arXiv:2304.06206v1 [math.FA] 13 Apr 2023

复移位不变空间中的共轭相位恢复

杨晨和王亚楠

Abstract. 共轭相位恢复问题关注如何根据复值函数的模观测值，在模为一的常数和共轭意义下确定该函数。它也可以视为无限维空间中的共轭无相位采样与重构问题。本文首先刻画复移位不变空间 $\mathcal{S}(\phi)$中由点值实现的共轭相位恢复，其中生成元 ϕ 是紧支撑实值函数。如果生成元 ϕ 具有某种张成性质，我们还证明，可以从有限采样密度的离散集合上取得的无相位样本，重构 $\mathcal{S}(\phi)$中的共轭相位可恢复函数。对于不具有张成性质的 B_N 阶 B样条生成元，若对函数导数进行额外的无相位测量，我们可以找到集合 Γ 和 $\Gamma' \subset (0,\ 1)$，其基数分别为 $2N-1$ 和 $2N-5$，使得样条空间 $\mathcal{B}_N$ 中的共轭相位可恢复函数 f 可由其无相位 Hermite 采样值 $|f(\gamma)|,\ \gamma \in \Gamma + \mathbb{Z}$以及 $|f'(\gamma)|,\ \gamma' \in \Gamma' + \mathbb{Z}$确定。本文提出了一种算法，可根据 Hermite 采样值实现分段多项式的共轭相位恢复。我们的结果给出了复有限维空间 $\mathbb{C}^N$中实共轭相位可恢复框架的说明性示例。

关键词 共轭相位恢复；复移位不变空间；B样条；Hermite 采样。

1. Introduction

本文研究如何从无相位样本 $|f(x)|,\ x \in \Omega$ 和 $|f'(x)|,\ x \in \Omega'$ 中，重构复移位不变空间 $\mathcal{S}(\phi)$ 中的函数 f，其中重构结果仅相差一个模为一的常数或共轭；生成元 ϕ 是一个具有紧支撑的实值连续函数，复移位不变空间

$$\mathcal{S}(\phi) := \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \phi(x-k), c_k \in \mathbb{C} \text{ for all } k \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{1.1}$$

且集合 Ω,Ω' 要么是整个实数轴 $\mathbb{R}$，要么是它的离散子集。上述问题是一个无限维共轭相位恢复问题，它通过无相位测量，在模为一的常数和共轭意义下确定复共轭不变线性空间 $\mathcal{C}$（即，当 $f \in \mathcal{C}$ 时，$f \in \mathcal{C}$）中的一个函数。这是复数情形下相位恢复的一种弱形式，已针对来自实框架的复向量，以及复 Paley-Wiener 空间或更一般的复共轭不变线性空间中的连续时间信号进行了研究，这些研究基于线性观测 [18, 25, 40, 44]。

本项目受国家自然科学基金（11901192，12171490）资助。1

经典相位恢复问题源于光学 [27, 28, 33, 39, 45]。其目标是根据傅里叶测量的模恢复感兴趣的函数。在框架理论中， [9] 的作者于 2006年提出了相位恢复问题的数学表述：根据框架系数的模，在全局相位意义下重建实/复希尔伯特空间中的向量。此后，大量研究致力于这一领域。该问题也已扩展至无限维情形，并在其他背景下得到推广。关于这一主题各个方面的详细讨论和最新进展，参见 [1–3, 6–8, 10–17, 19–21, 23, 24, 29, 31, 34, 35, 38, 41, 43, 47–50, 54–57] 。

近期，人们提出了一种关于实向量值函数相位恢复的新范式，即从线性泛函的模中恢复实线性空间中的向量值函数，结果相差一个正交变换；这一范式被用于自主移动机器人群的速度确定，以及欧几里得距离几何中的唯一构形问题 [18,37,53]。它是实数情形下相位恢复和复数情形下共轭相位恢复的一种广义框架。实数情形下的相位恢复可视为实标量值函数的相位恢复。通过从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{R}^2$的一个同构，复值函数 f 的共轭相位恢复问题本质上就是 $\mathbb{R}^2$值函数（$\Re f$， $\Im f$）的相位恢复问题。 [18] 的作者证实，复共轭不变空间 $\mathcal{C}$ 中的共轭相位恢复与其真实子空间 $\Re\mathcal{C} = \{\Re f$ 中的相位恢复密切相关：$= \frac{f+\bar{f}}{2}$， $f \in \mathcal{C}\}$。特别地，他们证明，实框架在 $\mathbb{C}^2$ 中能够进行共轭相位恢复，当且仅当它在 $\mathbb{R}^2$中能够进行相位恢复；并找出了由帽函数 h（t） $= \max(1 - |t - 1|,\ 0)$生成的复移位不变空间 $V(h)$ 中所有可进行共轭相位恢复的函数。

平移不变空间广泛应用于逼近理论、小波分析和信号处理，参见 [4, 5, 22, 42] 及其中的参考文献。代表性例子包括带限函数的 Paley-Wiener空间，它是由函数 $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ 生成的平移不变空间，以及样条空间

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_N &:= \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k B_N(x-k), c_k \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathbb{C}^{N-2}, f|_{[j,j+1)} \text{ is a polynomial of degree } N-1 \text{ for all } j \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (1.2)\end{aligned}$$

由阶为 N 的 B样条 B_N 生成，其中 $f|_I$ 是 f 在集合 I 上的限制，B样条 B_1 是 $[0,1$ 上的示性函数），而 B 样条 B_N， $N \geq 2$ 由 $B_N = \int_0^1 B_{N-1}(\cdot - t)dt$ 定义。实平移不变空间 $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\phi) = \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \phi(x-k)\ a_k \in \mathbb{R}\}$ 中的相位恢复已受到广泛关注 [17, 20, 31, 49, 52]。本文考虑具有紧支撑实值生成元 ϕ 的 $\mathcal{S}(\phi)$ 中的共轭相位恢复。遵循第 2 节中用于实子空间 $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\phi)$ [17]，中相位恢复的局部相位恢复和符号传播方法，我们通过区间 $I_j = (j,\ j+1)\ j \in \mathbb{Z}$，上的局部共轭相位恢复，并在相邻区间之间传播相位和共轭，依据 $\mathcal{S}(\phi)$ 中的点值刻画共轭相位可恢复函数，见定理 2.1。

在平移不变空间中的（共轭）相位恢复可以看作一个（共轭）无相位（Hermite）采样与重构问题 [16,17,20,31,41,49,52]。平移不变空间中的采样研究得十分深入，因为它是许多应用的现实且合适的模型 [4,5,32,51]。在第 3.1节中，我们证明，如果紧支撑实值生成元 ϕ 具有支撑长度 L 并具有某种张成性质，复平移不变空间 $\mathcal{S}(\phi)$ 在区间 $I_j = (j, j+1)$ $j \in \mathbb{Z}$上是局部共轭相位可恢复的，并且 $\mathcal{S}(\phi)$ 中所有共轭相位可恢复函数都可以根据其无相位样本$|f(x)|, x \in \Gamma + \mathbb{Z}$在集合 $\Gamma + \mathbb{Z}$上获取，且采样密度为 $^{L}_{(L+1)\ 2}$，详见定理 3.1。上述张成条件和采样密度 $^{L}_{(L+1)\ 2}$ 对于 $\mathcal{S}(\phi)$ 在区间 $I_j, j \in \mathbb{Z}$上局部共轭相位可恢复也是必要的，其中生成元ϕ 具有支撑长度 $L = 3$，详见推论 3.2、例 3.3 以及例3.4中关于$\mathcal{B}_3$ 的反例；此外，对于$\mathbb{C}^3$ in [25]，还有一个关于实向量的共轭相位可恢复框架的等价表述。

埃尔米特采样是指利用函数及其一阶导数的采样值进行插值，广泛用于带限函数和埃尔米特样条的重构 [26,36,46]。在解析函数的（共轭）相位恢复中引入了额外的导数测量 [38, 40, 44]。在第 3.2 节中，我们讨论从$\mathcal{S}(\phi)$中的厄米特采样值进行共轭无相位采样与重构，见定理 3.5。借助导数采样值，可以从某些离散集上的无相位厄米特样本确定 $\mathcal{B}_3$ 中的共轭相位可恢复函数，且结果唯一到一个模为一的常数及共轭变换。

对于样条空间 $\mathcal{B}_N$ 中任意满足 $N \geq 3$ 的函数 f，如式 (1.2) 所示，其在区间 $I_j = (j、\ j+1)$ $j \in \mathbb{Z}$、上的非零限制 $f|_{I_j}$ 是 $N-1$ 阶多项式，且它们可能无法仅凭其模 $|f(x)|$、$x \in I_j$进行共轭相位恢复。在第 4 节的定理 4.1 中，我们证明，通过厄米特测量，$\mathcal{B}_N$ 在区间 I_j、$j \in \mathbb{Z}$、上具有局部共轭相位恢复性质；并且可从分别取自离散集 $\Gamma + \mathbb{Z}$ 和 $\Gamma' + \mathbb{Z}$ 上的无相位厄米特样本 $|f(\gamma)|$、$\gamma \in \Gamma + \mathbb{Z}$ 和 $|f'(\gamma')|$、$\gamma' \in \Gamma' + \mathbb{Z}$，确定共轭相位可恢复函数 $f \in \mathcal{B}_N$，其结果唯一到一个模为一的常数及共轭变换，其中采样密度分别为 $2N-1$ 和 $2N-5$。基于构造性证明，我们提出一种算法，用于根据厄米特采样值实现分段多项式的共轭相位恢复。我们的结果还给出了说明性示例，展示了由 $4N-6$ 实向量构成、能够在 $\mathbb{C}^N$ [25]中实现共轭相位恢复的框架。

2. Global and local conjugate phase retrieval in a complex shift-invariant space

对于复移位不变空间 $\mathcal{S}(\phi)$ 的紧支撑实值生成元 ϕ，令

$$L := \min_{L_1, L_2 \in \mathbb{Z}} \{L_2 - L_1, \phi \text{ vanishes outside } [L_1, L_2]\},$$

