$T = 1_H \cdot T + 1_{G\setminus H} \cdot T$$

并且 $\Gamma^*(T) = \Gamma^*(1_H \cdot T)$。此外

$$UCB(\mathcal{A}(G)) = 1_H \cdot UCB(\mathcal{A}(G)) \oplus 1_{G\setminus H} \cdot UCB(\mathcal{A}(G))$$

假设 $T = v \cdot T_1 \in UCB(\mathcal{A}(G))$，且 $v \in \mathcal{A}(G)$。令 $u = R(v)$。则 $\Gamma^*(T) = u \cdot \Gamma^*(T_1) \in UCB(\mathcal{A}(H))$。由于 Γ^* 是连续的，且 $\{u \cdot T \mid T \in \mathcal{A}(G)^*, u \in \mathcal{A}(G)\}$ 在 $UCB(\mathcal{A}(G))$ 中稠密，因此我们得到 $\Gamma^*(UCB(\mathcal{A}(G))) \subseteq UCB(\mathcal{A}(H))$。

接下来假设 $T = u \cdot T_1$，其中 $T_1 \in \mathcal{A}(H)^*$，$u \in \mathcal{A}(H)$。则存在一个 $S \in 1_H \cdot \mathcal{A}(G)^*$，使得 $T_1 = \Gamma^*(S)$。如果 $v = u^\circ$，则

$$\Gamma^*(v \cdot S) = R(v) \cdot \Gamma^*(S) = u \cdot T_1.$$

因此，$\Gamma^*\colon 1_H \cdot UCB(\mathcal{A}(G)) \to UCB(\mathcal{A}(H))$ 具有稠密值域。但由于 Γ^* 在 $1_H \cdot UCB(\mathcal{A}(G))$ 上是等距的，我们有 $\Gamma^*(UCB(\mathcal{A}(G))) = UCB(\mathcal{A}(H))$。iii) 容易看出，$T \in AP(\mathcal{A}(G))$ 当且仅当 $1_H \cdot T$ 和 $1_{G\setminus H} \cdot T$ 都属于 $AP(\mathcal{A}(G))$。令 $T \in 1_H \cdot AP(\mathcal{A}(G))$。令 $S = \Gamma^*(T)$。现在

$$\{u \cdot S \mid \|u\|_{\mathcal{A}(H)} \leq 1\} = \Gamma^*(\{u^\circ \cdot T \mid \|u\|_{\mathcal{A}(H)} \leq 1\}).$$

但 $\{u^\circ \cdot T \mid \|u\|_{\mathcal{A}(H)} \leq 1\}$ 是相对紧的。因此，$\{u \cdot S \mid \|u\|_{\mathcal{A}(H)} \leq 1\}$ 也相对紧，并且 $S \in AP(\mathcal{A}(H))$.

反过来，假设 $S \in AP(\mathcal{A}(H))$，并选取 $T \in 1_H \cdot \mathcal{A}(G)^*$，使得 $S = \Gamma^*(T)$。由于 $1_H \cdot \mathcal{A}(G)^*$ 是不变的，Γ^* 将 $\{v \cdot T \mid \|v\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1\}$ 等距映射到 $\{R(v) \cdot S \mid \|v\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1\}$ 上。由于 $\{R(v) \cdot S \mid \|v\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1\}$ 相对紧，$\{v \cdot T \mid \|v\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1\}$ 也相对紧。

iv) 这可由与上文 iii) 类似的方法得出。

v) 这由 i) 得出，滥用记号，

$$\Gamma^*(\phi_x) = \begin{cases} \phi_x & \text{if } x \in H, \\ 0 & \text{if } x \notin H. \end{cases}$$

对每个 $x \in G$。

vi) 见 v)。

vii) 这由 i) 得出，因为，滥用记号，$\Gamma^*(\phi_f) = \phi_{f_{|_H}}$，且 $L^1(H)$ 与 $1_H L^1(G)$ 等距同构。

viii) 见 vii)。

□

5. Containment Results

在本节中，我们将建立关于 $A(G)$、$A_{cb}(G)$ 和 $A_M(G)$ 的不变子空间及其理想的各种包含关系结果。

5.1.引理。令 $\mathcal{A}(G)$ 表示代数 $A(G)$、$A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中的任意一个。设 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中的非零闭理想，且满足 $E = Z(I)$。则

$$\overline{\operatorname{span}\{\phi_x \mid x \in G \setminus E\}}^{-\|\cdot\|_{I^*}} \subseteq UCB(I).$$

