arXiv:2304.06215v2 [math.RT] 4 Jan 2024

量子仿射正交辛超代数的振子表示

JAE-HOON KWON、SIN-MYUNG LEE 和 MASATO OKADO

Abstract. 我们在类型 D 的量子仿射超代数上引入一类 q 振子表示，并构造出一族新的不可约表示。受超对偶理论启发，我们证明，这些不可约表示在正合幺半函子作用下，自然地插值于类型 $X_n^{(1)}$ 的不可约 q振子表示与类型 $Y_{(1)n}$ 的有限维不可约表示，其中 $(X,Y) = (C,D)$、(D,C)。这可以视为量子（非扭曲）仿射情形下的对应关系：它对应于由 Howe约化对偶对 $(\mathfrak{g}, G)$ 所导出的经典李代数不可约振子表示与不可约有限维表示之间的对应关系，其中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$、$\mathfrak{so}_{2n}$ 以及 $G = O_\ell$、$Sp_{2\ell}$。

1. Introduction

1.1. Howe对偶是一项原理，它为经典不变量理论 [9, 10], 的第一基本定理提供了一种表示论方法，并在表示论中发挥了重要作用，具有多种应用和推广。一般而言，它由一个Fock空间 $\mathcal{F}$ 给出，该空间带有李（超）代数 $\mathfrak{g}$与经典群 G构成的约化对偶对（$\mathfrak{g}$， G）的作用；二者互为中心化子，因此在 $\mathcal{F}$中的 $\mathfrak{g}$ 与 G 的不可约表示之间建立一一对应关系。

如果同一个 G在 $\mathcal{F}$上存在两个对偶（$\mathfrak{g}$， G），在 $\mathcal{F}'$ 上存在两个对偶（$\mathfrak{g}'$， G），那么这便在 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}'$ 的不可约表示之间建立对应关系；这些表示对应于 G的同一个不可约表示，并解释了由它们生成的两个半单张量范畴之间的相似性（各种对偶对的示例见 [6] 及其中的参考文献）。

特别是，这使我们能够阐明这样一种强烈的类比：利用 Clifford代数的自旋表示构造的经典李代数表示，与利用 Weyl代数的振子表示构造的经典李代数表示之间存在强烈的类比。例如，$\mathfrak{sp}_{2n}$、O_ℓ在$S(\mathbb{C}^n)^{\otimes \ell}$ 上的对偶对，以及$\mathfrak{so}_{2n}$、O_ℓ在 $\Lambda(\mathbb{C}^n)^{\otimes \ell}$ 上的对偶对，建立了 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 的无限维不可约表示（称为振子表示）与 $\mathfrak{so}_{2n}$ 的有限维不可约表示（称为振子表示）之间的对应关系。$\mathfrak{so}_{2n}$、$Sp_{2\ell}$在 $S(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2\ell}$ 上的对偶对，以及$\mathfrak{sp}_{2n}$、$Sp_{2\ell}$在 $\Lambda(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2\ell}$ 上的对偶对，则建立了类似的对应关系，只是李代数的类型互换。

J.-H.Kwon 和 S.-M.Lee 得到了韩国政府（MSIT）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（编号：2020R1A5A1016126）的支持。S.-M.Lee 还部分得到了韩国高等研究院 KIAS 个人项目（MG095001）的支持。M.Okado 得到了 JSPS KAKENHI 项目（编号：JP19K03426）的支持。本研究部分得到了大阪中央高级数学研究所（MEXT 数学与理论物理联合使用/研究中心，JPMXP0619217849）的支持。1

分别地， $S(\mathbb{C}^n)$和 $\Lambda(\mathbb{C}^n)$表示由 $\mathbb{C}^n$生成的对称代数和外代数。

此外，包括上述例子在内的这类联系，可以作为一种更一般的等价关系——超对偶——的特例推导出来；这种等价关系存在于无限秩经典李代数的两个抛物 BGG 范畴之间。在这一等价关系中，另一个无限秩李超代数的抛物 BGG 范畴在更直接的意义上对这两个范畴进行插值，此时与 G 的有限维表示之间的对偶已不再存在。

1.2. 本文旨在沿着不同方向推广经典李代数不可约振子表示与有限维表示之间的对应关系，将其推广到量子仿射代数上的非半单范畴。我们考虑对偶对（$\mathfrak{g}, G$），其中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{so}_{2n}$ 和 $G = O_\ell, Sp_{2\ell}$，并将这些情形推广到类型为 $X_n^{(1)}$（$X = C, D$）的非扭量子仿射代数 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$；其中， $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$是与仿射李代数$\hat{\mathfrak{g}}$相联系的 Drinfeld-Jimbo 量子仿射代数（不含导子）。

有限维 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-模的理论具有丰富的结构，近几十年来得到了长足发展。该领域近年来取得的最引人注目的成果之一是，关于（归一化） R 矩阵奇异性的信息，能够通过量子簇代数的幺半范畴化 [8, 17, 18]，加深我们对有限维 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-模范畴的理解。

这项工作受到了 [25], 的启发，其中首次观察到 q-振子表示与量子仿射代数上的有限维表示之间的类比：类型为 $C_n^{(1)}$ [20] 的两个 q-振子表示的张量积上 R 矩阵的谱分解，与类型为$D_n^{(1)}$ [31] 的两个自旋表示的张量积的谱分解相一致（除去经典不可约分量）。基于这一观察，人们猜想存在一类更一般的类型为 $C_n^{(1)}$的 q-振子表示，它们对应于类型为 $D_n^{(1)}$的有限维表示，并且还对应于其他类型为 A以外的量子仿射（超）代数的其他配对。类型为 A 的情形已在[23]中研究过。

最近在 [32], 中获得了对偶对（$\mathfrak{g}$， G）的 q类比，其中G 的作用被与 G的李代数相关联的 ι量子群的作用所取代；该量子群是在量子对称对 [26]的研究中引入的。然而，由于 ι量子群不是霍普夫代数，我们不考虑 [32] 的仿射类比，而是研究量子仿射超代数的表示；这些表示更直接地插值了 $C_n^{(1)}$型和 $D_n^{(1)}$型量子仿射代数的表示，正如有限型超对偶理论中所体现的那样。

我们考虑类型为 D 的量子仿射超代数 $\mathcal{U}(\epsilon)$（更确切地说，是 [35]中的 DD型），其中 $\epsilon = (\epsilon_i)$是由0 和 1组成的有限序列，表示正交辛李超代数的正根基本系。在此，我们使用由 [21], 提出的量子仿射超代数的另一版本，并将其称为仿射型 D 广义量子群。

本文的主要结果是构造一个 $\mathcal{U}(\epsilon)$-模范畴和一族不可约表示，它们自然对应于 $X_n^{(1)}$($X = C, D$) 型有限维表示。通过利用 $X_n^{(1)}$ 型量子仿射代数在 $\mathcal{U}(\epsilon)$ 中的同态像，我们还定义了一个 $X_n^{(1)}$ 型无限维表示范畴，并构造了一族不可约表示；这些表示可视为由 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 和 $\mathfrak{so}_{2n}$ 的 q 变形振子表示生成的半单范畴的仿射类比。我们指出，所有这些范畴及其不可约对象都是以统一的方式构造的。作为一个推论，我们证明，在某些正合幺半函子作用下，$C_n^{(1)}$ 型（分别为 $D_n^{(1)}$ 型）不可约 q-振子表示与 $D_n^{(1)}$ 型（分别为 $C_n^{(1)}$ 型）有限维不可约表示，由该范畴中的不可约 $\mathcal{U}(\epsilon)$-模插值；在超对偶中，这些函子称为截断。

本文的所有结果都可以通过仿射型 C 的广义量子群（或 [35]中的 CC 型）得到（见第8.3节）。

1.3. 下面我们将更详细地解释我们的结果。首先考虑 q 型振子表示和 D 型有限维表示的情形。

令 $\boldsymbol{\epsilon} = (1, 0, \ldots, 0, 1)$ 为长度为 $n = 2m + 1$ 的交替序列，并令 $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$（分别为 $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}$）表示通过移除所有 1（分别为 0）而从 $\boldsymbol{\epsilon}$ 得到的子序列。我们注意到，存在自然的代数同态 ϕ_ϵ：$\mathcal{U}_\epsilon \longrightarrow \mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ ($\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$)，其中我们令 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathcal{U}(\boldsymbol{\epsilon})$、$\mathcal{U}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} = U_q(C_m^{(1)})$，并令 $\mathcal{U}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} = U_{\tilde{q}}(D_{m+1}^{(1)})$，其中 $\widetilde{q} = -q^{-1}$。

令 $\mathcal{W}_\epsilon$ 为由超空间生成的对称代数的一个 q 类比，其基由 ϵ ($\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}, \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$) 参数化，且带有 $\mathbb{Z}_2$ 分次，其中我们将 $\mathcal{W}_\epsilon \subset \mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 视为 $\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$。我们在 $\mathcal{W}_\epsilon$ ($\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}, \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$) 上定义一个带谱参数 x 的 $\mathcal{U}_\epsilon$-模结构，记作 $\mathcal{W}_\epsilon(x)$，其中 $\mathcal{U}_\epsilon$ ($\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$) 的作用通过 ϕ_ϵ 给出。注意，$\mathcal{W}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(x)$ 是 $\mathfrak{sp}_{2m}$ 的振子表示的一个 q 类比，而 $\mathcal{W}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(x)$ 是 $\mathfrak{so}_{2m+2}$ 型的两个自旋表示 $\mathcal{W}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\pm}(x)$ 之和。我们证明，$\mathcal{W}_\epsilon(x)^{\otimes \ell}$ 作为有限型子代数 $\mathring{\mathcal{U}}_\epsilon$ 上的模是半单的，并对 $\ell \geq 1$ 的情形，分类 $\mathcal{W}_\epsilon(x)^{\otimes \ell}$ 中的不可约 $\mathring{\mathcal{U}}_\epsilon$-模；这些模生成一个半单张量范畴 $\mathcal{O}_{\mathrm{osc},\epsilon}^{\mathfrak{c}}$。$\mathcal{O}_{\mathrm{osc},\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\mathfrak{c}}$ 中的不可约表示是一个 C_m 型振子表示的 q 类比，且具有相同的最高权；而 $\mathcal{O}_{\mathrm{osc},\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\mathfrak{c}}$ 中的不可约表示则是 D_{m+1} 型有限维表示。

“ ◦现在我们定义 $\mathcal{O}_{\mathrm{osc},\epsilon}^{\mathfrak{c}}$ 为 $\mathcal{U}_\epsilon$-模的范畴，这些模作为 $\mathcal{U}_\epsilon$-“ 模属于 $\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}\mathrm{osc}_\epsilon$，且其权满足一些温和条件。注意，$\mathcal{O}_{\mathrm{osc},\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\mathfrak{c}}$ 是类型 $D_{m+1}^{(1)}$ 的有限维表示范畴。利用 ϕ_ϵ ($\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$)，我们可以定义自然的幺半函子 $\mathfrak{tr}_\epsilon$ ($\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$)，它们将 $\mathcal{O}_{\mathrm{osc},\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathfrak{c}}$ 中的不可约表示映至 $\mathcal{O}_{\mathrm{osc},\epsilon}^{\mathfrak{c}}$ 中的对应表示或零。函子 $\mathfrak{tr}_\epsilon$ 保持 $\mathcal{W}_\epsilon^{\pm}(x)$ 以及张量积 $\mathcal{W}_\epsilon^{\pm}(x) \otimes \mathcal{W}_\epsilon^{\pm}(y)$ 上的归一化 R 矩阵，这意味着对所有 ϵ，谱分解本质上相同。沿用 [14, 15], ，我们构造一族表示$\mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{\lambda})$，它们属于“$\mathcal{O}_{\mathrm{osc},\epsilon}^{\mathfrak{c}}$，其参数 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^+$ 与 ϵ 无关，并且满足 $\mathfrak{tr}_\epsilon(\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\lambda})) = \mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{\lambda})$ ($\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$)，且任何非零 $\mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{\lambda})$ 都不可约。

“ “ 我们指出，$\mathcal{O}_{\mathrm{osc},\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\mathfrak{c}}$ 和 $\mathcal{O}_{\mathrm{osc},\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\mathfrak{c}}$ 中的谱分解已分别在 [31] 和 [20], 中得到。我们的方法解释了这些公式为何相同，这要归因于“它们与 $\mathcal{O}_{\mathrm{osc},\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathfrak{c}}$的联系。

1.4. 接下来考虑类型为 D 的 q 振子表示以及类型为 C 的有限维表示的情形。

令 $\epsilon' = (0, 1, \ldots, 1, 0)$ 为长度为 $n = 2m+1$ 的交替序列，并令 $\underline{\epsilon}'$（分别为 $\overline{\epsilon}'$）为从 ϵ' 中移除所有 1（分别为 0）后得到的子序列。在此情形下，我们有代数同态 $\phi_\epsilon : \mathcal{U}_\epsilon \longrightarrow \mathcal{U}_{\epsilon'}$ $(\epsilon = \underline{\epsilon}', \overline{\epsilon}')$，其中令 $\mathcal{U}_{\epsilon'} = \mathcal{U}(\epsilon')$,$\mathcal{U}_{\underline{\epsilon}'} = U_q(D^{(1)}_{m+1})$，以及 $\mathcal{U}_{\overline{\epsilon}'} = U_{\tilde{q}}(C^{(1)}_m)$。我们定义一个带谱参数 x 的 $\mathcal{U}_\epsilon$-模 $\mathscr{W}_\epsilon(x)$，其中 $\mathscr{W}_\epsilon = \mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2} (\epsilon = \epsilon', \underline{\epsilon}', \overline{\epsilon}')$。我们证明，$\mathscr{W}_\epsilon(x)^{\otimes \ell}$ 作为有限型子代数 $\mathring{\mathcal{U}}_\epsilon$ 上的模是半单的，并对 $\ell \geq 1$ 的情形下 $\mathscr{W}_\epsilon(x)^{\otimes \ell}$ 中的不可约 $\mathring{\mathcal{U}}_\epsilon$-模进行分类。范畴 $\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 和“$\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 以相同方式定义，其中“$\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc}\,\overline{\epsilon}}$ 是 A 型有限维表示的范畴。

本情形下主要结果的证明在技术上更加困难。我们首先为 $l \geq 0$ $(\epsilon = \epsilon', \underline{\epsilon}', \overline{\epsilon}')$ 构造一个基本型表示 $\mathcal{W}_{l,\epsilon}(x)$，使得 $\mathrm{tr}_\epsilon(\mathcal{W}_{l,\epsilon}(x)) = \mathcal{W}_{l,\epsilon}(x)$ $(\epsilon = \underline{\epsilon}', \overline{\epsilon}')$，其中 $\mathcal{W}_{l,\overline{\epsilon}'}(x)$ 同构于类型为$C^{(1)}_m$ 的基本表示。然后，我们证明对于一般的 x, y，$\mathcal{W}_{l,\epsilon}(x) \otimes \mathcal{W}_{m,\epsilon}(y)$ 是不可约的；在 $\overline{\epsilon}'$ 的情形下，这一点可由晶体基 [1, 15]，理论得知，并且我们显式计算归一化 R 矩阵在 $\mathcal{W}_{l,\epsilon}(x) \otimes \mathcal{W}_{m,\epsilon}(y)$ $(\epsilon = \epsilon', \underline{\epsilon}', \overline{\epsilon}')$ 上的谱分解。相当令人惊讶的是，迄今甚至对于 $\overline{\epsilon}'$，这一谱分解仍未见报道，而我们仅知道其分母 [1]。随后，我们以与“$\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc}\,\epsilon}$”情形平行的方式，得到关于“$\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$”的结果。

“ “ 1.5. 总结来说，我们构造了两类范畴 $\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 和 $\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$，其中 $(\epsilon, \underline{\epsilon}, \overline{\epsilon}) = (\epsilon, \underline{\epsilon}, \overline{\epsilon})$ 和 $(\epsilon', \underline{\epsilon}', \overline{\epsilon}')$ 分别对应 $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ 和 $\mathfrak{d}$，并构造了它们之间的函子 tr_ϵ:

(1.1)



“其中 $\mathcal{W}_\epsilon(\lambda)$ 是 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\,\epsilon}$ 中的一个表示，当其非零时是不可约的。这里，图中最左侧的范畴由 q-振子表示的 $C^{(1)}_m$ 型（分别为 $D^{(1)}_{m+1}$ 型）组成，最右侧的范畴由 $D^{(1)}_{m+1}$ 型（分别为 $C^{(1)}_m$ 型）的有限维表示组成，分别对应于 $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$（分别为 $\mathfrak{x} = \mathfrak{d}$）。

最后我们指出，对于类型为 $X^{(1)}_n$ 的量子仿射超代数，文中“$\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$（$\epsilon = \epsilon, \epsilon'$）”中的不可约表示 $\mathcal{W}_\epsilon(\lambda)$，以及“$\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}{}_{\mathrm{osc}\,\epsilon}$（$\epsilon = \underline{\epsilon}, \underline{\epsilon}'$）”中的不可约表示，都是新的。我们还讨论了 $\epsilon \neq \epsilon, \epsilon'$ 时量子仿射超代数的情形。据我们所知，目前关于类型为 A 以外的量子仿射超代数的表示，似乎鲜有研究。我们期望 (1.1) 中的范畴之间存在更多联系（参见 [22]），因此我们的方法有助于更好地理解量子仿射超代数的表示，包括不可约表示的 q-特征、格洛腾迪克环的结构、 T-系统等。我们还期望本文的结果能够推广到其他类型的量子仿射（超）代数，文末将对此进行更详细的讨论。

本文的组织结构如下。第2节回顾量子仿射超代数所需的背景知识。第 3 节介绍类型为 $\mathfrak{c}$ 和 $\mathfrak{d}$ 的截断函子。第 4 节回顾关于对偶对 $(\mathfrak{g}, G)$ 的经典结果，其中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{so}_{2n}$“ 和 $G = O_\ell, Sp_{2\ell}$。第5节定义范畴 $\mathcal{O}^{\mathfrak{r}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$。第6节和第7节分别在“$\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 和“$\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$中构造不可约表示。第8节给出一些与其他类型的量子仿射超代数相关的评述和问题。

致谢 本文部分工作是在前两位作者于2023年1月在日本大阪公立大学的 OCAMI 访问期间完成的。他们谨向 OCAMI 致谢，感谢其发出邀请并在访问期间给予热情款待。我们也要感谢 H. Yamane 对其著作所作的友好讲解。

2. Quantum affine superalgebras of type D

2.1. 仿射型 D 的广义量子群。设 n 是满足 $n \geq 4$ 的正整数。用 $\mathbb{Z}_+$ 表示非负整数的集合。令 $\Bbbk = \mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})$ 和 $\Bbbk^\times = \Bbbk \setminus \{0\}$，其中 $q^{\frac{1}{2}}$ 是一个不定元。我们定义

$$
\begin{aligned}
&[m] = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}} \quad (m \in \mathbb{Z}_+),\\
&[m]! = [m][m-1]\cdots[1] \quad (m \geq 1), \quad [0]! = 1,\\
&\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \frac{[m][m-1]\cdots[m-k+1]}{[k]!} \quad (0 \leq k \leq m).
\end{aligned}
$$

我们采用以下记号：

- $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$：一个序列，满足 $\epsilon_i \in \{0,1\}\ (i = 1, \ldots, n)$，
- $\mathbb{I} = \{1 < 2 < \cdots < n\}$，
- $P = \mathbb{Z}\Lambda \oplus \mathbb{Z}\delta_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\delta_n$：一个带有对称双线性型 $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ 的 $\mathbb{Z}$-格，满足

$$(\delta_i|\delta_j) = (-1)^{\epsilon_i}\delta_{ij}, \quad (\delta_i|\Lambda) = -\frac{1}{2},$$

- $I = \{0, 1, \ldots, n\}$，
- $\alpha_i = \delta_{i+1} - \delta_i \in P (i \in I \setminus \{0, n\})$，$\alpha_0 = \delta_2 + \delta_1$，$\alpha_n = -\delta_n - \delta_{n-1}$，
- $I_{\text{偶}} = \{\, i \in I \mid (\alpha_i|\alpha_i) = \pm 2 \,\}$，$I_{\text{奇}} = \{\, i \in I \mid (\alpha_i|\alpha_i) = 0 \,\}$，
- $q_i = (-1)^{\epsilon_i} q^{(-1)^{\epsilon_i}}\ (i \in \mathbb{I})$，也就是说，

$$q_i = \begin{cases} q & \text{if } \epsilon_i = 0, \\ \widetilde{q} := -q^{-1} & \text{if } \epsilon_i = 1, \end{cases} \quad (i \in \mathbb{I}),$$

- $\mathbf{v} = \mathbf{i} q^{\frac{1}{2}}$ ($\mathbf{i} = \sqrt{-1}$)，
- $\mathbf{q}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$：一个从 $P \times P$ 到 $\Bbbk^\times$ 的对称双加性函数，由下式给出

$$\mathbf{q}(\mu, \nu) = \mathbf{v}^{\sum_{j \in \mathbb{I}} (\ell' \mu_j + \ell \nu_j)} \prod_{i \in \mathbb{I}} q_i^{\mu_i \nu_i} \quad (\mu, \nu \in P),$$

对于 $\mu = \ell\Lambda + \sum_{i \in \mathbb{I}} \mu_i \delta_i$ 和 $\nu = \ell'\Lambda + \sum_{i \in \mathbb{I}} \nu_i \delta_i$。

设 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$ 为由 e_i、f_i、$k_\mu (i \in I$、$\mu \in P)$ 生成的结合 $\Bbbk$-代数，其满足以下关系：

$$
\begin{gathered}
k_\mu = 1 \quad (\mu = 0), \quad k_{\mu+\mu'} = k_\mu k_{\mu'} \quad (\mu, \mu' \in P), \\
k_\mu e_i k_{-\mu} = \mathbf{q}(\mu, \alpha_i) e_i, \quad k_\mu f_i k_{-\mu} = \mathbf{q}(\mu, \alpha_i)^{-1} f_i \quad (i \in I, \mu \in P), \\
e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (i, j \in I), \\
e_i^2 = f_i^2 = 0 \quad (i \in I_{\mathrm{odd}}), \\
[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0 \quad \text{if } (\alpha_i, \alpha_j) = 0, \\
e_0^2 e_2 - (-1)^{\epsilon_1} [2] e_0 e_2 e_0 + e_2 e_0^2 = (e \to f) = 0 \quad \text{if } \epsilon_1 = \epsilon_2, \\
e_2^2 e_0 - (-1)^{\epsilon_2} [2] e_2 e_0 e_2 + e_0 e_2^2 = (e \to f) = 0 \quad \text{if } \epsilon_2 = \epsilon_3, \\
e_i^2 e_j - (-1)^{\epsilon_i} [2] e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = (e \to f) = 0 \quad \text{if } i, j \in I \setminus \{0, n\},\ |i - j| = 1,\ \epsilon_i = \epsilon_{i+1}, \\
e_{n-2}^2 e_n - (-1)^{\epsilon_{n-2}} [2] e_{n-2} e_n e_{n-2} + e_n e_{n-2}^2 = (e \to f) = 0 \quad \text{if } \epsilon_{n-2} = \epsilon_{n-1}, \\
e_n^2 e_{n-2} - (-1)^{\epsilon_{n-1}} [2] e_n e_{n-2} e_n + e_{n-2} e_n^2 = (e \to f) = 0 \quad \text{if } \epsilon_{n-1} = \epsilon_n, \\
e_0 e_1 e_2 - e_1 e_0 e_2 + (-1)^{\epsilon_2} [2] (e_1 e_2 e_0 - e_0 e_2 e_1) + e_2 e_0 e_1 - e_2 e_1 e_0 = (e \to f) = 0 \text{ 如果 } \epsilon_1 \neq \epsilon_2, \\
e_0 e_2 e_3 e_2 - e_3 e_2 e_0 e_2 + (-1)^{\epsilon_3} [2] e_2 e_3 e_0 e_2 - e_2 e_0 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_2 e_0 = (e \to f) = 0 \text{ 如果 } \epsilon_2 \neq \epsilon_3,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
e_i e_{i-1} e_i e_{i+1} - e_i e_{i+1} e_i e_{i-1} + (-1)^{\epsilon_i} [2] e_i e_{i-1} e_{i+1} e_i \\
- e_{i-1} e_i e_{i+1} e_i + e_{i+1} e_i e_{i-1} e_i = (e \to f) = 0 \quad \text{if } i \in \{2, \ldots, n-2\},\ \epsilon_i \neq \epsilon_{i+1}, \\
e_{n-2} e_{n-3} e_{n-2} e_n - e_{n-2} e_n e_{n-2} e_{n-3} + (-1)^{\epsilon_{n-2}} [2] e_{n-2} e_{n-3} e_n e_{n-2} \\
- e_{n-3} e_{n-2} e_n e_{n-2} + e_n e_{n-2} e_{n-3} e_{n-2} = (e \to f) = 0 \quad \text{if } \epsilon_{n-2} \neq \epsilon_{n-1}, \\
e_{n-2} e_n e_{n-1} - e_{n-2} e_{n-1} e_n + (-1)^{\epsilon_{n-1}} [2] (e_{n-1} e_{n-2} e_n - e_n e_{n-2} e_{n-1}) \\
+ e_n e_{n-1} e_{n-2} - e_{n-1} e_n e_{n-2} = (e \to f) = 0 \quad \text{if } \epsilon_{n-1} \neq \epsilon_n.
\end{gathered}
$$

这里，$k_i = k_{\alpha_i}$ 对于 $i \in I$，而 $(e \to f)$ 表示将 e_i替换为 f_i后得到的关系。

我们称 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$为与 ϵ [28] 相关联的仿射型 D 广义量子群（参见[21]）。它具有霍普夫代数结构，其余乘法为 Δ，余单位为 S

$$
\begin{aligned}
\Delta(k_\mu) &= k_\mu \otimes k_\mu, \\
\Delta(e_i) &= 1 \otimes e_i + e_i \otimes k_i^{-1}, \\
\Delta(f_i) &= f_i \otimes 1 + k_i \otimes f_i, \\
S(k_\mu) = k_{-\mu}, \quad S(e_i) &= -e_i k_i, \quad S(f_i) = -k_i^{-1} f_i,
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

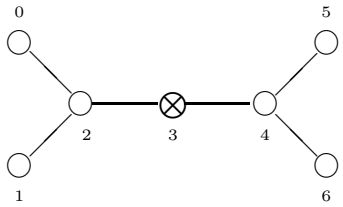
对于 $\mu \in P$和 $i \in I$。

注意，$\mathcal{U}_D(0^n) \cong U_q(D_n^{(1)})$ 和 $\mathcal{U}_D(1^n) \cong U_{\tilde{q}}(D_n^{(1)})$（差一个 Cartan 部分），其中$U_q(D_n^{(1)})$ 是类型 $D_n^{(1)}$ 的量子仿射代数。一般来说，可以为每个 ϵ关联一个 Dynkin 图，其中

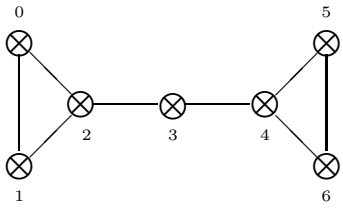
(1) 顶点由 I 编号，并在 $(\alpha_i|\alpha_i)$ 时记为 $\bigcirc$ $\neq 0$，在 $(\alpha_i|\alpha_i)$ 时记为 $\bigotimes$ $= 0$；(2) 当 $(\alpha_i|\alpha_j) \neq 0$ 时，两个顶点 i 和 j 之间连接一条边。

例如，我们有

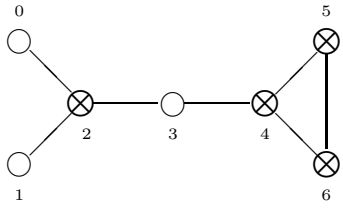
$\epsilon = (000111)$:



$\epsilon = (010101)$:



$\epsilon = (001101)$:



°令 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$ 为由 e_i、 f_i 和 k_μ for $i \in I \setminus \{0\}$ and $\mu \in P$ 生成的子代数。若我们置定

$$\varpi_n = \Lambda, \quad \varpi_{n-1} = \Lambda + \widetilde{\delta}_n, \quad \varpi_i = 2\Lambda + \widetilde{\delta}_n + \cdots + \widetilde{\delta}_{i+1} \quad (1 \le i \le n-2), \tag{2.2}$$

˜其中 $\delta_a = (-1)^{\epsilon_a}\delta_a$ 对于 $a \in \mathbb{I}$，则 $(\varpi_i|\alpha_j) = \delta_{ij}$ 对于 $i, j \in I \setminus \{0\}$。

对于 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$-模 V 和 $\lambda \in P$，我们将 λ-权空间定义为

$$V_\lambda = \{\, v \in V \,|\, k_\mu v = \mathbf{q}(\lambda, \mu)v \quad (\mu \in P) \,\}, \tag{2.3}$$

并将 $v = \lambda$ 记为 $v \in V_\lambda$。设 $V = \{\, \mu \in P \,|\, V_\mu \neq 0 \,\}$。

2.2. D型量子仿射超代数。回顾一下与 ϵ [35]相关的 D 型量子仿射超代数 $U_D(\epsilon)$ 的概念。代数 $U_D(\epsilon)$ 是带单位元 1 的结合 $\Bbbk$代数，由 E_i、 F_i、 K_μ $(\mu \in P, i \in I)$ 生成，并满足以下关系：

$$K_\mu = 1 \quad (\mu = 0), \quad K_{\mu+\mu'} = K_\mu K_{\mu'} \quad (\mu, \mu' \in P),$$
$$K_\mu E_i K_\mu^{-1} = q^{(\mu|\alpha_i)} E_i, \quad K_\mu F_i K_\mu^{-1} = q^{-(\mu|\alpha_i)} F_i \quad (i \in I, \mu \in P),$$
$$E_i F_j - (-1)^{p(i)p(j)} F_j E_i = (-1)^{\epsilon_i} \delta_{ij} \frac{K_{\alpha_i} - K_{-\alpha_i}}{q - q^{-1}} \quad (i, j \in I),$$
$$E_i^2 = F_i^2 = 0 \quad (i \in I_{\mathrm{odd}}),$$
$$E_i E_j - (-1)^{p(i)p(j)} E_j E_i = (E \to F) = 0 \quad \text{if } (\alpha_i, \alpha_j) = 0,$$
$$E_0^2 E_2 - [2] E_0 E_2 E_0 + E_2 E_0^2 = (E \to F) = 0 \quad \text{if } \epsilon_1 = \epsilon_2,$$
$$E_2^2 E_0 - [2] E_2 E_0 E_2 + E_0 E_2^2 = (E \to F) = 0 \quad \text{if } \epsilon_2 = \epsilon_3,$$

$$E_i^2E_j-[2]E_iE_jE_i+E_jE_i^2=(E\to F)=0\quad \text{if } i,j\in I\setminus\{0,n\},\ |i-j|=1,\ \epsilon_i=\epsilon_{i+1},$$
$$E_{n-2}^2E_n-[2]E_{n-2}E_nE_{n-2}+E_nE_{n-2}^2=(E\to F)=0\quad \text{if } \epsilon_{n-2}=\epsilon_{n-1},$$
$$E_n^2E_{n-2}-[2]E_nE_{n-2}E_n+E_{n-2}E_n^2=(E\to F)=0\quad \text{if } \epsilon_{n-1}=\epsilon_n,$$
$$E_0E_1E_2-E_1E_0E_2+(-1)^{\epsilon_2+\epsilon_3}(E_1E_2E_0-E_0E_2E_1)+E_2E_0E_1-E_2E_1E_0$$
$$=(E\to F)=0\quad \text{if } \epsilon_1\neq\epsilon_2,$$
$$\Big[E_2,\Big[[E_0,E_2]_{(-1)^{p(0)}q},E_3\Big]_{(-1)^{(p(0)+p(2))p(3)}q^{-1}}\Big]_{(-1)^{p(0)+p(2)+p(3)}}=(E\to F)=0\quad \text{if } \epsilon_2\neq\epsilon_3,$$
$$\Big[E_i,\Big[[E_{i-1},E_i]_{(-1)^{p(i-1)}q},E_{i+1}\Big]_{(-1)^{(p(i-1)+p(i))p(i+1)}q^{-1}}\Big]_{(-1)^{p(i-1)+p(i)+p(i+1)}}$$
$$=(E\to F)=0\quad \text{if } \epsilon_i\neq\epsilon_{i+1}, i\in[2,n-2],$$
$$\Big[E_{n-2},\Big[[E_{n-3},E_{n-2}]_{(-1)^{p(n-3)}q},E_n\Big]_{(-1)^{(p(n-3)+p(n-2))p(n)}q^{-1}}\Big]_{(-1)^{p(n-3)+p(n-2)+p(n)}}$$
$$=(E\to F)=0\quad \text{if } \epsilon_{n-2}\neq\epsilon_{n-1},$$
$$E_nE_{n-1}E_{n-2}-E_{n-1}E_{n-0}E_{n-2}+(-1)^{\epsilon_{n-1}+\epsilon_{n-2}}(E_{n-1}E_{n-2}E_n-E_nE_{n-2}E_{n-1})$$
$$+E_{n-2}E_nE_{n-1}-E_{n-2}E_{n-1}E_n=(E\to F)=0\quad \text{if } \epsilon_{n-1}\neq\epsilon_n,$$

其中，对于 $i\in I_{\mathrm{even}}$（分别对于 $i\in I_{\mathrm{odd}}$），$[X,Y]_t=XY-tYX$ 和 $p(i)=0$（分别为 1）。更确切地说，$U_D(\epsilon)$ 对应于 [35, 第 1.4 节和命题 6.7.1] 中的 (DD) 型。

这两个代数 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$和 $U_D(\epsilon)$ 彼此密切相关，正如类型 A [22]的情形。我们如下说明。令

- $P^e_{\mathrm{af}}=\bigoplus_{j\in\mathbb{I}}\mathbb{Z}\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_j\oplus\mathbb{Z}\boldsymbol{\delta}\oplus\mathbb{Z}\Lambda_0$: a $\mathbb{Z}$-lattice with a symmetric bilinear form
$$(\boldsymbol{\delta}_i|\boldsymbol{\delta}_j)=(-1)^{\epsilon_i}\delta_{ij},\quad (\boldsymbol{\delta}_i|\boldsymbol{\delta})=(\boldsymbol{\delta}_i|\Lambda_0)=(\Lambda_0|\Lambda_0)=(\boldsymbol{\delta}|\boldsymbol{\delta})=0,\quad (\Lambda_0|\boldsymbol{\delta})=1,$$
- $\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\delta}_{i+1}-\boldsymbol{\delta}_i$ $(i\in I\setminus\{0,n\})$, $\boldsymbol{\alpha}_0=\boldsymbol{\delta}_2+\boldsymbol{\delta}_1+\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\alpha}_n=-\boldsymbol{\delta}_n-\boldsymbol{\delta}_{n-1}$,
- $Q=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\boldsymbol{\alpha}_i$, $Q_\pm=\pm\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}_+\boldsymbol{\alpha}_i$.