表示其支撑长度。对于代表生成元 B_N，其支撑长度与阶 $N \geq 1$ 相同。不失一般性，

$$\phi(t) = 0 \text{ for all } t \notin [0, L], \tag{2.1}$$

否则，可将 ϕ 替换为某个 $L_0 \in \mathbb{Z}$ 的 $\phi(\cdot - L_0)$。对于开集 $A \subset \mathbb{R}$，如果任意满足 $|f(x)| = |g(x)|$ 的 $g \in \mathcal{S}(\phi)$，都存在一个模为一的常数 $z \in \mathbb{T}$，使得在 A 上 $g = zf$ 或 $g = zf$，其中 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$，则称函数 $f \in \mathcal{S}(\phi)$ 在 A 上局部共轭相位可恢复；如果 $\mathcal{S}(\phi)$ 中的所有函数都在 A 上局部共轭相位可恢复，则称 $\mathcal{S}(\phi)$ 在 A 上局部共轭相位可恢复。如果函数 $f \in \mathcal{S}(\phi)$ 在整条实线 $\mathbb{R}$ 上局部共轭相位可恢复，则称其为全局共轭相位可恢复，简称共轭相位可恢复。注意，$\mathcal{S}(\phi)$ 中并非所有函数都共轭相位可恢复。例如，函数 $z_1\phi(t) \pm z_2\phi(t-L) \in \mathcal{S}(\phi)$ z_1、$z_2 \in \mathbb{T}$ 的模 $|\phi(t)| + |\phi(t-L)|$ 相同，但即使相差一个模为一的常数并作共轭变换，它们也不相同。本节将通过考察区间 $I_j = (j, j+1)$ $j \in \mathbb{Z}$ 上的局部共轭相位恢复，以及在相邻区间之间传播相位和共轭，刻画 $\mathcal{S}(\phi)$ 中所有共轭相位可恢复的函数，见定理 2.1。

先从最简单的情形开始：生成元的支撑长度为 $L = 1$ 时，函数 $f \in \mathcal{S}(\phi)$ 是共轭相位可恢复的，当且仅当存在某个整数 $k_0 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$f(x) = c_{k_0}\phi(x - k_0) \text{ for some } c_{k_0} \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

对于生成元 ϕ 的支撑长度为 $L = 2$，且 $\mathcal{S}(\phi)$ 在区间 $I_j = (j,\ j+1)$ $j \in \mathbb{Z}$ 上局部共轭相位可恢复的情形，沿用生成元 $h(t) = \max(1 - |1 - t|,\ 0)$ 在 [18], 中的类似论证，可得非零函数 $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\phi(x-k) \in \mathcal{S}(\phi)$ 是共轭相位可恢复的，当且仅当

$$c_k \neq 0 \ \text{ for all } K_-(f) - 1 < k < K_+(f) + 1 \tag{2.3}$$

并且至多存在一个 $k_0 \in (K_-(f) - 1,\ K_+(f))$ 使得

$$\Im\big(c_{k_0}\overline{c_{k_0+1}}\big) \neq 0, \tag{2.4}$$

其中

$$K_-(f) := \inf\{k,\ c_k \neq 0\} \text{ and } K_+(f) := \sup\{k,\ c_k \neq 0\}. \tag{2.5}$$

因此，非零函数 $f \in \mathcal{S}(\phi)$ 是共轭相位可恢复的，当且仅当它满足 (2.3) 并具有如下分解

$$f(x) = \xi_1 \sum_{k\le k_0} a_k\phi(x-k) + \xi_2 \sum_{k\ge k_0+1} a_k\phi(x-k), \tag{2.6}$$

其中 $\xi_1,\ \xi_2 \in \mathbb{T}$, $a_k = \overline{\xi_1}c_k \in \mathbb{R},\ k \le k_0$，以及 $a_k = \overline{\xi_2}c_k \in \mathbb{R},\ k \ge k_0 + 1$。对于 f 在模为一的常数意义下为实值的情况，分解 (2.6) 对于 $\xi_1 = \xi_2$ 成立，因此 f 在 $\mathcal{S}(\phi)$ 中是共轭相位可恢复的，当且仅当 (2.3) 成立，当且仅当 $\xi_1 f$ 在 $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\phi)$ 中是相位可恢复的。

现在我们考虑生成元 ϕ 的支撑长度

$$L \ge 3. \tag{2.7}$$

对于任意非零函数 $f \in \mathcal{S}(\phi)$，我们都可以找到 $\xi_1,\ \xi_2 \in \mathbb{T}$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= \xi_1 \sum_{k=K_-(f)}^{\kappa_-(f)} a_k\phi(x-k) + \sum_{k\in\mathcal{K}(f)} c_k\phi(x-k) + \xi_2 \sum_{k=\kappa_+(f)}^{K_+(f)} a_k\phi(x-k), \\ &=: \xi_1 f_{\mathrm{L}}(x) + f_{\mathrm{M}}(x) + \xi_2 f_{\mathrm{R}}(x), \end{aligned} \tag{2.8}$$

$\kappa_-(f)$其中 $K_\pm(f)$ 如 (2.5) 中所述，函数 $f_{\mathrm{L}}(x) = \sum a_k\phi(x-k)$ 是实值的，并且满足$k=K_-(f)$

$$\kappa_-(f) := \sup\{k, \Im(\xi_1\overline{c_l}) = 0 \text{对所有 } l \le k\} \text{成立，且 } a_k = \overline{\xi_1 c_k} \in \mathbb{R} \text{对所有 } k < \kappa_-(f) + 1, \tag{2.9}$$

$K_+(f)$函数 $f_{\mathrm{R}}(x) = \sum a_k\phi(x-k)$ 是实值的，且满足$k=\kappa_+(f)$

且 $\mathbb{R} \ni a_k = \begin{cases} \xi_2 c_k & \text{若 } \kappa_+(f) = \inf\{k > \kappa_-, \Im(\overline{\xi_2}c_l) = 0 \text{ for all } l \ge k\} \\ & \kappa_+ < K_+ \ f \ +1() \text{则，而函数 } f_{\mathrm{M}}(x) \\ 0 \end{cases} = \sum_{k\in\mathcal{K}\ (f)} c_k\phi($ (2.10)

$x-k)$
with

$$\mathcal{K}(f) := \begin{cases} (\kappa_-(f), \kappa_+(f)) \cap \mathbb{Z} & \text{if } \kappa_- + 2 \le \kappa_+ < K_+(f) + 1 \\ \emptyset & \text{else.} \end{cases} \tag{2.11}$$

这里令 $\inf\emptyset = +\infty$。利用上述分解，我们刻画了 $\mathcal{S}(\phi)$ 中共轭相位可恢复的函数。

定理 2.1。设 ϕ 是满足 (2.1) 和 (2.7) 的实值连续函数，且 $\mathcal{S}(\phi)$ 在区间 $I_j = (j, \ j+1)$ $j \in \mathbb{Z}$ 上局部共轭相位可恢复。那么，具有分解 (2.8)-(2.11) 的非零函数 $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\phi(x-k) \in \mathcal{S}(\phi)$ 共轭相位可恢复，当且仅当

i)

$$\sum_{l=0}^{L-2} |c_{k+l}| \ne 0 \text{ for all } k \in (K_-(f) - L + 1, K_+(f) + 1) \tag{2.12}$$

and

ii)

$$\sum_{k-L+2\le n_1<n_2\le k} |\Im(c_{n_1}\overline{c_{n_2}})| \ne 0 \text{ 对所有 } \kappa_- + 1 \le k \le \kappa_+ + L - 3, \tag{2.13}$$

前提是 $\mathcal{K}(f) \ne \emptyset$.

注意，$\mathcal{K}(f) \ne \emptyset$ 当且仅当 $-\infty < \kappa_- + 2 \le \kappa_+ < \infty$ 且

$$c_{\kappa_-+1} \ne 0 \text{ and } c_{\kappa_+-1} \ne 0. \tag{2.14}$$

对于满足 $\mathcal{K}(f) = \emptyset$ 的非零函数 $f \in \mathcal{S}(\phi)$，其分解 (2.8) 与 (2.6) 中的形式相同，并且它在 $\mathcal{S}(\phi)$ 中共轭相位可恢复，当且仅当 (2.12) 成立。我们指出，当且仅当 $\mathcal{K}(f) = \emptyset$ 时，(2.13) 中的等式对 $L = 2$ 成立；此时，(2.12) 和 (2.13) 分别变为 (2.3) 和 (2.4)，且 (2.8) 中共轭相位可恢复函数的分解与 (2.6) 中的形式相同。为证明定理 2.1，我们回顾 $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\phi)$ 中相位恢复的一个刻画，以及 $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\phi)$ 中的相位恢复与 $\mathcal{S}(\phi)$ 中的共轭相位恢复之间的关系。

引理 2.2. [[17], 定理 3.2] 设 ϕ 是满足 (2.1) 和 (2.7) 的实值连续函数，且实平移不变空间 $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\phi)$ 在其上局部相位可恢复

区间 $I_j=(j,\ j+1)\ j\in\mathbb{Z}$。那么，非零函数 $f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_k\phi(x-k)\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\phi)$ 是相位可恢复的，当且仅当

$$\sum_{l=0}^{L-2}|d_{k+l}|^2\neq 0$$

对所有 $K_-(f)-L+1<k<K_+(f)+1$。

引理 2.3。 [[18], 定理 2.3] 设 ϕ 是满足 (2.1) 和 (2.7) 的实值连续函数。若函数 $f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\phi(x-k)\in\mathcal{S}(\phi)$ 在 $\mathcal{S}(\phi)$ 中共轭相位可恢复，则对所有 $a,b\in\mathbb{R}$，线性组合 $g(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(a\Re c_k+b\Im c_k)\phi(x-k)$ 在实子空间 $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\phi)$ 中相位可恢复。

定理 *2.1* 的证明。令 $K_\pm=K_\pm(f)$ 和 $\kappa_\pm=\kappa_\pm(f)$，并将 f 写成 (2.8)-(2.11) 中的形式。$\Longrightarrow$: i) 若共轭相位可恢复函数 $f\in\mathcal{S}(\phi)$ 是实值的，则由引理 2.2 和 2.3 可立即得到 (2.12)。否则，根据 (2.9)-(2.10)，有

$$K_-(\Re(\overline{\xi_1}f))=K_-\text{ and }K_+(\Re(\overline{\xi_2}f))=K_+. \tag{2.15}$$