如果 G 是离散的，且 $Z(I)$ 是谱合成集，那么

$$\overline{\operatorname{span}\{\phi_x \mid x \in G \setminus E\}}^{-\|\cdot\|_{I^*}} = UCB(I).$$

证明。给定任意 $x \in G \setminus E$，我们可以找到 x 的一个开邻域 U，使得$U \cap E = \emptyset$。然后我们可以选取 $u \in A(G) \cap C_{00}(G) \subseteq \mathcal{A}(G)$，使得 $u(x) = 1$ 并且$u(y) = 0$ 对每个 $y \notin U$ 都成立，因此 $u \in I$。如果 $v \in I$，那么

$$\langle u \cdot \phi_x, v\rangle = \langle \phi_x, vu\rangle = v(x)u(x) = v(x) = \langle \phi_x, v\rangle.$$

因此 $\phi_x = u \cdot \phi_x \in UCB(I)$。由此可得 $\overline{\text{span}\{\phi_x \mid x \in G \setminus E\}}^{-\|\cdot\|_{I^*}} \subseteq UCB(I)$。

接下来假设 G 是离散的，且 $E = Z(I)$ 是谱合成集。令 $T = u \cdot T_1 \in I^*$，其中 $u \in I$ 且 $T_1 \in I^*$。

令 $x \in G \setminus E$。如果

$$J = \{v \in I \mid v(x) = 0\},$$

那么 J 是 I 中余维 1 的闭理想。因此 $J^\perp$ 是一维的。显然 $\phi_x \in J^\perp$。由此可得

$$J^\perp = \{\alpha\phi_x \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

接下来我们注意到，如果 $w = 1_{\{x\}}$，那么 $w \cdot T_1 \in J^\perp$。由此可知，对于某个$\alpha \in \mathbb{C}$，有 $w \cdot T_1 = \alpha\phi_x$。

令 $v \in c_{00}(G) \cap I$具有支撑 $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq G \setminus E$。那么 $v = \sum_{i=1}^{k} v(x_i)1_{x_i}$ 使得

$$v \cdot T_1 = \sum_{i=1}^{k} v(x_i)1_{x_i} \cdot T_1 = \sum_{i=1}^{k} v(x_i)\alpha_i\phi_{x_i}$$

对于某些有限个标量 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$。

最后，由于 E 是一个谱合成集，存在一个序列 $\{u_n\} \subset I$，满足$u_n \in c_{00}(G)$，使得 $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{\mathcal{A}(G)} = 0$。若 $w \in I$ 满足 $\|w\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1$，则

$$\begin{aligned} |\langle u \cdot T_1, w\rangle - \langle u_n \cdot T_1, w\rangle| &= |\langle T_1, wu\rangle - \langle T_1, wu_n\rangle| \\ &= |\langle T_1, w(u - u_n)\rangle| \\ &\leq \|T_1\|_{I^*}\|u - u_n\|_{\mathcal{A}(G)}. \end{aligned}$$

由此可知$\lim_{n\to\infty} \|u_n \cdot T_1 - u \cdot T_1\|_{I^*} = 0$。然而，$u_n \cdot T_1 \in$张成$\{\phi_x \mid x \in G \setminus E\}$，因此我们有 $T = u \cdot T_1 \in$张成$\{\phi_x \mid x \in G \setminus E\}^{-\|\cdot\|_{I^*}}$。

我们得到

$$UCB(I) \subseteq \overline{\text{span}\{\phi_x \mid x \in G \setminus E\}}^{-\|\cdot\|_{I^*}}.$$