请注意，如果我们令

$$\Lambda_n=\Lambda_0-\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{I}}(-1)^{\epsilon_i}\boldsymbol{\delta}_i,$$

于是我们有

$$(\boldsymbol{\delta}_i|\Lambda_n)=-\frac{1}{2},\quad (\Lambda_n|\Lambda_n)=\frac{1}{4}\sum_{i\in\mathbb{I}}(-1)^{\epsilon_i}.$$

因此，我们可以通过分别将 δ_i 和 $\boldsymbol{\delta}_i$（$i\in\mathbb{I}$）以及将 Λ_n 与 Λ 对应，从而将 $P\subset P^e_{\mathrm{af}}$ 视为 δ_i。令 $\mathrm{cl}:P^{e}{}_{\text{仿射}}\longrightarrow P^{e}{}_{\text{仿射}}/\mathbb{Z}\boldsymbol{\delta}$ 为在此对应关系下的投影。

我们将 $\mathcal{U}_D(\epsilon)^e_{\mathrm{af}}$ 定义为 $\Bbbk$-代数，如 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$ 所述。其定义方式与 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$ 相同，只是现在将 P 和 $\mathsf{q}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ 分别替换为 P^e_{af} 和 $\mathsf{q}(\mu,\nu)=\mathsf{q}(\mathrm{cl}(\mu),\mathrm{cl}(\nu))$，其中$\mu,\nu\in P^e{}_{\mathrm{af}}$。

令 Σ 为由 σ_i $(i\in\mathbb{I})$ 生成的 $\Bbbk$-双代数，使得对于 i、$j\in\mathbb{I}$，有 $\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$ 和 $\sigma_j^2=1$，其余乘法 $\Delta(\sigma_i)$ 对于 $i\in\mathbb{I}$ 为 $=\sigma_i\otimes\sigma_i$。我们将 $\mathcal{U}_D(\epsilon)^e{}_{\mathrm{af}}[\sigma]$ 定义为 $\mathcal{U}_D(\epsilon)^e{}_{\mathrm{af}}$ 与 Σ 的半直积，其中 Σ 通过以下方式作用于 $\mathcal{U}_D(\epsilon)^e{}_{\mathrm{af}}$：

$$\sigma_jk_\mu=k_\mu,\quad \sigma_je_i=(-1)^{\epsilon_j(\boldsymbol{\delta}_j|\boldsymbol{\alpha}_i)}e_i,\quad \sigma_jf_i=(-1)^{\epsilon_j(\boldsymbol{\delta}_j|\boldsymbol{\alpha}_i)}f_i,$$

对于 $j\in\mathbb{I}$, $\mu\in P^e{}_{\mathrm{af}}$和 $i\in I$。我们以同样的方式定义 $U_D(\epsilon)^e{}_{\mathrm{af}}[\sigma]$。

假设 $\epsilon \neq (0^n), (1^n)$。令 $\mathbb{I} = \mathbb{I}^{(1)} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{I}^{(l)}$ 为 $\mathbb{I}$ 的一个分拆，使得

(1) ϵ_i 在每个 $\mathbb{I}^{(k)}$ 上对于 $1 \leq k \leq l$ 都是常数，(2) 若 $i \in \mathbb{I}^{(k)}$，则 $\epsilon_i \neq \epsilon_j$，且对于 $1 \leq k \leq l-1$ 有 $j \in \mathbb{I}^{(k+1)}$，(3) 若我们令 $i_k = \max \mathbb{I}^{(k)}$ 对于 $1 \leq k \leq l$ 和 $i_0 = 0$，则有

$$\mathbb{I}^{(k)} = \mathbb{I} \cap \{i_{k-1}+1, i_{k-1}+2, \ldots, i_k\}.$$

令 $\sigma_{\leq j} = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_j$ 对于 $j \in \mathbb{I}$，并令 $\varsigma_i = \sigma_i\sigma_{i+1}$ 对于 $1 \leq i \leq n-1$。

对于 $X = E$、F、K 和 $i \in I$，我们定义 $\tau(X_i) \in \mathcal{U}_D(\epsilon)^e{}_{\mathrm{af}}$ 如下：

(1) 若 $i \in I_{\mathrm{even}} \setminus \{0, n\}$ 满足 $(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = (0, 0)$，则令

$$\tau(E_i) = e_i, \quad \tau(F_i) = f_i, \quad \tau(K_i) = k_i.$$

(2) 如果 $i \in I_{\mathrm{odd}} \setminus \{0, n\}$ 与 $(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = (0, 1)$，则我们置

$$\tau(E_i) = e_i\sigma_{\leq i}, \quad \tau(F_i) = f_i\sigma_{\leq i}\varsigma_i, \quad \tau(K_i) = k_i\varsigma_i.$$

（3）如果 $i \in I_{\mathrm{even}} \setminus \{0, n\}$ 满足 $(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = (1, 1)$，那么对于唯一的 k，我们有 $\{i, i+1\} \subset \mathbb{I}^{(k)}$，并令

$$\tau(E_i) = e_i\varsigma_i^{i-i_{k-1}}, \quad \tau(F_i) = -f_i\varsigma_i^{i-i_{k-1}-1}, \quad \tau(K_i) = k_i\varsigma_i.$$

(4) 如果 $i \in I_{\mathrm{odd}} \setminus \{0, n\}$ 满足 $(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = (1, 0)$，那么对于唯一的 k 和 pu，我们有 $i = i_k$。

$$\tau(E_i) = e_i\sigma_{\leq i}\varsigma_i^{i_k-i_{k-1}}, \quad \tau(F_i) = (-1)^{i_k-i_{k-1}} f_i\sigma_{\leq i}\varsigma_i^{i_k-i_{k-1}-1}, \quad \tau(K_i) = k_i\varsigma_i.$$

(5) 如果有 $i = 0$，那么我们按照 $\tau(X_1)$ 的情形置 $\tau(X_0)$，也就是说，如果对于单项式 $\sigma \in \Sigma$ 有 $\tau(E_1) = e_1\sigma$，那么我们置 $\tau(E_0) = e_0\sigma$，并以同样的方式定义 $\tau(F_0)$ 和 $\tau(K_0)$。

(6) 若 $i = n$，则如 $\tau(X_{n-1})$ 的情形，我们令 $\tau(X_n)$。

令 $\mathscr{X}$（分别为 $\mathscr{Y}$）为由 E_i、F_i、$K_i^{\pm 1}(i \in I)$、$K_{\pm\Lambda_0}$ 和 $\sigma_j\,(j \in \mathbb{I})$（分别由 e_i、f_i、$k_i^{\pm 1}$、$k_{\pm\Lambda_0}$ 和 σ_j）生成的 $U_D(\epsilon)^e_{\mathrm{af}}[\sigma]$（分别为 $\mathcal{U}_D(\epsilon)^e_{\mathrm{af}}[\sigma]$）的子代数。

命题 2.1. 映射 τ 可扩张为一个 $\Bbbk$-代数同构 $\tau\colon \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$，使得对 $j \in \mathbb{I}$，$\tau(K_{\Lambda_0}) = k_{\Lambda_0}$ 且 $\tau(\sigma_j) = \sigma_j$。

证明。由于类型 A 的关系已在 [22], 中得到证明，因此只需验证

$$\tau\left(K_iE_jK_i^{-1} - q^{(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)}E_j\right) = \tau\left(K_iF_jK_i^{-1} - q^{-(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)}F_j\right) = 0,$$
$$\tau\left(E_iF_j - (-1)^{p(i)p(j)}F_jE_i\right) = 0,$$

对 $\{i, j\} = \{0, 1\}$，以及

$$\begin{aligned}&\tau\left(E_0E_1E_2 - E_1E_0E_2 + (-1)^{\epsilon_2+\epsilon_3}(E_1E_2E_0 - E_0E_2E_1) + E_2E_0E_1 - E_2E_1E_0\right)\\ &= \tau\left(F_0F_1F_2 - F_1F_0F_2 + (-1)^{\epsilon_2+\epsilon_3}(F_1F_2F_0 - F_0F_2F_1) + F_2F_0F_1 - F_2F_1F_0\right) = 0,\end{aligned}$$

这些都很容易验证。 □

°2.3. $\mathcal{U}_D(\epsilon)$-模的经典极限。设 $V = V_{\overline{0}} \oplus V_{\overline{1}}$ 为一个复超空间，令 $\mathfrak{gl}(V)$ 为 V的线性自同态所构成的李超代数。设 B 为 V上的一个非退化超对称双线性型。令 $\mathfrak{osp}(V)$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数，定义为如下 $\mathbb{Z}_2$-分次子空间：其齐次分量由满足 $B(T(v)\ w) + (-1)^{|T||v|}B(v, T(w)) = 0$ 的 T 组成，其中 $v, w \in V$，而 $|T|$ 和 $|v|$ 分别表示 T 和 v 的次数。类似地，$\mathfrak{spo}(V)$ 定义为关于 V 上一个非退化斜超对称双线性型的子代数。

令 M 和 N 分别为 ϵ 中 0 和 1 的个数，并令 V 为超空间，使得 $\dim V_{\overline{0}} = 2M$ 且 $\dim V_{\overline{1}} = 2N$。我们设

$$\mathfrak{osp}(\epsilon) = \begin{cases} \mathfrak{spo}(V) & \text{if } \epsilon_n = 1, \\ \mathfrak{osp}(\Pi V) & \text{if } \epsilon_n = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 Π 表示奇偶性变换函子。我们将 $\mathfrak{spo}(V)$（ $\mathfrak{spo}(V)$的单根集合）的基本系取为对应于 ϵ 的基本系。例如，当$\epsilon_n = 1$时，我们取其 $\varepsilon\delta$ 序列（参见 [6, 第 1.3] 节）由将 ϵ 中的 0 和 1 分别替换为 δ 和 ε 得到的基本系。

°现在我们说明如何将一个 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$-模取经典极限，作为一个 $\mathfrak{osp}(\epsilon)$-模。令 $\mathring{Q} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\boldsymbol{\alpha}_i \subset P$。注意，任意 $\lambda \in P$都可以唯一地写成

$$\lambda = \ell\varpi_n + \sum_{i \in \mathbb{I}} l_i \delta_i, \tag{2.5}$$

对于某些 ℓ、l_1、…、$l_n \in \mathbb{Z}$。

°令 V为一个 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$-模，其权空间分解为 (2.3) 中的 $V = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda$，其中° °是相对于 $\langle k_\mu \,|\, \mu \in P\rangle$而言的。令 $\mathscr{X}$（分别为 $\mathscr{Y}$）表示由 E_i、F_i、$K_i^{\pm 1}$（分别为 e_i、f_i、$k_i^{\pm 1}$）生成的 $\mathscr{X}$（分别为 $\mathscr{Y}$）的子代数，其中 $i \in I \setminus \{0\}$，且 σ_j对应 $j \in \mathbb{I}$。我们可以通过定义 $\sigma_j v = (-1)^{l_j} v$（ $v \in V_\lambda$ 满足 $\lambda \in$，且 wt(V) 如 (2.5) 所示），将 V扩张为一个 $\mathring{\mathscr{Y}}$-模。令°$V^\tau = \{\, v^\tau \,|\, v \in V \,\}$ 表示将命题 2.1 中的 τ作用于 V所得的 $\mathscr{X}$-模。

引理 2.2. 对于 $\lambda \in P$ 和 $v \in V_\lambda$，我们有

$$K_\beta v^\tau = (-1)^{(\ell\varpi_n|\beta)} q^{(\lambda|\beta)} v^\tau \quad (\beta \in \mathring{Q}).$$

证明。令 λ 如 (2.5) 所示，并令 $\beta = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i = \sum_{j\in\mathbb{I}} b_j\delta_j$。令 $\lambda^\circ = \lambda - \ell\varpi_n$。注意，

$$\mathbf{q}(\lambda, \alpha_i) = \begin{cases} \mathbf{q}(\lambda^\circ, \alpha_i) & \text{if } i \neq n, \\ \mathbf{q}(\ell\varpi_n, \alpha_n)\mathbf{q}(\lambda^\circ, \alpha_n) & \text{if } i = n. \end{cases}$$

此处 $\mathbf{q}(\ell\varpi_n,\alpha_n) = \mathbf{v}^{-2\ell} = (-q)^{-\ell}$，因此 $\mathbf{q}(\ell\varpi_n,\beta) = (-q)^{-a_n\ell} = (-q)^{(\ell\varpi_n|\beta)}$。对于$v \in V_\lambda$，我们有

$$\begin{aligned} K_\beta v^\tau = (\tau(K_\beta)v)^\tau &= \left(k_\beta \prod_{j\in\mathbb{I}} \sigma_j^{b_j} v\right)^\tau = \left(\mathbf{q}(\lambda,\beta)\prod_{j\in\mathbb{I}} \sigma_j^{b_j} v\right)^\tau \\ &= (-q)^{(\ell\varpi_n|\beta)}\mathbf{q}(\lambda^\circ,\beta)\prod_{j\in\mathbb{I}}(-1)^{\epsilon_j l_j b_j} v^\tau \\ &= (-1)^{(\ell\varpi_n|\beta)} q^{(\ell\varpi_n|\beta)+(\lambda^\circ|\beta)} v^\tau = (-1)^{(\ell\varpi_n|\beta)} q^{(\lambda|\beta)} v^\tau. \end{aligned}$$

□

°进一步假设 V 是一个最高权 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$-模，其最高权为 $\mu \in P$，并且对某个 ℓ、m_1、.....、$m_n \in \mathbb{Z}$，有 $\mu = \ell\varpi_n + \sum_{i\in\mathbb{I}} m_i\delta_i$。那么我们有

$$\mathrm{wt}(V) \subset \ell\varpi_n + \sum_{i\in\mathbb{I}} \mathbb{Z}\delta_i. \tag{2.6}$$

分别将 K_n （或 $K_{\boldsymbol{\alpha}_n}$）和 F_n 替换为（-1）$^\ell K_n$ 和（-1）$^\ell F_n$后，对于$v \in V_\lambda$ 且满足 $\lambda \in$ wt(V)，我们有

$$K_\beta v^\tau = q^{(\lambda|\beta)} v^\tau \quad (\beta \in \mathring{Q}),$$

°由此得到 V^τ 作为 $\mathscr{X}$-模的通常权空间分解。

现在我们考虑 V^τ作为子代数 $\langle E_i、\ F_i K_i^{\pm1} \mid i \in I\setminus\{0\}\rangle \subset \mathring{U}_D(\epsilon)$上的模时的经典极限（参见 [12]）。令 $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$。令 $V^\tau\mathbf{A}$为 $f_{i_1}\dots f_{i_s}v$关于 $s \geq 0$和 i_1、.....、$i_s \in I\setminus\{0\}$的A-线性张成，其中 v是一个最高权向量。则 $V^\tau\mathbf{A}$在 $i \in I\setminus\{0\}$下对 E_i、F_i、$K_i^{\pm1}$ 和 $\{K_i\} := \frac{K_i - K_i^{-1}}{q-q^{-1}}$不变。令 $\overline{V^\tau} = V^\tau\mathbf{A}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbb{C}$，其中 $\mathbb{C}$ 是一个A-模，满足 $f(q)\cdot z = f(1)z$，其中 $f(q) \in \mathbf{A}$且 $z \in \mathbb{C}$。则对 $i \in I\setminus\{0\}$，$\overline{V^\tau}$在由 E_i、F_i 和 $\{K_i\}$分别诱导的 $\mathbb{C}$-线性自同态$\mathbf{E}_i$、$\mathbf{F}_i$ 和$\mathbf{H}_i$ 作用下不变。

端同态 $\mathbf{E}_i$、$\mathbf{F}_i$ 和 $\mathbf{H}_i$ 满足 (2.4) 中包络代数$U(\mathfrak{osp}(\epsilon))$的定义关系（参见 [34, 第 10.5]节）。因此，我们有如下结论。

引理 2.3. 在上述假设下，$\overline{V^\tau}$成为一个 $U(\mathfrak{osp}(\epsilon))$-模，其最高权为 μ。

2.4. $\mathcal{U}_D(\epsilon)$的准 R 矩阵。设 $\mathcal{U}_D(\epsilon)^+$ （分别地，$\mathcal{U}_D(\epsilon)^-$）为 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$中由 $i \in I$的 e_i （分别地，f_i）生成的子代数。注意，$\mathcal{U}_D(\epsilon)^\pm$ 自然地按 $Q_\pm$分级。利用与 [22, 第 2.2 节和第 2.4]节以及命题 2.1 中相同的论证，可以证明以下结论。

命题 2.4.

(1) 对于 $i \in I$，存在唯一的 $\Bbbk$-线性映射 $_ir$ on $\mathcal{U}_D(\epsilon)^-$，使得 (i) $_ir(1) = 0$ and $_ir(f_j) = \delta_{ij}$ for $j \in I$，(ii) $_ir(xy) = {}_ir(x)y + \mathbf{q}(\beta,\alpha_i)x_ir(y)$，其中 $x \in \mathcal{U}_D(\epsilon)^-_\beta$ 和 $y \in \mathcal{U}_D(\epsilon)^-$均为齐次。 (2) 存在 $\mathcal{U}_D(\epsilon)^-$ 上的唯一非退化对称双线性形式 $(\cdot,\cdot)$，使得 $(1,1) = 1$ and $(f_ix,y) = (x,{}_ir(y))$ for $i \in I$ and $x,y \in \mathcal{U}_D(\epsilon)^-$。

对于 $\beta \in Q_+$，令 B^{β} 为 $\mathcal{U}_D(\epsilon)^-_{-\beta}$ 的基，令 $\mathrm{B}^*_{\beta} = \{\, b^* \mid b \in \mathrm{B}_{\beta} \,\}$ 为关于命题 2.4(2) 中的 $(\cdot,\cdot)$ 的 B^{β} 的对偶基。令 $-$ 表示 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$ 上的 $\mathbb{C}$-代数对合，由 $\overline{e_i} = e_i$, $\overline{f_i} = f_i$, $\overline{k_\mu} = k_{-\mu}$ $(i \in I,\ \mu \in P)$ 和 $\overline{q} = q^{-1}$ 给出。那么，准 R 矩阵 Θ 在 $\mathcal{U}(\epsilon)^+ \text{“}\otimes\text{”} \mathcal{U}(\epsilon)^-$: $= \bigoplus_{\xi \in Q} \prod_{\xi=\mu+\nu} \mathcal{U}_D(\epsilon)^+_{\mu} \otimes \mathcal{U}_D(\epsilon)^-_{\nu}$ 中的存在性，可以用几乎与 [27, 定理 4.1.2] 中相同的论证证明（参见 [22]）。

定理 2.5。

(1) 对每个 $\beta \in Q_+$，存在唯一的 $\Theta_\beta \in \mathcal{U}_D(\epsilon)^+_{\beta} \otimes \mathcal{U}_D(\epsilon)^-_{-\beta}$，使得 $\Theta_0 = 1 \otimes 1$ 且 $\Theta\,\Delta(u) = \overline{\Delta}(u)\,\Theta$，其中 $u \in \mathcal{U}_D(\epsilon)$，$\overline{\Delta}(u) = \Delta(\overline{u})$，且 $\Theta = \overline{\sum_{\beta \in Q_+} \Theta_\beta} \in \mathcal{U}(\epsilon)^+ \text{“}\otimes\text{”} \mathcal{U}(\epsilon)^-$。

(2) 对于 $\beta = \sum_{i \in I} a_i \boldsymbol{\alpha}_i \in Q_+$，我们有

$$\Theta_\beta = (q - q^{-1})^{\mathrm{ht}(\beta)} \sum_{b \in \mathbf{B}_\beta} b^+ \otimes b^*,$$

其中 $\mathrm{ht}(\beta) = \sum_{i \in I} a_i$，而 b^+ 是由 b 将 f_i 替换为 e_i（对 $i \in I$）得到的。

（3）设 $\overline{\Theta} = \sum_{\beta \in Q_+} \overline{\Theta}_\beta$，其中 $\overline{\Theta}_\beta := (- \otimes -)(\Theta_\beta)$。则 $\overline{\Theta}\Theta = \Theta\overline{\Theta} = 1$。

2.5. $\mathcal{U}_D(\epsilon)$-模 $\mathcal{W}(x)$ 和 $\mathcal{W}^{\otimes 2}(x)$。令

$$\mathbb{Z}^n_+(\epsilon) = \{\, \mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n) \mid \epsilon_i = 0 \Rightarrow m_i \in \mathbb{Z}_+,\ \epsilon_i = 1 \Rightarrow m_i \in \{0, 1\} \,\}.$$

Let

$$\mathcal{W} = \bigoplus_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n_+(\epsilon)} \Bbbk |\mathbf{m}\rangle$$

是由 $|\mathrm{m}\rangle$（$\mathrm{m} \in \mathbb{Z}^n_+(\epsilon)$）张成的 $\Bbbk$ 空间，并令

$$\mathcal{W}^+ = \bigoplus_{|\mathbf{m}|:\mathrm{even}} \Bbbk |\mathbf{m}\rangle, \quad \mathcal{W}^- = \bigoplus_{|\mathbf{m}|:\mathrm{odd}} \Bbbk |\mathbf{m}\rangle,$$

其中 $|\mathrm{m}| = m_1 + \cdots + m_n$。令 $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$，并令 $\{\, \mathrm{e}_i \mid 1 \le i \le n \,\}$ 为 $\mathbb{Z}^n$ 的标准基。

命题 2.6. 假设 $\epsilon_1 = \epsilon_n = 1$。

(1) 对于每个 $x \in \Bbbk^\times$，以下生成元作用在 $\mathcal{W}$ 上定义了一个 a $\mathcal{U}_D(\epsilon)$-模结构，记作 $\mathcal{W}(x)$:

$$\begin{aligned}
e_0|\mathbf{m}\rangle &= x|\mathbf{m} + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\rangle, \\
f_0|\mathbf{m}\rangle &= x^{-1}[m_2]|\mathbf{m} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\rangle, \\
k_0|\mathbf{m}\rangle &= q_1^{m_1 - 1} q_2^{m_2} |\mathbf{m}\rangle, \\
e_i|\mathbf{m}\rangle &= [m_i]|\mathbf{m} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}\rangle \quad (1 \le i < n), \\
f_i|\mathbf{m}\rangle &= [m_{i+1}]|\mathbf{m} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}\rangle \quad (1 \le i < n), \\
k_i|\mathbf{m}\rangle &= q_i^{-m_i} q_{i+1}^{m_{i+1}} |\mathbf{m}\rangle \quad (1 \le i < n), \\
e_n|\mathbf{m}\rangle &= [m_{n-1}]|\mathbf{m} - \mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_n\rangle, \\
f_n|\mathbf{m}\rangle &= |\mathbf{m} + \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n\rangle,
\end{aligned}$$

$$k_n|\mathbf{m}\rangle = q_n^{1-m_n} q_{n-1}^{-m_{n-1}} |\mathbf{m}\rangle,$$
$$k_\Lambda |\mathbf{m}\rangle = \mathbf{v}^{\sum_{i\in\mathbb{I}} m_i} |\mathbf{m}\rangle,$$

对于 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n(\epsilon)$，我们约定 $|\mathbf{m}'\rangle = 0$，除非右侧的 $|\mathbf{m}'\rangle$ 属于 $\mathbb{Z}_+^n(\epsilon)$。

(2) 子空间 $\mathcal{W}^{\pm}$ 是 $\mathcal{W}(x)$ 的一个不可约子模，记作 $\mathcal{W}^{\pm}(x)$。作为 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$-模，有 $\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}^+(x) \oplus \mathcal{W}^-(x)$。

注 2.7. 对于 $i \in \mathbb{I}$ 和 $|\mathbf{m}\rangle \in \mathcal{W}(x)$，以及 $|\mathbf{m}\rangle \in \mathcal{W}(x)$，我们有 $k_{\delta_i} |\mathbf{m}\rangle = \mathbf{v} q_i^{m_i} |\mathbf{m}\rangle$

$$\mathrm{wt}(|\mathbf{m}\rangle) = \Lambda + \sum_{i\in\mathbb{I}} m_i \delta_i. \tag{2.7}$$

特别地，$\mathcal{W}^+(x)$ 和 $\mathcal{W}^-(x)$ 是最高权 $\mathring{\mathcal{U}}_D(\epsilon)$-模，其最高权分别为 Λ 和 $\Lambda + \delta_n$。

命题 2.8. 设 $x \in \mathbb{k}^\times$ 已给定。若 $\epsilon_1 = \epsilon_n = 0$，则生成元的下述作用在 $\mathcal{W}^{\otimes 2}$ 上定义了一个 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$-模结构，记作 $\mathcal{W}^{\otimes 2}(x)$:

$$\begin{aligned}
&e_0 |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle = x |\mathbf{m} + \mathbf{e}_1\rangle \otimes |\mathbf{m}' + \mathbf{e}_2\rangle - x q_1^{-m_1} q_2^{-m_2'} q^{-1} |\mathbf{m} + \mathbf{e}_2\rangle \otimes |\mathbf{m}' + \mathbf{e}_1\rangle,\\
&f_0 |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle\\
&= -x^{-1} q_1^{m_1'} q_2^{m_2} q [m_1][m_2'] |\mathbf{m} - \mathbf{e}_1\rangle \otimes |\mathbf{m}' - \mathbf{e}_2\rangle + x^{-1} [m_1'][m_2] |\mathbf{m} - \mathbf{e}_2\rangle \otimes |\mathbf{m}' - \mathbf{e}_1\rangle,\\
&k_0 |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle = q_1^{m_1+m_1'} q_2^{m_2+m_2'} q^2 |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle,\\
&e_i |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle = q_i^{m_i'} q_{i+1}^{-m_{i+1}'} [m_i] |\mathbf{m} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle + [m_i'] |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}' - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}\rangle,\\
&f_i |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle = [m_{i+1}] |\mathbf{m} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle + q_i^{-m_i} q_{i+1}^{m_{i+1}} [m_{i+1}'] |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}' + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}\rangle,\\
&k_i |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle = q_i^{-m_i - m_i'} q_{i+1}^{m_{i+1}+m_{i+1}'} |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle,\\
&e_n |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle\\
&= -q_{n-1}^{m_{n-1}'} q_n^{m_n} q [m_{n-1}][m_n'] |\mathbf{m} - \mathbf{e}_{n-1}\rangle \otimes |\mathbf{m}' - \mathbf{e}_n\rangle + [m_{n-1}'][m_n] |\mathbf{m} - \mathbf{e}_n\rangle \otimes |\mathbf{m}' - \mathbf{e}_{n-1}\rangle,\\
&f_n |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle = |\mathbf{m} + \mathbf{e}_{n-1}\rangle \otimes |\mathbf{m}' + \mathbf{e}_n\rangle - q_{n-1}^{-m_{n-1}} q_n^{-m_n'} q^{-1} |\mathbf{m} + \mathbf{e}_n\rangle \otimes |\mathbf{m}' + \mathbf{e}_{n-1}\rangle,\\
&k_n |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle = q_{n-1}^{-m_{n-1}-m_{n-1}'} q_n^{-m_n - m_n'} q^{-2} |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle,\\
&k_\Lambda |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle = \mathbf{v}^{\sum_{i\in\mathbb{I}} (m_i + m_i')} |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle,
\end{aligned}$$

对于 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$，$\mathbf{m}' = (m_1', \ldots, m_n') \in \mathbb{Z}_+^n$({v8)。

注 2.9. 如同注 2.7，我们有

$$k_{\delta_i} |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle = \mathbf{v}^2 q_i^{m_i + m_i'} |\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle,$$

对于 $i \in \mathbb{I}$ 和 $|\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle \in \mathcal{W}^{\otimes 2}(x)$，从而

$$\mathrm{wt}(|\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{m}'\rangle) = 2\Lambda + \sum_{i\in\mathbb{I}} (m_i + m_i') \delta_i. \tag{2.8}$$

3. Truncation functors

我们引入两类幺半或张量函子，它们将仿射型 D 的广义量子群或类型为 D 的量子仿射超代数的表示映射到类型为 $C_m^{(1)}$ 和 $D_{m+1}^{(1)}$ 的量子仿射代数的表示（类型 A 参见 [24] ）。它们在后续章节中发挥着至关重要的作用。

3.1. $\mathfrak{c}$ 型截断。我们采用以下记号：

- $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (1, 0, 1 \dots, 0, 1)$ with $n = 2m+1$ $(m \geq 2)$,
- $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathcal{U}_D(\boldsymbol{\epsilon})$ with $I_{\boldsymbol{\epsilon}} = I$,
- $\underline{\boldsymbol{\epsilon}} = (0^m)$, $\overline{\boldsymbol{\epsilon}} = (1^{m+1})$,
- $I_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} = \{0, 1, \dots, m\}$, $I_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} = \{0, 1, \dots, m+1\}$,
- $\mathcal{U}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} = U_q(C_m^{(1)}) = \langle\, e_i, f_i, k_i^{\pm 1} \mid i \in I_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} \,\rangle$,
- $\mathcal{U}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} = U_{\tilde{q}}(D_{m+1}^{(1)}) = \langle\, e_i, f_i, k_i^{\pm 1} \mid i \in I_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} \,\rangle$,

其中， $U_q(X_N^{(1)})$ 表示定义在 $\Bbbk$ 上的 $X_N^{(1)}$ 型量子仿射代数。需要注意的是， $\mathcal{U}_\epsilon(\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}})$ 不应与 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$ 混淆。

$\hat{}\,\check{}$ 我们如下定义 $\hat{e}_i, \hat{f}_i, k_i \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 对于 $i \in I_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$， 以及 $\check{e}_j, \check{f}_j, k_j \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 对于 $j \in I_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$：

$$
\begin{aligned}
\hat{e}_i &= \frac{1}{[2]^{\delta_{i0}+\delta_{im}}} [e_{2i}, e_{2i+1}]_{c_i}, \\
\hat{f}_i &= \frac{1}{[2]^{\delta_{i0}+\delta_{im}}} [f_{2i+1}, f_{2i}]_{c_i^{-1}}, \\
\hat{k}_i &= k_{2i} k_{2i+1},
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

其中，当 $i = 0$ 时 $c_i = -q^{2\eta}$，当 m 时，以及其他情况（$\eta = \pm 1$），且

$$
\check{e}_j = \begin{cases} [e_0, e_2]_d & \text{if } j = 0, \\ [e_{2j-1}, e_{2j}]_d & \text{if } 1 \leq j \leq m, \\ [e_{2m-1}, e_{2m+1}]_d & \text{if } j = m+1, \end{cases}
$$

$$
\check{f}_j = \begin{cases} [f_2, f_0]_{d^{-1}} & \text{if } j = 0, \\ [f_{2j}, f_{2j-1}]_{d^{-1}} & \text{if } 1 \leq j \leq m, \\ [f_{2m+1}, f_{2m-1}]_{d^{-1}} & \text{if } j = m+1, \end{cases}
\tag{3.2}
$$

$$
\check{k}_j = \begin{cases} k_0 k_2 & \text{if } j = 0, \\ k_{2j-1} k_{2j} & \text{if } 1 \leq j \leq m, \\ k_{2m-1} k_{2m+1} & \text{if } j = m+1, \end{cases}
$$

其中 $d = q^{\pm 1}$。此处，当 $t \in \Bbbk^\times$ 时 $[X, Y]_t = XY - tYX$。

命题 3.1。

(1) 存在一个 $\Bbbk$-代数同态 $\phi_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} : \mathcal{U}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} \longrightarrow \mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}$，使得 $\phi_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(e_i) = \hat{e}_i, \hat{}\,\check{}\,\phi_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(f_i) = f_i$，且 $\phi_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(k_i) = k_i$ for $i \in I_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$. (2) 存在一个 $\Bbbk$- 代数同态 $\phi_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} : \mathcal{U}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} \longrightarrow \mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}$，使得 $\phi_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(e_j) = \check{e}_j, \phi_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(f_j) = \check{f}_j$，且 $\phi_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(k_j) = \check{k}_j$ for $j \in I_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$.