根据引理 2.3，实值函数 $\Re(\xi_1 f)$ 和 $\Re(\xi_2 f)$ 在$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\phi)$ 中是相位可恢复的。结合 (2.15) 和引理 2.2，可得

$$\sum_{l=0}^{L-2}|c_{k+l}|\neq 0\text{ for all }K_--L+1<k\leq K_+(\Re(\overline{\xi_1}f))\text{ and }K_-(\Re(\overline{\xi_2}f))-L+1<k<K_++1. \tag{2.16}$$

注意，对于 $\Re(\xi_1\xi_2)\neq 0$ 的情形，我们有

$$K_+(\Re(\overline{\xi_1}f))\geq\kappa_+-1\geq\kappa_-\geq K_-(\Re(\overline{\xi_2}f))-L+1.$$

因此，由 (2.16) 可知 (2.12) 成立。否则，对函数$\Re(e^{-\frac{\pi}{4}i}\xi_1 f)$ 采用类似论证，其中

$$K_-(\Re(e^{-\frac{\pi}{4}i}\overline{\xi_1}f))\leq K_+(\Re(\overline{\xi_1}f))\text{ and }K_+(\Re(e^{-\frac{\pi}{4}i}\overline{\xi_1}f))\geq K_-(\Re(\overline{\xi_2}f)),$$

由 (2.16) 和引理 2.2–2.3 可证结论 i)。

ii) 反设，对于 $\mathcal{K}(f)\neq\emptyset$ 的情形，(2.13) 不成立。那么$-\infty<\kappa_-+2\leq\kappa_+<\infty$，且存在 $k_0\in[\kappa_-+1,\kappa_++L-3]$ 使得

$$\sum_{k_0-L+2\leq n_1<n_2\leq k_0}|\Im(c_{n_1}\overline{c_{n_2}})|=0. \tag{2.17}$$

对于 $k_0\in[\kappa_-+1,\kappa_+-1]$的情况，由（2.12）可知，存在 $n_0\in[k_0-L+2,k_0]$ 使得 $c_{n_0}\neq 0$。令 $\theta_0=-\arg c_{n_0}\in[-\pi,\pi)$。由（2.9）–（2.11）和（2.17），可得$\kappa_-<n_0<\kappa_+$,

$$\Im(e^{i\theta_0}c_k)=0\text{ for all }k\in[k_0-L+2,k_0],$$

and

$$\Im(e^{i\theta_0}c_{k_1})\neq 0\text{ and }\Im(e^{i\theta_0}c_{k_2})\neq 0\text{ for some }k_1\leq\kappa_-<k_0<\kappa_+\leq k_2.$$

由引理 2.2 可知， $\Im(e^{i\theta_0}f)$ 非零，且在 $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\phi)$ 中不是相位可恢复的。这与根据引理 2.3 得出的 f 具有共轭相位可恢复性相矛盾，因此 (2.13) 成立。

对于 $\kappa_+ \le k_0 \le \kappa_+ + L - 3$ 的情形，我们有

$$c_l = 0 \text{ for all } \kappa_+ \le l \le k_0,$$

并且，如果对于所有 $k_0 - L + 2 \le l \le \kappa_-$， $k_0 - L + 2 \le \kappa_-$, $c_l = 0$；对于所有 $\kappa_- + 1 \le l \le \kappa_+ - 1$, $\Im c_l c_{\kappa_+ - 1} = 0$；否则对于所有 $k_0 - L + 2 \le l \le \kappa_+ - 1$, $\Im c_l c_{\kappa_+ - 1} = 0$。这与 (2.9)-(2.11) 和 (2.14) 一起意味着存在 $l_1 \ge k_0 + 1$ 和 $l_2 \le k_0 - L + 1$，使得 $\Im c_{l_1} c_{\kappa_+ - 1} \ne 0$ 和 $\Im c_{l_2} c_{\kappa_+ - 1} \ne 0$。令 $\theta_1 = -\arg c_{\kappa_+ - 1}$。我们有 $\Re(e^{i\theta_1} f)$ 不具备相位可恢复性，这与引理 2.3 所述 f 的共轭相位可恢复性矛盾，因此结论 ii) 成立。

$\Longleftarrow$: 对于 $\kappa_- = K_+$, f 在模为一的常数相乘后为实值的情形，由引理 2.2 可知 f 具有共轭相位可恢复性。现在假设 $\kappa_- < K_+$。定义同构

$$\mathcal{A} : \mathbb{C} \ni z \longmapsto \begin{pmatrix} \Re z \\ \Im z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{2.18}$$

在 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 之间。函数 $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x - k)$ 在 $\mathcal{S}(\phi)$ 中共轭相位可恢复，当且仅当 $\mathbb{R}^2-$ 值函数

$$(\mathcal{A}f)(x) := \mathcal{A}(f(x)) = \begin{pmatrix} \Re f(x) \\ \Im f(x) \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R},$$

在 $\mathbb{R}^2$ 上可确定到一个正交变换，当且仅当序列 $(\mathcal{A}c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中可确定到一个正交矩阵。根据函数 f 在区间 $I_j, j \in \mathbb{Z}$ 上的局部共轭相位恢复，以及限制

$$f|_{I_j}(x) = \sum_{k=j-L+1}^{j} c_k \phi(x - k), x \in I_j,$$

我们得到， $\mathbb{R}^2$ 值函数 $\mathcal{A}f$ 和系数向量 $\mathcal{A}c_k, j - L + 1 \le k \le j$ 可由无相位测量 $|f(x)|$, $x \in I_j$ 局部确定到一个正交矩阵 $\mathbf{U}_j$。

由 (2.9)，我们有 $c_{\kappa_- + 1} \ne 0$。不失一般性，假设 $\mathbf{U}_{\kappa_- + 1} = \mathbf{I}_2$，其中 $\mathbf{I}_n$ 是 $n \times n$ 阶单位矩阵；否则，将 $\mathcal{A}f$ 替换为 $\mathbf{U}_{\kappa_- + 1}^{-1} \mathcal{A}f$。于是我们有

$$c_k, \kappa_- - L + 2 \le k \le \kappa_- + 1, \text{ can be determined from } |f(x)|, x \in I_{\kappa_- + 1}, \tag{2.19}$$

and

$$K_+(f|_{\cup_{k \le \kappa_-} I_k}) \ge \kappa_- - L + 2$$

由 (2.12)。由于区间 $\cup_{k \le \kappa_-} I_k$ 上的限制 $f|_{\cup_{k \le \kappa_-} I_k}$ 除了一个模为一的常数因子外是实值的，因此我们有

$$c_k, k \le \kappa_-, \text{ can be determined from } |f(x)|, x \in \cup_{k \le \kappa_-} I_k, \tag{2.20}$$

由 (2.12) 和引理 2.2。接下来我们证明以下断言：

$$\mathcal{A}c_k, k \ge \kappa_- + 1 \text{ can be determined from } |f(x)|, x \in \cup_{k > \kappa_-} I_k,$$

通过归纳法。归纳地，我们假设 $\mathcal{A}c_k$, $k \le K$ 已确定。如果 $K \ge K_+$，归纳证明即完成。否则 $K < K_+$。根据区间 I_{K+1}上的局部共轭相位恢复，系数向量 $\mathcal{A}c_k$,
$K - L + 2 \le k \le K + 1$,

可由对 $\mathbb{R}^2$的正交变换确定。将从无相位测量 $|f(x)|, x \in I_{K+1}$, 中恢复的系数向量记为 $\mathcal{A}d_k, K-L+2 \leq k \leq K+1$。

情形 1: $\kappa_- < K < \kappa_+ + L - 2$

由 (2.13)，存在元素 $K-L+2 \leq k_1, k_2 \leq K$ 使得 $\Im c_{k_1} c_{k_2} \neq 0$。这意味着向量 $\mathcal{A}c_{k_1}, \mathcal{A}c_{k_2}$ 构成 $\mathbb{R}^2$ 的一组基。于是我们有 $\mathbf{U}_{K+1} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}d_{k_1} & \mathcal{A}d_{k_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}c_{k_1} & \mathcal{A}c_{k_2} \end{pmatrix}^{-1}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中的正交矩阵，并且

$$\mathcal{A}d_k = \mathbf{U}_{K+1}\mathcal{A}c_k, \text{ for all } K-L+2 \leq k \leq K+1.$$

因此， $\mathcal{A}c_{K+1} = \mathbf{U}_{K+1}^{-1}\mathcal{A}d_{K+1}$ 是确定的。

情形 2: $K > \kappa_+ + L - 3$

注意，限制 $f|_{\cup_{k\geq \kappa_+ + L-1} I_k}$ 在乘以一个模为一的常数后为实值，并且

$$K_-(f|_{\cup_{k\geq \kappa_+ + L-1} I_k}) \leq \kappa_+ + L - 2 \leq K.$$

由 (2.12) 和引理 2.2 可知， c_{K+1} 和 $\mathcal{A}c_{K+1}$ 唯一确定。

结合归纳假设和 (2.19)，可唯一确定 $\mathcal{A}c_k$， $\kappa_- + 1 \leq k \leq K+1$。归纳论证可以继续进行。结合 (2.19) 和 (2.20)，即完成证明。□

3. Conjugate phaseless (Hermite) sampling and reconstruction in a complex shift-invariant space

本节讨论一个共轭无相位（厄米特）采样与重建问题：根据在有限采样密度的移位不变集 $\Gamma + \mathbb{Z}$ 和 $\Gamma' + \mathbb{Z}$ 上取得的无相位厄米特样本 $|f(\gamma)|$， $\gamma \in \Gamma + \mathbb{Z}$ 和 $|f'(\gamma)|$, $\gamma \in \Gamma' + \mathbb{Z}$，确定函数 $f \in \mathcal{S}(\phi)$，其结果在模为一的常数和共轭意义下唯一。这里，集合 $\Lambda \subset \mathbb{R}$ 的采样密度定义为

$$D(\Lambda) := \lim_{b-a\to\infty} \frac{\#(\Lambda \cap [a,b])}{b-a},$$

其中 $\#E$ 是集合 E的基数。

3.1. 复移位不变空间中的共轭无相位采样与重构 $\mathcal{S}(\phi)$。 给定一个紧支撑函数 ϕ 和一个开集 $A \subset \mathbb{R}$，若对于所有 $x \in A$，$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \phi(x-k) = 0$ 都蕴含 $c_k = 0$ 对所有 $k \in K_A$ [51]成立，则称 ϕ 在 A 上具有局部线性无关性，并定义

$$\Phi_A(x) := (\phi(x-k))_{k\in K_A}, x \in A,$$

and

$$W_{\phi,A} := \operatorname{span}\{\Phi_A(x)(\Phi_A(x))^T, x \in A\} \subset \mathbb{H}_L,$$