□

由于空集对于所有 $A(G)$、$A_{cb}(G)$ 和 $A_M(G)$ 都是谱合成集，因此下一个结果立即成立。

5.2. 推论。设 G 是一个局部紧群。那么 $\mathcal{Q}^\delta_{cb}(G) \subseteq UCB(A_{cb}(G))$ 且 $\mathcal{Q}^\delta_M(G) \subseteq UCB(A_M(G))$。此外，如果 G 是离散的，那么 $UCB(A_{cb}(G)) = \mathcal{Q}^\delta_{cb}(G) = \mathcal{Q}^\lambda_{cb}(G)$ 且 $UCB(A_M(G)) = \mathcal{Q}^\delta_M(G) = \mathcal{Q}^\lambda_M(G)$】【。

5.3. 注记。若 G 是离散的，则 $UCB(A_{cb}(G)) = \mathcal{Q}^{\lambda}_{cb}(G) = \mathcal{Q}^{\delta}_{cb}(G)$ 且 $UCB(A_M(G)) = \mathcal{Q}^{\lambda}_{M}(G) = \mathcal{Q}^{\delta}_{M}(G)$。由此可得

$$UCB(A_{cb}(G))^* = B^{\lambda}_{cb}(G)$$

and

$$UCB(A_M(G))^* = B^{\lambda}_{M}(G)$$

分别。此外， $B^{\lambda}_{cb}(G)$ 和 $B^{\lambda}_{M}(G)$ 的正规代数结构，分别与 $UCB(A_{cb}(G))^*$ 和 $UCB(A_M(G))^*$ 上的乘法一致；这些乘法继承自它们作为拓扑内反子空间的对偶这一性质。

如果 I 是 $A_{cb}(G)$ 中的闭理想，且 G 是离散的，并且 $E = Z(I)$ 是谱合成集，那么我们已经看到

$$\overline{\operatorname{span}\{\phi_x \mid x \in G \setminus E\}}^{-\|\cdot\|_{I^*}} = UCB(I).$$

在这种情况下,

$$UCB(I)^* = \overline{I}^{-w^*} \subseteq B^{\lambda}_{cb}(G).$$

类似地，如果 $I \subset A_M(G)$，那么

$$UCB(I)^* = \overline{I}^{-w^*} \subseteq B^{\lambda}_{M}(G)$$

并且如果 $I \subset A(G)$，那么

$$UCB(I)^* = \overline{I}^{-w^*} \subseteq B^{\lambda}(G).$$

5.4.命题。令 $\mathcal{A}(G)$表示代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中的任一个。设 I 是 $\mathcal{A}$中的非零闭理想。若 I 具有有界近似单位，则 $WAP(I) \subseteq UCB(I)$。

证明。假设 I 有一个有界近似单位 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$。令 $T \in WAP(I)$。那么对于 $u \in I$,

$$\lim_{\alpha\in\Omega}\langle u_\alpha \cdot T, u\rangle = \lim_{\alpha\in\Omega}\langle T, u_\alpha u\rangle = \langle T, u\rangle.$$

这就是说， $\{u_\alpha \cdot T\}_{\alpha\in\Omega}$ 在 I^* 上的弱-* 拓扑中收敛到 T。但是由于 $T \in WAP(I)$，且由于 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ 有界，存在一个子网$\{u_{\alpha_\beta}\}_{\beta\in\Omega_1}$，使得 $\{u_{\alpha_\beta} \cdot T\}_{\beta\in\Omega_1}$在 I^* 中弱收敛到某个 $T_0 \in I^*$。但这意味着 $T = T_0$，因此 T 属于 $\{u \cdot T | u \in I\}$ 的弱闭包，进而属于 $UCB(I)$的弱闭包。但是 $UCB(I)$是弱收敛闭的，所以 $T \in UCB(I)$。

□

5.5. 注记。由定义可立即得出，对于任意交换巴拿赫代数 $\mathcal{A}$，有 $AP(\mathcal{A}) \subseteq WAP(\mathcal{A})$。因此，若 $\mathcal{A}(G)$ 表示代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中的任意一个，且 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中一个非零的、具有有界近似单位的闭理想，则 $AP(I) \subseteq UCB(I)$。