证明。容易验证，生成元的像满足 $\mathcal{U}_{\underline{\epsilon}}$ 和 $\mathcal{U}_{\overline{\epsilon}}$的定义关系，但 Serre 关系除外。由于类型 A 的情形已在 [24,定理 4.3], 中证明，我们只需验证以下两个恒等式:

$$\widehat{e}_0^2\widehat{e}_1-(q^2+q^{-2})\widehat{e}_0\widehat{e}_1\widehat{e}_0+\widehat{e}_1\widehat{e}_0^2=0,$$
$$\widehat{e}_1^3\widehat{e}_0-(q^2+1+q^{-2})\widehat{e}_1^2\widehat{e}_0\widehat{e}_1+(q^2+1+q^{-2})\widehat{e}_1\widehat{e}_0\widehat{e}_1^2-\widehat{e}_0\widehat{e}_1^3=0.$$

第一个命题的证明见附录 A，另一个命题留给读者证明。 □

Let

- $\mathbb{I}_{\boldsymbol{\epsilon}}=\mathbb{I}$, $\mathbb{I}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}=\{2,4,\dots,2m\}$, $\mathbb{I}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}=\{1,3,\dots,2m+1\}$,
- $P_\epsilon=\mathbb{Z}\Lambda\oplus\bigoplus_{a\in\mathbb{I}_\epsilon}\mathbb{Z}\delta_a$, $P_{\geq 0,\epsilon}=\mathbb{Z}\Lambda\oplus\bigoplus_{a\in\mathbb{I}_\epsilon}\mathbb{Z}_+\delta_a$ 对于 $\epsilon=\boldsymbol{\epsilon},\underline{\boldsymbol{\epsilon}},\overline{\boldsymbol{\epsilon}}$,
- $\{\,\alpha_i^\epsilon\,|\,i\in I_\epsilon\,\}$: $\mathcal{U}_\epsilon$ 的单根，适用于 $\epsilon=\boldsymbol{\epsilon}$、$\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$、$\overline{\boldsymbol{\epsilon}}$，其中 $\alpha_i^{\boldsymbol{\epsilon}}=\alpha_i$ 见第2.1节。

根据命题 3.1，我们可以通过以下识别将 $\{\,\alpha_i^\epsilon\,|\,i\in I_\epsilon\,\}\subset P_{\boldsymbol{\epsilon}}\,(\epsilon=\underline{\boldsymbol{\epsilon}},\overline{\boldsymbol{\epsilon}})$ 视为

$$\alpha_i^{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}=\begin{cases}2\delta_2 & \text{if } i=0,\\ -\delta_{2i}+\delta_{2i+2} & \text{if } 1\leq i<m,\\ -2\delta_{2m} & \text{if } i=m,\end{cases}\quad \alpha_i^{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}=\begin{cases}\delta_1+\delta_3 & \text{if } i=0,\\ -\delta_{2i-1}+\delta_{2i+1} & \text{if } 1\leq i\leq m,\\ -\delta_{2m-1}-\delta_{2m+1} & \text{if } i=m+1.\end{cases}$$

对于 $\epsilon=\boldsymbol{\epsilon},\underline{\boldsymbol{\epsilon}},\overline{\boldsymbol{\epsilon}}$，令 $\mathcal{C}(\epsilon)$ 为由满足以下条件的 $\mathcal{U}_\epsilon$-模 V 构成的范畴:

(1) V具有权空间分解，即 $V=\bigoplus_{\lambda\in P_\epsilon}V_\lambda$，其中

$$V_\lambda=\{\,v\,|\,k_\mu v=\mathbf{q}(\lambda,\mu)v\ (\mu\in P_\epsilon)\,\},\tag{3.3}$$

(2) $\mathrm{wt}(V)\subset P_{\geq 0,\epsilon}$.

对于 $\ell\in\mathbb{Z}$，我们将 $\mathcal{C}^\ell(\epsilon)$ 定义为满足以下条件的 $\mathcal{C}(\epsilon)$ 的子范畴:

$$\mathrm{wt}(V)\subset\ell\Lambda+\sum_{a\in\mathbb{I}_\epsilon}\mathbb{Z}_+\delta_a.\tag{3.4}$$

于是有 $\mathcal{C}(\epsilon)=\bigoplus_{\ell\in\mathbb{Z}}\mathcal{C}^\ell(\epsilon)$。注意，$\mathcal{C}(\epsilon)$ 对取子模、商模和张量积封闭，而 $\mathcal{C}^\ell(\epsilon)$ 对取子模和商模封闭。例如，由 (2.7)，$\mathcal{W}(x)$ $(x\in\Bbbk^\times)$ 属于 $\mathcal{C}(\epsilon)$，因此 $\mathcal{W}(x)^{\otimes\ell}$ for $\ell\geq 1$ 也属于该范畴。

设 $\epsilon=\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$、$\overline{\boldsymbol{\epsilon}}$ 已给定。对于 $\mathcal{C}(\boldsymbol{\epsilon})$ 中的一个 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}$-模 V，定义 $\mathfrak{tr}_\epsilon^{\boldsymbol{\epsilon}}(V)$，或简写为 $\mathfrak{tr}_\epsilon(V)$，如下:

$$\mathfrak{tr}_\epsilon(V)=\bigoplus_{\substack{\mu\in\mathrm{wt}(V)\\ (\mathrm{pr}(\mu)|\delta_a)=0\ (a\notin\mathbb{I}_\epsilon)}}V_\mu,\tag{3.5}$$

其中 $\mathrm{pr}:P_{\geq 0,\boldsymbol{\epsilon}}\longrightarrow\bigoplus_{i\in\mathbb{I}_{\boldsymbol{\epsilon}}}\mathbb{Z}\delta_i$ 表示典范投影。对于 V、$W\in\mathcal{C}(\boldsymbol{\epsilon})$ 和 $f\in\mathrm{Hom}^{\mathcal{U}(\epsilon)}(V,W)$，有一个 $\Bbbk$-线性映射

$$\mathfrak{tr}_\epsilon(f):\mathfrak{tr}_\epsilon(V)\longrightarrow\mathfrak{tr}_\epsilon(W)\tag{3.6}$$

给定为 $\mathfrak{tr}_\epsilon(f)(v)=f(v)$，其中 $v\in\mathfrak{tr}_\epsilon(V)$。

命题 3.2. 在上述假设下，

(1) $\mathfrak{tr}_\epsilon(V)$ 在 $\phi_\epsilon(\mathcal{U}_\epsilon)$ 的作用下保持不变，因此是 $\mathcal{C}(\epsilon)$ 中的一个 $\mathcal{U}_\epsilon$-模；(2) $\mathfrak{tr}_\epsilon(f)$: $\mathfrak{tr}_\epsilon(V)\longrightarrow\mathfrak{tr}_\epsilon(W)$ 是 $\mathcal{U}(\epsilon)$- 线性的，

(3) $\mathrm{tr}_\epsilon(V\otimes W)$ 与 $\mathrm{tr}_\epsilon(V)\otimes \mathrm{tr}_\epsilon(W)$ 作为 $\mathcal{U}(\epsilon)$-模自然同构。因此，(3.5) 和 (3.6) 定义了一个定义良好的函子

$$\mathrm{tr}_\epsilon : \mathcal{C}(\boldsymbol{\epsilon}) \longrightarrow \mathcal{C}(\epsilon)\ ,$$

这是一个精确的幺半函子。

证明。由 $\mathrm{wt}(V)\subset P_{\geq 0,\boldsymbol{\epsilon}}$ 的条件，可用与 [24, Propositions4.4] 中相同的论证加以验证。□

备注 3.3。函子 tr_ϵ 不依赖于 (3.1) 和 (3.2) 中 η 与 d 的选择，下一小节中也同样如此。

3.2. 类型为 $\mathfrak{d}$ 的截断。下面介绍另一种截断。设

- $\boldsymbol{\epsilon}' = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (0,1,0\dots,1,0)$，其中 $n = 2m+1\,(m\geq 2)$,
- $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'} = \mathcal{U}_D(\boldsymbol{\epsilon}')$，其中有 $I_{\boldsymbol{\epsilon}'} = I$,
- $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}' = (0^{m+1})$, $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}' = (1^m)$,
- $I_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'} = \{0,1,\dots,m+1\}$, $I_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'} = \{0,1,\dots,m\}$,
- $\mathcal{U}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'} = U_q(D^{(1)}_{m+1}) = \langle\, e_i, f_i, k_i^{\pm 1} \mid i\in I_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}\,\rangle$,
- $\mathcal{U}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'} = U_{\tilde{q}}(C^{(1)}_m) = \langle\, e_i, f_i, k_i^{\pm 1} \mid i\in I_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}\,\rangle$.

在这种情况下，我们有如下命题 3.1 的类似结果。首先，令

$$\begin{aligned}
\hat{e}_i &= \left(-\frac{1}{[2]}\right)^{\delta_{i0}+\delta_{im}} [e_{2i+1}, e_{2i}]_{c_i},\\
\hat{f}_i &= \left(-\frac{1}{[2]}\right)^{\delta_{i0}+\delta_{im}} [f_{2i}, f_{2i+1}]_{c_i^{-1}},\\
\hat{k}_i &= k_{2i}k_{2i+1},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

当 $i\in I_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$ 时，其中 $c_i = -q^{2\eta}$ 当 $i=0$ 时， m 而在其他情况下为 $c_i = q^\eta$ （$\eta=\pm 1$）。类似地，令

$$\begin{aligned}
\check{e}_j &= \begin{cases} [e_2, e_0]_d & \text{if } j=0,\\ [e_{2j}, e_{2j-1}]_d & \text{if } 1\leq j\leq m,\\ [e_{2m+1}, e_{2m-1}]_d & \text{if } j=m+1,\end{cases}\\
\check{f}_j &= \begin{cases} [f_0, f_2]_{d^{-1}} & \text{if } j=0,\\ [f_{2j-1}, f_{2j}]_{d^{-1}} & \text{if } 1\leq j\leq m,\\ [f_{2m-1}, f_{2m+1}]_{d^{-1}} & \text{if } j=m+1,\end{cases}\\
\check{k}_j &= \begin{cases} k_0k_2 & \text{if } j=0,\\ k_{2j-1}k_{2j} & \text{if } 1\leq j\leq m,\\ k_{2m-1}k_{2m+1} & \text{if } j=m+1,\end{cases}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

当 $j\in I_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$ 时，其中 $d=-q^{\pm 1}$。注意，（3.7）和（3.8）可通过将 q 替换为 $\tilde{q}$，从（3.1）和（3.2）得到（相差一个标量倍数）。

命题 3.4。

(1) 存在一个 $\Bbbk$ 代数同态 $\phi_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}: \mathcal{U}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'} \longrightarrow \mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$，使得 $\phi_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}(e_i) = \hat{e}_i$，$\hat{}\,\hat{}\,\phi_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(f_i) = f_i$，且 $\phi_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}(k_i) = k_i$，其中 $i \in I_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$。(2) 存在一个 $\Bbbk$ 代数同态 $\phi_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}: \mathcal{U}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'} \longrightarrow \mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$，使得 $\phi_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}(e_j) = \check{}\, e_j$，$\phi_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}(f_j) = \check{}\, f_j$，且 $\phi_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}(k_j) = \check{}\, k_j$，其中 $j \in I_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$。

Let

- $\mathbb{I}_{\boldsymbol{\epsilon}'} = \mathbb{I}$、$\mathbb{I}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'} = \{1, 3, \dots, 2m+1\}$、$\mathbb{I}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'} = \{2, 4, \dots, 2m\}$、
- $P_\epsilon = \mathbb{Z}\Lambda \oplus \bigoplus_{a \in \mathbb{I}_\epsilon} \mathbb{Z}\delta_a$、$P_{\geq 0,\ \epsilon} = \mathbb{Z}\Lambda \oplus \bigoplus_{a \in \mathbb{I}_\epsilon} \mathbb{Z}_+\delta_a$ 对于 $\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}'$、$\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'$、$\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'$、
- $\{\alpha_i^\epsilon \mid i \in I_\epsilon\}$：$\mathcal{U}_\epsilon$ 的单根，$\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}'$、$\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'$、$\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'$，其中 $\alpha_i^{\boldsymbol{\epsilon}'} = \alpha_i$ 在第2.1节中，$\alpha_i^{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'} = \alpha_i^{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ 对于$i \in I_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$，以及$\alpha_j^{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'} = \alpha_j^{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ 对于 $j \in I_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$ 在第 3 节中。

我们定义范畴 $\mathcal{C}(\epsilon)$和函子 $\mathfrak{tr}_\epsilon^{\boldsymbol{\epsilon}'}$，或简称为 $\mathfrak{tr}_\epsilon$

$$\mathfrak{tr}_\epsilon : \mathcal{C}(\boldsymbol{\epsilon}') \longrightarrow \mathcal{C}(\epsilon) \quad (\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}', \overline{\boldsymbol{\epsilon}}') \tag{3.9}$$

与 $\mathfrak{tr}_\epsilon$ 中对 $\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$ 的定义相同。于是，命题 3.2 在此情形下也成立。

3.3. $\mathcal{W}(x)$ 和 $\mathcal{W}^{\otimes 2}(x)$ 的截断。设 $x \in \Bbbk^\times$ 给定。

首先，令 $\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}(x)$ 表示命题 2.6 中相对于 $\boldsymbol{\epsilon}$ 的 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}$-模 $\mathcal{W}(x)$（参见第 3.1 节），并令

$$\mathcal{W}_\epsilon(x) = \mathfrak{tr}_\epsilon(\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}(x)), \quad \mathcal{W}_\epsilon^\pm(x) = \mathfrak{tr}_\epsilon(\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^\pm(x)) \quad (\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}). \tag{3.10}$$

注意，不应将 $\mathcal{W}_\epsilon(x)$ 与作为 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$-模的 $\mathcal{W}(x)$ 混淆。

我们指出，$\mathcal{W}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^\pm(x)$ 同构于 [20, 中引入的 $U_q(C_m^{(1)})$ 的 q-振子表示，命题 3]，；而 $\mathcal{W}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}^\pm(x)$ 同构于 $U_{\tilde{q}}(D_{m+1}^{(1)})$ 的一个自旋表示。

接下来，令 $\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}'}^{\otimes 2}(x)$ 表示命题 2.8 中关于 $\boldsymbol{\epsilon}'$（参见第 3.2 节）的 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$-模 $\mathcal{W}^{\otimes 2}(x)$，并令

$$\mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2}(x) = \mathfrak{tr}_\epsilon(\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}'}^{\otimes 2}(x)) \quad (\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}', \overline{\boldsymbol{\epsilon}}'). \tag{3.11}$$

在这种情况下，$\mathcal{W}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}^{\otimes 2}(x)$ 是 $U_{\tilde{q}}(C_m^{(1)})$ 的有限维表示，而 $\mathcal{W}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}^{\otimes 2}(x)$ 是 $U_q(D_{m+1}^{(1)})$ 的无限维表示。

4. Oscillator representations of $\mathfrak{sp}_{2n}$ and $\mathfrak{so}_{2n}$

第 2.5 节中的空间 $\mathcal{W}(x)$ 和 $\mathcal{W}^{\otimes 2}(x)$，限制到 $U_q(C_m)$ 和 $U_q(D_{m+1})$ 的表示时，分别是 $\mathfrak{sp}_{2m}$ 和 $\mathfrak{so}_{2m+2}$ 的无限维表示的 q- 类比，即所谓的振子表示。从 Howe 对偶的视角来看，它们各自都属于一个良好的半单张量范畴，该范畴由一族不可约表示生成。这些表示自然地产生于 Howe对偶的视角。本节将简要回顾这些表示。

我们假设采用以下记号：

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{so}_{2n}$ $(n \geq 4)$.
- $\mathtt{P} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varpi_i$: the weight lattice of $\mathfrak{g}$, where ϖ_i is the i-th fundamental weight,
- $\delta_1 = -\varpi_1$, $\delta_i = \begin{cases} \varpi_{i-1} - \varpi_i & \text{if } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n} \\ \varpi_{i-1} - \varpi_i - \delta_{i,n-1}\varpi_n & \text{if } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n} \end{cases}$ for $1 < i \leq n$,

- α_i: $\mathfrak{g}$的单根，其中 $\alpha_i = \delta_{i+1} - \delta_i$ 对应 $1 \le i < n$，而 $\alpha_n = -2\delta_n$ （分别 $-\delta_n - \delta_{n-1}$) if $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ (resp. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$).

注意到

$$\varpi_i = \varpi_n + \delta_n + \cdots + \delta_{i+1} \quad \text{if } 1 \le i < n, \quad (\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}),$$

$$\varpi_i = \begin{cases} \varpi_n + \delta_n & \text{if } i = n-1, \\ 2\varpi_n + \delta_n + \cdots + \delta_{i+1} & \text{if } 1 \le i < n-1, \end{cases} \quad (\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}),$$

因此 $\delta_1 + \cdots + \delta_n = -r\varpi_n$ 其中 $r = 1$ 对于 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 以及 $r = 2$ 对于 $\mathfrak{so}_{2n}$。对于 $\varpi \in \mathrm{P}$, 令$V(\varpi)$表示 $\mathfrak{g}$ 的最高权为 ϖ的不可约表示。

4.1. $(\mathfrak{sp}_{2n}, O_\ell)$ 与 $(\mathfrak{so}_{2n}, O_\ell)$ 的 Howe对偶。对于正整数 ℓ，令 O_ℓ 为复正交群，并且

$$\mathcal{P}(O_\ell) = \{\, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \mathbb{Z}_+^\ell \mid \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_\ell,\ \lambda'_1 + \lambda'_2 \le \ell \,\},$$

其中 $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$ 是作为分拆的 λ 的共轭。于是， $\mathcal{P}(O_\ell)$ 参数化了 O_ℓ 的有限维不可约表示，记为 $V_{O_\ell}(\lambda)$（参见 [3]）。对于 $\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)$，我们定义权 $\varpi_{\lambda,\mathfrak{g}} \in \mathrm{P}$ 为

$$\varpi_{\lambda,\mathfrak{sp}_{2n}} = \begin{cases} -\ell\varpi_n + \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{n-i+1} & \text{if } \ell(\lambda) \le n, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\varpi_{\lambda,\mathfrak{so}_{2n}} = \begin{cases} \ell\varpi_n + \sum_{i=1}^n \lambda'_i \delta_{n-i+1} & \text{if } \ell(\lambda') \le n, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

特别地，当 $\ell = 1$时，我们有 $\mathcal{P}(O_1) = \{(0), (1)\}$ 并且

$$\varpi_{(0),\mathfrak{g}} = \begin{cases} -\varpi_n, & \text{if } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}, \\ \varpi_n, & \text{if } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}, \end{cases} \qquad \varpi_{(1),\mathfrak{g}} = \begin{cases} -\varpi_n + \delta_n, & \text{if } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}, \\ \varpi_n + \delta_n = \varpi_{n-1}, & \text{if } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Let

$$\mathcal{P}(O_\ell)_\mathfrak{g} = \{\, \lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}(O_\ell),\ \varpi_{\lambda,\mathfrak{g}} \ne 0 \,\},$$

and

$$V(\lambda, \mathfrak{g}) = V(\varpi_{\lambda,\mathfrak{g}})$$

表示具有最高权 $\varpi_{\lambda,\ \mathfrak{g}}$ 的 $\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)_\mathfrak{g}$ 不可约 $\mathfrak{g}$模。为便于后续使用，我们还记作 $V_\mathfrak{g}^+ = V((0)\ \mathfrak{g})$ 和 $V_\mathfrak{g}^- = V((1)\ \mathfrak{g})$】【。

我们指出， $V(\lambda, \mathfrak{sp}_{2n})$是一种称为振子表示的无限维表示，而 $V(\lambda, \mathfrak{so}_{2n})$是有限维的，并且 $V(\lambda, \mathfrak{g})$对于 $\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)_\mathfrak{g}$ 满足以下对偶关系（例如参见 [11, 定理3.2(a)] 及其中的参考文献，或参见 [33,以无限秩李代数表述的定理 3.2 和 5.3] ）。

定理 **4.1.** 设

$$W_\mathfrak{g} = \begin{cases} S(\mathbb{C}^n) & \text{if } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}, \\ \Lambda(\mathbb{C}^n) & \text{if } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}. \end{cases}$$

那么，在 $W_{\mathfrak{g}}^{\otimes \ell}(\ell \geq 1)$ 上存在一个 $(\mathfrak{g}, O_\ell)$-作用，它给出如下作为 $(\mathfrak{g}, O_\ell)$-模的无重数分解:

$$W_{\mathfrak{g}}^{\otimes \ell} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)_{\mathfrak{g}}} V(\lambda, \mathfrak{g}) \otimes V_{O_\ell}(\lambda).$$

特别地，我们有 $W_{\mathfrak{g}} = V_{\mathfrak{g}}^{+} \oplus V_{\mathfrak{g}}^{-}$。

4.2. $(\mathfrak{so}_{2n}, Sp_{2\ell})$ 和 $(\mathfrak{sp}_{2n}, Sp_{2\ell})$ 的 Howe对偶。对于一个正整数 ℓ，令 $Sp_{2\ell}$ 为复辛群并

$$\mathcal{P}(Sp_{2\ell}) = \{\, \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathbb{Z}_+^\ell \,|\, \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_\ell \,\},$$

它为 $Sp_{2\ell}$ 的有限维不可约表示（例如 $V_{Sp_{2\ell}}(\lambda)$）提供参数化（参见 [3]）。对于 $\lambda \in \mathcal{P}(Sp_{2\ell})$，我们定义权 $\varpi'_{\lambda,\mathfrak{g}} \in \mathfrak{P}$ 为

$$\begin{aligned} \varpi'_{\lambda,\mathfrak{so}_{2n}} &= \begin{cases} -\ell\varpi_n + \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{n-i+1} & \text{if } \ell(\lambda) \leq n, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \varpi'_{\lambda,\mathfrak{sp}_{2n}} &= \begin{cases} \ell\varpi_n + \sum_{i=1}^n \lambda'_i \delta_{n-i+1} & \text{if } \ell(\lambda') \leq n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Let

$$\mathcal{P}(Sp_{2\ell})_{\mathfrak{g}} = \{\, \lambda \,|\, \lambda \in \mathcal{P}(Sp_{2\ell}),\ \varpi'_{\lambda,\mathfrak{g}} \neq 0 \,\},$$

and

$$V'(\lambda, \mathfrak{g}) = V(\varpi'_{\lambda,\mathfrak{g}})$$

表示具有最高权 $\varpi'_{\lambda,\ \mathfrak{g}}$ 的不可约 $\mathfrak{g}$-模，适用于 $\lambda \in \mathcal{P}(Sp_{2\ell})_{\mathfrak{g}}$。

在这种情况下， $V'(\lambda, \mathfrak{so}_{2n})$ 是无限维的，也称为振子表示，而 $V'(\lambda, \mathfrak{sp}_{2n})$ 是有限维的，并且 $V'(\lambda, \mathfrak{g})$对于 $\lambda \in \mathcal{P}(Sp_{2\ell})_{\mathfrak{g}}$ 满足以下对偶关系（例如参见， [11, 定理 3.2(b)], [33, 定理 3.4 和 5.2]）。

定理 4.2。设

$$W'_{\mathfrak{g}} = \begin{cases} S(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2} & \text{if } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}, \\ \Lambda(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2} & \text{if } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}. \end{cases}$$

于是，在$(W'_{\mathfrak{g}})^{\otimes \ell}(\ell \geq 1)$ 上存在一个$(\mathfrak{g}, Sp_{2\ell})$-作用，从而作为 $(\mathfrak{g}, Sp_{2\ell})$-模给出如下无重数分解:

$$(W'_{\mathfrak{g}})^{\otimes \ell} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}(Sp_{2\ell})_{\mathfrak{g}}} V'(\lambda, \mathfrak{g}) \otimes V_{Sp_{2\ell}}(\lambda).$$

特别地，我们有

$$W'_{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{(l) \in \mathcal{P}(Sp_2)_{\mathfrak{g}}} V'((l), \mathfrak{g})^{\oplus (l+1)}$$

其中 $\mathcal{P}(Sp_2)_{\mathfrak{so}_{2n}} = \{\, (l) \,|\, l \in \mathbb{Z}_+ \,\}$ 和 $\mathcal{P}(Sp_2)_{\mathfrak{sp}_{2n}} = \{\, (0), (1) \ldots, (n) \,\}$。

4.3. 范畴 $O^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc}}$ 和 $O^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc}}$。令 $(\mathfrak{g}, G_\ell)$ 表示第 4.1 节和第 4.2 节中的一对，其中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$, $\mathfrak{sp}_{2n}$ 和 $G = O, Sp$。令 L^λ 表示 $V(\lambda, \mathfrak{g})$ 或 $V'(\lambda, \mathfrak{g})$，其中 $\lambda \in \mathcal{P}(G_\ell)_{\mathfrak{g}}$。

假设给定 $\mu \in \mathcal{P}(G_\ell)_{\mathfrak{g}}$ 和 $\nu \in \mathcal{P}(G_{\ell'})_{\mathfrak{g}}$。由定理 4.1 和 4.2，$L^\mu \otimes L^\nu \subset W^{\otimes(\ell+\ell')_{\mathfrak{g}}}$ 或 $W'^{\otimes(\ell+\ell')}_{\mathfrak{g}}$ 是半单的，其中

$$L^\mu \otimes L^\nu = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}(G_{\ell+\ell'})_{\mathfrak{g}}} (L^\lambda)^{\oplus c^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{g},G)}, \tag{4.4}$$

重数 $c^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{g}, G)$ $(G = O, Sp)$ 由下式给出

$$c^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{g}, G) = \dim \mathrm{Hom}_{G_\ell \times G_{\ell'}} \left(V_{G_\ell}(\mu) \otimes V_{G_{\ell'}}(\nu), V_{G_{\ell+\ell'}}(\lambda) \right), \tag{4.5}$$

这可由考察 [11, 表 II 和 (3.16)] 中的互反对得出。特别地，由 (4.5) 可得

$$c^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{sp}_{2n}, G) = c^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{so}_{2n}, G), \tag{4.6}$$

只要它们非零。注意，$c^\lambda_{\mu\nu}(\mathfrak{g}, G)$ 是有限维不可约表示的重数，所对应的对象为 $(\mathfrak{g}, G) = (\mathfrak{so}_{2n}, O)$ 和 $(\mathfrak{sp}_{2n}, Sp)$。

例 4.3. 下面给出振子表示中 (4.4) 的一些例子。

(1) 假设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$。由 (4.6) 以及有限维 $\mathfrak{so}_{2n}$-模的 Littlewood-Richardson 规则（例如，见 [30]）可得

$$\begin{aligned} V^+_{\mathfrak{sp}_{2n}} \otimes V^+_{\mathfrak{sp}_{2n}} &= \bigoplus_{k\geq 0} V^{(2k,0)}_{\mathfrak{sp}_{2n}}, \\ V^+_{\mathfrak{sp}_{2n}} \otimes V^-_{\mathfrak{sp}_{2n}} &= \bigoplus_{k\geq 0} V^{(2k+1,0)}_{\mathfrak{sp}_{2n}}, \\ V^-_{\mathfrak{sp}_{2n}} \otimes V^-_{\mathfrak{sp}_{2n}} &= V^{(1,1)}_{\mathfrak{sp}_{2n}} \oplus \bigoplus_{k\geq 1} V^{(2k,0)}_{\mathfrak{sp}_{2n}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

(2) 假设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$。那么对于 $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_+$，有

$$V'((l_1), \mathfrak{so}_{2n}) \otimes V'((l_2), \mathfrak{so}_{2n}) = \bigoplus_{r\geq 0} \bigoplus_{0\leq k\leq \min(l_1,l_2)} V'((l_1+l_2+r-s, r+s), \mathfrak{so}_{2n}), \tag{4.8}$$

由 (4.6) 以及有限维 $\mathfrak{sp}_{2n}$-模的 Littlewood-Richardson 规则可得。

令 $O^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc}}$ 为如下 $\mathfrak{sp}_{2n}$-模的范畴：V 满足 $V = \bigoplus_{\ell\geq 1} V_\ell$，其中 V_ℓ 是 $\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)^{\mathfrak{sp}_{2n}}$ 的有限重数直和 $V(\lambda, \mathfrak{sp}_{2n})$，且对每个 λ，当 ℓ 充分大时，$V_\ell = 0$。类似地，我们以相同方式定义 $O^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc}}$ 为 $\mathfrak{so}_{2n}$-模的范畴，其中 $\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)^{\mathfrak{sp}_{2n}}$ 的 $V(\lambda, \mathfrak{sp}_{2n})$ 被 $\lambda \in \mathcal{P}(Sp_{2\ell})^{\mathfrak{so}_{2n}}$ 的 $V'(\lambda, \mathfrak{so}_{2n})$ 所取代。注意，对于 μ 的每个权，$\dim V_\mu < \infty$。