其中， $K_A = \{k, \phi(x-k) \neq 0 \text{ 在 } A\}$ 上，且 $\mathbb{H}_L$是所有 $L \times L$阶对称实矩阵构成的空间。容易验证，生成元 ϕ 在 A 上的局部线性无关性，是 $\mathcal{S}(\phi)$在 A上实现局部共轭相位恢复的必要条件。在下述定理中，我们给出 $\mathcal{S}(\phi)$实现局部共轭相位恢复，以及在 $\mathcal{S}(\phi)$中实现共轭无相位采样与重构的一个充分条件。

定理 3.1. 设 ϕ 是满足（2.1）和（2.7）的实值连续函数。假设 ϕ 在区间 $I_j = (j, j+1)$ $j \in \mathbb{Z}$上具有局部线性无关性，并且

$$W_{\phi,(0,1)} = \mathbb{H}_L. \tag{3.1}$$

那么，平移不变空间 $\mathcal{S}(\phi)$ 在 $I_j, j \in \mathbb{Z}$ 上是局部共轭相位可恢复的，并且存在一个有限集 $\Gamma \subset (0,1)$，其中包含 $^{L}_{(L+1)\ 2}$ 个互异点，使得任何满足 (2.12) 和 (2.13) 的非零函数 $f \in \mathcal{S}(\phi)$，都可以由在集合 $\Gamma + \mathbb{Z}$ 上取得的无相位样本 $|f(\gamma)|, \gamma \in \Gamma + \mathbb{Z}$ 确定，且仅相差一个模为一的常数和共轭。

证明。根据定理 2.1，我们只需找到一个有限集 $\Gamma \subset (0,1)$，使得 $\mathcal{S}(\phi)$ 中的任意函数都能通过在集合 $\Gamma + j$ 上取得的样本，在区间 $I_j = (j, j+1)$ $j \in \mathbb{Z}$ 上实现局部共轭相位恢复。对于任意函数 $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \phi(x-k) \in \mathcal{S}(\phi)$，$j \in \mathbb{Z}$ 和 f 在 I_j 上是局部共轭相位可恢复的，当且仅当 $(\mathcal{A}c_{j-L+1}, \ldots, \mathcal{A}c_j)$ 在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中可确定至多相差一个正交矩阵；这又当且仅当相应的格拉姆矩阵 $(\langle \mathcal{A}c_n, \mathcal{A}c_{n'}\rangle)_{j-L+1\le n,n'\le j}$ 唯一确定，其中 $\mathcal{A}$ 是 (2.18) 中的同构，且 $L \ge 3$ 见 [18] 中的引理 4.11。

根据 (3.1)，存在一个集合 $\Gamma = \{\gamma_l, 1 \le l \le {}^{L(L+1)}_{\ 2}\} \subset (0,1)$，使得外积 $\Phi(\gamma_l)(\Phi(\gamma_l))^T, 1 \le l \le {}^{L}_{(L+1)\ 2}$ 构成 $\mathbb{H}_L$ 的一组基。令 $\mathrm{E}_{mn}, 1 \le m \le n \le L$ 为矩阵，其中除第 mn 行、第 nm 列处的元素为 1 外，其余所有元素均为 0；集合 $\{\mathrm{F}_n, 1 \le n \le {}^{L}_{(L+1)\ 2}\} := \{\mathrm{E}_{11}, \mathrm{E}12, \ldots, \mathrm{E}_{LL}\}$ 构成 $\mathbb{H}_L$ 的标准基。存在一个非奇异矩阵 $\mathrm{A} = (a_{ln}) \in \mathbb{R}^{{}^{L(L+1)}_{\ 2} \times {}^{L}_{(L+1)\ 2}}$，使得

$$\Phi(\gamma_l)(\Phi(\gamma_l))^T = \sum_{n=1}^{L(L+1)/2} a_{ln}\mathbf{F}_n, 1 \le l \le \frac{L(L+1)}{2}.$$

As

$$|f(\gamma_l + j)|^2 = \sum_{j-L+1\le n,n'\le j} c_n\overline{c_{n'}}\phi(\gamma_l - n)\phi(\gamma_l - n'), 1 \le l \le \frac{L(L+1)}{2},$$

格拉姆矩阵中的内积 $\langle \mathcal{A}c_n, \mathcal{A}c_{n'}\rangle = \Re(\overline{c_n}c_{n'})$ $j - L + 1 \le n,\ n' \le j$ 可由 $\mathbf{A}^{-1}(|f(\gamma_l + j)|^2)_{1\le l\le {}^{L(L+1)}_{\ 2}}$ 唯一确定。于是，函数 f 在 I_j 上局部共轭相位可恢复，证明完成。□

由紧支撑函数ϕ 生成的复移位不变空间 $\mathcal{S}(\phi)$ 是局部有限维的。在 $\mathcal{S}(\phi)$ 的有界开集上进行局部共轭相位恢复，可视为有限维共轭相位恢复。注意，复点可由它到三个不共线点的距离 [29], 确定，而 $(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{C}^3$ 只有在已知内积 $\langle \mathcal{A}c_i, \mathcal{A}c_j\rangle$, $0 \le i \le j \le 2$时，才能确定到相差一个模为一的常数及共轭为止。我们指出，对于较大的 L，上述定理中的集合 $\Gamma + \mathbb{Z}$ 的采样密度 $^{L}_{(L+1)\ 2}$ 和张成条件 (3.1) 对 $\mathcal{S}(\phi)$ 上的局部共轭相位恢复未必是必要的；而在 $L = 3$ 的情形下，它们则是充要条件。参见 $\mathbb{C}^L$ [25] 中向量的共轭相位恢复的等价表述。

推论 3.2. 令 ϕ 为支撑长度为 $L=3$的实值连续函数。如果满足 (2.12)和 (2.13)的任意函数 $f\in\mathcal{S}(\phi)$ 都可以根据模 $|f(x)|, x\in\mathbb{R}$ 确定，但允许相差一个模为 1 的常数和共轭，那么 $W_{\phi,[0,1]}=\mathbb{H}_3$。

例 3.3. 设

$$\phi_1(x)=\begin{cases} x^3/2 & \text{if } 0\le x<1\\ -x^3+3x^2-2x+1/2 & \text{if } 1\le x<2\\ x^3/2-3x^2+5x-3/2 & \text{if } 2\le x<3\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

函数 ϕ_1 在区间(0，1) 上具有局部线性无关性，并且 $W_{\phi_1,\ (0,\ 1)}=\mathbb{H}_3$[20]。我们可以找到一个有限集 $\Gamma\subset(0,1)$，使得相应的外积$\Phi_{(0,1)}(\gamma)(\Phi_{(0,1)}(\gamma))^T$, $\gamma\in\Gamma$构成 $\mathbb{H}_3$ 的一个基。根据定理 3.1，任何满足 (2.12)和 (2.13)的函数 $f\in V(\phi_1)$，都可以根据无相位样本 $|f(\gamma)|,\ \gamma\in\Gamma+\mathbb{Z}$ 确定，但相差一个模为一的常数和共轭。

接下来我们给出一个反例：当生成元 ϕ 的支集为 $[0,3]$，且 $W_{\phi,\ (0,1)}\subsetneq\mathbb{H}_3$ 时，空间 $\mathcal{S}(\phi)$ 在区间 $I_j=(j,\ j+1)\ j\in\mathbb{Z}$ 上不是局部共轭相位可恢复的。

例 3.4。 令 B_3 为 3 阶 B样条，并记为

$$B_3(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & \text{if } 0\le x<1\\ -x^2+3x-\frac{3}{2} & \text{if } 1\le x<2\\ \frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2} & \text{if } 2\le x<3\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

令 $\mathbf{B}^{(0,1)}(x)=(B_3(x)\ B_3(x+1)\ B_3(x+2))^T,\quad 0<x<1$。于是有

$$\mathbf{B}_{(0,1)}(x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}x+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}x^2$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{(0,1)}(x)\mathbf{B}_{(0,1)}(x)^T=&\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}x+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-5\\1&-5&6\end{pmatrix}x^2\\&+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-4&3\\-1&3&-2\end{pmatrix}x^3+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}x^4.\end{aligned}\tag{3.2}$$

由外积 $\mathbf{B}^{(0,1)}(x)\mathbf{B}^{(0,1)}(x)^T,\ 0<x<1$，张成的空间 $W_{B_3,\ (0,\ 1)}$ 是 $\mathbb{H}_3$ 的一个 5 维线性子空间。虽然函数 $f\in\mathcal{B}_3$ 在区间$I_j=(j,\ j+1)\ j\in\mathbb{Z}$ 上限制后是一个 2 阶多项式，但如果 $f|I_j$ 的所有根都不是实数，则它可能无法在 I_j 上局部共轭相位可恢复。

3.2. 在 $\mathcal{S}(\phi)$ 中的共轭无相位厄米特采样与重建。 埃尔米特采样是通过函数及其一阶导数的采样值进行插值。对于 3 阶 B样条 B_3，其导数为

$$B_3'(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \le x < 1 \\ -2x+3 & \text{if } 1 \le x < 2 \\ x-3 & \text{if } 2 \le x < 3 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

且对所有 $x \in (0,\ 1)$,

$$\mathbf{B}'_{(0,1)}(x) := (B_3'(x), B_3'(x+1), B_3'(x+2))^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x$$

and

$$\mathbf{B}'_{(0,1)}(x)\mathbf{B}'_{(0,1)}(x)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} x^2.$$