5.6. 定理。设 $\mathcal{A}(G)$ 表示代数 $A(G)$、 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中的任意一个。

i) 若 I 是 $\mathcal{A}(G)$ 中的非零闭理想，且 $UCB(I) \subseteq WAP(I)$，则 G 是离散的。 ii) 若 I 是 $\mathcal{A}$ 中的非零闭理想，且 $x \notin Z(I)$。则 $\phi_{x_{|_I}} \in AP(I)$。特别地，若 G 是离散的，且 $Z(I)$ 是谱合成集，则 $UCB(I) \subseteq AP(I)$。 iii) 若 G 是离散的，$Z(I)$ 是谱合成集，且 I 有有界近似单位，则 $UCB(I) = AP(I)$。

证明。i) 这是 [8, 推论4.19]。ii)设 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ 是 I 中的一个网，使得 $\|u_\alpha\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1$，我们找到一个子网 $\{u_{\alpha_\beta}\}_{\beta\in\Omega_1}$，使得 $\lim^{\beta\in\Omega_1} u_{\alpha_\beta}(x) = c \in \mathbb{C}$。由此可知，如果 $u \in I$ 满足 $\|u\|_{\mathcal{A}(G)} \leq 1$，那么

$$\begin{aligned} |\langle c\phi_{x_{|_I}}, u\rangle - \langle u_{\alpha_\beta}\cdot\phi_{x_{|_I}}, u\rangle| &= |\langle \phi_{x_{|_I}}, cu\rangle - \langle \phi_{x_{|_I}}, u_{\alpha_\beta}u\rangle| \\ &= |cu(x) - u_{\alpha_\beta}(x)u(x)| \\ &\leq |c - u_{\alpha_\beta}(x)| \end{aligned}$$

这表明 $\lim_{\beta\in\Omega_1} \|u_{\alpha_\beta}\cdot\phi_{x_{|_I}} - c\phi_{x_{|_I}}\|_{I^*} = 0$。因此 $\phi_{x_{|_I}} \in AP(I)$。

$UCB(I) \subseteq AP(I)$ 这一事实可由引理 5.1 得出

iii) 这可由 ii) 和注 5.5 得出。

□

5.7. 推论。设 $\mathcal{A}(G)$ 表示代数 $A_{cb}(G)$ 或 $A_M(G)$ 中的一个。那么 $Q^\delta_M(G) \subset AP(\mathcal{A}(G))$，且 $Q^\delta_{cb}(G) \subset AP(\mathcal{A}(G))$。特别地， G 是离散的，当且仅当 $UCB(\mathcal{A}(G)) \subseteq AP(\mathcal{A}(G))$。此外，若 $\mathcal{A}(G)$ 有有界近似单位，则 G 是离散的，当且仅当 $UCB(\mathcal{A}(G)) = AP(\mathcal{A}(G))$。

5.8. 命题。设 G 是一个局部紧群。那么

i) $\mathcal{Q}^\lambda_{cb}(G) \subseteq UCB(A_{cb}(G))$ ii) $\mathcal{Q}^\lambda_{cb}(G) \subseteq WAP(A_{cb}(G))$ iii) $\mathcal{Q}^\lambda_{cb}(G) = UCB(A_{cb}(G))$ 当且仅当 G 是离散的。iv) $\mathcal{Q}^\lambda_M(G) \subseteq UCB(A_MG)$。v) $\mathcal{Q}^\lambda_{cb}(G) \subseteq WAP(A_M(G))$。vi) $\mathcal{Q}^\lambda_M(G) = UCB(A_MG)$ 当且仅当 G是离散的。

证明。

i) 由于 $C_{00}(G)$ 在 $L^1(G)$ 中稠密，因而也在 $\mathcal{Q}^\lambda_{cb}(G)$ 中稠密，因此只需证明每个 $f \in C_{00}(G)$ 都属于 $UCB(A_{cb}(G))$。