如果进一步假设 wt(V) 对于 $V \in O^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc}}$ for $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ 是有限支配的，那么$O^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于与 $\{\alpha_1, \dots \alpha_{n-1}\}$ 关联的 Levi 子代数的抛物型 BGG 范畴的一个满子范畴，并且根据 (4.4)，它在张量积下封闭。如果在 $O^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc}}$（分别为 $O^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc}}$）的定义中将 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 替换为 $\mathfrak{so}_{2n}$（分别将 $\mathfrak{so}_{2n}$ 替换为 $\mathfrak{sp}_{2n}$），那么相应的范畴就是有限维表示范畴。

命题 4.4. 范畴 $O^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc}}$ 和 $O^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc}}$ 是半单张量范畴。

证明。由 (4.4) 立即可得。 □

5. Quantum affine analogue of oscillator representations

本节中，我们引入一个 $U_q(X)$-模的范畴（$X = C_m^{(1)}, D_{m+1}^{(1)}$），可将其视为第 4 节中引入的 $O^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc}}$ ($\mathfrak{x} = \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$) 的量子仿射类比，“分别如此。更一般地，我们在第 3 节中为任意 ϵ 引入一个 $\mathcal{U}_\epsilon$-模范畴 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 。

5.1. 有限型子代数。我们沿用第 3 节中的记号。本节中，除非另有说明，我们假设 $\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}, \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}, \boldsymbol{\epsilon}', \underline{\boldsymbol{\epsilon}}', \overline{\boldsymbol{\epsilon}}'$。令

- $\mathring{\mathcal{U}}_\epsilon$：由 e_i, f_i, k_μ 生成的 $\mathcal{U}_\epsilon$ 的子代数，其中 $i \in I_\epsilon \setminus \{0\}$ 和 $\mu \in P_\epsilon$,
- $\mathring{\mathcal{U}}_\epsilon$：由 e_i、f_i、$k_{\delta_a}^{\pm 1}$ 生成的 $\mathcal{U}_\epsilon$ 的子代数，适用于 $i \in I_\epsilon \setminus \{0, n_\epsilon\}$ 和 $a \in \mathbb{I}_\epsilon$,

其中 n_ϵ 是 I_ϵ中的最大指标。我们分别将 P_ϵ 和 $\bigoplus_{a\in\mathbb{I}_\epsilon} \mathbb{Z}\delta_a$ 视为。 $\mathcal{U}_\epsilon$ 和 $\mathcal{U}_\epsilon$的权格。

$\mathring{}$子代数 $\mathcal{U}_\epsilon$ 是有限型 A的广义量子群。根据命题 2.1，在 τ（以及由 σ_i的扩张）下，它与一个一般线性李超代数所对应的量子超代数同构。下面简要回顾其多项式表示（参见 [2, 24]）。

设 $\mathbb{I}_\epsilon = \{i_1, i_2, \dots\}$，其中 $i_1 > i_2 > \dots$。对于一个分拆 $\nu = (\nu_i)_{i\geq 1}$，令 H_ν^ϵ表示形状为 ν 且条目取自 $\mathbb{I}_\epsilon$ 的杨表，其定义如下:

(1) 若 $\epsilon_{i_1} = 0$（分别地，$\epsilon_{i_1} = 1$），则用 i_1 填满 ν 的第一行（分别地，第一列）。

(2) 假设 ν 的一个子图 η 已用 $i_1, \dots, i_k$（$k \geq 1$）填满。若 $\epsilon_{i_{k+1}} = 0$（分别地，$\epsilon_{i_{k+1}} = 1$），则用 i_{k+1} 填满 ν/η 的第一行（分别地，第一列）。

令 $\mathscr{P}_\epsilon$ 为使 H_ν^ϵ 定义良好的 ν 集合（参见 [6]）。对于 $\nu \in \mathscr{P}_\epsilon$，令 $V_\epsilon(\nu)$ 为 $\mathring{}$不可约最高权 $\mathcal{U}(\epsilon)$-模，其最高权为 $\sum_{i\in\mathbb{I}_\epsilon} m_i\delta_i$，其中 m_i 是杨表 H_ν^ϵ 中 i 的个数。回忆一下，张量积 $V_\epsilon(\eta) \otimes V_\epsilon(\zeta)$ 是 $\eta, \zeta \in \mathscr{P}_\epsilon$ 的 $V_\epsilon(\nu)$ 的有限直和。

对于 $m \geq 2$，设

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(m)} = (\underbrace{1, 0, 1, \dots, 1, 0, 1}_{2m+1}). \tag{5.1}$$

选取一个单射 $\iota_m : \mathbb{I}_{\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}} \longrightarrow \mathbb{I}_{\boldsymbol{\epsilon}^{(m+1)}}$，使得对 $k < l$, $\epsilon_i = \epsilon_{\iota_m(i)}$中的所有 i，都有 $\iota_m(k) < \iota_m(l)$，且 $\{1, 2, 2m+2, 2m+3\} \subset \iota_m(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}})$。将 $\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}$ 视为 $\boldsymbol{\epsilon}^{(m+1)}$的一个子序列 $\mathring{}$对应于子序列 $\iota_m(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}})$，我们有一个从 $\phi_m : \mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}} \longrightarrow$的同态 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}^{(m+1)}}$ 根据 [24, 定理 4.3]，，它自然地扩展为一个同态 $\phi_m : \mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}} \longrightarrow \mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}^{(m+1)}}$。因此，我们可以像命题 3.2 中的 $\mathring{}$一样定义一个函子 $\mathfrak{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}_{(m+1)}}_{\boldsymbol{\epsilon}_{(m)}} : \mathcal{C}(\boldsymbol{\epsilon}_{(m+1)}) \longrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{\epsilon}_{(m)})$，它也定义在权满足相同条件的 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}^{(m+1)}}$-模上。

一般而言，对于 $\boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\epsilon}^{(m_1)}$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_2 = \boldsymbol{\epsilon}^{(m_2)}$，其中 $m_2 < m_1$，通过复合 $\mathfrak{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}^{(m+1)}}_{\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}}$，我们得到函子 $\mathfrak{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}_1}_{\boldsymbol{\epsilon}_2}$。类似地，我们可以定义函子 $\mathfrak{tr}^{\underline{\boldsymbol{\epsilon}_1}}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}_2}}$和 $\mathfrak{tr}^{\overline{\boldsymbol{\epsilon}_1}}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}_2}}$。对于.....的情形，同样成立

.....的情形

$$\boldsymbol{\epsilon}'^{(m)} = (\underbrace{0,1,0,\dots,0,1,0}_{2m+1}). \tag{5.2}$$

“ 5.2. 范畴 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 和 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\epsilon_\circ}$ 设 $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$，并假设

$$\epsilon = \begin{cases} \boldsymbol{\epsilon},\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}},\ \overline{\boldsymbol{\epsilon}} & \text{when } \mathfrak{x} = \mathfrak{c}, \\ \boldsymbol{\epsilon}',\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}',\ \overline{\boldsymbol{\epsilon}}' & \text{when } \mathfrak{x} = \mathfrak{d}. \end{cases} \tag{5.3}$$

对于 $x \in \Bbbk^\times$，设

$$\mathscr{W}_\epsilon(x) = \begin{cases} \mathcal{W}_\epsilon(x) & \text{when } \mathfrak{x} = \mathfrak{c}, \\ \mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2}(x) & \text{when } \mathfrak{x} = \mathfrak{d}. \end{cases} \tag{5.4}$$

当将它们视为 $\mathring{\mathcal{U}}_\epsilon$-模时，我们简记为 $\mathscr{W}_\epsilon = \mathscr{W}_\epsilon(x)$ 和 $\mathcal{W}_\epsilon^\pm = \mathcal{W}_\epsilon^\pm(x)$。

引理 5.1. 对于 $\ell \geq 1$, $\mathscr{W}_\epsilon^{\otimes \ell}$ 是半单的 $\mathring{\mathcal{U}}_\epsilon$-模，并且它是 $V_\epsilon(\nu)$ 的直和，其中 $\nu \in \mathscr{P}_{\epsilon\circ}$

证明。对于 $l \geq 0$，令 $(\mathcal{W}_\epsilon)_l$ 为由 $|\mathrm{m}\rangle$（其中 $|\mathrm{m}| = l$）张成的 $\mathcal{W}_\epsilon$ 子空间。于是我们有 $(\mathcal{W}_\epsilon)_l \cong V_\epsilon((l))$。这就证明了该结论。□

引理 5.2. 对于 $\ell \geq 1$， $\mathscr{W}_\epsilon^{\otimes \ell}$是一个半单的 $\mathring{\mathcal{U}}_\epsilon$-模。

证明。情形 1. 假设 $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$。我们在 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 上定义一个反对合 η，如下：

$$\eta(k_\mu) = k_\mu,$$

$$\eta(e_i) = \begin{cases} (-q^2)^{\epsilon_i - \epsilon_{i+1}} q_i f_i k_i^{-1} & \text{if } 1 \leq i < n, \\ q_n f_n k_n^{-1} & \text{if } i = n, \end{cases}$$

$$\eta(f_i) = \begin{cases} (-q^2)^{\epsilon_{i+1} - \epsilon_i} q_i^{-1} k_i e_i & \text{if } 1 \leq i < n, \\ q_n^{-1} k_n e_n & \text{if } i = n, \end{cases}$$

对于 $\mu \in P_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 和 $i \in I_{\boldsymbol{\epsilon}} \setminus \{0\}$。于是我们有 $(\eta \otimes \eta) \circ \Delta = \Delta \circ \eta$。我们在 $\mathscr{W}_{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 上定义一个非退化对称双线性形式如下：

$$(|\mathbf{m}\rangle, |\mathbf{m}'\rangle) = \delta_{\mathbf{m},\mathbf{m}'} q^{-\sum_{i \in \mathbb{I}_{\boldsymbol{\epsilon}}} \frac{m_i(m_i-1)}{2}} \prod_{i \in \mathbb{I}_{\boldsymbol{\epsilon}}} [m_i]!, \tag{5.5}$$

对于 m， $\mathrm{m}' \in \mathbb{Z}_+^n(\epsilon)$。忽略 k_Λ 的作用后，我们可以假设 $\Bbbk = \mathbb{Q}(q)$。若令 $\mathcal{L}_\infty = \sum A_\infty |\mathrm{m}\rangle$，其中 $A_\infty = \{f \in \Bbbk \,|\, f \text{ 在 } q = \infty\}$ 处正则，则 $(\mathcal{L}_\infty, \mathcal{L}_\infty) \subset A_\infty$。因此，我们在 $\mathcal{L}_\infty / q^{-1}\mathcal{L}_\infty$ 上得到一个取值于 $\mathbb{Q}$ 的诱导形式；该形式是正定的，因为 $\{\, |\mathrm{m}\rangle \,|\, \mathrm{m} \in \mathbb{Z}_+^n(\boldsymbol{\epsilon}) \,\}$ 在 $\mathcal{L}_\infty / q^{-1}\mathcal{L}_\infty$ 中的像构成一个正交归一基。

对于 $u \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 和 $v, w \in \mathscr{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}$，有 $(uv, w) = (v, \eta(u)w)$，这很容易验证。因此，根据 [2, 定理 2 的证明中的论证，$\mathscr{W}_\epsilon^{\otimes \ell}(\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}, \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}})$ 的半单性得以成立（另见 [23, 引理 6 的证明）。

°情形 2. 假设 $\mathfrak{x}=\mathfrak{d}$。在这种情况下，我们定义 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$ 上的一个反对合 η'，如下:

$$\eta'(k_\mu)=k_\mu,$$
$$\eta'(e_i)=\begin{cases}(-q^2)^{\epsilon_i-\epsilon_{i+1}}q_if_ik_i^{-1} & \text{if } 1\le i<n,\\ (-q^{-2})q_nf_nk_n^{-1} & \text{if } i=n,\end{cases}$$
$$\eta'(f_i)=\begin{cases}(-q^2)^{\epsilon_{i+1}-\epsilon_i}q_i^{-1}k_ie_i & \text{if } 1\le i<n,\\ (-q^2)q_n^{-1}k_ne_n & \text{if } i=n,\end{cases}$$

f或 $\mu\in P_{\boldsymbol{\epsilon}'}$ $i\in I_{\boldsymbol{\epsilon}'}\setminus\{0\}$，以及 $\mathscr{W}_{\boldsymbol{\epsilon}'}=\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}'}^{\otimes 2}$ b 上的非退化对称双线性形式 y

$$(|\mathbf{m}\rangle\otimes|\mathbf{m}'\rangle,|\mathbf{m}''\rangle\otimes|\mathbf{m}'''\rangle)=(|\mathbf{m}\rangle,|\mathbf{m}''\rangle)(|\mathbf{m}'\rangle,|\mathbf{m}'''\rangle),$$

其中右端的双线性形式由式 (5.5) 给出。然后，我们采用情形 1 中的相同论证，得出 $\mathscr{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{\otimes\ell}$ 是半单的。□

设 $\ell\ge 1$ 给定，并令 G_ℓ 表示 O_ℓ 或 $Sp_{2\ell}$。对于 $\lambda\in\mathcal{P}(G_\ell)$，令

$$\Lambda_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}}=\begin{cases}r\ell\Lambda+\sum_{i\in\mathbb{I}_{\boldsymbol{\epsilon}}}m_i\delta_i & \text{if } \lambda\in\mathscr{P}_{\boldsymbol{\epsilon}},\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

whe分别令 $r=1$ 对应 $\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$、$r=2$ 对应 $\mathfrak{x}=\mathfrak{d}$，而 m_i 是 $H_\lambda^{\boldsymbol{\epsilon}}$ 中 i 出现的次数。Pu t

$$\mathcal{P}(G_\ell)_{\boldsymbol{\epsilon}}=\{\,\lambda\in\mathcal{P}(G_\ell)\,|\,\Lambda_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}}\ne 0\,\}=\mathcal{P}(G_\ell)\cap\mathscr{P}_{\boldsymbol{\epsilon}}.$$

定义 5.3. 对于 $\lambda\in\mathcal{P}(G_\ell)_{\boldsymbol{\epsilon}}$，令 $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\epsilon}}^\lambda$ 为最高权为 $\Lambda_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}}$ 的不可约最高权 $\mathring{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{\epsilon}}$-模。

例如，当 $\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$ 时，我们有

$$\mathcal{V}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{(0)}=\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{+},\quad \mathcal{V}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)}=\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{-}. \tag{5.6}$$

注 5.4. (1) 假设 $\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$，并令 $\boldsymbol{\epsilon}=\underline{\boldsymbol{\epsilon}},\overline{\boldsymbol{\epsilon}}$。我们假设，对于 $\boldsymbol{\epsilon}=\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_{2m}$；对于 $\boldsymbol{\epsilon}=\overline{\boldsymbol{\epsilon}}$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2(m+1)}$。若将第4节中的 P 视为 $P_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 的一个子群，并令$\varpi_m=-\Lambda$（分别为 $\varpi_{m+1}=\Lambda$），且当 $\boldsymbol{\epsilon}=\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$（分别为 $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}$）时，$1\le i\le m$ 的 $\delta_i=\delta_{2i}$（分别为 $1\le i\le m+1$的 $\delta_i=\delta_{2i-1}$），则有 $\mathcal{P}(O_\ell)_{\boldsymbol{\epsilon}}=\mathcal{P}(O_\ell)_{\mathfrak{g}}$，以及 $\Lambda_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}}=\varpi_{\lambda,\mathfrak{g}}$ (4.1)，其中 $\lambda\in\mathcal{P}(O_\ell)_{\boldsymbol{\epsilon}}$。因此，$\mathcal{V}_{\boldsymbol{\epsilon}}^\lambda$是 q-类比的 $V(\lambda,\mathfrak{g})$。

(2) 假设 $\mathfrak{x}=\mathfrak{d}$，并令 $\boldsymbol{\epsilon}=\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'$、$\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'$。我们假设，对于 $\boldsymbol{\epsilon}=\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2(m+1)}$；对于 $\boldsymbol{\epsilon}=\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_{2m}$。若将 P 视为 $P_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 的一个子群，并令 $\varpi_{m+1}=-\Lambda$（分别为$\varpi_m=2\Lambda$），且当 $\boldsymbol{\epsilon}=\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'$（分别为$\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'$）时，对 $1\le i\le m$ 有 $\delta_i=\delta_{2i}$（分别对 $1\le i\le m+1$有 $\delta_i=\delta_{2i-1}$），则有 $\mathcal{P}(Sp_{2\ell})_{\boldsymbol{\epsilon}}=\mathcal{P}(Sp_{2\ell})_{\mathfrak{g}}$，以及 $\Lambda_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}}=\varpi'_{\lambda,\mathfrak{g}}$ (4.3)，其中 $\lambda\in\mathcal{P}(Sp_{2\ell})_{\boldsymbol{\epsilon}}$。因此，$\mathcal{V}_{\boldsymbol{\epsilon}}^\lambda$ 是 $V'(\lambda,\mathfrak{g})$ 的一个 q-类比。

引理 5.5. $\mathscr{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{\otimes\ell}$ 中的最高权 $\mathring{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{\epsilon}}$-子模同构于 $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\epsilon}}^\lambda$，其中 $\lambda\in\mathcal{P}(G_\ell)_{\boldsymbol{\epsilon}}$。

证明. 我们只证明 $\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$ 的情形，因为 $\mathfrak{x}=\mathfrak{d}$ 的证明几乎相同。

令 V 为 $\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{\otimes\ell}$ 的一个最高权 $\mathring{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 子模，其最高权向量为 v；由引理 5.2 可知它不可约。

情况 1.假设 $\epsilon = \underline{\epsilon}, \overline{\epsilon}$。由注2.7和(4.2)，经典极限 $\overline{\mathcal{W}_\epsilon^\tau}$ 的$\mathcal{W}_\epsilon = \mathcal{W}_\epsilon^+ \oplus \mathcal{W}_\epsilon^-$同构于 $W_\mathfrak{g} = V_\mathfrak{g}^+ \oplus V_\mathfrak{g}^-$。由引理2.3 和定理 4.1，经典极限 $\overline{V^\tau}$的 V等于 $V_\mathfrak{g}^\lambda$，其中某个 $\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)_\epsilon$（见第2.3节），因此 v 的权是 $\Lambda_{\lambda,\epsilon}$，由注 5.4 可知。

情形 2。假设 $\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}$。由引理 5.1，作为一个 $\mathring{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{\epsilon}}$-模，我们有 $V = \bigoplus_{\nu \in S} V_{\boldsymbol{\epsilon}}(\nu)^{\oplus m_\nu}$，其中某个 $S \subset \mathscr{P}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 和 $m_\nu > 0$ 满足 $\nu \in S$。若对于某个 $\nu \in S$，$v \in V_{\boldsymbol{\epsilon}}(\nu)$，则 $|\nu| = \sum_{i \geq 1} \nu_i$ 在 $\eta \in S$中是极小的。

注意，对于某个 $\overline{S} \subset S$，$\mathrm{tr}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(V) = \bigoplus_{\nu \in \overline{S}} V_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\nu)^{\oplus m_\nu}$，因为若 $\nu \in \mathscr{P}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$，则 $\mathrm{tr}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(V_{\boldsymbol{\epsilon}}(\nu)) = V_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\nu)$，否则为 0（[24, 命题 4.5]）。由于 $\mathrm{tr}_{\boldsymbol{\epsilon}(m)}^{\boldsymbol{\epsilon}(m+1)}(\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}(m+1)}) \cong \mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}(m)} = \mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}$（参见第 5.1），我们可以假设 m 足够大，因此 $\nu \in \overline{S}$。设 w 为 $V_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\nu) \subset \mathrm{tr}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(V)$ 中的一个 $\mathcal{U}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$-最高权向量。由 ν的极小性可知，w 也是一个 $\mathcal{U}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$-最高权向量。根据情形 1，$w$ 的$\mathcal{U}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$-权为$\Lambda_{\nu,\ \overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$，这意味着 v 的权为$\Lambda_{\nu,\ \boldsymbol{\epsilon}}$。□

定理 5.6. 设 $(\epsilon,\ \underline{\epsilon},\ \overline{\epsilon}) = (\boldsymbol{\epsilon},\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}},\ \overline{\boldsymbol{\epsilon}})$ 或 $(\boldsymbol{\epsilon}',\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}',\ \overline{\boldsymbol{\epsilon}}')$，且给定 $\lambda \in \mathcal{P}(G_\ell)_\epsilon$。则

(1) $\mathcal{V}_\epsilon^\lambda$中的权集合满足

$$\mathrm{wt}(\mathcal{V}_\epsilon^\lambda) \subset r\ell\Lambda + \sum_{i \in \mathbb{I}_\epsilon} \mathbb{Z}_+ \delta_i,$$

(2) $\mathcal{V}_\epsilon^\lambda$在 $\mathrm{tr}_{\epsilon'}$ 下的像为

$$\mathrm{tr}_{\epsilon'}\left(\mathcal{V}_\epsilon^\lambda\right) \cong \begin{cases} \mathcal{V}_{\epsilon'}^\lambda & \text{if } \lambda \in \mathcal{P}(G_\ell)_{\epsilon'}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad (\epsilon' = \underline{\epsilon}, \overline{\epsilon}).$$

证明。证明与 [23, 定理 6.17]类似。为方便读者，我们给出一个自包含的证明。此外，我们只证明 $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ 的情形，因为$\mathfrak{x} = \mathfrak{d}$ 的证明类似。

我们在引理 5.5 的证明中已经看到，对于 $\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}},\ \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$

$$\mathcal{W}_\epsilon^{\otimes \ell} \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)_\epsilon} \mathcal{V}_\epsilon^{\lambda \oplus d^\lambda}, \tag{5.7}$$

其中 d^λ 是$V_{O_\ell}(\lambda)$的维数。再次由引理 5.5，我们有

$$\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{\otimes \ell} \cong \bigoplus_{\lambda \in S} \mathcal{V}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{\lambda \oplus d_{\boldsymbol{\epsilon}}^\lambda},$$

对于某个 $S \subset \mathcal{P}(O_\ell)_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 和 $d_{\boldsymbol{\epsilon}}^\lambda \in \mathbb{N}$。

步骤 1. 考虑$\epsilon = \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$的情形。设 $\lambda \in S$ 给定，并设 $V = \mathcal{V}_{\boldsymbol{\epsilon}}^\lambda$具有一个最高权向量 v。

假设 $\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$。那么我们有 $V_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\lambda) \subset \mathrm{tr}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(V)$，因为 $v \in V_{\boldsymbol{\epsilon}}(\lambda)$ 是一个 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}$-模，且 $\mathrm{tr}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(V_{\boldsymbol{\epsilon}}(\lambda)) = V_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\lambda) \neq 0$。由此，根据 λ in$V$ 的极小性可得 $\mathcal{V}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}^\lambda \subset \mathrm{tr}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(V)$（参见引理 5.5）。为证明等式，我们考虑经典极限 $\overline{V^\tau}$，它是一个最高权 $U(\mathfrak{osp}(\boldsymbol{\epsilon}))$-模，最高权为 $\Lambda_{\lambda,\ \boldsymbol{\epsilon}}$（由引理 2.3）。我们可以像 (3.5) 中那样定义$\mathrm{tr}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}\left(\overline{V^\tau}\right)$ in，它是一个 $U(\mathfrak{so}_{2(m+1)})$-模。现在，采用引理 3.5] 的证明中的相同方法，我们得出 $\mathrm{tr}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}\left(\overline{V^\tau}\right)$ 也是一个最高权

$U(\mathfrak{so}_{2(m+1)})$-模，最高权为 $\Lambda_{\lambda,\overline{\epsilon}}$，因此它是不可约的，因为它是可积的。这意味着 $\mathrm{tr}_{\overline{\epsilon}}(V) = \mathcal{V}^{\lambda}_{\overline{\epsilon}}$。

假设 $\lambda \notin \mathcal{P}(O_\ell)_{\overline{\epsilon}}$。选取 $\epsilon_0 = \epsilon^{(m_0)}$ 使得 $\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)_{\overline{\epsilon_0}}$。我们有 $\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon_0} \subset \mathcal{W}_{\epsilon_0}(x)^{\otimes \ell}$ 以及 $\mathrm{tr}^{\epsilon_0}_{\epsilon}\left(\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon_0}\right) = V$（参见 [23, 引理 6.16]）。此外，根据前面的论证，我们有$\mathrm{tr}^{\epsilon_0}_{\overline{\epsilon_0}}\left(\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon_0}\right) \cong \mathcal{V}^{\lambda}_{\overline{\epsilon_0}}$。由于 $\mathrm{tr}^{\overline{\epsilon_0}}_{\overline{\epsilon}}(\mathcal{V}^{\lambda}_{\overline{\epsilon_0}}) = 0$，我们有

$$0 = \mathrm{tr}^{\overline{\epsilon_0}}_{\overline{\epsilon}}(\mathcal{V}^{\lambda}_{\overline{\epsilon_0}}) = \mathrm{tr}^{\overline{\epsilon_0}}_{\overline{\epsilon}} \circ \mathrm{tr}^{\epsilon_0}_{\overline{\epsilon_0}}\left(\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon_0}\right) = \mathrm{tr}^{\epsilon}_{\overline{\epsilon}} \circ \mathrm{tr}^{\epsilon_0}_{\epsilon}\left(\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon_0}\right) = \mathrm{tr}^{\epsilon}_{\overline{\epsilon}}(V)\,.$$

步骤 2. 假设给定了 $\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)_{\epsilon}$。再次考虑如上所选的 $\epsilon_0 = \epsilon^{(m_0)}$。由步骤 1，我们有 $\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon_0} \subset \mathcal{W}^{\otimes \ell}_{\epsilon_0}$，且 $\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon} = \mathrm{tr}^{\epsilon_0}_{\epsilon}\left(\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon_0}\right) \subset \mathcal{W}_{\epsilon}(x)^{\otimes \ell}$，即 $\lambda \in S$。因此，我们有 $S = \mathcal{P}(O_\ell)_{\epsilon}$，并由步骤 1 得到 $d^{\lambda}_{\epsilon} = d^{\lambda}$。特别地，我们有 $\mathrm{wt}(\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon}) \subset \ell\Lambda + \sum_{i\in\mathbb{I}_{\epsilon}} \mathbb{Z}_+\delta_i$。

步骤 3。考虑 $\epsilon = \underline{\epsilon}$ 的情形。设给定 $\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)_{\underline{\epsilon}} \subset \mathcal{P}(O_\ell)_{\epsilon}$。设 v 是 $\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon}$ 中的一个最高权向量。由步骤 2 可得 $\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon} \subset \mathcal{W}_{\epsilon}(x)^{\otimes \ell}$，并可由引理 5.1 假设 $v \in V_{\epsilon}(\lambda)$。

若 w 是 $V_{\underline{\epsilon}}(\lambda) = \mathrm{tr}^{\epsilon}_{\underline{\epsilon}}(V_{\epsilon})$ 中的一个 $\mathcal{U}_{\underline{\epsilon}}$-最高权向量，则由 $\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon}$ 中 λ 的极小性（参见引理 5.5）可知，w 是一个 $\mathring{\mathcal{U}}_{\underline{\epsilon}}$-最高权向量。由引理 5.5，由 w 生成的最高权$\mathring{\mathcal{U}}_{\underline{\epsilon}}$-模同构于 $\mathcal{V}^{\lambda}_{\underline{\epsilon}}$，并且

$$\mathcal{V}^{\lambda}_{\underline{\epsilon}} \subset \mathrm{tr}^{\epsilon}_{\underline{\epsilon}}\left(\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon}\right). \tag{5.8}$$

由 (5.7) 和步骤 2 可知，(5.8) 中的等式成立，并且对于 $\lambda \in \mathcal{P}(O_\ell)_{\epsilon} \setminus \mathcal{P}(O_\ell)_{\underline{\epsilon}}$，有 $\mathrm{tr}^{\epsilon}_{\underline{\epsilon}}\left(\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon}\right) = 0$。□

推论 5.7. 对于每个 ϵ，我们有如下分解：

$$\mathscr{W}_{\epsilon}^{\otimes \ell} \cong \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}(G_\ell)_{\epsilon}} \mathcal{V}_{\epsilon}^{\lambda\,\oplus d^{\lambda}},$$

其中 $d^{\lambda} =$ 维 $V_{G_\ell}(\lambda)$。

定义 5.8. 设 $\mathcal{O}^{\mathfrak{r}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 为 $\mathcal{U}_{\epsilon}$-模的范畴 V，满足 $V = \bigoplus_{\ell\geq 1} V_\ell$，其中$V_\ell$ 是 $\lambda \in \mathcal{P}(G_\ell)$ 的 $\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon}$ 直和$_{\epsilon}$，每个 λ 的重数有限，并且对于所有充分大的 ℓ，$V_\ell = 0$】【。

命题 5.9。范畴$\mathcal{O}^{\mathfrak{r}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 是一个半单张量范畴。

证明。设给定 $\mu \in \mathcal{P}(G_\ell)_{\epsilon}$ 和 $\nu \in \mathcal{P}(G_{\ell'})_{\epsilon}$。由推论 5.7 可知，$\mathcal{V}^{\mu}_{\epsilon} \otimes \mathcal{V}^{\nu}_{\epsilon} \subset \mathscr{W}_{\epsilon}^{\otimes(\ell+\ell')}$是半单的，其中

$$\mathcal{V}^{\mu}_{\epsilon} \otimes \mathcal{V}^{\nu}_{\epsilon} = \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}(O_{\ell+\ell'})_{\epsilon}} (\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon})^{\oplus c^{\lambda}_{\mu\nu}(\epsilon)},$$

对于某些 $c^{\lambda}_{\mu\nu}(\epsilon) \in \mathbb{Z}_+$。这意味着 $V_\ell \otimes W_{\ell'} \in \mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 对于 $V, W \in \mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$，因此 $V \otimes W \in \mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$。□

现在我们定义如下。

“ 定义 5.10. 设 $\mathcal{O}^{\mathfrak{r}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 为 $\mathcal{U}_{\epsilon}$-模 V的范畴，其中当限制为 $\mathcal{U}_{\epsilon}$-模时，V属于 $\mathcal{O}^{\mathfrak{r}}$振子 $_{\epsilon}$。

“根据定理 5.6(1)，范畴 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 是 $\mathcal{C}(\epsilon)$ 的满子范畴，并且对取子模和商模封闭。根据命题 5.9，它对张量积也封闭。对于 $x \in \Bbbk^\times$，由推论 5.7 可知，$\mathscr{W}_\epsilon(x)^{\otimes \ell} \in$ “$\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ $(\ell \geq 1)$。注意，当 $\epsilon = \overline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}'$ 时，“$\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 中的 $\mathcal{U}_\epsilon$-模是有限维的。如果进一步假设 $\mathsf{wt}(V)$ 是有限“ “占优的，那么 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\epsilon}(\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \underline{\boldsymbol{\epsilon}}')$ 是 [29]中引入的 $\mathcal{O}$ 的子范畴。

命题 5.11. 假设 $(\epsilon, \underline{\epsilon}, \overline{\epsilon}) = (\boldsymbol{\epsilon}, \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}})$，且 $(\boldsymbol{\epsilon}', \underline{\boldsymbol{\epsilon}}', \overline{\boldsymbol{\epsilon}}')$ 分别对应 $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$。“那么，$\mathrm{tr}^{\epsilon}_{\underline{\epsilon}}$ 和 $\mathrm{tr}^{\epsilon}_{\overline{\epsilon}}$ 在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 上的限制给出了定义良好的正合幺半函子

$$\widehat{\mathcal{O}}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc}\ \epsilon} \xrightarrow{\mathrm{tr}^{\epsilon}_{\underline{\epsilon}}} \widehat{\mathcal{O}}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\underline{\epsilon}}, \qquad \widehat{\mathcal{O}}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc}\ \epsilon} \xrightarrow{\mathrm{tr}^{\epsilon}_{\overline{\epsilon}}} \widehat{\mathcal{O}}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\overline{\epsilon}}.$$