结合 (3.2) 可得

$$W_{B_3,(0,1)} \cup W_{B_3',(0,1)} = \mathbb{H}_3,$$

并且存在两个子集 $\Gamma,\ \Gamma' \subset (0,\ 1)$，使得集合

$$\{\mathbf{B}_{(0,1)}(\gamma)\mathbf{B}_{(0,1)}(\gamma)^T, \gamma \in \Gamma\} \cup \{\mathbf{B}'_{(0,1)}(\gamma')\mathbf{B}'_{(0,1)}(\gamma')^T, \gamma' \in \Gamma'\}$$

构成 $\mathbb{H}_3$ 的一组基。沿用定理 3.1 中的类似论证，我们可知 $\mathcal{B}_3$ 能够根据 Hermite 采样值在 $I_j = (j,\ j+1)$ $j \in \mathbb{Z}$，上实现局部共轭相位恢复，因此，任何满足 (2.12) 和 (2.13) 的函数 $f \in \mathcal{B}_3$，都可以由无相位厄米特样本 $|f(\gamma)|,\ \gamma \in \Gamma + \mathbb{Z}$，以及$|f'(\gamma')|$, $\gamma' \in \Gamma' + \mathbb{Z}$确定，且仅相差一个模为一的常数及共轭。

对于一般的实值可微生成元 ϕ，若其支撑紧致，沿用定理 3.1 中的类似论证，可得以下关于 $\mathcal{S}(\phi)$ 中共轭无相位厄米特采样与重建的结果。

定理 3.5。 设 ϕ 是满足 (2.1) 和 (2.7) 的实值可微函数。假设函数 ϕ 和 ϕ' 在区间 $(0,\ 1)$ 以及 $W_{\phi,\ (0,1)} \cup W_{\phi',\ (0,\ 1)} = \mathbb{H}_L$ 上具有局部线性无关性。则存在有限集 Γ, $\Gamma' \subset (0,\ 1)$，使得任何满足 (2.12) 和 (2.13) 的函数 $f \in \mathcal{S}(\phi)$，都可以由无相位厄米特样本 $|f(\gamma)|$、$\gamma \in \Gamma + \mathbb{Z}$ 以及 $|f'(\gamma')|$、$\gamma' \in \Gamma' + \mathbb{Z}$ 确定，且确定到一个模为一的常数和共轭为止。

证明。 证明与定理 3.1 的证明类似，此处略去。 □

4. Conjugate phaseless Hermite sampling and reconstruction in a complex spline space

设 $\mathcal{B}_N$ 为式 (1.2) 中的样条空间，其中 $N \ge 3$。对于任意函数 $f \in \mathcal{B}_N$ 和 $j \in \mathbb{Z}$，其在区间 $I_j = (j,\ j+1)$ 上的限制 $f|_{I_j}$ 是一个 $N-1$ 阶多项式，它可能无法根据无相位观测实现共轭相位恢复

$|f(x)|$，$x \in I_j$。与文献 $\mathcal{B}_3$ 中的共轭无相位厄米特采样与重建类似，本节针对一般的 $N \geq 3$，考虑根据厄米特测量在 $\mathcal{B}_N$ 中进行共轭相位恢复。

4.1. 在 $\mathcal{B}_N$ 中的共轭无相位厄米特采样与重建。

定理 4.1. 设 $\mathcal{B}_N$ 是 (1.2) 中的样条空间，其中 $N \geq 3$，且集合 Γ，Γ' 分别包含 $2N-1$ 个和 $2N-5$ 个 $(0, 1)$ 中互不相同的点。任意满足 (2.12) 和 (2.13) 的函数 $f \in \mathcal{B}_N$，均可由无相位厄米特样本 $|f(\gamma)|$，$\gamma \in \Gamma + \mathbb{Z}$ 和 $|f'(\gamma')|$，$\gamma' \in \Gamma' + \mathbb{Z}$ 确定，且仅相差一个模为一的常数及共轭。

我们指出，上述定理中共轭相位恢复的采样密度对于 $N \geq 3$ 为 $4N-6 \leq {}^{N\,(N+1)}_{2}$，参见由 $\mathbb{C}^N$ [25] 个实向量构成的 $4N-6$ 的一般共轭相位可恢复框架。

为证明定理 4.1，我们需要以下关于 $\mathbb{C}^N$中共轭相位恢复的引理，关于 [44]中多项式的共轭相位恢复，参见一个等价表述。不同于 [44], 中所使用的整函数的复方法，我们在本小节末尾提供一种基于 [18] 中共轭相位可恢复框架刻画的替代证明。

引理4.2。令 $\Gamma = \{\gamma_n, 1 \leq n \leq 2N-1\} \subset \mathbb{R}$ 和 $\Gamma' = \{\gamma'_n, 1 \leq n \leq 2N-5\} \subset \mathbb{R}$，以及 N 维实向量 $\psi_n = (1, \gamma_n, \gamma_n^2, \ldots, \gamma_n^{N-1})^T, 1 \leq n \leq 2N-1$, 以及$\tilde{\psi}_n = (0, 1, 2\gamma'_n, \ldots, (N-1)(\gamma'_n)^{N-2})^T, 1 \leq n \leq 2N-5$。则集合

$$\Psi = \{\psi_n, 1 \leq n \leq 2N-1\} \cup \{\tilde{\psi}_n, 1 \leq n \leq 2N-5\} \tag{4.1}$$

在 $\mathbb{C}^N$ 中是否具有共轭相位恢复性质。

定理 *4.1* 的证明。根据定理 2.1，只需证明 $\mathcal{B}_N$ 在区间 $I_j = (j,\ j+1)$ $j \in \mathbb{Z}$ 上局部具有共轭相位恢复性质。

注意，对于任意函数 $f \in \mathcal{B}_N$ 和 $j \in \mathbb{Z}$，其在区间 I_j 上的限制 $f|_{I_j}$ 是一个 $N-1$ 阶多项式。根据引理 4.2，可以通过无相位厄米特样本 $|f(\gamma)|$，$\gamma \in \Gamma + j$ 和 $|f'(\gamma')|$，$\gamma' \in \Gamma' + j$，在模为一的常数和共轭意义下确定函数 $f|_{I_j}$。由此得证。□

为了证明引理 4.2，我们回顾复值值域中共轭相位恢复的一种刻画，并给出一个关于复数唯一确定性的命题。

引理 4.3. [18] 设$\mathbf{A}^T = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_M) \subset \mathbb{R}^{M \times N}$是一个秩为 N 的矩阵，$\mathcal{N}_{\mathbf{A}}$ 表示由满足对所有 $1 \leq i \leq M$ 均有 $\mathrm{Tr}(\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{X}) = 0$ 的 $N \times N$ 阶实矩阵$\mathbf{X}$ 组成的集合，并且 $\mathbf{M}_{N,2}(\mathbb{R})$ 表示所有秩至多为 2、可写成如下形式的 $N \times N$ 阶实矩阵组成的集合:

$$\mathbf{M}_{N,2}(\mathbb{R}) = \{\Re(\mathbf{x}\mathbf{y}^*), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N\} = \{\Re(\mathbf{x}\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\mathbf{y}^*) + \Re(\mathbf{y}\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\mathbf{y}^*), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N\}.$$

那么，复值值域空间 $R_{\mathbb{C}}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^N\}$ 是共轭相位可恢复的，当且仅当 $\mathcal{N}_{\mathbf{A}} \cap \mathbf{M}_{N,2}(\mathbb{R})$ 中的所有矩阵 $\mathbf{X}$ 均为斜对称矩阵。

由于 $\Re(z\overline{z_0}) = \Re z\Re z_0 + \Im z\Im z_0$ 对任意 $z, z_0 \in \mathbb{C}$ 都成立，我们有

$$\Im z = \frac{\Re(z\overline{z_0}) - \Re z\Re z_0}{\Im z_0}$$

在满足 $\Im z_0 \neq 0$ 的条件下。因此，我们得到关于确定一个复数的以下结果。

命题4.4. 令 z_0 为一个复数，且满足 $\Im z_0 \neq 0$。然后可由 $\Re z$ 和 $\Re(zz_0)$ 唯一确定 z。

引理 *4.2* 的证明。 注意，对于任意 $\mathbf{x}$， $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$, $\Re(\mathbf{x}\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\mathbf{y}^*)$ 是对称的，而$\Re(\mathbf{y}\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\mathbf{y}^*)$ 是斜对称的。根据引理 4.3，我们的证明归结为证明

$$\mathrm{Tr}(\psi_n\psi_n^T\Re(\mathbf{x}\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\mathbf{y}^*)) = 0 \text{ for all } 1 \leq n \leq 2N-1 \tag{4.2}$$

and

$$\mathrm{Tr}(\tilde{\psi}_n\tilde{\psi}_n^T\Re(\mathbf{x}\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\mathbf{y}^*)) = 0 \text{ for all } 1 \leq n \leq 2N-5, \tag{4.3}$$

当且仅当

$$\Re(\mathbf{x}\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\mathbf{y}^*) = \mathbf{O}, \tag{4.4}$$

其中 $\mathbf{O}$ 是零矩阵。

充分性显然。现在证明必要性。对于向量 $\mathbf{s} = (s_0, \ldots, s_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$，用 $\mathbf{s}$表示其第 j 个分量，$\mathbf{s}j, 0 \leq j \leq N-1$， $\mathbf{s}' := (0, s_1, \ldots, (N-1)s_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$,~$\mathbf{s} := (s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{2N-1}$和

$$A_m(\mathbf{s}) := \sum_{j=0}^{m} \tilde{\mathbf{s}}_j\overline{\tilde{\mathbf{s}}_{m-j}},\ 0 \leq m \leq 2N-2,$$

并且我们有

$$(N-1)(N-2)A_{2N-3}(\mathbf{s}) = A_{2N-3}(\mathbf{s}') \text{ and } (N-1)^2A_{2N-2}(\mathbf{s}) = A_{2N-2}(\mathbf{s}'). \tag{4.5}$$