假设 $f \in C_{00}(G)$，且 $supp(f) = K$。那么存在一个 $u \in A_{cb}(G)$ 使得对每个 $x \in K$，都有 $u(x) = 1$ 。特别是 $u\cdot f = uf = f$。因此 $f \in UCB(A_{cb}(G))$。

ii) 设 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ 为 $A_{cb}(G)$中的网，且对每个 $\alpha \in \Omega$都有$\|u_\alpha\|_{A_{cb}(G)} \leq 1$ 。由于

$$\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega} \subseteq B^\lambda_{cb}(G) = \mathcal{Q}^\lambda_{cb}(G)^*,$$

必要时取一个子网，我们可以假设 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ 在$\sigma(B^\lambda_{cb}(G)\ \mathcal{Q}^\lambda_{cb}(G))$ 拓扑下收敛到某个 $u \in B^\lambda_{cb}(G)$。

现在考虑 $m \in A_{cb}(G)^{**}$。设 $v = m_{|_{\mathcal{Q}^\lambda_{cb}(G)}}$。若 $f \in \mathcal{Q}^\lambda_{cb}(G)$，则

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\in\Omega}\langle m, u_\alpha \cdot f\rangle &= \lim_{\alpha\in\Omega}\langle v, u_\alpha \cdot f\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in\Omega}\int_G v(x)u_\alpha(x)f(x)dx \\
&= \lim_{\alpha\in\Omega}\langle u_\alpha, v \cdot f\rangle \\
&= \langle u, v \cdot f\rangle \\
&= \langle v, u \cdot f\rangle \\
&= \langle m, u \cdot f\rangle.
\end{aligned}$$

即 $\{u_\alpha \cdot f\}_{\alpha\in\Omega}$弱收敛于 $u\cdot f$。这表明 $f \in WAP(A_{cb}(G))$。iii) 假设 $\mathcal{Q}^\lambda_{cb}(G) = UCB(A_{cb}(G))$。那么由上面的 ii) 可知 $UCB(A_{cb}(G)) \subseteq WAP(A_{cb}(G))$. 特别地，定理 5.6 i) 表明 G 是离散的。反向结论见推论 5.2。

iv)、v) 和 vi) 的证明与关于 $A_{cb}(G)$ 的相应结论的证明类似。

□

5.9. 注记。若 $\mathcal{A}(G)$ 是 $A(G)$、$A_M(G)$ 或 $A_{cb}(G)$ 中的任意一个，那么何时 $\mathcal{A}(G) = WAP(\mathcal{A}(G))$ 这一问题，等价于确定哪些群 G 满足 $\mathcal{A}(G)$ 是 Arens 正则。对于 G 可 amenable 的情形，已知 G 必须是有限的。一般而言，尽管人们强烈怀疑 $\mathcal{A}(G) = WAP(\mathcal{A}(G))$ 当且仅当 G 是有限的，但令人惊讶的是，即使对于 $A(G)$，这一结论至今仍未得到证明。不过，我们最近证明了，若 $\mathcal{A}(G) = WAP(\mathcal{A}(G))$，则 G 必须是离散的 $[8, 定理\ 5.1]$。

Granirer 已证明，$UCB(A(G)) = VN(G)$ 当且仅当 G是紧致的。这促使我们提出以下问题：如果 $\mathcal{A}(G)$ 是 $A_M(G)$ 或 $A_{cb}(G)$，那么 $UCB(\mathcal{A}(G)) = \mathcal{A}(G)^*$ 当且仅当 G 是紧致的吗？虽然我们非常希望这个问题的答案是肯定的，但目前还无法在一般情形下证明这一点。不过，我们可以证明，如果 $UCB(\mathcal{A}(G)) = \mathcal{A}(G)^*$，那么 G 有一个紧开子群，并且每个 amenable 子群都是有限的。

5.10. 定理。设 $\mathcal{A}(G)$ 为 $A_M(G)$ 或 $A_{cb}(G)$。若 $UCB(\mathcal{A}(G)) = \mathcal{A}(G)^*$，则 G 有一个紧开子群，并且每个闭可 amenable 子群都是有限的。特别地，若 G 几乎连通，则 G 是紧致的。