证明。由定理 5.6(2) 可得。 □

5.3. 普适 R 矩阵。令 z 为一个不定元。对于 $\mathcal{C}(\epsilon)$ 中的一个 $\mathcal{U}_\epsilon$-模 V，我们令 $V_{\mathrm{aff}} = \Bbbk[z, z^{-1}] \otimes V$为 V 的仿射化，它按通常方式定义为一个 $\mathcal{U}_\epsilon$-模，即，k_μ、e_i 和 f_i 分别作用为 $1 \otimes k_\mu$、$z^{\delta_{i,0}} \otimes e_i$ 和 $z^{-\delta_{i,0}} \otimes f_i$（$\mu \in P_\epsilon$, $i \in I_\epsilon$）。对于$x \in \Bbbk^\times$，令 $V_x = V_{\mathrm{aff}}/(z - x)V_{\mathrm{aff}}$，其中我们将映射 $g(z) \otimes v$到$zg(z) \otimes v$ （ $g(z) \otimes v \in V_{\mathrm{aff}}$）理解为 $\mathcal{U}_\epsilon$-模的同构。例如，若 $V = \mathcal{W}_\epsilon(1)$，则对于 $x \in \Bbbk^\times$ 有 $V_x = \mathcal{W}_\epsilon(x)$。

令 V, W 为 $\mathcal{C}(\epsilon)$ 中的 $\mathcal{U}_\epsilon$-模，并令 $V_{\mathrm{aff}} = \Bbbk[z_1, z_1^{-1}] \otimes V$ 和 $W_{\mathrm{aff}} = \Bbbk[z_2, z_2^{-1}] \otimes W$，其中 z_1, z_2 为不定元。取完备化 V_{aff}“$\otimes W_{\mathrm{aff}}$ 和 W_{aff}‹$\otimes V_{\mathrm{aff}}$，其定义如 [15, 第 7] 节所述，并相对于适当扩展的权格（例如 $\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}$ 时的 P^e_{af}）进行。令 $\Pi_{\mathbf{q}}\colon V_{\mathrm{aff}}$“$\otimes W_{\mathrm{aff}} \longrightarrow V_{\mathrm{aff}}$“ $\otimes W_{\mathrm{aff}}$ 定义如下:

$$\Pi_{\mathbf{q}}(v \otimes w) = \mathbf{q}(\mu, \nu)\, v \otimes w,$$

对于 $v = f(z_1) \otimes v_0 \in V_{\mathrm{aff}}$ 和 $w = g(z_2) \otimes w_0 \in W_{\mathrm{aff}}$，其中 $v_0 \in V_\mu$ 和 $w_0 \in W_\nu$。令 $s\colon V_{\mathrm{aff}}$“$\otimes W_{\mathrm{aff}} \longrightarrow W_{\mathrm{aff}}$‹$\otimes V_{\mathrm{aff}}$ 为由 $s(v \otimes w) = w \otimes v$ 给出的映射。于是，如 [27, 定理 32.1.5], 中所述，我们有一个 $\mathcal{U}_\epsilon$-模的同构

$$\mathcal{R}^{\mathrm{univ}} := \Theta \circ \Pi_{\mathbf{q}} \circ s : V_{\mathrm{aff}} \widehat{\otimes} W_{\mathrm{aff}} \longrightarrow W_{\mathrm{aff}} \widetilde{\otimes} V_{\mathrm{aff}} \tag{5.9}$$

（参见 [22, 定理 3.7]）。

6. Irreducible representations in $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$

“ 在本节中，我们在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 中构造一族不可约表示，并解释 q 型振子表示与 $D^{(1)}_{m+1}$ 型有限维不可约表示之间的联系。我们采用第 3.1 节和第 5.2 节中的记号。

6.1. $\mathcal{W}^{\sigma_1}_\epsilon(x) \otimes \mathcal{W}^{\sigma_2}_\epsilon(y)$上的归一化 R 矩阵。对于 $\sigma \in \{+, -\}$，令 $\mathcal{W}^\sigma_\epsilon = \mathcal{W}^\sigma_\epsilon(1)$，并令 v^σ_ϵ 为 $\mathcal{W}^\sigma_\epsilon$ 中的一个 $\mathcal{U}_\epsilon$-最高权向量，由以下给出。

$$v^\sigma_\epsilon = \begin{cases} |\mathbf{0}\rangle & \text{if } \sigma = +, \\ |\mathbf{e}_{i_\epsilon}\rangle & \text{if } \sigma = -, \end{cases}$$

其中 i_ϵ 是 $\mathbb{I}_\epsilon$ 中最大的元素。

命题 6.1. 对于 $\sigma_1,\sigma_2\in\{+,-\}$ 和一般的 $x_1,x_2\in\Bbbk^\times$, $\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_1}(x_1)\otimes\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_2}(x_2)$ 是一个不可约 $\mathcal{U}_\epsilon$-模。

证明。当 $\epsilon=\overline{\boldsymbol{\epsilon}}$ 和 $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ 的情形已知时（分别见 [1] 和 [20], ）。只需证明 $\epsilon=\boldsymbol{\epsilon}$ 的情形。设 $\sigma_1=\sigma_2=+$。注意到 $\mathcal{W}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^+(x_1)\otimes\mathcal{W}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^+(x_2)\subset\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^+(x_1)\otimes\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^+(x_2)$，并且

$$\mathcal{W}_\epsilon^+(x_1)\otimes\mathcal{W}_\epsilon^+(x_2)\cong\bigoplus_{k\geq0}\mathcal{V}_\epsilon^{(2k,0)}\quad(\epsilon=\boldsymbol{\epsilon},\underline{\boldsymbol{\epsilon}}),$$

由 (4.7) 和定理 5.6（参见注 5.4），$^\circ$是一个 $\mathcal{U}_\epsilon$-模，因为 $\mathcal{P}(O_2)_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}=\mathcal{P}(O_2)_{\boldsymbol{\epsilon}}$。

设 V 是 $\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^+(x_1)\otimes\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^+(x_2)$ 的一个非零 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}$-子模。任取非零的 $v\in V$，通过施加 e_{2i-1}、$f_{2i-2}\in\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}(i=1,2,\dots,m+1)$ 的作用，我们可以在 $\mathcal{W}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^+(x_1)\otimes\mathcal{W}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^+(x_2)$ 中得到一个非零向量。这意味着 V 包含 $\mathcal{W}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^+(x_1)\otimes\mathcal{W}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^+(x_2)$，因为后者是不可约的。对于 $k\geq0$，有 $\mathcal{V}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^{(2k,0)}\subset\mathcal{V}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2k,0)}$，因此 $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2k,0)}\subset V$。于是 $V=\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^+(x_1)\otimes\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^+(x_2)$。$\sigma_1\neq\sigma_2$ 的情形证明类似。□

对于 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2)$，取 $\sigma_1,\sigma_2\in\{+,-\}$，令

$$S^{\boldsymbol{\sigma}}=\begin{cases}\{\,(2k,0)\,|\,k\in\mathbb{Z}_+\,\} & \text{if }\boldsymbol{\sigma}=(+,+),\\ \{\,(2k+1,0)\,|\,k\in\mathbb{Z}_+\,\} & \text{if }\boldsymbol{\sigma}=(+,-)\text{ or }(-,+),\\ \{(1,1)\}\cup\{\,(2k,0)\,|\,k\geq1\,\} & \text{if }\boldsymbol{\sigma}=(-,-).\end{cases}$$

$^\circ$我们有如下 $\mathcal{U}_\epsilon$-模

$$\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_1}\otimes\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_2}\cong\bigoplus_{\lambda\in S_\epsilon^{\boldsymbol{\sigma}}}\mathcal{V}_\epsilon^\lambda,\tag{6.1}$$

其中，根据 (4.7) 和定理 5.6（参见注 5.4），$S_\epsilon^{\boldsymbol{\sigma}}=S^{\boldsymbol{\sigma}}\cap\mathcal{P}(O_2)_\epsilon$。当 $\boldsymbol{\sigma}=(+,+)$、$(\pm,\mp)$ 和 $(-,-)$ 时，分别令 $\lambda^0=$ 为 (0, 0)、(1, 0) 和 (1, 1)。

令 $z=z_1/z_2$。设 $\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_i}(z_i):=(\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_i})_{\mathrm{aff}}=\Bbbk[z_i^{\pm1}]\otimes\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_i}$，其中 $i=1,2$。通用 R 矩阵 (5.9) 诱导一个映射

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}^{\mathrm{univ}}(z):\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_1}(z_1)\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_2}(z_2)\longrightarrow\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_2}(z_2)\mathbin{\widetilde{\otimes}}\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_1}(z_1)\ ,$$

（参见 [15, (7.6)]），其中 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}^{\mathrm{univ}}(z)\big|_{\mathcal{V}_\epsilon^{\lambda^0}}=a(z)\mathrm{id}_{\mathcal{V}_\epsilon^{\lambda^0}}$，对应某个非零的 $a(z)\in\Bbbk[\![z]\!]$。定义规范化的 R 矩阵为

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}(z)=a(z)^{-1}\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}^{\mathrm{univ}}(z).\tag{6.2}$$

于是我们有一个唯一的 $\Bbbk[z_1^{\pm1},z_2^{\pm1}]\otimes\mathcal{U}_\epsilon$-线性映射

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}(z):\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_1}(z_1)\otimes\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_2}(z_2)\longrightarrow\Bbbk(z_1,z_2)\otimes_{\Bbbk[z_1^{\pm1},z_2^{\pm1}]}(\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_2}(z_2)\otimes\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_1}(z_1))\tag{6.3}$$

使得

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}(z)\big|_{\mathcal{V}_\epsilon^{\lambda^0}}=\mathrm{id}_{\mathcal{V}_\epsilon^{\lambda^0}},\tag{6.4}$$

因为 $\Bbbk(z_1,z_2)\otimes_{\Bbbk[z_1^{\pm1},z_2^{\pm1}]}(\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_1}(z_1)\otimes\mathcal{W}_\epsilon^{\sigma_2}(z_2))$ 根据命题 6.1 是一个不可约 $\Bbbk(z_1,z_2)\otimes\mathcal{U}_\epsilon$-模。

引理 6.2。在上述假设下，我们有

$$\mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\epsilon}\left(\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}}(z)\right)=\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}(z)\quad(\epsilon=\underline{\boldsymbol{\epsilon}},\overline{\boldsymbol{\epsilon}}).$$

证明。由 (3.10)、(6.1)、定理 5.6 以及 (6.3) 的唯一性可得。 □

°对于 $\lambda\in S^{\boldsymbol{\sigma}}_{\epsilon}$，我们定义一个 $\mathcal{U}_{\epsilon}$-线性映射 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\epsilon}:\mathcal{W}^{\sigma_1}_{\epsilon}\otimes\mathcal{W}^{\sigma_2}_{\epsilon}\longrightarrow\mathcal{W}^{\sigma_2}_{\epsilon}\otimes\mathcal{W}^{\sigma_1}_{\epsilon}$如下：

(1) 设 v_λ 和 v'_λ 分别为 $\mathcal{W}^{\sigma_1}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}\otimes\mathcal{W}^{\sigma_2}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ 中 $\mathcal{V}^{\lambda}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ 的 $\mathring{\mathcal{U}}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$-最高权向量 [20, 命题 5]。(2) 设$\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ 为由下式确定的映射

$$\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(v_\mu)=\delta_{\lambda\mu}v'_\lambda.$$

(3) 设 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}}$ 和 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ 为满足以下条件的唯一映射

$$\mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}\left(\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}}\right)=\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\underline{\boldsymbol{\epsilon}}},\quad \mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}\left(\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}}\right)=\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}.$$

定理 6.3. 我们有如下结论：

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}}(z)=\begin{cases}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\prod_{j=1}^{k}\frac{1-q^{4j-2}z}{z-q^{4j-2}}\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{(2k,0),\boldsymbol{\epsilon}} & \text{if } \boldsymbol{\sigma}=(+,+),\\ \mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{(1,1),\boldsymbol{\epsilon}}+\sum_{k\geq 1}\prod_{j=1}^{k}\frac{1-q^{4j-2}z}{z-q^{4j-2}}\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{(2k,0),\boldsymbol{\epsilon}} & \text{if } \boldsymbol{\sigma}=(-,-),\\ \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\prod_{j=1}^{k}\frac{1-q^{4j}z}{z-q^{4j}}\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{(2k+1,0),\boldsymbol{\epsilon}} & \text{if } \boldsymbol{\sigma}=(+,-),(-,+),\end{cases}$$

其中，假设 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}}$ 中 $k=0$ 的系数为 1。

证明. 根据 (6.1)，$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}}(z)$ 是 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\epsilon}$（其中 $\lambda\in S^{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\epsilon}}$）的一个（不一定有限的）线性组合。对于 $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ 的情形，已知 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(z)$ 由上面的公式给出 [20, 命题 11],其中 $S^{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\epsilon}}=S^{\boldsymbol{\sigma}}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$。注意，对于 $\boldsymbol{\sigma}=(\pm,\mp)$ 中的 $z_{\sqrt{\frac{z}{z-1}}^{-1}}(\mathrm{v}=\mathrm{i}q^{\frac{1}{2}})$，此处省略了标量因子，因为 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}}(z)$ 按照 (6.4) 进行了归一化。

根据定理 5.6 和引理 6.2，$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}}(z)$ 中的 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\epsilon}$ 与 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(z)$ 中的 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ 的系数分别相等。证明完毕。□

注 6.4. 我们可以恢复 [31] 中 $U_{\tilde{q}}(D^{(1)}_{m+1})$ 的自旋表示的张量积 $\mathcal{W}^{\sigma_1}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(z_1)\otimes\mathcal{W}^{\sigma_2}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(z_2)$ 上的谱分解。为此，我们需要另一种归一化。令

$$\mathcal{R}^{\diamond}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}}(z)=D_{\boldsymbol{\sigma}}\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}}(z),\tag{6.5}$$

其中

$$D_{\boldsymbol{\sigma}}=\begin{cases}\prod_{i=1}^{d}\frac{z-q^{4i-2}}{1-q^{4i-2}} & \text{if } \boldsymbol{\sigma}=(+,+),(-,-),\\ \prod_{i=1}^{d'}\frac{z-q^{4i}}{1-q^{4i}} & \text{if } \boldsymbol{\sigma}=(+,-),(-,+),\end{cases}$$

其中 $d=\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor$ 和 $d'=\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$。然后，将 $\mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$应用于 $\mathcal{R}^{\diamond}_{\boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{\epsilon}}(z)$，并利用引理 6.2，我们得到命题 5.4], 中的公式，该公式等于重新归一化后的 R 矩阵 [14] （相差一个标量因子）。注意，归一化 (6.4) 与 $\mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$作用下 $\mathcal{W}^{\sigma_1}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(z_1)\otimes\mathcal{W}^{\sigma_2}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(z_2)$ 在 [20] 上的谱分解相容。

“ 6.2. $\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\ \epsilon}$中的不可约表示。令

$$\mathcal{Z}^{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{cases} \{\, q^{4a+2} \,|\, a \in \mathbb{Z}_+ \,\} & \text{for } \boldsymbol{\sigma} = (+,+),(-,-), \\ \{\, q^{4a+4} \,|\, a \in \mathbb{Z}_+ \,\} & \text{for } \boldsymbol{\sigma} = (+,-),(-,+) \end{cases} \tag{6.6}$$

为 $\lambda \in S^{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 的 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}}(z)$ 中 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}}$ 系数的极点集合。

令 $\mathcal{P}^+$ 为满足以下条件的$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{c})$集合。

(1) $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1,\dots,\sigma_\ell) \in \{+,-\}^\ell$ and $\boldsymbol{c} = (c_1,\dots,c_\ell) \in (\Bbbk^\times)^\ell$ for some $\ell \geq 1$,

(2) $c_i/c_j \notin \mathcal{Z}^{(\sigma_i,\sigma_j)}$ for all $i<j$ when $\ell \geq 2$.

设 $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{c}) \in \mathcal{P}^+$ 为给定对象，且 $\ell \geq 2$。令 $z_1,\dots,z_\ell$ 为不定元。令 $\mathcal{W}^{\sigma_i}_\epsilon(z_i)$ 表示不定元 z_i $(1 \leq i \leq \ell)$ 对应的仿射化 $(\mathcal{W}^{\sigma_i}_\epsilon)_{\mathrm{aff}} = \Bbbk[z_i^{\pm 1}] \otimes \mathcal{W}^{\sigma_i}_\epsilon$。

由于归一化的 R 矩阵 (6.2) 在 $\mathcal{W}^{\sigma_i}_\epsilon(z_i) \otimes \mathcal{W}^{\sigma_j}_\epsilon(z_j)$ 上满足 $i<j$ 的 Yang-Baxter 方程，我们可以定义一个 $\Bbbk[z_1^{\pm 1},\dots,z_\ell^{\pm 1}] \otimes \mathcal{U}_\epsilon$-线性映射

$$\mathcal{W}^{\sigma_1}_\epsilon(z_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}^{\sigma_\ell}_\epsilon(z_\ell) \xrightarrow{\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}} \Bbbk(z_1,\dots,z_\ell) \otimes_{\Bbbk[z_1^{\pm 1},\dots,z_\ell^{\pm 1}]} \mathcal{W}^{\sigma_\ell}_\epsilon(z_\ell) \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}^{\sigma_1}_\epsilon(z_1),$$

通过取关于对称群 $\mathfrak{S}_\ell$ 的最长元素的归一化 R 矩阵的复合。根据定理 6.3，定理 6.3 的特化$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}$ 在 $(z_1,\dots,z_\ell) = (c_1,\dots,c_\ell)$ 处给出了一个定义良好的 $\mathcal{U}_\epsilon$-线性映射

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}(\boldsymbol{c}) : \mathcal{W}^{\sigma_1}_\epsilon(c_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}^{\sigma_\ell}_\epsilon(c_\ell) \longrightarrow \mathcal{W}^{\sigma_\ell}_\epsilon(c_\ell) \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}^{\sigma_1}_\epsilon(c_1)\ . \tag{6.7}$$

我们将 $\mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{c})$ 表示为 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}(\boldsymbol{c})$ 的像。

命题 6.5. 对于 $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{c}) \in \mathcal{P}^+$，我们有

$$\mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}}_\epsilon\left(\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{c})\right) = \mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{c}) \quad (\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}},\overline{\boldsymbol{\epsilon}}).$$

证明. 由于 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}}$ 是 $\mathcal{R}_{(\sigma_i,\sigma_j)\,\boldsymbol{\epsilon}}(z_i/z_j)$ 关于 $i<j$ 的复合，由引理 6.2 和 (3.10) 可知，$\mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}}_\epsilon(\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{c}))$ 与 $\mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{c})$ 相同。□

定理6.6.对于 $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{c}) \in \mathcal{P}^+$, $\mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{c})$，如果它不为零，则它是不可约的。

证明。由定理 6.3 可知，对于任意 $c \in \Bbbk^\times$，$\mathcal{R}_{(\pm,\pm),\ \epsilon}(z_1/z_2) = \mathrm{id}_{\mathcal{W}^{\pm}_\epsilon(\mathrm{c})\otimes\mathcal{W}^{\pm}_\epsilon(\mathrm{c})}$ at $z_1 = z_2 = c$。随后，可仿照 [22, 定理 4.3、4.4]，利用归一化的 R 矩阵证明其不可约性。在我们的情形中，$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\ \epsilon}(z)$ 是$\mathcal{P}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\lambda,\ \boldsymbol{\epsilon}}$ 的无穷和，除非$\epsilon = \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$，$\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'$。因此，按照 [14] 的意义，它不可有理重整化。不过，我们仍可如 [16, 引理 2.6] 中那样，使用归一化的 R 矩阵应用其中的论证（参见 [25,附录 D]）。□

范畴“$\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ 由 $C^{(1)}_m$ 型的无限维表示构成，它是 C_m 型 q-振子表示的仿射类比。另一方面，$\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\ \overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ 是 $D^{(1)}_{m+1}$ 型有限维表示的范畴（见第 6.3 节）。

我们指出，$\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ 中的一类特殊不可约表示是在[20], 中构造的，它对应于截断下与自旋表示相关的 $D^{(1)}_{m+1}$ 型 Kirillov-Reshetikhin 模（参见命题 5.11）。除此之外，$\epsilon = \boldsymbol{\epsilon},\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ 的非零不可约表示 $\mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{c})$ 是新的。

命题 6.7. 设给定 $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c}) \in \mathcal{P}^+$，使得 $\boldsymbol{\sigma}^+ \in \mathcal{P}(O_\ell)_\epsilon$，其中 $\boldsymbol{\sigma}^+ = (1^s)$ 是分拆，$\boldsymbol{\sigma}$ 中 $-$ 的个数为 s。则 $\mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c})$ 非零。特别地，如果 ϵ 的长度足够大，则 $\mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c})$ 非零。

证明。设给定（$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c}$）$\in \mathcal{P}^+$，其中 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell)$ 且 $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_\ell) \in (\Bbbk^\times)^\ell$.

首先考虑 $\epsilon = \overline{\epsilon}$ 的情形。此时，对于任意 m，我们有 $\boldsymbol{\sigma}^+ \in \mathcal{P}(O_\ell)_{\overline{\epsilon}}$。注意，$\mathcal{W}^+_{\overline{\epsilon}}(x) \cong V(\varpi_{m+1})_x$，且对于 $x \in \Bbbk^\times$，$\mathcal{W}^-_{\overline{\epsilon}}(x) \cong V(\varpi_m)_x$。令 w_i 为 $\mathcal{W}^{\sigma_i}_{\overline{\epsilon}}(c_i)$ 关于 $1 \le i \le \ell$ 的 $\mathcal{U}_{\overline{\epsilon}}$-最高权向量。根据定理 6.3，$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\sigma},\,\overline{\epsilon}}(\boldsymbol{c})$ 将 $w_1 \otimes \cdots \otimes w_\ell$ 映射到 $w_\ell \otimes \cdots \otimes w_1$，这特别意味着 $\mathcal{V}^{\boldsymbol{\sigma}^+}_{\overline{\epsilon}} \subset \mathcal{W}_{\overline{\epsilon}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c})$，因此 $\mathcal{W}_{\overline{\epsilon}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c})$ 非零。

若 $\epsilon = \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon^{(m)}$，则对于任意 m，我们也有 $\boldsymbol{\sigma}^+ \in \mathcal{P}(O_\ell)_{\boldsymbol{\epsilon}}$。由于 $\mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\mathcal{V}^{\boldsymbol{\sigma}^+}_{\boldsymbol{\epsilon}}) = \mathcal{V}^{\boldsymbol{\sigma}^+}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$，我们得出 $\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c})$ 非零。最后，假设 $\epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ 且 $\boldsymbol{\sigma}^+ \in \mathcal{P}(O_\ell)_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$。将 $\mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ 应用于 $\mathcal{V}^{\boldsymbol{\sigma}^+}_{\boldsymbol{\epsilon}} \subset \mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c})$，得到 $0 \neq \mathcal{V}^{\boldsymbol{\sigma}^+}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} \subset \mathcal{W}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c})$，这意味着 $\mathcal{W}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c})$ 非零。□

6.3. 基本表示。设

$$\mathcal{R}^{\diamond}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}(z) := \mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\epsilon}\left(\mathcal{R}^{\diamond}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}}(z)\right), \tag{6.8}$$

其中，$\mathcal{R}^{\diamond}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}}(z)$ 由式（6.5）给出。

令 $\mathcal{Z}^{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\mathcal{P}^+$ 按照第 6.2 节中的相同方式，根据 $\mathcal{R}^{\diamond}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}}(z)$ 中出现的极点集合来定义，并按照 (6.7) 为 $\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}, \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$ 定义映射 $\mathcal{R}^{\diamond}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}(\boldsymbol{c})$。那么，$\mathcal{W}^{\diamond}_{\epsilon}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c})$，即 $\mathcal{R}^{\diamond}_{\boldsymbol{\sigma},\epsilon}(\boldsymbol{c})$ 的像，如果不为零，则由定理 6.6 的证明中相同的论证可知它是不可约的。

当 $\epsilon = \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$ 时，在“$\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}$振子 $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}$”中从 $\mathcal{W}^{\diamond}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c})$ 的角度来看，寻找与 $\mathcal{U}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} = U_{\tilde{q}}(D^{(1)}_{m+1})$ 的有限维不可约表示之间的联系更为自然。令 $V(\varpi_k)$ 表示与 ϖ_k for $1 \le k \le m+1$ 对应的 $U_{\tilde{q}}(D^{(1)}_{m+1})$ 的基本表示。首先，我们看到

$$V(\varpi_{m+1}) \cong \mathcal{W}^+_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(1), \quad V(\varpi_m) \cong \mathcal{W}^-_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(1). \tag{6.9}$$

由注 6.4 和 [19, 命题 3.1], , 对于 $1 \le k \le m-1$，我们有

$$V(\varpi_k) \cong \mathcal{W}^{\diamond}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{c}_k), \tag{6.10}$$

其中

$$(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{c}_k) = \begin{cases} ((+,+),(q^{2m-2k},1)) & \text{if } m+1-k \text{ is even}, \\ ((+,-),(q^{2m-2k},1)) & \text{if } m+1-k \text{ is odd}, \end{cases}$$

（参见注 5.4）。回忆一下，任何具有 (3.3) 中所示权空间的有限维不可约 $U_{\tilde{q}}(D^{(1)}_{m+1})$-模 V，都同构于 $V(\varpi_{a_1})_{x_1} \otimes \cdots \otimes V(\varpi_{a_\ell})_{x_\ell}$ 在 $V(\varpi_{a_i})_{x_i} \otimes V(\varpi_{a_j})_{x_j} (i<j)$ 上经归一化 R 矩阵复合后所得的像，其中 a_1，……，a_ℓ 以及 x_1，……，x_ℓ [15]。因此，由通用 R 矩阵的六边形性质以及 (6.9)、(6.10) 可得

$$V \cong \mathcal{W}^{\diamond}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\boldsymbol{\sigma}_V, \boldsymbol{c}_V) \cong \mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\mathcal{W}^{\diamond}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\sigma}_V, \boldsymbol{c}_V)),$$

对于某些 $(\boldsymbol{\sigma}_V, \boldsymbol{c}_V) \in \mathcal{P}^+$（相对于重整化 $\mathcal{R}^{\diamond}_{\boldsymbol{\sigma},\,\epsilon}(z)$ 定义）。

根据（6.10），可以将 $\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{\diamond}(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{c}_k)$ 视为 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 的基本表示。但它仅对 $1 \leq k \leq m+1$ 有定义，并且依赖于 m。也可以考虑 $\mathcal{U}_\epsilon$ 的另一族不可约表示 $\mathcal{W}_{l,\ \epsilon} = \mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{\sigma}_l', \boldsymbol{c}_l')$，其中

$$(\boldsymbol{\sigma}_l', \boldsymbol{c}_l') = \begin{cases} ((+,+),(q^{-2l-2},1)) & \text{if } l \text{ is even}, \\ ((+,-),(q^{-2l-2},1)) & \text{if } l \text{ is odd}, \end{cases} \quad (l \in \mathbb{Z}_+) \tag{6.11}$$

由定理 6.3 可知其定义良好。作为一个 $\mathcal{U}_\epsilon$-模，$\mathcal{W}_{l,\ \epsilon}$ 分解如下：

$$\mathcal{W}_{l,\epsilon} = \bigoplus_{\substack{i \geq 0 \\ (l-2i,0) \in \mathcal{P}(O_2)_\epsilon}} \mathcal{V}_\epsilon^{(l-2i,0)}.$$

Since $(0,0), (1,0) \in \mathcal{P}(O_2)_\epsilon$, $\mathcal{W}_{l,\ \epsilon}$ 始终非零，因此由定理 6.6 可知它是不可约的。

对于 $x \in \Bbbk^\times$，令 $\mathcal{W}_{l,\ \epsilon}(x) = (\mathcal{W}_{l,\ \epsilon})_{x\circ}$ 与通常的基本表示情形相同，可以验证，在 (6.11) 与 $\mathcal{W}_\epsilon^\sigma$ 中，谱参数一般时，两个表示的张量积是不可约的。

命题 6.8. 对于 l_1、$l_2 \in \mathbb{Z}_+$ 和 $\sigma \in \{+,-\}$，

$$\mathcal{W}_{l_1,\epsilon} \otimes \mathcal{W}_{l_2,\epsilon}(a), \quad \mathcal{W}_\epsilon^\sigma \otimes \mathcal{W}_{l_1,\epsilon}(a), \quad \mathcal{W}_{l_1,\epsilon}(a) \otimes \mathcal{W}_\epsilon^\sigma$$

当 $a \in \Bbbk^\times$ 一般时，它们作为 $\mathcal{U}_\epsilon$-模是不可约的。

证明。为简便起见，我们移除 ϵ，因为该论证不依赖于 ϵ。我们证明，对于偶数 l_1 和奇数 l_2，当 $a \notin q^{2\mathbb{Z}}$ 时，$\mathcal{W}_{l_1} \otimes \mathcal{W}_{l_2}(a)$ 是不可约的。其他情形的证明类似。

根据定义，$\mathcal{W}_{l_1} \otimes \mathcal{W}_{l_2}(a)$ 是 $R_1 \otimes R_2$ 的像，其中

$$R_1 = \mathcal{R}_{(+,+)}(q^{-2l_1-2}) : \mathcal{W}^+(q^{-2l_1-2}) \otimes \mathcal{W}^+ \longrightarrow \mathcal{W}^+ \otimes \mathcal{W}^+(q^{-2l_1-2}),$$

$$R_2 = \mathcal{R}_{(+,-)}(q^{-2l_2-2}) : \mathcal{W}^+(aq^{-2l_2-2}) \otimes \mathcal{W}^-(a) \longrightarrow \mathcal{W}^-(a) \otimes \mathcal{W}^+(aq^{-2l_2-2}).$$

取 $\mathfrak{S}_4$ 的最长元素 w_0 的一个约化表达式 $w_0 = s_2s_3s_1s_2s_3s_1$，其中 s_i 是换位$(i, i+1)$，并考虑相应的归一化 R 矩阵的复合

$$\mathcal{W}^+(q^{-2l_1-2}) \otimes \mathcal{W}^+ \otimes \mathcal{W}^+(aq^{-2l_2-2}) \otimes \mathcal{W}^-(a) \xrightarrow{R} \mathcal{W}^-(a) \otimes \mathcal{W}^+(aq^{-2l_2-2}) \otimes \mathcal{W}^+ \otimes \mathcal{W}^+(q^{-2l_1-2}),$$

它由定理 6.6 定义良好。根据我们对约化表达式的选择，我们有$R = R' \circ (R_1 \otimes R_2)$，其中 R' 对应于 w_0 中的因子 $s_2s_3s_1s_2$，因此得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}^+(q^{-2l_1-2}) \otimes \mathcal{W}^+ \otimes \mathcal{W}^+(aq^{-2l_2-2}) \otimes \mathcal{W}^-(a) & \xrightarrow{R_1 \otimes R_2} & \mathrm{Im}(R_1 \otimes R_2) = \mathcal{W}_{l_1} \otimes \mathcal{W}_{l_2}(a). \\ \Big\downarrow R & & \Big\downarrow R' \\ \mathcal{W}^-(a) \otimes \mathcal{W}^+(aq^{-2l_2-2}) \otimes \mathcal{W}^+ \otimes \mathcal{W}^+(q^{-2l_1-2}) & \xleftarrow{R'} & a = R(\mathcal{W}_{l_1} \otimes \mathcal{W}_{l_2}(0)) \mathrm{Im} \end{array}$$

根据定理 6.6，$\mathrm{Im}R$ 要么为零，要么不可约。另一方面，我们看到 R' 是归一化 R 矩阵特化的复合，而这些特化全都是同构

当 $a \notin q^{2\mathbb{Z}}$ 时，由定理 6.3 可知。因此 R' 也是一个同构。由于 $\mathrm{Im}(R_1 \otimes R_2)$ 非零且 R' 是一个同构，$\mathrm{Im}R = R'(\mathrm{Im}(R_1 \otimes R_2))$ 非零，因此不可约。这说明 $\mathrm{Im}(R_1 \otimes R_2) = \mathcal{W}_l \otimes \mathcal{W}_m(q)$ 的不可约性，同样是因为 R' 是一个同构。□