令$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$， $\mathbf{y} = (y_0, \ldots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$为满足（4.2）和（4.3）的向量。则有

$$\psi_n^T\Re(\mathbf{x}\mathbf{x}^*)\psi_n = \psi_n^T\Re(\mathbf{y}\mathbf{y}^*)\psi_n, 1 \leq n \leq 2N-1,$$

and

$$\tilde{\psi}_n^T\Re(\mathbf{x}\mathbf{x}^*)\tilde{\psi}_n = \tilde{\psi}_n^T\Re(\mathbf{y}\mathbf{y}^*)\tilde{\psi}_n, 1 \leq n \leq 2N-5.$$

展开上述等式，我们得到

$$\sum_{m=0}^{2N-2} A_m(\mathbf{x})\gamma_n^m = \sum_{m=0}^{2N-2} A_m(\mathbf{y})\gamma_n^m, 1 \leq n \leq 2N-1,$$

and

$$\sum_{m=2}^{2N-2} A_m(\mathbf{x}')(\gamma_n')^m = \sum_{m=2}^{2N-2} A_m(\mathbf{y}')(\gamma_n')^m, 1 \leq n \leq 2N-5.$$

结合多项式插值和 (4.5)，可知

$$A_m(\mathbf{x}) = A_m(\mathbf{y}) \text{ and } A_m(\mathbf{x}') = A_m(\mathbf{y}') \tag{4.6}$$

对于所有 $0 \leq m \leq 2N-2$。

如果 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$，那么我们可以很容易地由（4.6）得到 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$，从而（4.4）成立。现在假设 $\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 均为非零分量，x_{k_0} 和 y_{l_0} 分别是$\mathbf{x}$和 $\mathbf{y}$ 的第一个非零分量。由对所有 $0 \le k \le k_0$均有 $A_{2k}(\mathbf{x}) = A_{2k}(\mathbf{y})$，可得

$$k_0 = l_0 \text{ and } |x_{k_0}| = |y_{k_0}|.$$

若 $k_0 = N-1$，则（4.4）立即成立。现在考虑 $k_0 < N-1$ 的情形。不失一般性，假设

$$x_{k_0} = y_{k_0} > 0, \tag{4.7}$$

当 $\Re(e^{i\theta}\mathbf{x}e^{-i\theta}\mathbf{x}^*) = \Re(\mathbf{x}\mathbf{x}^*)$ 时。因此，对于 $\mathbf{s} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}'\}$，我们有

$$A_{2k_0+1}(\mathbf{s}) = 2s_{k_0}\Re s_{k_0+1}, \tag{4.8}$$

且对于 $2 \le k \le 2N - 2k_0 - 2$,

$$A_{2k_0+k}(\mathbf{s}) = \begin{cases} 2s_{k_0}\Re s_{k_0+k} + 2\Re\sum_{j=1}^{(k-1)/2} s_{k_0+j}\overline{s_{k_0+k-j}} & k \text{ is odd} \\ 2s_{k_0}\Re s_{k_0+k} + 2\Re\sum_{j=1}^{k/2-1} s_{k_0+j}\overline{s_{k_0+k-j}} + |s_{k/2}|^2 & k \text{ is even.} \end{cases} \tag{4.9}$$

接下来，我们将证明由（4.6）可得

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ or } \mathbf{x} = \overline{\mathbf{y}}. \tag{4.10}$$

情形 1： $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$。

在此情形下，（4.10）成立当且仅当

$$y_{k_0+l} = x_{k_0+l} \in \mathbb{R} \text{ for all } 1 \le l \le N-1-k_0, \tag{4.11}$$

当且仅当

$$x_{k_0+l} = \Re y_{k_0+l} \text{ and } |x_{k_0+l}| = |y_{k_0+l}|, \text{ for all } 1 \le l \le N-1-k_0. \tag{4.12}$$

现在我们通过归纳法证明（4.11）。

对于 $l = 1$，根据 (4.7)-(4.9)，我们有 $x_{k_0+1} = \Re y_{k_0+1}$ 从 $A_{2k_0+1}(\mathbf{x}) = A_{2k_0+1}(\mathbf{y})$，以及线性系统

$$\begin{cases} 2x_{k_0}(x_{k_0+2} - \Re y_{k_0+2}) + (|x_{k_0+1}|^2 - |y_{k_0+1}|^2) = 0 \\ 2k_0(k_0+2)x_{k_0}(x_{k_0+2} - \Re y_{k_0+2}) + (k_0+1)^2(|x_{k_0+1}|^2 - |y_{k_0+1}|^2) = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

由 $A_{2k_0+2}(\mathbf{x}) = A_{2k_0+2}(\mathbf{y})$和 $A_{2k_0+2}(\mathbf{x}') = A_{2k_0+2}(\mathbf{y}')$。这意味着 $x_{k_0+2} = \Re y_{k_0+2}$ 和 $|x_{k_0+1}| = |y_{k_0+1}|$。于是 (4.12) 成立，从而 (4.11) 对 $l = 1$ 成立。

归纳地，我们假设 白小姐

$$x_{k_0+k} = y_{k_0+k} \in \mathbb{R} \text{ holds for all } k < n. \tag{4.14}$$

若 $n \ge N - k_0$，归纳证明即告完成。否则 $n < N - k_0$。由 (4.9) 以及 $A_{2k_0+k}(\mathbf{y}) = A_{2k_0+k}(\mathbf{x})$ $k \le n$，可得 (4.14)

$$\Re y_{k_0+k} = x_{k_0+k}, k \le n. \tag{4.15}$$

那么，对于 $n < k \le 2n-1$，根据 (4.9)、(4.14)、(4.15) 和 $A_{2k_0+k}(\mathbf{x}) = A_{2k_0+k}(\mathbf{y})$，我们由 $\Re y_{k_0+k} = x_{k_0+k}$ 得到。因此，通过与 (4.13) 中类似的论证，我们得到

$$|x_{k_0+n}| = |y_{k_0+n}| \text{ and } x_{k_0+2n} = \Re y_{k_0+2n},$$

由 $A_{2k_0+2n}(\mathbf{x}) = A_{2k_0+2n}(\mathbf{y})$和 $A_{2k_0+2n}(\mathbf{x}') = A_{2k_0+2n}(\mathbf{y}')$，结合 (4.15)，我们得到 (4.12)，从而 (4.11) 对 $l = n$ 成立。我们的归纳证明可以继续进行，因此 (4.10) 成立。

情形 2: $\Im x_k \neq 0$ 对于某个 $k_0 < k \leq N-1$。

令 k_1 为满足 $\Im c_{k_1} \neq 0$ 的第一个条目。沿用情形 1 中的类似论证，我们得到。

$$x_k = y_k \in \mathbb{R} \text{ 对于所有 } k_0 \leq k < k_1, \ |x_{k_1}| = |y_{k_1}| \text{ 且对于所有 } k_1 \leq k \leq 2k_1 - k_0, \text{ 这意味着 } x_{k_1} = y_{k_1} \text{ 或 } x_{k_1} = y_{k_1}. \text{ 于是，对于 } \mathbf{s} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}'\}, \text{ 我们有} \tag{4.16}$$

$$A_{2k_1+k}(\mathbf{s}) = \begin{cases} \tilde{A}(\mathbf{s},k) + 2\Re\sum_{j=1}^{(k-1)/2} s_{k_1+j}\overline{s_{k_1+k-j}} & k \text{ is odd} \\ \tilde{A}(\mathbf{s},k) + 2\Re\sum_{j=1}^{k/2-1} s_{k_1+j}\overline{s_{k_1+k-j}} + |s_{k_1+k/2}|^2 & k \text{ is even,} \end{cases} \tag{4.17}$$

其中

$$\tilde{A}(\mathbf{s},k) = 2s_{k_0}\Re s_{2k_1-k_0+k} + \ldots + 2s_{k_1-1}\Re s_{k_1+k+1} + 2\Re s_{k_1}\overline{s_{k_1+k}}$$

对所有 $2 \leq k \leq 2N - 2k_1 - 2$。

对于 $x_{k_1} = y_{k_1}$ 的情形，(4.10) 成立当且仅当

$$y_{k_1+l} = x_{k_1+l} \text{ for all } 1 \leq l \leq N-1-k_1. \tag{4.18}$$

对于 $l = 1$，根据 (4.16)、(4.17)、$A_{2k_1+1}(\mathbf{x}) = A_{2k_1+1}(\mathbf{y})$和 $A_{2k_1+1}(\mathbf{x}') = A_{2k_1+1}(\mathbf{y}')$，我们有

$$\begin{cases} x_{k_0}\Re(x_{2k_1-k_0+1} - y_{2k_1-k_0+1}) = \Re(y_{k_1}\overline{x_{k_1+1}} - x_{k_1}\overline{x_{k_1+1}}) \\ k_0(2k_1-k_0+1)x_{k_0}\Re(x_{2k_1-k_0+1} - y_{2k_1-k_0+1}) = k_1(k_1+1)\Re(y_{k_1}\overline{x_{k_1+1}} - x_{k_1}\overline{x_{k_1+1}}), \end{cases} \tag{4.19}$$

这意味着

$$\Re(x_{k_1}\overline{x_{k_1+1}}) = \Re(y_{k_1}\overline{y_{k_1+1}}) \text{ and } \Re x_{2k_1-k_0+1} = \Re y_{2k_1-k_0+1}.$$

结合 (4.16) 和命题 4.4，可得 (4.18) 成立。归纳地，假设

$$x_{k_1+l} = y_{k_1+l} \text{ holds for all } l < n. \tag{4.20}$$

若 $n \geq N - k_1$，则归纳证明完成。否则 $n < N - k_1$。然后从 $l = 2$到 n，通过与 (4.19) 中类似的论证，我们有

$$\Re x_{2k_1-k_0+l} = \Re y_{2k_1-k_0+l} \text{ and } \Re(x_{k_1}\overline{x_{k_1+n}}) = \Re(y_{k_1}\overline{y_{k_1+n}}), \tag{4.21}$$

依次由 (4.16)、(4.17)、(4.20)、$A_{2k_1+l}(\mathbf{y}) = A_{2k_1+l}(\mathbf{x})$ 以及 $A_{2k_1+l}(\mathbf{y}') = A_{2k_1+l}(\mathbf{x}')$ 得到。这证明由命题 4.4，(4.18) 对 $l = n$ 成立。我们的归纳证明可以继续进行。