证明。假设 H 是一个闭可 amenable 子群。那么 $H \in Ext_{\mathcal{A}(G)}$。由命题 4.13 可得 $R^*(UCB(A(H)) = UCB(\mathcal{A}(G)) \cap VN_H(G)$。然而，若假设 $UCB(\mathcal{A}(G)) = \mathcal{A}(G)^*$，则有 $R^*(UCB(A(H)) = VN_H(G)$。这又意味着 $UCB(A(H)) = VN(H)$。因此，由 Granirer 的结果可知 H是紧致的。

为了证明 G 有一个开子群，我们注意到，如果连通分支 G_0 不是可 amenable 的，那么 G_0 就包含由两个生成元 $\mathbb{F}_2$ 生成的自由群。特别地，G_0包含一个无限非紧阿贝尔群，这与我们上述论证的结论矛盾。因此，G_0 必定是紧致的。由此可知，G 也有一个开几乎连通子群 G_1。由于 G_1/G_0 是紧致的，G_1 也必定是紧致的。

□

致谢

作者们谨此祝贺 Anthony To-Ming Lau 教授即将迎来 80 岁生日，并向他在杰出职业生涯中取得的诸多成就致以敬意。此外，第一作者谨向 Lau 教授表达由衷的感激，感谢他卓越的指导、始终如一的支持，以及他为所有有幸与他共事的人树立的楷模。

References

[1] M.Brannan 和B. Forrest，从子群扩展傅里叶代数的乘子。《美国数学学会会刊》。[2] J.DeCanniere和 U. Haagerup，某些简单李群及其子群的傅里叶代数的乘子。《美国数学杂志》107（1985），455–500。[3] J.Duncan和 S.A.R.Hosseinium，巴拿赫代数的二重对偶。《爱丁堡皇家学会学报》A辑84（1979），309–325。[4] C.Dunkl 和D.Ramirez，傅里叶代数上的弱几乎周期泛函。《美国数学学会汇刊》185（1973），501–514。[5] P. Eymard，局部紧群的傅里叶代数。《法国数学学会通报》92（1964），181–236。`，在 $A(G)$ 中完全有界乘子和在闭子群上消失的理想。《载于： A. T.-M. Lau 和 V. Runde，巴拿赫代数及其应用》，当代数学363，第89–94页。美国数学学会，2004年。[7] B.Forrest和T.Miao，一致连续泛函与 M-弱可和群。《加拿大数学杂志》65（2013），第5期，1005–1019。[8] B. Forrest、J. Sawatzky 和A. Thamizhazhagan， $A(G)$、 $A_{cb}(G)$和 $A_M(G)$ 中理想的 Arens正则性，（预印本）。[9] E.E. Granirer，任意局部紧群的傅里叶代数上的弱几乎周期泛函和一致连续泛函。《美国数学学会汇刊》189（1974），371–382。[10] E. Kaniuth 和 A.T.Lau，A(G) 的谱合成与VN(G) 的子空间。《美国数学学会会刊》129（2001），第11期，3253–3263。[11] Carl Herz，子群的调和综合。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）23（1973），第3期，91–123。[12] A. T.Lau，任意局部紧群的傅里叶代数上的一致连续泛函。《美国数学学会汇刊》251（1979），39–59。[13] A. T. Lau，巴拿赫代数上的一致连续泛函。《数学集刊》51（1987），195–205。[14] A. T. Lau 和 J.C.S. Wong，局部紧群的 $L_\infty(G)$中的弱几乎周期元素。《美国数学学会会刊》107（1989），第4期，1031–1036。[15] V.Losert，等价于可和性的傅里叶代数性质。《美国数学学会会刊》92（1984），第3期，347–354。[16] J. S. Pym，有界函数空间上的泛函卷积。《伦敦数学学会学报》15（1965），84–104。

第一作者地址：纯数学系滑铁卢大学 滑铁卢，安大略省加拿大N2L 3G1电子邮箱：beforres@uwaterloo.ca第二作者地址：纯数学系滑铁卢大学 滑铁卢，安大略省加拿大N2L 3G1电子邮箱：jmsawatz@uwaterloo.ca第三作者地址：纯数学系滑铁卢大学 滑铁卢，安大略省 加拿大 N2L 3G1电子邮箱：athamizhazhagan@uwaterloo.ca