7. Irreducible representations in $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$

“本节中，我们在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\ \epsilon}$ 中构造一族不可约表示，并解释 q 型振子表示与 $C_m^{(1)}$ 型有限维不可约表示之间的联系。

“构造不可约表示的思路与 $\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\ \epsilon}$ 的情形相似。但在这种情况下，还需要一个额外且关键的步骤：在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\ \boldsymbol{\epsilon}}$ 中构造一种基本型“表示，使其在截断下对应于 $C_m^{(1)}$ 型有限维基本表示，并求出其张量积的谱分解。我们采用第 3.2 节和第 5.2 节中的记号。

7.1. $\mathcal{W}_{l,\ \epsilon}$ 的基本表示（x）。首先假设 $\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}'$、$\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'$。对于 $l \in \mathbb{Z}_+$ 和 $0 \le k \le l$，令

$$v_{l,k} = |k\mathbf{e}_n\rangle \otimes |(l-k)\mathbf{e}_n\rangle \in \mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2},$$
$$\mathcal{W}_{l,k,\epsilon} = \mathring{\mathcal{U}}_\epsilon v_{l,k} \subset \mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2}.$$

那么，$\mathcal{W}_{l,\ k,\ \epsilon}$ 是 $\mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2}$的一个 $\mathring{\mathcal{U}}_\epsilon$-子模，并且由引理 5.5 可知$\mathcal{W}_{l,\ k,\ \epsilon} \cong \mathcal{V}_\epsilon^{(l)}$，因为$v_{l,\ k}$ 是一个权为$\Lambda_{(l),\ \epsilon}$的$\mathcal{U}_\epsilon$-最高权向量。

°引理 7.1. 作为一个 $\mathcal{U}_\epsilon$-模，我们有

$$\mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2} = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}_+} \bigoplus_{0 \le k \le l} \mathcal{W}_{l,k,\epsilon}.$$

°证明。由推论 5.7，作为一个 $\mathcal{U}_\epsilon$-模，我们有

$$\mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2} \cong \bigoplus_{(l) \in \mathcal{P}(Sp_2)_\epsilon} \left(\mathcal{V}_\epsilon^{(l)}\right)^{\oplus(l+1)},$$

其中 $\mathcal{P}(Sp_2)_\epsilon = \{\,(l) \mid l \in \mathbb{Z}_+\,\}$，若 $\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}'$，$\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'$。因此，由于$\mathcal{W}_{l,\ k,\ \epsilon} \cong \mathcal{V}_\epsilon^{(l)}$这一事实，分解成立。□

°°引理 7.2. 作为一个 $\mathcal{U}_\epsilon$-模，我们有

$$\mathcal{W}_{l,k,\epsilon} = \begin{cases} \bigoplus_{j \ge 0} \mathring{\mathring{\mathcal{U}}}_\epsilon \left(f_{m+1}^j v_{l,k}\right) & \text{if } \epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}', \\ \mathring{\mathring{\mathcal{U}}}_\epsilon v_{l,k} \oplus \left(\bigoplus_{j \ge 1} \mathring{\mathring{\mathcal{U}}}_\epsilon \left(f_n (f_{n-2} f_n)^{j-1} v_{l,k}\right)\right) & \text{if } \epsilon = \boldsymbol{\epsilon}'. \end{cases}$$

证明。注意到

$$\mathcal{W}_\epsilon = \bigoplus_{s \ge 0} V_\epsilon((s)),$$

作为 $\mathring{\mathring{\mathcal{U}}}_\epsilon$-模，$\mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2}$ 根据通常的 Littlewood-Richardson 规则（参见第5节.1）分解为 $V_\epsilon(\lambda)$ 的直和。

另一方面，考虑 $\mathcal{W}_{l,k,\epsilon}$ 中的以下向量：

$$\begin{cases} f_{m+1}^{j-1} v_{l,k} & \text{if } \epsilon = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}', \\ v_{l,k},\ f_n (f_{n-2} f_n)^j v_{l,k} & \text{if } \epsilon = \boldsymbol{\epsilon}', \end{cases} \quad (j \geq 1).$$

°°我们可以很容易地验证它们是 $\mathcal{U}_\epsilon$-最高权向量，并由此得出，它们给出了 $\mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2}$的分解中 $\mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2}$内的所有 $\mathcal{U}_\epsilon$-最高权向量。因此不存在

°°其他的 $\mathcal{U}_\epsilon$-最高权向量存在于 $\mathcal{W}_{l,\ k,\ \epsilon}$中，这意味着 $\mathcal{W}_{l,\ k,\ \epsilon}$的分解。□

命题 7.3. 设给定 $l \in \mathbb{Z}_+$、 $0 \leq k \leq l$ 和 $x \in \Bbbk^\times$ 。假设 $\mathcal{W}_{l,\ k,\ \epsilon} \subset \mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2}(x)$。

(1) $\mathcal{W}_{l,\ k,\ \epsilon}$ 在 e_0 和 f_0的作用下保持不变，因此是一个 $\mathcal{U}_\epsilon$-模，我们将其记为$\mathcal{W}_{l,\ k,\ \epsilon}(x)$。特别地，$\mathcal{W}_{l,\ k,\ \epsilon}(x)$ 是不可约的。(2) 对任意 $0 \leq k \leq l$，作为 $\mathcal{U}_\epsilon$-模，$\mathcal{W}_{l,\ k,\ \epsilon}(x)$ 彼此同构。

证明。我们来证明 $\mathcal{W}_{l,\ k} := \mathcal{W}_{l,\ k,\ \boldsymbol{\epsilon}'}$ 在 e_0 和 f_0的作用下保持不变。

°首先我们断言 $e_0 \mathcal{W}_{l,\ k} \subset \mathcal{W}_{l,\ k}$。由于 $\mathcal{W}_{l,\ k}$ 是由 $v_{l,\ k}$ 生成的 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$-最高权模，并且对任意 $i \in I_{\boldsymbol{\epsilon}'} \setminus \{0\}$， e_0 与 f_i 可交换，因此只需证明 $e_0 v_{l,\ k} \in \mathcal{W}_{l,\ k}$。这可由以下恒等式得出

$$\begin{aligned} x^{-1} e_0 v_{l,k} &= |\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_n\rangle \otimes |\mathbf{e}_2 + (l-k)\mathbf{e}_n\rangle - q\,|\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_n\rangle \otimes |\mathbf{e}_1 + (l-k)\mathbf{e}_n\rangle \\ &= \frac{1}{[l+1]} \big\{ (f_2 f_3 \cdots f_{n-2}) f_{n-1} (f_1 f_2 \cdots f_{n-2}) f_n v_{l,k} \\ &\qquad - (f_2 f_3 \cdots f_{n-2}) f_n (f_1 f_2 \cdots f_{n-2}) f_{n-1} v_{l,k}) \big\}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

这可以通过直接计算验证。

接下来，我们断言 $f_0 \mathcal{W}_{l,\ k} \subset \mathcal{W}_{l,\ k}$。回顾引理 7.2 中 $\mathcal{W}_{l,\ k}$ 的分解。

°°每个 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$-分量都是有限维且不可约的，其最低权向量为

°°第 j 个分量（我们将$\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'} v_{l,\ k}$ 视为第 0 个分量）由下式给出

$$\begin{cases} |k\mathbf{e}_1\rangle \otimes |(l-k)\mathbf{e}_1\rangle & \text{if } j = 0, \\ (e_0 e_2)^{j-1} e_0\,|k\mathbf{e}_1\rangle \otimes |(l-k)\mathbf{e}_1\rangle & \text{if } j \geq 1, \end{cases}$$

根据第一个断言，这确实属于 $\mathcal{W}_{l,\ k}$ 。现在，只需证明$f_0 v'_{l,\ k,\ j} \subset \mathcal{W}_{l,\ k}$；利用关于 j 的归纳法以及关系，不难看出这一点

$$f_0\,|k\mathbf{e}_1\rangle \otimes |(l-k)\mathbf{e}_1\rangle = 0, \quad e_0 f_0 - f_0 e_0 = \frac{k_0 - k_0^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad f_0 e_1 = e_1 f_0.$$

这就证明了 (1)。

最后，上述论证已足以证明 (2)。事实上，对于互不相同的 k、 k'、° °，$\mathcal{W}_{l,\ k}$ 与 $\mathcal{W}_{l,\ k'}$ 之间存在一个 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$-模同构，在该同构下， $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$-最高

°°权向量（分别地， $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$-最低权向量）相互对应。由于 e_0 在 $v_{l,\ k}$ 上的作用 (7.1) 是用 f_1、……、 f_n 表示的，因此该同构与 e_0 交换。交换性

结合 f_0，可通过考察 f_0 对 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$-最低权向量的作用，并像上文一样对 j 使用归纳法得出°°。

T对于 $\epsilon = \underline{\epsilon}'$ 的证明完全相同，取第 j 个最低权向量 $e_0^j\,|k\mathbf{e}_1\rangle\otimes|(l-k)\mathbf{e}_1\rangle$.

□

从现在起，我们记

$$\mathcal{W}_{l,\epsilon}(x) = \mathcal{W}_{l,l,\epsilon}(x) \quad (l \in \mathbb{Z}_+, x \in \Bbbk^\times), \tag{7.2}$$

并称其为 $\mathcal{U}_\epsilon$ 的第 l 个基本表示。我们记 $\mathcal{W}_{l,\epsilon} = \mathcal{W}_{l,\epsilon}(1)$。

命题 7.4. 对于 $l \in \mathbb{Z}_+$ 和 $x \in \Bbbk^\times$，有 $\mathrm{tr}_{\underline{\epsilon}'}(\mathcal{W}_{l,\epsilon'}(x)) = \mathcal{W}_{l,\underline{\epsilon}'}(x)$。

证明。根据定义，$\mathrm{tr}_{\underline{\epsilon}'}(\mathcal{W}_{l,\epsilon'}(x)) \supset \mathcal{W}_{l,\underline{\epsilon}'}(x)\,\mathcal{W}_{l,\epsilon_0}$。等式由引理 7.1 得出。□

对于 $l \in \mathbb{Z}_+$ 和 $x \in \Bbbk^\times$，我们定义

$$\mathcal{W}_{l,\overline{\epsilon}'}(x) = \mathrm{tr}_{\overline{\epsilon}'}(\mathcal{W}_{l,\epsilon'}(x)). \tag{7.3}$$

命题 7.5. 当且仅当 $l \le m$ 时，有 $\mathcal{W}_{l,\overline{\epsilon}'}(x) \neq 0$。对于 $0 \le l < m$，有

$$\mathcal{W}_{l,\overline{\epsilon}'}(x) \cong V(\varpi_{m-l})_x,$$

作为一个 $U_{\tilde{q}}(C_m^{(1)})$-模，其中 $V(\varpi_{m-l})_x$ 是与 ϖ_{m-l} 对应的 $U_{\tilde{q}}(C_m^{(1)})$ 的基本表示，而 $\mathcal{W}_{m,\overline{\epsilon}'}(x)$ 是平凡表示。

证明. 这直接由以下事实以及定理 5.6 得出：$\mathcal{W}_{l,\epsilon'} \cong \mathcal{V}_{\epsilon'}^{(l)}$ □

7.2. $\mathcal{W}_{l_1,\epsilon}(x_1)\otimes\mathcal{W}_{l_2,\epsilon}(x_2)$ 的不可约性。对于 $(l) \in \mathcal{P}(Sp_2)_\epsilon$，令 $\mathcal{W}_{l,\epsilon}$ 为第7.1节中给出的 $\mathcal{U}_\epsilon$ 的基本表示。回顾

$$\mathcal{P}(Sp_2)_\epsilon = \begin{cases} \{\,(l)\,|\,l \in \mathbb{Z}_+\} & \text{for } \epsilon = \boldsymbol{\epsilon}', \underline{\boldsymbol{\epsilon}}', \\ \{\,(l)\,|\,0 \le l \le m\,\} & \text{for } \overline{\boldsymbol{\epsilon}}'. \end{cases}$$

在本小节中，我们证明如下结果。

定理 7.6. 对于 (l_1)、$(l_2) \in \mathcal{P}(Sp_2)_\epsilon$ 以及一般的 $x_1, x_2 \in \Bbbk^\times$, $\mathcal{W}_{l_1,\epsilon}(x_1) \otimes \mathcal{W}_{l_2,\epsilon}(x_2)$ 是一个不可约的 $\mathcal{U}_\epsilon$-模。

我们先考虑 $\epsilon = \underline{\epsilon}'$ 的情形。注意到 $\mathcal{U}_{\underline{\epsilon}'} = U_q(D_{m+1}^{(1)})$ 和 $\mathring{\mathcal{U}}_{\underline{\epsilon}'} = U_q(D_{m+1})$。为简便起见，令 $\mathcal{W}_l = \mathcal{W}_{l,\underline{\epsilon}'}$ 表示 $l \in \mathbb{Z}_+$，并令 $\mathcal{V}^\lambda = \mathcal{V}^\lambda_{\underline{\epsilon}'}$ 表示 $\lambda \in \mathcal{P}(Sp_{2\ell})_{\underline{\epsilon}'}$。

设给定 $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_+$。我们将通过找出 $\mathcal{W}_{l_1}(x_1) \otimes \mathcal{W}_{l_2}(x_2)$ 中所有的 $\mathcal{U}_{\underline{\epsilon}'}$-最高权向量 $^\circ$，证明其不可约性；再考察它们在 $\mathcal{U}_{\underline{\epsilon}'}$ 作用下的关系。下文中，我们总是将 $\mathcal{W}_l(x) = \mathcal{W}_{l,l,\underline{\epsilon}'}(x) \subset \mathcal{W}_{\underline{\epsilon}'}^{\otimes 2}(x)$ 视为 .....。

首先，我们从（4.8）可知，

$$\mathcal{W}_{l_1}(x_1) \otimes \mathcal{W}_{l_2}(x_2) = \mathcal{V}^{(l_1)} \otimes \mathcal{V}^{(l_2)} \cong \bigoplus_{r\ge 0} \bigoplus_{0\le s\le \min(l_1,l_2)} \mathcal{V}^{(l_1+l_2+r-s,r+s)}, \tag{7.4}$$

这是一个无重数分解。集合

$$v_{l_1} = |l_1\mathbf{e}_n\rangle \otimes |\mathbf{0}\rangle \in \mathcal{W}_{l_1}(x_1), \quad v_{l_2} = |l_2\mathbf{e}_n\rangle \otimes |\mathbf{0}\rangle \in \mathcal{W}_{l_2}(x_2),$$
$$u_{r,s}^{i,j} = f_{m+1}^{(i)} f_m^{(j)} v_{l_1} \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2} \in \mathcal{W}_{l_1}(x_1) \otimes \mathcal{W}_{l_2}(x_2),$$

°对于 $0 \le i \le r$ 和 $0 \le j \le s$。注意， $v_{l_1} \otimes v_{l_2}$ 是一个 $\mathcal{U}_{\underline{\epsilon}'}$-最高权向量，属于分量 $\mathcal{V}^{(l_1+l_2,0)}$ 在(7.4)中。

引理 7.7. 对于 $r \ge 0$ 和 $0 \le s \le \min(l_1, l_2)$，向量

$$u_{r,s} = \sum_{\substack{0\le i\le r\\ 0\le j\le s}} \left[(-1)^{i+j} \prod_{k=1}^{i} q^{2k-2-l_2-2r} \frac{[r+l_2-k+2]}{[l_1+k+1]} \prod_{k'=1}^{j} q^{2k'+l_2-2s} \frac{[l_2-s+k']}{[l_1-k'+1]} \right] u_{r,s}^{i,j}$$

是 $\mathring{\mathcal{U}}_{\underline{\epsilon}'}$-最高权向量 $\mathcal{V}^{(l_1+l_2+r-s,r+s)}$，属于 $\mathcal{W}_{l_1}(x_1) \otimes \mathcal{W}_{l_2}(x_2)$，其中 $u^{0,\ r\ ^0,\ s}$ 的系数约定为 1。

证明。只需证明 $e_m u_{r,\ s} = e_{m+1} u_{r,\ s} = 0$，这可由交换关系 (B.1) 直接得到。□

°我们还需要以下引理，它们给出了引理 7.7 中 $\mathcal{U}_{\underline{\epsilon}'}$-最高权向量之间的关系。证明见附录 B 和 C。

引理 7.8. 对于 $0 \le i \le r$ 和 $0 \le j \le s$，有以下恒等式：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_m u_{0,s}^{0,j} &= x_1 q^{l_2-2s+2j}[j+1] u_{0,s+1}^{0,j+1} + x_2[s-j+1] u_{0,s+1}^{0,j}, \\
\boldsymbol{E}_m u_{0,s}^{0.j} &= x_1^{-1}[l_1-j+1] u_{0,s-1}^{0,j-1} + x_2^{-1} q^{2j-l_1}[l_2-s+j+1] u_{0,s-1}^{0,j}, \\
\boldsymbol{F}_{m+1} u_{r,s}^{i,j} &= x_1 q^{2i-2r-l_2-2}[i+1] u_{r+1,s}^{i+1,j} + x_2[r-i+1] u_{r+1,s}^{i,j}, \\
\boldsymbol{E}_{m+1} u_{r,s}^{i,j} &= -x_1^{-1}[l_1+i+1] u_{r-1,s}^{i-1,j} - x_2^{-1} q^{l_1+2i+2}[l_2+r-i+1] u_{r-1,s}^{i,j},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_m &= (e_{m-1} \cdots e_2 e_1) e_{m+1} (e_{m-1} \cdots e_3 e_2) e_0, \\
\boldsymbol{F}_{m+1} &= (e_{m-1} \cdots e_2 e_1) e_m (e_{m-1} \cdots e_3 e_2) e_0, \\
\boldsymbol{E}_m &= f_0 (f_2 f_3 \cdots f_{m-1}) f_{m+1} (f_1 f_2 \cdots f_{m-1}), \\
\boldsymbol{E}_{m+1} &= f_0 (f_2 f_3 \cdots f_{m-1}) f_m (f_1 f_2 \cdots f_{m-1}).
\end{aligned}$$

这里，我们假设 $u^{c,\ a\ ^d}{}_{,b} = 0$ 除非 $0 \le c, 0 \le d \le \min(l_1, l_2)$，$0 \le a \le c$ 且 $0 \le b \le d$。

引理 7.9。对于 $r \ge 0$、$0 \le s \le \min\{l_1, l_2\}$ 和一般的 x_1、$x_2 \in \Bbbk^\times$，我们有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_m u_{0,s} &\in \Bbbk^\times u_{0,s+1} + \Bbbk f_m u_{0,s} + \Bbbk f_m^{(2)} u_{0,s-1}, \\
\boldsymbol{F}_{m+1} u_{r,s} &\in \Bbbk^\times u_{r+1,s} + \Bbbk f_{m+1} u_{r,s} + \Bbbk f_{m+1}^{(2)} u_{r-1,s}.
\end{aligned}$$

定理 7.10. 对于 $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_+$ 以及一般的 $x_1, x_2 \in \Bbbk^\times$, $\mathcal{W}_{l_1}(x_1) \otimes \mathcal{W}_{l_2}(x_2)$ 是一个不可约$U_q(D_{m+1}^{(1)})$-模。

证明。取 $\mathcal{W}_{l_1}(x_1) \otimes \mathcal{W}_{l_2}(x_2)$ 的一个非零 $U_q(D_{m+1}^{(1)})$-子模 N。我们断言，

（1） N 包含$u_{0,\ 0} = v_{l_1} \otimes v_{l_2}$，（2）
$u_{0,\ 0}$ 生成 $\mathcal{W}_{l_1}(x_1) \otimes \mathcal{W}_{l_2}(x_2)$。

我们首先证明 (1)。由于 $\mathcal{W}_{l_1}(x_1)\otimes\mathcal{W}_{l_2}(x_2)$ 在 $U_q(D_{m+1})$ 上是半单的， N 至少包含一个 $U_q(D_{m+1})$-最高权向量，记作 $u_{r,\ s}$。

设 $r>0$ ，并证明 $\boldsymbol{E}_{m+1}u_{r,\ s}$ 是$u_{r-1,\ s}$的非零倍数。首先，利用引理 7.7 和引理 7.8，可以显式计算 $u^{0,\ \overset{0}{r-1},\ s}$ 在 $\boldsymbol{E}_{m+1}u_{r,\ s}$展开式中的系数。对于一般的 x 和 y，该系数非零，因此$\boldsymbol{E}_{m+1}u_{r,\ s}$也非零。

接下来证明 $\boldsymbol{E}_{m+1}u_{r,\ s}$ 是一个 $U_q(D_{m+1})$-最高权向量。事实上，对于 $p\neq m, m+1$, 根据其权可知 $e_p\boldsymbol{E}_{m+1}u_{r,\ s}=0$。对于 $p=m$，我们有

$$\begin{aligned} e_m\boldsymbol{E}_{m+1}u_{r,s} &= f_0(f_2\cdots f_{m-1})\frac{k_m-k_m^{-1}}{q-q^{-1}}(f_1\cdots f_{m-1})u_{r,s}\\ &= [l_1+l_2-2s+1]f_0(f_2\cdots f_{m-1})(f_1\cdots f_{m-1})u_{r,s}=0. \end{aligned}$$

这里，最后一个等式可由 $f_0(f_2\cdots f_{m-1})(f_1\cdots f_{m-1})u^{i,\ r^{\ j},\ s}=0$得到；通过将 $u^{i,\ r^{\ j},\ s}$ 按标准基展开即可直接验证（见附录 B 中的 (B.2)）。对于 $p=m+1$，显然有 $e_{m+1}\boldsymbol{E}_{m+1}u_{r,\ s}=0$。综上，我们有 $\boldsymbol{E}_{m+1}u_{r,\ s}\in\Bbbk^\times u_{r-1,\ s}$ ，因此 $u_{r-1,\ s}\in N$。

归纳地，我们得到 $u_{0,s}\in N$。类似地，可以看出 $\boldsymbol{E}_m u_{0,s}$ 是 $u_{0,s-1}$ 的非零倍数，最终得到 $u_{0,0}\in N$。

为了说明 (2) 成立，只需证明对于任意满足 $0\le r, 0\le s\le\min(l_1,l_2)$ 的 r,s ，都有 $u_{r,s}\in N$。这通过对 $r+s$ 进行归纳法来完成。具体而言，在关于 $r+s=k$ 的归纳假设以及 x 和 y 的一般性条件下，由第一个断言可得 $u_{0,k+1}\in N$ ，并且由引理 7.9 的第二个断言，对于 $r'+s'=k+1, r'\neq 0$ 有 $u_{r',s'}\in N$。证明完成。

□

定理 7.6 的证明。在 $\epsilon=\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'$, $\mathcal{W}_{l,\ \epsilon}(x)$ 是 $0\le l<m$ 的通常基本表示，这是由命题 7.5 得出的，因此 $\mathcal{W}_{l_1,\ \epsilon}(x_1)\otimes\mathcal{W}_{l_2,\ \epsilon}(x_2)$ 对于 $l_1,l_2<m$ 是不可约的，依据 [15]。

剩下只需证明 $\epsilon=\boldsymbol{\epsilon}'$ 的情形。由命题 7.4 以及针对 $\mathrm{tr}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$ 的命题 3.2，我们有

$$\mathrm{tr}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}(\mathcal{W}_{l_1,\boldsymbol{\epsilon}'}(x_1)\otimes\mathcal{W}_{l_2,\boldsymbol{\epsilon}'}(x_2))=\mathcal{W}_{l_1,\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}(x_1)\otimes\mathcal{W}_{l_2,\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}(x_2).$$

由于 $\mathcal{W}_{l_1,\boldsymbol{\epsilon}'}(x_1)\otimes\mathcal{W}_{l_2,\boldsymbol{\epsilon}'}(x_2)$ 关于 $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{\lambda}$ as a $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$-模具有与 (7.4) 中相同的分解，因此由定理 7.10 和定理 5.6 可知，它作为 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$-模是不可约的。□

7.3. 谱分解。设给定 (l_1)、$(l_2)\in\mathcal{P}(Sp_2)_\epsilon$，并令 $\boldsymbol{l}=(l_1,l_2)$。我们有

$$\mathcal{W}_{l_1,\epsilon}\otimes\mathcal{W}_{l_2,\epsilon}=\mathcal{V}_\epsilon^{(l_1)}\otimes\mathcal{V}_\epsilon^{(l_2)}\cong\bigoplus_{\lambda\in S_{\boldsymbol{l},\epsilon}}\mathcal{V}_\epsilon^{\lambda}, \tag{7.5}$$

其中 $S_{\boldsymbol{l},\epsilon}\subset\mathcal{P}(Sp_4)_\epsilon$ 由下式给出

$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{\epsilon}'}&=S_{\boldsymbol{l},\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}=\{\,(l_1+l_2+r-s,r+s)\,|\,r\ge0,0\le s\le\min(l_1,l_2)\,\},\\ S_{\boldsymbol{l},\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}&=\{\,\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in S_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{\epsilon}'}\,|\,\lambda_1\le m\,\}, \end{aligned}$$

由 (4.8) 和定理 5.6 得出。

与第6.1节中一样，我们将通用 R 矩阵 (5.9) 应用于 $\mathcal{W}_{l_1,\ \epsilon}(z_1)$ “$\otimes \mathcal{W}_{l_2,\ \epsilon}(z_2)$，然后对其进行归一化，使其在 $\mathcal{V}_{\epsilon}^{\lambda^0}$ 上的作用为恒等映射，其中 $\lambda^0=(\max(l_1,l_2),\min(l_1,l_2))$。于是我们得到一个 $\Bbbk[z_1^{\pm 1},z_2^{\pm 1}]\otimes\mathcal{U}_\epsilon$-线性映射

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{l},\epsilon}(z):\mathcal{W}_{l_1,\epsilon}(z_1)\otimes\mathcal{W}_{l_2,\epsilon}(z_2)\longrightarrow \Bbbk(z_1,z_2)\otimes_{\Bbbk[z_1^{\pm1},z_2^{\pm1}]}(\mathcal{W}_{l_2,\epsilon}(z_2)\otimes\mathcal{W}_{l_1,\epsilon}(z_1)) \tag{7.6}$$

使得 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{l},\ \epsilon}(z)\big|_{\mathcal{V}_{\epsilon}^{\lambda^0}}=\mathrm{id}_{\mathcal{V}_{\epsilon}^{\lambda^0}}$。这是唯一确定的，因为定理 7.6 的证明也证明了 $\Bbbk(z_1,z_2)\otimes_{\Bbbk[z_1^{\pm1},z_2^{\pm1}]}(\mathcal{W}_{l_1,\ \epsilon}(z_1)\otimes\mathcal{W}_{l_2,\ \epsilon}(z_2))$ 在 $\Bbbk(z_1,z_2)\otimes\mathcal{U}_\epsilon$ 上不可约。由引理 6.2 中相同的论证可得

引理7.11. 在上述假设下，我们有

$$\mathrm{tr}_{\epsilon}^{\epsilon'}(\mathcal{R}_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{\epsilon}'}(z))=\mathcal{R}_{\boldsymbol{l},\epsilon}(z)\quad(\epsilon=\underline{\boldsymbol{\epsilon}}',\overline{\boldsymbol{\epsilon}}').$$

For $\lambda\in S_{\boldsymbol{l},\ \epsilon}$，我们定义一个 $\mathring{\mathcal{U}}_\epsilon$-线性映射 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{l}}_{\lambda,\ \epsilon}:\mathcal{W}_{l_1,\ \epsilon}\otimes\mathcal{W}_{l_2,\ \epsilon}\longrightarrow\mathcal{W}_{l_2,\ \epsilon}\otimes\mathcal{W}_{l_1,\ \epsilon}$ 如下：

(1) 令 v_λ 和 v'_λ 为引理 7.7 中分别针对 $\lambda\in S_{\boldsymbol{l},\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$ 给出的 $\mathcal{V}^{\lambda}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$ 在 $\mathcal{W}_{l_1,\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}\otimes\mathcal{W}_{l_2,\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$ 和 $\mathcal{W}_{l_2,\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}\otimes\mathcal{W}_{l_1,\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$ 中的 $\mathring{\mathcal{U}}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$-最高权向量。(2) 令 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{l}}_{\lambda,\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$ 为由 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{l}}_{\lambda,\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}(v_\mu)=\delta_{\lambda,\ \mu}v'_\lambda$ 确定的映射，其中 $\mu\in S_{\boldsymbol{l},\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$。(3) 令 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{l}}_{\lambda,\ \boldsymbol{\epsilon}'}$ 和 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{l}}_{\lambda,\ \overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$ 为满足下列条件的唯一映射

$$\mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}'}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}\left(\mathcal{P}^{\boldsymbol{l}}_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}'}\right)=\mathcal{P}^{\boldsymbol{l}}_{\lambda,\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'},\quad \mathrm{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}'}_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}\left(\mathcal{P}^{\boldsymbol{l}}_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}'}\right)=\mathcal{P}^{\boldsymbol{l}}_{\lambda,\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}.$$

定理7.12。我们有如下结论：

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{l},\epsilon}(z)=\sum_{\lambda\in S_{\boldsymbol{l},\epsilon}}\rho^{\boldsymbol{l}}_\lambda(z)\mathcal{P}^{\boldsymbol{l}}_{\lambda,\epsilon},$$

其中 $\rho^{\boldsymbol{l}}_\lambda(z)$ 且 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)=(l_1+l_2+r-s,r+s)\in S_{\boldsymbol{l},\ \epsilon}$ 由下式给出

$$\rho^{\boldsymbol{l}}_\lambda(z)=D^{\boldsymbol{l}}_\lambda\prod_{k=1}^{r}\frac{1-zq^{l_2+l_1+2k+2}}{z-q^{l_2+l_1+2k+2}}\prod_{k'=1}^{\min(l_1,l_2)-s}\frac{1-zq^{|l_2-l_1|+2k'}}{z-q^{|l_2-l_1|+2k'}}$$

对于某个 $D^{\boldsymbol{l}}_\lambda\in\Bbbk^\times$。这里我们假设，当 $r=0$ 或 $s=\min\{l_1,l_2\}$ 时，$\rho^{\boldsymbol{l}}_\lambda(z)$ 中的乘积为 1。

证明。我们考虑 $\epsilon=\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'$ 的情形。其他情形可由引理7.11和定理 5.6推出。

对于 $r\geq 0$ 和 $0\leq s\leq\min(l_1,l_2)$，令 $u_{r,s}$ 为引理 7.7 中给出的 $\mathcal{W}_{l_1}(z_1)\otimes\mathcal{W}_{l_2}(z_2)$ 的 $\mathcal{U}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$- 最高权向量。则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_m u_{0,s}&=[l_2-s+1](z_2^{-1}q^{-l_1}-z_1^{-1}q^{2+l_2-2s})u_{0,s-1},\\ \boldsymbol{E}_{m+1}u_{r,s}&=[l_2+r+1](-z_2^{-1}q^{l_1+2}+z_1^{-1}q^{-l_2-2r})u_{r-1,s}.\end{aligned}$$

事实上，在上述证明中我们已经看到，$\boldsymbol{E}_{m+1}u_{r,s}$ 是一个 $U_q(D_{m+1})$-最高权向量，因此是 $u_{r-1,s}$ 的标量倍。然后，第二个恒等式由引理 7.8 得出，其中 z_1 和 z_2 在 f_0 的作用下出现，因为在 $\boldsymbol{E}_{m+1}u^{i,r^{\ j}}{}_{,s}$ 中，只有 $\boldsymbol{E}_{m+1}u^{0,r^{\ 0}}{}_{,s}$ 和 $\boldsymbol{E}_{m+1}u^{1,r^{\ 0}}{}_{,s}$ 对 $u^{0,r^{\ 0}}_{r-1,s}$ 有贡献。另一个等式的证明类似。

为简洁起见，我们记 $\mathcal{R}=\mathcal{R}_{\boldsymbol{l},\epsilon}(z)$。设 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)=(l_1+l_2+r-s,r+s)\in S_{\boldsymbol{l},\epsilon}$ 已给定，并记 $\rho_{r,s}(z)=\rho^{\boldsymbol{l}}_\lambda(z)$。

我们计算 $\mathcal{R}(\boldsymbol{E}_{m+1}u_{r,s}) = \boldsymbol{E}_{m+1}\mathcal{R}(u_{r,s})$ 的两边：

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\boldsymbol{E}_{m+1}u_{r,s}) &= \mathcal{R}([l_2+r+1](-z_2^{-1}q^{l_1+2}+z_1^{-1}q^{-l_2-2r})u_{r-1,s})\\ &= [l_2+r+1](-z_2^{-1}q^{l_1+2}+z_1^{-1}q^{-l_2-2r})\mathcal{R}(u_{r-1,s})\\ &= [l_2+r+1](-z_2^{-1}q^{l_1+2}+z_1^{-1}q^{-l_2-2r})\rho_{r-1,s}(z)u'_{r-1,s},\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{m+1}\mathcal{R}(u_{r,s}) &= \rho_{r,s}(z)\boldsymbol{E}_{m+1}u'_{r,s}\\ &= \rho_{r,s}(z)[l_1+r+1](-z_1^{-1}q^{l_2+2}+z_2^{-1}q^{-l_1-2r})u'_{r-1,s},\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\rho_{r,s}(z) &= \frac{[l_2+r+1]}{[l_1+r+1]}\cdot\frac{-z_2^{-1}q^{l_1+2}+z_1^{-1}q^{-l_2-2r}}{-z_1^{-1}q^{l_2+2}+z_2^{-1}q^{-l_1-2r}}\rho_{r-1,s}(z)\\ &= q^{l_1-l_2}\frac{[l_2+r+1]}{[l_1+r+1]}\cdot\frac{1-zq^{l_1+l_2+2r+2}}{z-q^{l_1+l_2+2r+2}}\rho_{r-1,s}(z).\end{aligned}\tag{7.7}$$

同样地，我们得到

$$\rho_{0,s}(z) = q^{l_2-l_1}\frac{[l_2-s+1]}{[l_1-s+1]}\cdot\frac{1-zq^{-l_1-l_2-2+2s}}{z-q^{-l_1-l_2-2+2s}}\rho_{0,s-1}(z).\tag{7.8}$$

现在，所需公式由归一化 $\rho_{0,\min(l_1,l_2)}(z)=1$ 得出。 □

注 7.13。常数 $D_\lambda^{\boldsymbol{l}}$ 可以使用 (7.7) 和 (7.8) 显式计算。值得指出的是，即使对于 $\epsilon=\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'$ ，$\mathcal{R}_{\boldsymbol{l},\epsilon}(z)$ 的谱分解的显式公式也是新的。

7.4. “$\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 中的不可约表示。对于 $\boldsymbol{l}=(l_1,l_2)\in\mathbb{Z}_+^2$，设

$$\mathcal{Z}^{\boldsymbol{l}} = \{\, q^{|l_2-l_1|+2k} \mid k\geq 1\,\}\cup\{\, q^{l_2+l_1+2k+2} \mid k\geq 1\,\}\tag{7.9}$$

是 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{l}}_{\lambda,\boldsymbol{\epsilon}}$ 中系数的极点集合，其中 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{\epsilon}}(z)$ 对应于 $\lambda\in S_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{\epsilon}}$。

令 $\mathcal{P}^+$ 为满足以下条件的$(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})$集合。

(1) $\boldsymbol{l}=(l_1,\dots,l_\ell)\in\mathbb{Z}_+^\ell$ and $\boldsymbol{c}=(c_1,\dots,c_\ell)\in(\Bbbk^\times)^\ell$ for some $\ell\geq 1$,
(2) $c_i/c_j\notin\mathcal{Z}^{(l_i,l_j)}$ for all $i<j$ when $\ell\geq 2$.