通过类似的论证，我们有

$$y_{k_1+l} = \overline{x_{k_1+l}}, \text{ for all } 1 \leq l \leq N-1-k_1,$$

若 $x_{k_1} = \overline{y_{k_1}}$。结合 (4.18)，这证明了 (4.10)。 □

4.2. 重建算法和数值实验。 设 ψ 是一个 $N-1$ 阶的实值紧支撑可微分分段多项式，其支撑长度为 N，并满足 (2.1)、(2.7)、(2.12) 和 (2.13)。记 $\mathcal{P}_{N-1}$ 为阶数不大于 $N-1$ 的多项式空间。假设 ψ 在 (0，1) 上具有局部线性无关性，并且对于任意 $I_j = (j, \ j+1)$ $j \in \mathbb{Z}$，存在从 $V(\psi)|_{I_j}$ 到 $\mathcal{P}_{N-1}$ 的一一对应关系。本节基于引理 4.2 的构造性证明，提出一种在 $V(\psi)$ 中进行共轭相位恢复的算法。我们

注意，该算法可应用于由实框架向量构成的 $\mathbb{C}^N$ 中的共轭相位恢复，如 (4.1) 所示。

算法1 $V(\psi)$中的分段多项式共轭相位恢复

输入：阶数 N，采样集 $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^{2N-2} \subset (0,1)$ 和 $\Gamma' = \{\gamma'_k\}_{k=0}^{2N-6} \subset (0,1)$，无相位测量 $|f(\gamma+j)|, \gamma \in \Gamma$，以及 $|f'(\gamma'+j)|, \gamma' \in \Gamma', j \in \mathbb{Z}$。初始步骤：计算范德蒙德矩阵 $\mathbf{V}_\Gamma = (\gamma_k^m)_{0\le k,m\le 2N-2}$ 和 $\mathbf{V}_{\Gamma'} = (\gamma_k'^m)_{0\le k,m\le 2N-6}$。对于任意 $j \in \mathbb{Z}$，设向量 $\mathbf{d}j = (d_j,0, d_j,1, ..., d_j,N-1) \in \mathbb{C}^N$、$\mathbf{d}'_j = (0, d_j,1, ..., (N-1)d_j,N-1) \in \mathbb{C}^N$ 以及 $\boldsymbol{\psi}_j(x) = (\psi(x-j+N-1)\ldots, \psi(x-j))^T$，并计算可逆矩阵 $\mathbf{H}j$，使得 $\boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{H}j(1, x\ldots, x^{N-1})^T$。

步骤：

1). **在** $I_j = (j, j+1)$**上进行局部共轭相位恢复**。

(1a). 通过 Vandermonde 矩阵 $\mathbf{V}_\Gamma$、$\mathbf{V}_{\Gamma'}$ 的逆矩阵以及无相位样本 $|f(\gamma+j)|, \gamma \in \Gamma$ 和 $|f'(\gamma'+j)|, \gamma' \in \Gamma'$，确定 $A_m(\mathbf{d}j)\ 0 \le m \le 2N-2$、$A_m(\mathbf{d}'_j)\ 2 \le m \le 2N-2$。

(1b). 找到第一个满足 $A_{2k_0}(\mathbf{d}j) \neq 0$ 的 k_0，并令

$$d_{j,k_0} = \sqrt{A_{2k_0}(\mathbf{d}_j)} \in \mathbb{R}^+.$$

对于 $1 \le l \le k_0 + N - 1$，由 $A_{2k_0+l'}(\mathbf{d}j)$ 和 $A_{2k_0+l'}(\mathbf{d}'_j)$ 确定 $\Re d_{j,k_0+l}$ 和 $|d_{j,k_0+l}|$，$1 \le l' \le 2l$。

(1c). 找到第一个满足 k_1 使得 $|\Re d_{j,k_1}| \neq |d_{j,k_1}|$ 的条目，并设置

$$d_{j,k_1} = \Re d_{j,k_1} + i\sqrt{|d_{j,k_1}|^2 - \Re d_{j,k_1}^2}.$$

对于 $1 \le l \le N - k_1 - 1$，确定$\Re d_{j,\ k_1} d_{j,\ \overline{k_1+l}}$和$\Re d_{j,\ k_1+l}$ 根据 $A_{2k_0+l'}(\mathbf{d}'_j)$和$A_{2k_0+l'}(\mathbf{d}j)$、$l' \le 2k_1 - 2k_0 + l$，并设置

$$d_{j,k_1+l} = \Re d_{j,k_1+l} + i\frac{\Re d_{j,k_1}\overline{d_{j,k_1+l}} - \Re d_{j,k_1}\Re d_{j,k_1+l}}{\Im d_{j,k_1}}.$$

(1d). 令 $\tilde{\mathbf{c}}j = \mathbf{H}_j^{-1}\mathbf{d}j$，并写作 $f_\epsilon|_{I_j}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_j^T\boldsymbol{\psi}_j(x)$】【。

2). **在相邻区间之间拼接系数** 令 $\tilde{\mathbf{c}}j_0$ 为一个非零向量，满足 $\Im(\tilde{c}_{j_0,k_1}\tilde{c}_{j_0,k_2}) \neq 0$ 对于某个 $1 \le k_1 \le k_2 \le N-2$。定义 $c_\epsilon(j_0 - N + k + 1) = \tilde{c}_{j_0,k}$ 对于所有 $0 \le k \le N-1$。

(2a). 对于任意 $j \ge j_0$，求满足 $\Im\tilde{c}_{j,k_1}\tilde{c}_{j,k_2} \neq 0$ 的项 $1 \le k_1, k_2 \le N-1$。适当调整 $\tilde{\mathbf{c}}j+1$ 的相位和共轭，使其为 $\mathbf{c}j+1$，从而使向量 $(c_{j+1,k_1-1}, c_{j+1,k_2-1})$ 满足

$$(c_{j+1,k_1-1}, c_{j+1,k_2-1}) = (\tilde{c}_{j,k_1}, \tilde{c}_{j,k_2})$$

并令 $c_\epsilon(j+1) = c_{j+1,N-1}$.

(2b). 对于任意 $j \le j_0$，求满足 $\Im\tilde{c}_{j,k_1}\tilde{c}_{j,k_2} \neq 0$ 的项 $0 \le k_1, k_2 \le N-2$。适当调整 $\tilde{\mathbf{c}}j-1$ 的相位和共轭，使其为 $\mathbf{c}j-1$，从而使向量 $(c_{j-1,k_1+1}, c_{j-1,k_2+1})$ 满足

$$(c_{j-1,k_1+1}, c_{j-1,k_2+1}) = (\tilde{c}_{j,k_1}, \tilde{c}_{j,k_2})$$

并设置 $c_\epsilon(j-N) = c_{j-1,0}$.

输出： $f_\epsilon(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_\epsilon(k)\psi(x-k)$.

我们指出，上述算法的数值稳定性不佳，因为范德蒙德矩阵的逆在数值上不稳定[30]。接下来，我们将展示上述算法在重构可微函数方面的表现。

$$f(t) = \sum_{k=K_1}^{K_2} c_k \psi(t-2k) \tag{4.22}$$

具有有限持续时间，其中

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{if } 0 \le t < 2 \\ -t^2 + 3t & \text{if } 2 \le t < 4 \\ \frac{1}{2}t^2 - 3t & \text{if } 4 \le t < 6 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们的含噪无相位样本取自 (0,2) $+ 2\mathbb{Z}$,

$$z_\epsilon(\gamma) = |f(\gamma)|^2 + \|f\|_\infty^2 \epsilon(\gamma) \ge 0, \gamma \in \Gamma + 2\mathbb{Z} \subset (0,2) + 2\mathbb{Z} \tag{4.23}$$

and

$$z'_\epsilon(\gamma) = |f'(\gamma)|^2 + \|f\|_\infty^2 \epsilon(\gamma) \ge 0, \gamma \in \Gamma' + 2\mathbb{Z} \subset (0,2) + 2\mathbb{Z}, \tag{4.24}$$

其中，集合 Γ, Γ' 分别包含 (0, 2) 中的 7 个和 3 个不同点， $\epsilon(\gamma) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$是在噪声水平为 $\varepsilon > 0$ 时随机选取的。将算法1根据含噪无相位样本 (4.23) 和 (4.24) 重建的函数记为

$$f_\epsilon(t) = \sum_{k=K_1}^{K_2} c_\epsilon(k)\psi(t-2k). \tag{4.25}$$

图1展示了通过算法1，从式（4.23）—（4.24）中的含噪无相位样本重构函数的性能。

References

[1] R. Alaifari、I. Daubechies、P. Grohs 和 G. Thankur，从关于小波及其他框架的无符号系数重构实值函数。 *J. Fourier Anal. Appl.*，**23**（2017），1480-1494。[2] R. Alaifari、I. Daubechies、P. Grohs 和 R. Yin，无限维中的稳定相位恢复。*Found. Comput. Math.*，**19**（2019），869-900。[3] R. Alaifari 和 P. Grohs，Banach 空间连续框架一般情形下的相位恢复。 *SIAM J. Math. Anal.*，**49**（2017），1895-1911。[4] A. Aldroubi 和 K. Gr¨ochenig，平移不变空间中的非均匀采样。 *SIAM Rev.*，**43**2001 585 620（），-。[5] A. Aldroubi、Q. Sun 和 W.-S. Tang，平移不变空间中的卷积、平均采样与恒等算子的 Calderón 分解。 *J. Fourier Anal. Appl.*，**11**（2005），215-244。[6] B. Alexeev、A. S. Bandeira、M. Fickus 和 D. G. Mixon，利用偏振进行相位恢复。 *SIAM J. Imaging Sci.* **7** 2014 35 66 ，

（），-。[7] R. Balan，从冗余表示的模中重构信号：复数情形。 *Found. Comput. Math.*，**16**（2016），677-721。[8] R. Balan、B. G. Bodmann、P. G. Casazza 和 D. Edidin，从框架系数的模中进行无痛重构。 *J. Fourier Anal. Appl.*，**15**（2009），488-501。

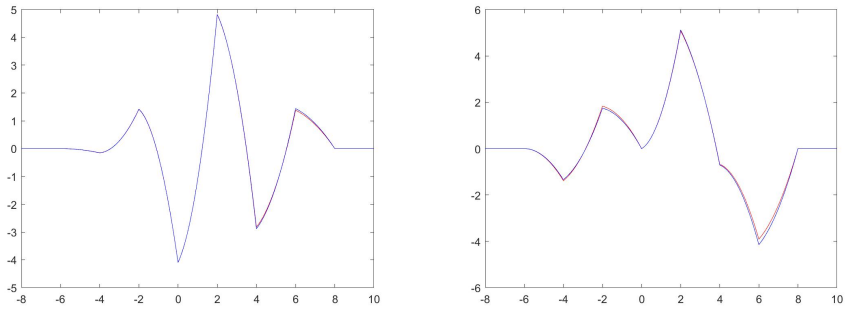


FIGURE 1. 左侧绘制的是原始信号的实部 $\Re f$（蓝色）和构造信号的实部 $\Re f_\epsilon$（红色），右侧绘制的是通过算法1得到的原始信号的虚部 $\Im f$（蓝色）和构造信号的虚部 $\Im f_\epsilon$（红色），且 $\max_k |\Re(c_k - c_\epsilon(k))/\Re c_k| = 0.0429$ 和 $\max_k |\Im(c_k - c_\epsilon(k))/\Im c_k| = 0.0611$，其中 $\varepsilon = 10^{-5}$、$K_1 = -3$、$K_2 = 1$ 和 $\Re c_k$，$\Im c_k \in [-1, 1]$，$-3 \le k \le 1$ 是随机选取的。

[9] R. Balan、P. G. Casazza 和 D. Edidin，不借助相位的信号重构。

Appl. Comput.，（），-。

Harmon. Anal. **20** 2006 345 356

[10] A. S. Bandeira、J. Cahill、D. G. Mixon 和 A. A. Nelson，挽救相位：相位恢复的单射性与稳定性。*Appl. Comput. Harmon. Anal.*，37（2014），106-125。[11] T. Bendory 和 D. Edidin，相位恢复的代数理论。*Noti. Am. Math. Soc.*，69（2022），1487-1495。[12] J. Cahill、P. G. Casazza 和 I. Daubechies，无限维希尔伯特空间中的相位恢复。*Trans. Am. Math. Soc.*，*Ser.B*，3（2016），63-76。[13] J. Cahill、P. G. Casazza、J. Peterson 和 L. Woodland，通过投影进行相位恢复。

Houston J.，（），-。

Math. **42** 2016 537 558

[14] E. J. Cand`es、Y. C. Eldar、T. Strohmer 和 V. Voroninski，通过矩阵补全进行相位恢复。*SIAM Rev.*，52（2015），225-251。[15] E. J. Cand`es、T. Strohmer 和 V. Voroninski，PhaseLift：通过凸规划从幅值测量中实现精确且稳定的信号恢复。*Commun. Pure Appl. Math.*，66（2013），1241-1274。[16] T. Chen 和 W. Sun，具有任意节点的样条空间中函数的线性无相位检索。*IEEE Trans. Inf. Theory*，68（2022），1385-1396。[17] Y. Chen、C. Cheng、Q. Sun 和 H. Wang，平移不变空间中实值信号的相位恢复。*Appl. Comput. Harmon. Anal.*，49（2020），56-73。[18] Y. Chen、C. Cheng 和 Q. Sun，复值函数与向量值函数的相位恢复。

J. Funct.，（），。

Anal. **283** 2022 109593

[19] C. Cheng、I. Daubechies、N. Dym 和 J. Lu，从局部稳定且条件连通的测量中进行稳定相位恢复。*Appl. Comput. Harmon. Anal.*，55（2021），440-465。[20] C. Cheng、J. Jiang 和 Q. Sun，平移不变空间中实值信号的无相位采样与重构。*J. Fourier Anal. Appl.*，25（2019），1361-1394。[21] C. Cheng 和 Q. Sun，具有有限创新率的实值信号的稳定无相位采样与重构。*Acta Appl. Math.*，171（2021），3。[22] C. de Boor、R. A. Devore 和 A. Ron，L^2中的有限生成平移不变空间的结构$\mathbb{R}^d$。*J. Funct. Anal.*。119（1992），37-38。[23] D. Domel-White 和 B. G. Bodmann，通过二元问题进行相位恢复：哪个互补子空间更接近? *Constr. Approx.* **56**（2022），1-33。[24] D. Edidin，投影与相位恢复。*Appl. Comput. Harmon. Anal.*，42（2017），350-359。

[25] L. Evans 和 C.-K. Lai，利用实向量进行共轭相位恢复。 *Linear Algebra Appl.*, 587 2020 45 69( ), - . [26] J. Fageot、S. Aziznejad、M. Unser 和 V. Uhlmann，埃尔米特样条的支撑与逼近性质。 *J. Comput. Appl. Math.*, 368(2020), 112503. [27] J. R. Fienup，根据物体傅里叶变换的模重构物体。

Optim. Lett. ( ), - . [28] J. R.

3 1978 27 29
Fienup，相位恢复算法：比较。 *Appl. Optim.* **21**(1982), 2758-2769. [29] B. Gao、Q. Sun、Y. Wang 和 Z. Xu，根据仿射线性测量的模进行相位恢复。 *Adv. Appl. Math.*, 93(2018), 121-141. [30] W. Gautschi，范德蒙德系统有多不稳定？ *Asymptot. Comput. Anal.*, 2020. [31] K. Gr

¨

J. Fourier Anal. ochenig，具有

Appl. **26** 2020 52
高斯生成元的平移不变空间中的相位恢复。( ), . [32] K. Gr¨ochenig、J. L. Romero 和 J. St¨ockler，平移不变空间、Gabor框架和全正函数的采样定理。 *Invent. math.*, 211(2018), 1119-1148. [33] M. H. Hayes、J. S. Lim 和 A. V. Oppenheim，根据相位或模进行信号重构。*IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, 28(1980), 672-680. [34] K. Huang、Y. C. Eldar 和 N. D. Sidiropoulos，根据一维傅里叶测量进行相位恢复：凸性、唯一性与算法。 *IEEE Trans. Signal Process.*, 64(2016), 6105-6117. [35] M. A. Iwen、A. Viswanathan 和 Y. Wang，根据局部相关测量快速进行相位恢复。 *SIAM J. Imaging Sci.*, 9(2016), 1655-1688. [36] D. L. Jagerman 和 L. J. Fogel，采样定理的一些一般方面。

IRE Trans. Inf. , ( ), - . [37] B.

Theory **2** 1956 139 146
Jackson 和 T. Jord

´

J. Comb. an，连通刚性拟

Theory Ser. B **94** 2005 1 29
阵与图的唯一实现，, ( ), - . [38] P. Jaming 和 M. Rathmair，三次测量下相位恢复的唯一性。arXiv: 2205.08753.[39] M. V. Klibanov 和 P. E. Sacks，无相位逆散射与光学中的相位问题。

J. , ( ), - . [40]

Math. Phys. **33** 1992 3813 3821
C.-K. Lai、F. Littmann 和 E. S. Weber，Paley-Wiener空间中的共轭相位恢复。

J. , ( ), . [41] Y. Li

Fourier Anal. Appl. **27** 2021 89
和 W. Sun，平移不变空间中因果信号的随机无相位采样：零点分布视角。 *IEEE Trans. Signal Process.*, 68(2020), 5473-5486. [42] S. Mallat， *A wavelet tour of signal processing: The sparse way*。Academic Press, 2009. [43] S. Mallat 和 I. Waldspurger，柯西小波变换的相位恢复。

J. Fourier Anal. ( ), - . [44] J. N.

Appl. **21** 2015 1251 1309
McDonald，整函数的相位恢复与模恢复。 *J. Fourier Anal. Appl.*, 10 2004 259 267 ( ), - . [45] R. P. Millane，晶体学与光学中的相位恢复。 *J. Opt. Soc. Am. A.*, 7(1990), 394-411. [46] M. S. Mummy，利用 *B*-样条进行埃尔米特插值。 *Comput. Aided Geom. Des.*, 6(1989), 177-179. [47] V. Pohl、F. Yang 和 H. Boche，利用结构化调制在无限维空间中进行无相位信号恢复。 *J. Fourier Anal. Appl.*, 20(2014), 1212-1233. [48] T. Qiu、P. Babu 和 D. P. Palomar，PRIME：通过主化-最小化进行相位恢复。 *IEEE*

Trans. Signal Process. **64** 2016 5957 5969 , ( ), - . [49] J. L.

Romero，具有全正生成元的平移不变空间中的符号恢复。

J. Fourier , ( ), . [50] B. A.

Anal. Appl. **27** 2021 27
Shenoy、S. Mulleti 和 C. S. Seelamantula，主平移不变空间中的精确相位恢复。 *IEEE Trans. Signal Proc.*, 64(2016), 406-416. [51] Q. Sun，平移不变空间采样的局部重构。 *Adv. Comput. Math.*, 32(2010), 335-352.[52] W. Sun，实样条空间中的局部与全局无相位采样。 *Math. Comput.*, 90(2021), 1899-1929.[53] A. Tahir、J. B¨oling、M.-H. Haghbayan、H. T. Toivonen 和 J. Plosila，无人机群——综述。 *J. Ind. Inf. Integr.*, 16(2019), 100-106.

[54] G. Thakur, 《从无符号采样中重建带限函数》. *J. Fourier Anal. Appl.*, **17**2011年 720 732（），-.
[55] Y. Wang 和 Z. Xu, 《稀疏信号的相位恢复》。 *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **37**（2014年），531-544。[56] Y. Wang 和 Z. Xu, 《广义相位恢复：测量数量、矩阵恢复及其他》。 *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **45**（2019），423-446。[57] Z. Xu, 《相位恢复：理论、模型与算法》。 *Mathematica Numerica Sinica*, **44**（2022年），1-18。
Chen and Wang: Key Laboratory of Computing and Stochastic Mathematics (Ministry of Education) School of Mathematics and Statistics Hunan Normal University Chang-，，，，，sha Hunan 410081 P. R. China
Email address: Chen：ychenmath@hunnu.edu.cn, Wang：ynwang163@163.com