设 $(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})\in\mathcal{P}^+$ be 给定，且 $\ell\geq 2$。根据定理 6.3，我们可以定义一个定义良好的$\mathcal{U}_\epsilon$-线性映射

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{l},\epsilon}(\boldsymbol{c}) : \mathcal{W}_{l_1,\epsilon}(c_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{W}_{l_\ell,\epsilon}(c_\ell) \longrightarrow \mathcal{W}_{l_\ell,\epsilon}(c_\ell)\otimes\cdots\otimes\mathcal{W}_{l_1,\epsilon}(c_1)\ ,\tag{7.10}$$

如同 (6.7) 中那样，其像记为 $\mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})$。于是，我们得到以下结果，与命题 6.5 和定理 6.6 中的情形相同。

命题 7.14. 对于 $(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})\in\mathcal{P}^+$，有

$$\mathfrak{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}'}_{\epsilon}\left(\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})\right) = \mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c}) \quad (\epsilon=\underline{\boldsymbol{\epsilon}}',\overline{\boldsymbol{\epsilon}}').$$

定理7.15. 若 $(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})\in\mathcal{P}^+$, $\mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})$ 非零，则它是不可约的。

范畴“$\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\ \underline{\epsilon}'}$ 由 $D^{(1)}_{m+1}$ 型的无限维表示组成，而“$\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\ \overline{\epsilon}'}$ 是一个由 $D^{(1)}_{m+1}$ 型有限维表示构成的范畴，并且 $\mathcal{W}_{\overline{\epsilon}}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})$ 根据命题 7.5、定理7.12 和 [15]，给出了 $\mathcal{O}^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{osc},\ \overline{\epsilon}'}$ 中的所有有限维不可约表示。我们指出，对于 $\epsilon=\boldsymbol{\epsilon}',\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'$，非零不可约表示 $\mathcal{W}_{\epsilon}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})$ 是新的。

命题 7.16. 设给定 $(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})\in\mathcal{P}^+$，使得 $\boldsymbol{l}^+\in\mathcal{P}(Sp_{2\ell})_{\epsilon}$，其中 $\boldsymbol{l}^+$ 表示 $\boldsymbol{l}$的非递增重排。则 $\mathcal{W}_{\epsilon}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})$ 非零。特别地，对所有充分大的 m，$\mathcal{W}_{\epsilon}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})$ 非零。

证明. 首先假设 $\epsilon=\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'$。假设 $\boldsymbol{l}^+\in\mathcal{P}(Sp_{2\ell})_{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$ 确保对所有 i，$l_i\le m$成立，因此根据命题 7.5，$\mathcal{W}_{l_i,\ \overline{\mathfrak{c}}}(c_i)\cong V(\varpi_{m-l_i})_{c_i}$。若令 w_i 为 $V(\varpi_{m-l_i})_{c_i}$的主极端权向量，则根据定理7.12，$\mathcal{R}_{(l_i,l_j)\ \overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}(c_i/c_j)$经过归一化，使其将$w_i\otimes w_j$映为 $w_j\otimes w_i$。因此，$\mathcal{R}_{\boldsymbol{l},\ \overline{\boldsymbol{\epsilon}}'}(\boldsymbol{c})$将 $w_1\otimes\cdots\otimes w_\ell$ 映为 $w_\ell\otimes\cdots\otimes w_1$，且 $\mathcal{W}_{\boldsymbol{\epsilon}'}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})$非零。

对于 $\epsilon=\boldsymbol{\epsilon}',\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'$ 的情形，取 $\widetilde{\epsilon}=\boldsymbol{\epsilon}'^{(\widetilde{m})}$ 和 $\widetilde{\overline{\epsilon}}=(1^{\widetilde{m}})$，其中 $\widetilde{m}$ 充分大，使得 $\boldsymbol{l}^+\in\mathcal{P}(Sp_{2\ell})_{\widetilde{\overline{\epsilon}}}$。根据上述论证，$\mathcal{W}_{\widetilde{\overline{\epsilon}}}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})$ 包含由 $w_\ell\otimes\cdots\otimes w_1$生成的一个 $\mathring{\mathcal{U}}_{\widetilde{\overline{\epsilon}}}$子模，即 $\mathcal{V}^{\boldsymbol{l}^+}_{\widetilde{\overline{\epsilon}}}$。这意味着 $\mathcal{V}^{\boldsymbol{l}^+}_{\widetilde{\epsilon}}\subset\mathcal{W}_{\widetilde{\epsilon}}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})$。现在对 $\epsilon=\boldsymbol{\epsilon}',\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'$ 应用 $\mathrm{tr}^{\widetilde{\epsilon}}_{\epsilon}$，我们得出 $\mathcal{W}_{\epsilon}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})$ 非零。□

8. Remarks

我们对本文结果的推广以及相关问题作一些评述 .

8.1. 对偶。回顾以下图示：

(8.1)
$$\begin{array}{ccccc} & & \widehat{\mathcal{O}}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc}\ \epsilon} & & \\ & \swarrow^{\mathrm{tr}^{\epsilon}_{\underline{\epsilon}}} & & \searrow^{\mathrm{tr}^{\epsilon}_{\overline{\epsilon}}} & \\ \widehat{\mathcal{O}}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\underline{\epsilon}} & & & & \widehat{\mathcal{O}}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\overline{\epsilon}} \end{array}$$

其中 $(\epsilon,\underline{\epsilon},\overline{\epsilon})=(\boldsymbol{\epsilon},\underline{\boldsymbol{\epsilon}},\overline{\boldsymbol{\epsilon}})$，而 $(\boldsymbol{\epsilon}',\underline{\boldsymbol{\epsilon}}',\overline{\boldsymbol{\epsilon}}')$ 分别对应于 $\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$和 $\mathfrak{d}$（命题 5.11 ）.

设给定 $\boldsymbol{\lambda}=(\boldsymbol{l},\boldsymbol{c})\in\mathcal{P}^+$，其中 $\mathcal{P}^+$ 在第 6.2 节和第 7.4 节中定义。那么 $\mathrm{tr}^{\epsilon}_{\underline{\epsilon}}$ 和 $\mathrm{tr}^{\epsilon}_{\overline{\epsilon}}$ 将非零不可约 $\mathcal{W}_{\epsilon}(\boldsymbol{\lambda})$ 变为不可约表示或零：

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{W}_{\epsilon}(\boldsymbol{\lambda}) & & \\ & \swarrow^{\mathrm{tr}^{\epsilon}_{\underline{\epsilon}}} & & \searrow^{\mathrm{tr}^{\epsilon}_{\overline{\epsilon}}} & \\ \mathcal{W}_{\underline{\epsilon}}(\boldsymbol{\lambda}) & & & & \mathcal{W}_{\overline{\epsilon}}(\boldsymbol{\lambda}) \end{array}$$

其中，当 $\mathcal{W}_{\underline{\epsilon}}(\boldsymbol{\lambda})$ 和 $\mathcal{W}_{\overline{\epsilon}}(\boldsymbol{\lambda})$ 非零时，它们由 $\mathcal{W}_{\epsilon}(\boldsymbol{\lambda})$ 插值。因此，这给出了一个仿射类比：通过第 4.1 节和第 4.2 节中形式为 $(\mathfrak{g},O_\ell)$（分别为 $(\mathfrak{g},Sp_{2\ell})$）的 Howe对偶，建立 q-振子表示与 $\mathfrak{so}_{2n}$ （分别为 $\mathfrak{sp}_{2n}$）的有限维表示之间的对应关系。

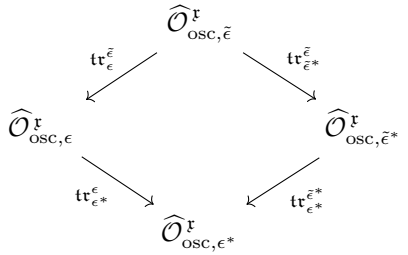
由命题 6.7 和 7.16 可知，对于所有充分大的 m，给定的 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}^+$, $\mathcal{W}_{\epsilon^*}(\boldsymbol{\lambda})$ $(\epsilon^*=\epsilon,\underline{\epsilon},\overline{\epsilon})$ 均非零；并且根据定理 5.6(2)，$\mathcal{V}^{\lambda}_{\epsilon^*}$ 在 $\mathcal{W}_{\epsilon^*}(\boldsymbol{\lambda})$ 中关于 $\lambda\in\mathcal{P}(G_\ell)$ 的重数在 $m\to\infty$ 时具有稳定极限。因此，我们可以考虑“$\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}{}_{\text{振荡器 }\epsilon^*}$”的适当极限，其中

$\mathcal{W}_{\epsilon^*}(\lambda)$ 的极限之间的对应关系在相应的图（8.1）中变为双射。

通过Howe对偶， $\mathfrak{sp}_{2n}$ （分别为 $\mathfrak{so}_{2n}$）的振子表示与 $\mathfrak{so}_{2n}$ （分别为 $\mathfrak{sp}_{2n}$）的有限维表示之间的对应关系，也可以从一个称为超对偶 [5] 的等价关系的限制来解释，该等价关系涉及包含这些表示的更大的范畴。因此，自然会问，这些“$\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}$振子 ϵ^*”的极限之间是否存在等价关系。这将意味着，“$\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}$振子 $\bar{\epsilon}$”的各种重要性质也适用于““$\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}$振子 ϵ 和 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}$振子 $\underline{\epsilon}$，包括Grothendieck环的结构、 T-系的存在等。

8.2.除 ϵ 和 ϵ'之外的其他情形。下面对将（8.1）推广到 $\epsilon=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)$为 ϵ 和ϵ'之外的情形作一些说明。假设 $s=|\{\,i\,|\,\epsilon_i=0\,\}|\geq 4$ 和$t=|\{\,i\,|\,\epsilon_i=1\,\}|\geq 4$。令$\underline{\epsilon}$（分别为 $\bar{\epsilon}$）表示从 ϵ 中删除所有$\epsilon_i=1$ （分别为 $\epsilon_i=0$）后得到的子序列。

首先，考虑 $\epsilon_1=\epsilon_n$ 的情形。我们假设 $\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$ 对于 $\epsilon_1=\epsilon_n=1$ ，以及 $\mathfrak{x}=\mathfrak{d}$“对于 $\epsilon_1=\epsilon_n=0$。按照第5.2节中的论证，我们还可以使用 (5.4) 中的 $\mathscr{W}_\epsilon(x)$定义 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 和 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$，其中对于 $\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$ ，它在命题2.6 中定义；对于“$\mathfrak{x}=\mathfrak{d}$，它在命题 2.8 中定义。第5.2节、第6.2节和第7.4节中的结果在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$的情形下也成立。事实上，为了证明这些结果，我们可以使用下面的图:



其中，我们取 $\tilde{\epsilon}=\epsilon$ 和 ϵ' ，使 m 充分大，分别对应于 $\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$ 和 $\mathfrak{d}$，从而 ϵ是 $\tilde{\epsilon}$的子序列，并令 $(\tilde{\epsilon}^*,\epsilon^*)=(\underline{\tilde{\epsilon}},\underline{\epsilon})$ 或 $(\bar{\tilde{\epsilon}},\bar{\epsilon})$。由于 ϵ不一定是交替序列，在一般情形下，可能需要使用类型为 A 的截断来定义上述图表（ ϵ（[24, 定理 4.3]）） 。

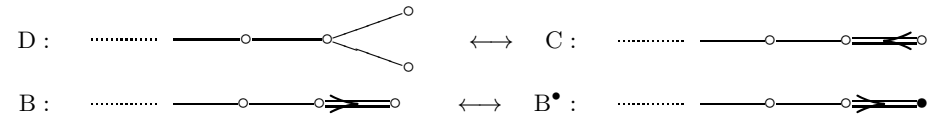
接下来考虑 $\epsilon_1\neq\epsilon_n$的情形。假设 $\epsilon_1=1$ 且 $\epsilon_n=0$。令 $\mathscr{W}_\epsilon(x)=\mathcal{W}_\epsilon^{\otimes 2}(x)$，其中我们按照命题 2.6 定义 $x_0(x=e,f)$ 的作用，并按照命题 2.8 定义 $x_n(x=e,f)$ 的作用。于是我们可以定义一个半单张量范畴 $\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\ \epsilon}$ ，其中不可约表示由 $\lambda\in\mathcal{P}(Sp_{2\ell})_\epsilon$“ $(\ell\geq 1)$ 参数化，然后以类似方式定义 $\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\ \epsilon}$ 。

我们分别将命题3.1和3.4（以及 [24, 定理4.3]）应用于 ϵ（包括其左右两端（右端和左端））的子序列，从而得到$\mathbb{k}$-代数的同态$\phi_{\bar{\epsilon}}$： $\mathcal{U}_{\bar{\epsilon}}\longrightarrow\mathcal{U}_\epsilon$ 和 $\phi_{\underline{\epsilon}}$： $\mathcal{U}_{\underline{\epsilon}}\longrightarrow\mathcal{U}_\epsilon$，其中$\mathcal{U}_{\bar{\epsilon}}$ 与 $U_{\tilde{q}}(A^{(2)}_{2t-1})$同构，而 $\mathcal{U}_{\underline{\epsilon}}$ 与 $U_q(A^{(2)}_{2s-1})$同构，且单根的指标以相反的方式排列。因此，图（8.1）将插值 $A^{(2)}_{2s-1}$ 和 $A^{(2)}_{2t-1}$型的有限维表示与 q-振子表示。

“为了获得第7节中关于 $\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 的结果的类似结论，我们首先必须在“$\mathcal{O}^{\mathfrak{d}}_{\mathrm{osc},\epsilon}$ 中构造一个不可约表示，该表示对应于$V(\varpi_k)_x$ 类型 $A^{(2)}_{2t-1}$ 的基本表示，适用于 $1 \le k \le t$，然后计算$V(\varpi_k)_x \otimes V(\varpi_l)_y$上的谱分解，而这一般来说迄今尚属未知。当 $\epsilon_1 = 0$ 和 $\epsilon_n = 1$时的情形类似（见第8.3节）。

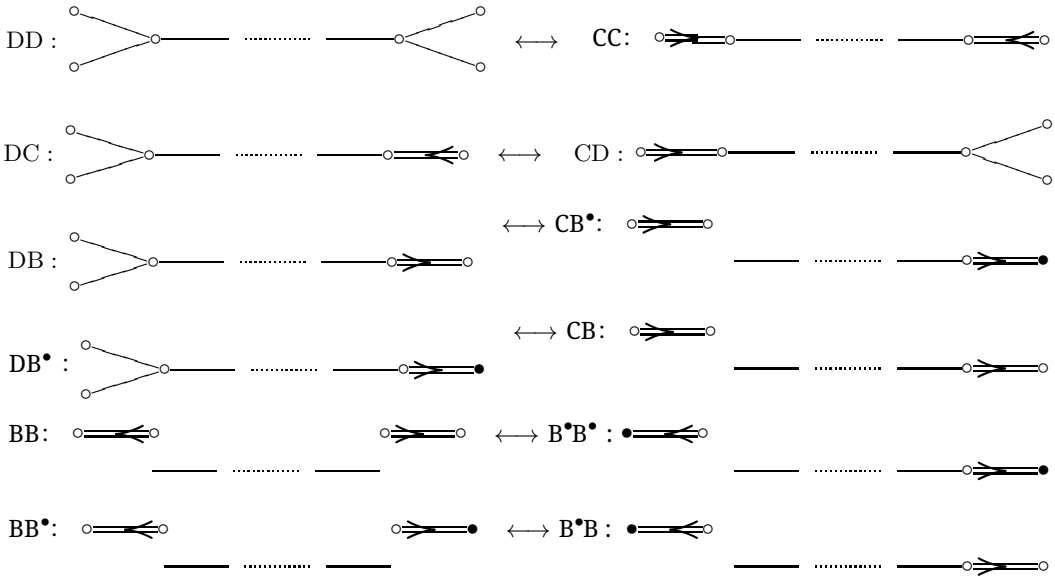
8.3. 其他类型的量子仿射超代数。对于给定的 $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$，存在一个有限型广义量子群 B, C, D [28] （参见 [34]）。利用它们的定义关系，我们可以为 $X, Y \in \{B, C, D\}$ 定义仿射型代数 $\mathcal{U}_{XY}(\epsilon)$，其中 X 和 Y分别表示相关 Dynkin 图中头部和尾部的类型。特别地，$\mathcal{U}_{DD}(\epsilon)$在第2.1节中表示 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$。

我们预期，对于 $\mathcal{U}_{XY}(\epsilon)$，第6节或第7节中的结果也有类似结论；这尤其会导出两个量子仿射代数的有限维表示与 q-振子表示之间的各种联系。从超对偶的观点来看， [5], 有限型 Dynkin 图之间的对应关系应当是



其中，类型为 B 的 Dynkin 图对应于没有奇各向同性根的正交辛李超代数的 Dynkin 图。

因此，具有“有限维”表示与“振子”表示（或反之）之间对应关系、且不含奇各向同性单根的量子仿射（超）代数的预期配对如下：



其中第一种情形将在本文中研究（有关与上述 Dynkin 图相关的量子仿射超代数，参见 [35] ）。

例如，我们可以使用 $\mathcal{U}_{CC}(\epsilon)$ 得到本文中的相同结果：令 $\mathcal{U}_C(\epsilon)$ 和 $\mathcal{U}_D(\epsilon)$ 分别为与 $\epsilon =$ $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ 相关联的有限型 C 和 D 的广义量子群。存在一个从 $\mathcal{U}_C(\epsilon)$ 到 $\mathcal{U}_D(\epsilon')$ 的 $\Bbbk$-代数同构，其中 $\epsilon' = (\ldots, \epsilon_n, \epsilon_{n-1})$ [28, 第5节3]。利用此同构以及第8.2节中的论证，我们得到 $\mathcal{U}_{CC}(\epsilon)$ 的两族不可约 q-振子表示，其中 $\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}'$，以及上表中 DD 型与 CC 型之间的对应关系。

但其他情形则更具挑战性，因为任意两个有限维基本表示的张量积上的谱分解尚不清楚，而且基本表示通常并非经典意义下的不可约表示。我们还指出，归一化 R 矩阵的分母足以理解有限维表示范畴的张量结构，而在 q-振子表示的情形下，分母则未定义良好。

Appendix A. Proof of Proposition 3.1

在本附录中，我们验证命题 3.1 的证明中用到的以下恒等式

$$\widehat{e}_0^2\widehat{e}_1 - (q^2+q^{-2})\widehat{e}_0\widehat{e}_1\widehat{e}_0 + \widehat{e}_1\widehat{e}_0^2 = 0,$$

其中，$\widehat{e}_i$ $(i = 0, 1)$ 在 (3.1) 中定义如下：

$$\widehat{e}_0 = \frac{1}{[2]}(e_0e_1 + q^2e_1e_0), \quad \widehat{e}_1 = e_2e_3 + qe_3e_2.$$

这里固定 $\eta = 1$，因为对 $\eta = -1$的证明相同。回忆一下，e_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ 是 $\mathcal{U}_D(\boldsymbol{\epsilon})$的一个生成元，因此满足以下关系：

$$\begin{aligned}
&e_i^2 = 0, \quad e_0e_3 = e_3e_0, \quad e_1e_3 = e_3e_1,\\
&e_0e_1e_2 - e_1e_0e_2 + [2](e_1e_2e_0 - e_0e_2e_1) + e_2e_0e_1 - e_2e_1e_0 = 0,\\
&e_0e_2e_3e_2 - e_3e_2e_0e_2 - [2]e_2e_3e_0e_2 - e_2e_0e_2e_3 + e_2e_3e_2e_0 = 0,\\
&e_1e_2e_3e_2 - e_3e_2e_1e_2 - [2]e_2e_3e_1e_2 - e_2e_1e_2e_3 + e_2e_3e_2e_1 = 0.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

特别地，由第一个关系可得，

$$\widehat{e}_0^2 = \frac{1}{[2]^2}(e_0e_1 + q^2e_1e_0)(e_0e_1 + q^2e_1e_0) = \frac{1}{[2]^2}(e_0e_1e_0e_1 + q^4e_1e_0e_1e_0)$$

于是，我们将要证明的恒等式可以写成

$$\begin{aligned}
0 = {} & (010123) + q^4(101023) + q(010132) + q^5(101032)\\
& - (q^2+q^{-2})\begin{pmatrix}(012301) + q^2(102301) + q^2(012310) + q^4(102310)\\ +q(013201) + q^3(103201) + q^3(013210) + q^5(103210)\end{pmatrix}\\
& + (230101) + q^4(231010) + q(320101) + q^5(321010),
\end{aligned} \tag{A.2}$$

为简洁起见，我们将 $(i_1i_2\ldots i_l)$ 记作 $= e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_l}$。

证明过程是反复利用关系式（A.1），将 e_i 中系数为 q 的最低次幂的单项式替换为具有更高 q 次幂的单项式。具体来说，在（A.2）中，我们从 $-q^{-2}$**(012301)** $=-q^{-2}$ **(012013)** 开始，它等于

$$\begin{aligned}-q^{-2}(0\overline{120}13) =& -q^{-1}(0)\{(012)-(102)+q(120)-[2](021)+(201)-(210)\}(13)\\ =& -q^{-1}(01\overline{021}3)-q^{-1}(\overline{021}013)+(012013)\\ =& -(01)\left((012)-(102)+[2](120)-q(021)+(201)-(210)\right)(3)\\ & -\left((012)-(102)+[2](120)-q(021)+(201)-(210)\right)(013)+(012013)\\ =&-(010123)+q(010213)+(012103)-(012013)+(102013)+q(021013)-(201013).\end{aligned}$$

为方便读者，我们用上划线标明单项式中由 **(A.1)** 替换的因子。我们还使用了恒等式 **(00)** $=$ **(11)** $=0$ 和 **(30)** $=$ **(03)**、**(31)** $=$ **(13)**。代入后，**(A.2)** 的右端变为

$$\begin{aligned}&q^4(101023)+q(010132)+q^5(101032)\\ &-(q^2+1)(012301)-q^4(102301)-q^4(012310)-(q^6+q^2)(102310)\\ &-(q^3+q^{-1})(013201)-(q^5+q)(103201)-(q^5+q)(013210)-(q^7+q^3)(103210)\\ &+q^4(231010)+q(320101)+q^5(321010)\\ &+q(010231)+q(023101).\end{aligned}\tag{A.3}$$

接下来，由于

$$\begin{aligned}-q^{-1}(30\overline{120}1) =& -(30)\left((012)-(102)+q(120)-[2](021)+(201)-(210)\right)(1)\\ =& -(301\overline{021})-(3\overline{021}01)+q(301201)\\ =& -q(301)\left((012)-(102)+[2](120)-q(021)+(201)-(210)\right)\\ & -q(3)\left((012)-(102)+[2](120)-q(021)+(201)-(210)\right)(01)+q(301201)\\ =&-q(301012)+q^2(301021)-q(301201)+q(301210)+q(310201)+q^2(302101)-q(320101),\end{aligned}$$

(A.3) 等于

$$\begin{aligned}&q^4(101023)+q^5(101032)\\ &-(q^2+1)(012301)-q^4(102301)-q^4(012310)-(q^6+q^2)(102310)\\ &-(q^3+q)(013201)-q^5(103201)-q^5(013210)-(q^7+q^3)(103210)\\ &+q^4(231010)+q^5(321010)\\ &+q(010231)+q(023101)+q^2(010321)+q^2(032101).\end{aligned}\tag{A.4}$$

Here

$$\begin{aligned}-(q^2+1)(012301) =& -q[2](0\overline{120}13)\\ =& q(0)\left((012)-(102)-[2](021)+(201)-(210)\right)(13)\\ =& -q(010213)-q(021013)\end{aligned}$$

类似地

$$-(q^3+q)(013201) = -q^2[2](30\overline{1201}) = -q^2(301021) - q^2(302101),$$

从而（A.4）化为

$$\begin{aligned} & q^4(101023) + q^5(101032) \\ & - q^4(102301) - q^4(012310) - (q^6+q^2)(102310) \\ & - q^5(103201) - q^5(013210) - (q^7+q^3)(103210) \\ & + q^4(231010) + q^5(321010). \end{aligned} \tag{A.5}$$

重复上述过程，我们得出 (A.5) 等于零。

Appendix B. Proof of Lemma 7.8

在本附录中，我们证明引理 7.8。我们只验证最后两个恒等式，因为其余恒等式更容易。我们还将假设 $x_1 = x_2 = 1$，一般情形则可通过简单追踪谱参数得出。

为简洁起见，我们引入以下记号：

$$w^{a,\ b\ c\ d,,,y,,w}_{\ x\ \ z} := |a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_3 + c\mathbf{e}_{2m-1} + d\mathbf{e}_{2m+1}\rangle \otimes |x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_3 + z\mathbf{e}_{2m-1} + w\mathbf{e}_{2m+1}\rangle \in \mathcal{W}^{\otimes 2}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}$$

其中我们将 $\mathcal{W}^{\otimes 2}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'} = \mathfrak{tr}^{\boldsymbol{\epsilon}'}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}'}\mathcal{W}^{\otimes 2}_{\boldsymbol{\epsilon}'} \subset \mathcal{W}^{\otimes 2}_{\boldsymbol{\epsilon}'}$ 视为相同的。

B.1. $\boldsymbol{F}_{m+1}u^{i,}{}_{r}{}^{,j}{}_{,s}$ 的公式。我们从此处开始。

$$f_m^{(j)} v_{l_1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} w^{0,0,j,l_1-j}_{0,0,0,0}.$$

由于 e_0、e_1、...、e_m 与 f_{m+1} 对易，我们有

$$\begin{aligned} e_0 u^{i,j}_{r,s} &= \begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} \left(f^{(i)}_{m+1} e_0 w^{0,0,j,l_1-j}_{0,0,0,0}\right) \otimes (k_0^{-1} f^{(r-i)}_{m+1} f^{(s-j)}_m v_{l_2}) \\ &\quad + \begin{bmatrix} l_2 \\ s-j \end{bmatrix} (f^{(i)}_{m+1} f^{(j)}_m v_{l_1}) \otimes \left(f^{(r-i)}_{m+1} e_0 w^{0,0,s-j,l_2-s+j}_{0,0,0,0}\right) \\ &= \begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} q^{-2} f^{(i)}_{m+1} \left(w^{1,0,j,l_1-j}_{0,1,0,0} - q^{-1} w^{0,1,j,l_1-j}_{1,0,0,0}\right) \otimes (f^{(r-i)}_{m+1} f^{(s-j)}_m v_{l_2}) \\ &\quad + \begin{bmatrix} l_2 \\ s-j \end{bmatrix} (f^{(i)}_{m+1} f^{(j)}_m v_{l_1}) \otimes f^{(r-i)}_{m+1} \left(w^{1,0,s-j,l_2-s+j}_{0,1,0,0} - q^{-1} w^{0,1,s-j,l_2-s+j}_{1,0,0,0}\right), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & (e_{m-1}\cdots e_3 e_2) e_0 u^{i,j}_{r,s} \\ &= \begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} q^{-2} f^{(i)}_{m+1} e_{m-1}\cdots e_2 \left(w^{1,0,j,l_1-j}_{0,1,0,0} - q^{-1} w^{0,1,j,l_1-j}_{1,0,0,0}\right) \otimes k_{m-1}^{-1}\cdots k_2^{-1} f^{(r-i)}_{m+1} f^{(s-j)}_m v_{l_2} \\ &\quad + \begin{bmatrix} l_2 \\ s-j \end{bmatrix} (f^{(i)}_{m+1} f^{(j)}_m v_{l_1}) \otimes f^{(r-i)}_{m+1} e_{m-1}\cdots e_2 \left(w^{1,0,s-j,l_2-s+j}_{0,1,0,0} - q^{-1} w^{0,1,s-j,l_2-s+j}_{1,0,0,0}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} q^{-2-s+j-r+i} f_{m+1}^{(i)} \left(w_{0,0,1,0}^{1,0,j,l_1-j} - q^{-1} w_{1,0,0,0}^{0,0,j+1,l_1-j} \right) \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2} \\
&\quad + \begin{bmatrix} l_2 \\ s-j \end{bmatrix} (f_{m+1}^{(i)} f_m^{(j)} v_{l_1}) \otimes f_{m+1}^{(r-i)} \left(w_{0,0,1,0}^{1,0,s-j,l_2-s+j} - q^{-1} w_{1,0,0,0}^{0,0,s-j+1,l_2-s+j} \right).
\end{aligned}
$$

接下来，我们将 e_m 应用于 $(e_{m-1}\cdots e_3e_2)e_0u^{i,j}_{r,s}$:

$$
\begin{aligned}
&e_m(e_{m-1}\cdots e_3e_2)e_0u^{i,\ j}_{r\ s}, \\
&= \begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} q^{-2+s-j-r+i-l_2} f_{m+1}^{(i)} \begin{Bmatrix} q[j] w_{0,0,1,0}^{1,0,j-1,l_1-j+1} \\ +w_{0,0,0,1}^{1,0,j,l_1-j} \\ -q^{-1}[j+1] w_{1,0,0,0}^{0,0,j,l_1-j+1} \end{Bmatrix} \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2} \\
&\quad + [l_2-s+j+1] \begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} q^{-2-s+j-r+i} f_{m+1}^{(i)} \begin{Bmatrix} w_{0,0,1,0}^{1,0,j,l_1-j} \\ -q^{-1} w_{1,0,0,0}^{0,0,j+1,l_1-j} \end{Bmatrix} \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j-1)} v_{l_2} \\
&\quad + \begin{bmatrix} l_2 \\ s-j \end{bmatrix} [l_1-j+1] q^{2s-2j+1-2l_2} f_{m+1}^{(i)} f_m^{(j-1)} v_{l_1} \otimes f_{m+1}^{(r-i)} \begin{Bmatrix} w_{0,0,1,0}^{1,0,s-j,l_2-s+j} \\ -q^{-1} w_{1,0,0,0}^{0,0,s-j+1,l_2-s+j} \end{Bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} l_2 \\ s-j \end{bmatrix} f_{m+1}^{(i)} f_m^{(j)} v_{l_1} \otimes f_{m+1}^{(r-i)} \begin{Bmatrix} q[s-j] w_{0,0,1,0}^{1,0,s-j-1,l_2-s+j+1} \\ +w_{0,0,0,1}^{1,0,s-j,l_2-s+j} \\ -q^{-1}[s-j+1] w_{1,0,0,0}^{0,0,s-j,l_2-s+j+1} \end{Bmatrix},
\end{aligned}
$$

其中我们使用众所周知的公式

$$
e_i f_i^{(k)} v = [a-k+1] f_i^{(k-1)} v + f_i^{(k)} e_i v \tag{B.1}
$$

对于任意满足 $k_i v = q^a v$ 的 v。为完成计算，注意到上式右端的第二项被 $e_{m-1}\cdots e_2e_1$ 湮灭:

$$
e_{m-1}\cdots e_1 \left(w_{0,0,1,0}^{1,0,j,l_1-j} - q^{-1} w_{1,0,0,0}^{0,0,j+1,l_1-j} \right) = q^{-1} w_{0,0,1,0}^{0,0,j+1,l_1-j} - q^{-1} w_{0,0,1,0}^{0,0,j+1,l_1-j} = 0
$$

第三个也是如此。最后，我们有

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_{m+1} u_{r,s}^{i,j} = (e_{m-1}\cdots e_2e_1) e_m (e_{m-1}\cdots e_3e_2) e_0 u_{r,s}^{i,j} \\
&\quad = \begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} q^{-2-2r+2i-l_2} f_{m+1}^{(i)} \begin{Bmatrix} [j] w_{0,0,1,0}^{0,0,j,l_1-j+1} \\ +w_{0,0,0,1}^{0,0,j+1,l_1-j} \\ -q^{-1}[j+1] w_{0,0,1,0}^{0,0,j,l_1-j+1} \end{Bmatrix} \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2} \\
&\qquad + \begin{bmatrix} l_2 \\ s-j \end{bmatrix} f_{m+1}^{(i)} f_m^{(j)} v_{l_1} \otimes f_{m+1}^{(r-i)} \begin{Bmatrix} [s-j] w_{0,0,1,0}^{0,0,s-j,l_2-s+j+1} \\ +w_{0,0,0,1}^{0,0,s-j+1,l_2-s+j} \\ -q^{-1}[s-j+1] w_{0,0,1,0}^{0,0,s-j,l_2-s+j+1} \end{Bmatrix} \\
&\quad = \begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} q^{-2-2r+2i-l_2} f_{m+1}^{(i)} \left(-q^{-j-1} w_{0,0,1,0}^{0,0,j,l_1-j+1} + w_{0,0,0,1}^{0,0,j+1,l_1-j} \right) \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2} \\
&\qquad + \begin{bmatrix} l_2 \\ s-j \end{bmatrix} f_{m+1}^{(i)} f_m^{(j)} v_{l_1} \otimes f_{m+1}^{(r-i)} \left(-q^{-s+j-1} w_{0,0,1,0}^{0,0,s-j,l_2-s+j+1} + w_{0,0,0,1}^{0,0,s-j+1,l_2-s+j} \right) \\
&\quad = q^{2i-2r-l_2-2} [i+1] u_{r+1,s}^{i+1,j} + [r-i+1] u_{r+1,s}^{i,j}
\end{aligned}
$$

正如所需。

B.2. $\boldsymbol{E}_{m+1}u^{i,r}{}^{j,s}$ 的公式。我们先展开 $f_{(i)\,m+1}f_{(j)m}\ v_{l_1}$。回忆一下，

$$f_m^{(j)}v_{l_1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} w_{0,0,0,0}^{0,0,j,l_1-j},$$

并记为

$$f_{m+1}^{(i)}f_m^{(j)}v_{l_1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} f_{m+1}^{(i)}w_{0,0,0,0}^{0,0,j,l_1-j} = \frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix}\sum_{x=0}^{i} d_{i,x}w_{0,0,x,i-x}^{0,0,i-x+j,x+l_1-j}$$

对于某些 $d_{i,x} \in \Bbbk$。类似地，我们可以写出

$$f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j)}v_{l_2} = \frac{1}{[r-i]!}\begin{bmatrix} l_2 \\ s-j \end{bmatrix}\sum_{y=0}^{r-i} d'_{r-i,y}w_{0,0,y,r-i-y}^{0,0,r-i-y+s-j,y+l_2-s+j}.$$

于是有

$$\begin{aligned}
&f_1\cdots f_{m-1}u_{r,s}^{i,j} \\
&\quad=(f_1\cdots f_{m-1}f_{m+1}^{(i)}f_m^{(j)}v_{l_1})\otimes f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j)}v_{l_2} \\
&\qquad+(k_1\cdots k_{m-1}f_{m+1}^{(i)}f_m^{(j)}v_{l_1})\otimes(f_1\cdots f_{m-1}f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j)}v_{l_2}) \\
&\quad=\frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix}\sum_{x=0}^{i}\begin{pmatrix}[i-x+j]d_{i,x}w_{0,0,x,i-x}^{1,0,i-x+j-1,x+l_1-j} \\ +q^{i-x+j}[x]d_{i,x}w_{1,0,x-1,i-x}^{0,0,i-x+j,x+l_1-j}\end{pmatrix}\otimes f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j)}v_{l_2} \\
&\qquad+\frac{q^{i+j}}{[r-i]!}\begin{bmatrix} l_2 \\ s-j \end{bmatrix}f_{m+1}^{(i)}f_m^{(j)}v_{l_1} \\
&\qquad\qquad\otimes\sum_{y=0}^{r-i}\begin{pmatrix}[r-i-y+s-j]d'_{r-i,y}w_{0,0,y,r-i-y}^{1,0,r-i-y+s-j-1,y+l_2-s+j} \\ +q^{r-i-y+s-j}[y]d'_{r-i,y}w_{1,0,y-1,r-i-y}^{0,0,r-i-y+s-j,y+l_2-s+j}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

然后我们应用 f_m：

$$f_m(f_1\cdots f_{m-1})u_{r,s}^{i,j} = S_1+S_2+S_3+S_4,$$

$$S_1 = \frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix}\sum_{x=0}^{i}\left\{\begin{array}{c}[i-x+j]d_{i,x}\begin{pmatrix}[x+l_1-j]w_{0,0,x,i-x}^{1,0,i-x+j,x+l_1-j-1} \\ +q^{l_1+2x-i-2j+1}[i-x]w_{0,0,x+1,i-x-1}^{1,0,i-x+j-1,x+l_1-j}\end{pmatrix} \\ +q^{i-x+j}[x]d_{i,x}\begin{pmatrix}[x+l_1-j]w_{1,0,x-1,i-x}^{0,0,i-x+j+1,x+l_1-j-1} \\ +q^{l_1+2x-i-2j}[i-x]w_{1,0,x,i-x-1}^{0,0,i-x+j,x+l_1-j}\end{pmatrix}\end{array}\right\} \\ \otimes f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j)}v_{l_2},$$

$$S_2 = \frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix}[s-j+1]q^{l_1-2j+1}\sum_{x=0}^{i}\begin{pmatrix}[i-x+j]d_{i,x}w_{0,0,x,i-x}^{1,0,i-x+j-1,x+l_1-j} \\ +q^{i-x+j}[x]d_{i,x}w_{1,0,x-1,i-x}^{0,0,i-x+j,x+l_1-j}\end{pmatrix} \\ \otimes f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j+1)}v_{l_2},$$

$$S_3 = \frac{q^{i+j}}{[r-i]!}\begin{bmatrix} l_2 \\ s-j \end{bmatrix}[j+1]f_{m+1}^{(i)}f_m^{(j+1)}v_{l_1} \\ \otimes\sum_{y=0}^{r-i}\begin{pmatrix}[r-i-y+s-j]d'_{r-i,y}w_{0,0,y,r-i-y}^{1,0,r-i-y+s-j-1,y+l_2-s+j} \\ +q^{r-i-y+s-j}[y]d'_{r-i,y}w_{1,0,y-1,r-i-y}^{0,0,r-i-y+s-j,y+l_2-s+j}\end{pmatrix},$$

$$S_4=\frac{q^{l_1+i-j}}{[r-i]!}\begin{bmatrix} l_2 \\ s-j\end{bmatrix} f_{m+1}^{(i)}f_m^{(j)}v_{l_1}$$
$$\otimes\sum_{y=0}^{r-i}\begin{Bmatrix}[r-i-y+s-j]d'_{r-i,y}\begin{pmatrix}[y+l_2-s+j]w^{1,0,r-i-y+s-j,y+l_2-s+j-1}_{0,0,y,r-i-y}\\ +q^{l_2+2y-r+i-2s+2j+1}[r-i-y]w^{1,0,r-i-y+s-j-1,y+l_2-s+j}_{0,0,y+1,r-i-y-1}\end{pmatrix}\\ +q^{r-i-y+s-j}[y]d'_{r-i,y}\begin{pmatrix}[y+l_2-s+j]w^{0,0,r-i-y+s-j+1,y+l_2-s+j-1}_{1,0,y-1,r-i-y}\\ +q^{l_2+2y-r+i-2s+2j}[r-i-y]w^{0,0,r-i-y+s-j,y+l_2-s+j}_{1,0,y,r-i-y-1}\end{pmatrix}\end{Bmatrix}.$$

接下来，考虑 $f_0(f_2\cdots f_{m-1})f_m(f_1\cdots f_{m-1})u^{i,\ r^j,\ s}$，我们仍将其像上面一样分为四个加项。于是有 $f_0(f_2\cdots f_{m-1})S_2=f_0(f_2\cdots f_{m-1})S_3=0$。例如，

(B.2)

$$\begin{aligned}
&f_0(f_2\cdots f_{m-1})S_2\\
=&\left\{f_0(f_2\cdots f_{m-1})\left([i-x+j]d_{i,x}w^{1,0,i-x+j-1,x+l_1-j}_{0,0,x,i-x}+q^{i-x+j}[x]d_{i,x}w^{0,0,i-x+j,x+l_1-j}_{1,0,x-1,i-x}\right)\right\}\\
&\otimes f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j+1)}v_{l_2}\\
=&f_0\begin{Bmatrix}[i-x+j]d_{i,x}\left([i-x+j-1]w^{1,1,i-x+j-2,x+l_1-j}_{0,0,x,i-x}+q^{i-x+j-1}[x]w^{1,0,i-x+j-1,x+l_1-j}_{0,1,x-1,i-x}\right)\\ +q^{i-x+j}[x]d_{i,x}\left([i-x+j]w^{0,1,i-x+j-1,x+l_1-j}_{1,0,x-1,i-x}+q^{i-x+j}[x-1]w^{0,0,i-x+j,x+l_1-j}_{1,1,x-2,i-x}\right)\end{Bmatrix}\\
&\otimes f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j+1)}v_{l_2}\\
=&\left(d_{i,x}[i-x+j][x]q^{i-x+j-1}\cdot(-q)+d_{i,x}[x][i-x+j]q^{i-x+j}\right)\\
&\cdot w^{0,0,i-x+j-1,x+l_1-j}_{0,0,x-1,i-x}\otimes f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j+1)}v_{l_2}\\
=&0.
\end{aligned}$$

我们来考察剩下的两个加项。对于 $f_0(f_2\cdots f_{m-1})S_1$，我们先计算第一行与第三行之和：

$$\begin{aligned}
&f_0(f_2\cdots f_{m-1})\frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix}l_1\\ j\end{bmatrix}\sum_{x=0}^{i}f_0\begin{Bmatrix}[i-x+j]d_{i,x}[x+l_1-j]w^{1,0,i-x+j,x+l_1-j-1}_{0,0,x,i-x}\\ +q^{i-x+j}[x]d_{i,x}[x+l_1-j]w^{0,0,i-x+j+1,x+l_1-j-1}_{1,0,x-1,i-x}\end{Bmatrix}\\
&\otimes f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j)}v_{l_2}\\
=&\frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix}l_1\\ j\end{bmatrix}\sum_{x=0}^{i}d_{i,x}[x+l_1-j]f_0\begin{Bmatrix}[i-x+j][x]q^{i-x+j}w^{1,0,i-x+j,x+l_1-j-1}_{0,1,x-1,i-x}\\ +q^{i-x+j}[x][i-x+j+1]w^{0,1,i-x+j,x+l_1-j-1}_{1,0,x-1,i-x}\end{Bmatrix}\\
&\otimes f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j)}v_{l_2}\\
=&\frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix}l_1\\ j\end{bmatrix}\sum_{x=0}^{i}d_{i,x}[x+l_1-j][x]q^{-i-x+j}(-[i-x+j]q+[i-x+j+1])\\
&\cdot w^{0,0,i-x+j,x+l_1-j-1}_{0,0,x-1,i-x}\otimes f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j)}v_{l_2}\\
=&\frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix}l_1\\ j\end{bmatrix}\sum_{x=0}^{i}d_{i,x}[x+l_1-j][x]w^{0,0,i-x+j,x+l_1-j-1}_{0,0,x-1,i-x}\otimes f_{m+1}^{(r-i)}f_m^{(s-j)}v_{l_2}.
\end{aligned}$$

第二行与第四行之和为

$$f_0(f_2\cdots f_{m-1})\frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix}l_1\\ j\end{bmatrix}\sum_{x=0}^{i}f_0\begin{Bmatrix}[i-x+j]d_{i,x}q^{l_1+2x-i-2j+1}[i-x]w^{1,0,i-x+j-1,x+l_1-j}_{0,0,x+1,i-x-1}\\ +q^{i-x+j}[x]d_{i,x}q^{l_1+2x-i-2j}[i-x]w^{0,0,i-x+j,x+l_1-j}_{1,0,x,i-x-1}\end{Bmatrix}$$

$$\otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2}$$

$$=\frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} \sum_{x=0}^{i} d_{i,x}[i-x] q^{l_1+2x-i-2j} f_0 \begin{Bmatrix} [i-x+j] q^{i-x+j}[x+1] w_{0,1,x,i-x-1}^{1,0,i-x+j-1,x+l_1-j} \\ +q^{i-x+j}[x][i-x+j] \\ w_{1,0,x,i-x-1}^{0,1,i-x+j-1,x+l_1-j} \end{Bmatrix}$$

$$\otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2}$$

$$=\frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} \sum_{x=0}^{i} d_{i,x}[i-x][i-x+j] q^{l_1+x-j}(-q[x+1]+[x])$$

$$\cdot w_{0,0,x,i-x-1}^{0,0,i-x+j-1,x+l_1-j} \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2}$$

$$=-\frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} \sum_{x=0}^{i} d_{i,x}[i-x][i-x+j] q^{l_1+2x-j+1} w_{0,0,x,i-x-1}^{0,0,i-x+j-1,x+l_1-j} \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2}.$$

总而言之，

$$f_0(f_2\cdots f_{m-1})S_1$$

$$=\frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} \sum_{x=0}^{i} \left(d_{i,x}[x+l_1-j][x] - d_{i,x-1}[i-x+1][i-x+j+1] q^{l_1+2x-j-1}\right)$$

$$\cdot w_{0,0,x-1,i-x}^{0,0,i-x+j,x+l_1-j-1} \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2}.$$

另一方面，可以很容易地验证，右边与之相同。

$$(e_{m+1} f_{m+1}^{(i)} f_m^{(j)} v_{l_1}) \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2}$$

$$= \left(e_{m+1} \frac{1}{[i]!}\begin{bmatrix} l_1 \\ j \end{bmatrix} \sum_{x=0}^{i} d_{i,x} w_{0,0,x,i-x}^{0,0,i-x+j,x+l_1-j}\right) \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2}.$$

因此我们得到的是

$$f_0(f_2\cdots f_{m-1})S_1 = (e_{m+1} f_{m+1}^{(i)} f_m^{(j)} v_{l_1}) \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2}$$

$$= -[l_1+i+1] f_{m+1}^{(i-1)} f_m^{(j)} v_{l_1} \otimes f_{m+1}^{(r-i)} f_m^{(s-j)} v_{l_2} = -[l_1+i+1] u_{r-1,s}^{i-1,j}.$$

通过类似的计算，我们得到

$$f_0(f_2\cdots f_{m-1})S_4 = -q^{l_1+2i+2}[l_2+r-i+1] u_{r-1,s}^{i,j}$$

并完成验证。

Appendix C. Proof of Lemma 7.9

我们令

$$A_r^i = (-1)^i \prod_{k=1}^{i} q^{2k-2-l_2-2r} \frac{[r+l_2-k+2]}{[l_1+k+1]}, \quad B_s^j = (-q)^j \prod_{k'=1}^{j} q^{2k'+l_2-2s} \frac{[l_2-s+k']}{[l_1-k'+1]},$$

使得 $u_{r,\ s} = \sum_{i,\ j} A_r^i B_s^j u^{i}_{,\ r^{j},\ s}$（见引理 7.7）。

固定 $r \geq 0$ 和 $0 \leq s \leq \min(l_1, l_2)$。我们只需证明

$$\boldsymbol{F}_{m+1} u_{r,s} \in \Bbbk^{\times} u_{r+1,s} + \Bbbk f_{m+1} u_{r,s} + \Bbbk f_{m+1}^{(2)} u_{r-1,s},$$

而引理 7.9 的另一项断言则更容易证明。

由 $\mathcal{W}_{l_1}(x_1) \otimes \mathcal{W}_{l_2}(x_2)$ (7.4) 的经典分解以及权重考量，我们有

$$\boldsymbol{F}_{m+1}u_{r,s} = \sum_{a,b\geq 0} C_{a,b} f_{m+1}^{(a)} f_m^{(b)} u_{r+1-a,s-b}$$

对于某个 $C_{a,\ b} \in \Bbbk$。我们首先通过验证$e_m \boldsymbol{F}_{m+1}u_{r,\ s} = 0$来证明，当 $b > 0$ 时，$C_{a,\ b} = 0$。后者是直接的：因为

$$e_m u_{r,s}^{i,j} = q^{-l_2+2s-2j}[l_1 - j + 1]u_{r,s-1}^{i,j-1} + [l_2 - s + j + 1]u_{r,s-1}^{i,j},$$

我们有

$$\begin{aligned}
e_m \boldsymbol{F}_{m+1}u_{r,s} &= e_m \sum_{i,j} A_r^i B_s^j \boldsymbol{F}_{m+1} u_{r,s}^{i,j} \\
&= \sum A_r^i B_s^j \left(x_1 q^{2i-2r-l_2-2}[i+1] e_m u_{r+1,s}^{i+1,j} + x_2[r-i+1] e_m u_{r+1,s}^{i,j} \right) \\
&= \sum A_r^i B_s^j \left\{ \begin{array}{c} x_1 q^{-l_2-2r+2i-2}[i+1] \left(q^{-l_2+2s-2j}[l_1-j+1] u_{r+1,s-1}^{i+1,j-1} + [l_2-s+j+1] u_{r+1,s-1}^{i+1,j} \right) \\ + x_2[r-i+1] \left(q^{-l_2+2s-2j}[l_1-j+1] u_{r+1,s-1}^{i,j-1} + [l_2-s+j+1] u_{r+1,s-1}^{i,j} \right) \end{array} \right\} \\
&= \sum \left\{ \begin{array}{c} x_1 A_r^{i-1} B_s^{j+1} q^{-2l_2-2r+2i+2s-2j-6}[i][l_1-j] + x_1 A_r^{i-1} B_s^j q^{-l_2-2r+2i-4}[i][l_2-s+j+1] \\ + x_2 A_r^i B_s^{j+1} q^{-l_2+2s-2j-2}[r-i+1][l_1-j] + x_2 A_r^i B_s^j [r-i+1][l_2-s+j+1] \end{array} \right\} \\
&\qquad \cdot u_{r+1,\ s-1}^{i,j}.
\end{aligned}$$

于是，利用 $u^{i,\ j}_{r+1,\ s-1}$ 的每个系数都很容易看出为零

$$\frac{A_r^{i-1}}{A_r^i} = -q^{l_2+2r-2i+2}\frac{[l_1+i+1]}{[r+l_2-i+2]}, \quad \frac{B_s^{j+1}}{B_s^j} = -q^{l_2-2s+2j+2}\frac{[l_2-s+j+1]}{[l_1-j]}.$$

接下来，我们断言 $e_{m+1}^2 \boldsymbol{F}_{m+1}u_{r,s} \in \Bbbk^\times u_{r-1,s}$，这意味着只要 $a > 2$，就有$C_{a,0} = 0$。事实上，由

$$\begin{aligned}
e_{m+1}^2 u_{r,s}^{i,j} &= -q^{l_2+2r-2i+2}[l_1+i+1] e_{m+1} u_{r-1,s}^{i-1,j} - [l_2+r-i+1] e_{m+1} u_{r-1,s}^{i,j} \\
&= q^{2l_2+4r-4i+4}[l_1+i+1][l_1+i] u_{r-2,s}^{i-2,j} + q^{l_2+2r-2i+2}[l_1+i+1][l_2+r-i+1] u_{r-2,s}^{i-1,j} \\
&\quad + q^{l_2+2r-2i}[l_2+r-i+1][l_1+i+1] u_{r-2,s}^{i-1,j} + [l_2+r-i+1][l_2+r-i] u_{r-2,s}^{i,j} \\
&= q^{2l_2+4r-4i+4}[l_1+i+1][l_1+i] u_{r-2,s}^{i-2,j} + q^{l_2+2r-2i+1}[2][l_1+i+1][l_2+r-i+1] u_{r-2,s}^{i-1,j} \\
&\quad + [l_2+r-i+1][l_2+r-i] u_{r-2,s}^{i,j},
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
& e_{m+1}^2 \boldsymbol{F}_{m+1}u_{r,s} \\
=& e_{m+1}^2 \sum_{i,j} A_r^i B_s^j \boldsymbol{F}_{m+1} u_{r,s}^{i,j} \\
=& \sum A_r^i B_s^j \left(x_1 q^{2i-2r-l_2-2}[i+1] e_{m+1}^2 u_{r+1,s}^{i+1,j} + x_2[r-i+1] e_{m+1}^2 u_{r+1,s}^{i,j} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum A_r^i B_s^j \left\{ \begin{array}{c} x_1 q^{-l_2-2r+2i-2}[i+1] \left(\begin{array}{c} q^{2l_2+4r-4i+4}[l_1+i+2][l_1+i+1]u_{r-1,s}^{i-1,j} \\ +q^{l_2+2r-2i+1}[2][l_1+i+2][l_2+r-i+1]u_{r-1,s}^{i,j} \\ +[l_2+r-i+1][l_2+r-i]u_{r-1,s}^{i+1,j} \end{array} \right) \\ +x_2[r-i+1] \left(\begin{array}{c} q^{2l_2+4r-4i+8}[l_1+i+1][l_1+i]u_{r-1,s}^{i-2,j} \\ +q^{l_2+2r-2i+3}[2][l_1+i+1][l_2+r-i+2]u_{r-1,s}^{i-1,j} \\ +[l_2+r-i+2][l_2+r-i+1]u_{r-1,s}^{i,j} \end{array} \right) \end{array} \right\} \\
&=\sum B_s^j \left\{ \begin{array}{c} x_2 A_r^{i+2} q^{2l_2+4r-4i}[r-i-1][l_2+i+3][l_2+i+2] \\ +A_r^{i+1} q^{l_2+2r-2i}[l_1+i+2]\left(x_1[i+2][l_1+i+3]+x_2 q[2][r-i][l_2+r-i+1]\right) \\ +A_r^i[l_2+r-i+1]\left(x_1 q^{-1}[2][i+1][l_1+i+2]+x_2[r-i+1][l_2+r-i+2]\right) \\ +x_1 A_r^{i-1} q^{-l_2-2r+2i-4}[i][l_2+r-i+2][l_2+r-i+1] \end{array} \right\} u_{r-1,s}^{i,j} \\
&=\sum B_s^j A_r^i[l_2+r-i+1] \left\{ \begin{array}{c} x_2 q^2[r-i-1][l_2+r-i] \\ -x_1[i+2][l_1+i+3]-x_2 q[2][r-i][l_2+r-i+1] \\ +x_1 q^{-1}[2][i+1][l_1+i+2]+x_2[r-i+1][l_2+r-i+2] \\ -x_1 q^{-2}[i][l_1+i+1] \end{array} \right\} u_{r-1,s}^{i,j} \\
&=\sum B_s^j A_r^i[l_2+r-i+1][2]\left(x_2 q^{-l_2-2r+2i}-x_1 q^{l_1+2i+2}\right) u_{r-1,s}^{i,j} \\
&=\sum B_s^j A_{r-1}^i[l_2+r+1][2]\left(x_2 q^{-l_2-2r}-x_1 q^{l_1+2}\right) u_{r-1,s}^{i,j} \\
&=[l_2+r+1][2]\left(x_2 q^{-l_2-2r}-x_1 q^{l_1+2}\right) u_{r-1,s}.
\end{aligned}
$$

在第六个等式中，我们使用了以下恒等式。

$$q^2[a][b]-q[2][a+1][b+1]+[a+2][b+2]=q^{-a-b-1}[2]$$

对 a、$b\in\mathbb{Z}$。

最后，还需证明 $C_{0,0}\neq 0$。注意，由于

$$
\begin{aligned}
e_{m+1}^2 \boldsymbol{F}_{m+1} u_{r,s} &= e_{m+1}^2\left(C_{0,0}u_{r+1,s}+C_{1,0}f_{m+1}u_{r,s}+C_{2,0}f_{m+1}^{(2)}u_{r-1,s}\right) \\
&= C_{2,0}[l_1+l_2+2r][l_1+l_2+2r+1]u_{r-1,s},
\end{aligned}
$$

上述计算也确定了

$$C_{2,0}=\frac{[l_2+r+1][2]}{[l_1+l_2+2r][l_1+l_2+2r+1]}\left(x_2 q^{-l_2-2r}-x_1 q^{l_1+2}\right).$$

比较以下恒等式两边的 $u^0,\ r^0,\ s$ 系数

$$
\begin{aligned}
-C_{1,0}[l_1+l_2+2r+2]u_{r,s}&-C_{2,0}[l_1+l_2+2r+1]f_{m+1}u_{r-1,s} \\
&= e_{m+1}\left(C_{0,0}u_{r+1,s}+C_{1,0}f_{m+1}u_{r,s}+C_{2,0}f_{m+1}^{(2)}u_{r-1,s}\right) \\
&= e_{m+1}\boldsymbol{F}_{m+1}u_{r,s} \\
&= \sum A_r^i B_s^j\left(q^{2i-2r-l_2-2}[i+1]e_{m+1}u_{r+1,s}^{i+1,j}+[r-i+1]e_{m+1}u_{r+1,s}^{i,j}\right),
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
C_{1,0}=\frac{1}{[l_1+l_2+2r+2]}&([l_1+2]+[r+1][l_2+r+2]-q^2[r][l_2+r+1] \\
&-\frac{(x_2 q^{-l_1-l_2-2r-2}-x_1)[2][l_2+r+1][r]}{[l_1+l_2+2r]}).
\end{aligned}
$$

类似地，$C_{0,\ 0}$ 可以由.....计算得出

$$\boldsymbol{F}_{m+1}u_{r,s} = C_{0,0}u_{r+1,s} + C_{1,0}f_{m+1}u_{r,s} + C_{2,0}f_{m+1}^{(2)}u_{r-1,s}$$

其中 $u^{0}_{,\ r+1,\ s}$ 的系数为

$$[r+1] = C_{0,0} + q^{-l_1-2}[r+1]C_{1,0} + q^{-2l_1-4}\frac{[r][r+1]}{[2]}C_{2,0}.$$

将上面的恒等式中的 $C_{1,\ 0}$ 和 $C_{2,\ 0}$ 代入，可以很容易验证，对于一般的 x_1 和 x_2，$C_{0,\ 0}$ 非零。

References

[1] T. Akasaka, M. Kashiwara, *Finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Publ.Res. Inst.Math. Sci. 33 (1997) 839–867.[2] G. Benkart, S.-J.Kang,M. Kashiwara, *Crystal bases for the quantum superalgebra* $U_q(\mathfrak{gl}(m,n))$, J. Amer.Math. Soc. 13 (2000) 295-331.[3] T.Br¨ocker and T. tom Dieck, *Representations of compact Lie Groups*, SpringerVerlag, New York 1995.[4] S.-J. Cheng,N. Lam, *Irreducible characters of general linear superalgebra and super duality*, Comm. Math. Phys. 298(2010) 645–672.[5] S.-J. Cheng, N. Lam, W.Wang, *Super duality and irreducible characters of ortho-symplectic Liesuperalgebras*, Invent. Math. 183(2011) 189–224.[6] S.-J. Cheng, W. Wang, *Dualities and Representations of Lie Superalgebras*, 数学研究生丛书 144, Amer.Math. Soc., 2013.[7] B. Davies, M. Okado, *Excitation spectra of spin models constructed from quantized affine algebras oftypes* $B_n^{(1)}$ *and* $D_n^{(1)}$, Internat. J. Modern Phys. A 11 (1996), 1975–2017.[8] D. Hernandez,B. Leclerc, *Cluster algebras and quantum affine algebras*, Duke Math. J.154 (2010) 265–341.[9] R. Howe: *Remarks on classical invariant theory*, Trans.Amer.Math. Soc.313 (1989) 539–570.[10] R. Howe: *Perspectives on invariant Theory: Schur Duality, Multiplicity-free Actions and Beyond*,沙尔讲座, Israel Math. Conf. Proc. 8,特拉维夫(1992), 1–182.[11] R.Howe, E.-C. Tan, J. Willenbring, *Stable branching rules for classical symmetric pairs*,Trans.Amer. Math.Soc. 357 (2004) 1601–1626.[12] J.C.Jantzen, *Lectures on Quantum Groups*, Amer. Math. Soc.GraduateStudiesinMath., vol. 6, 普罗维登斯, 1996.[13] S.-J. Kang,M. Kashiwara, M.-H. Kim, *Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantumaffine algebras, II*, DukeMath. 164 (2015) 1549–1602.[14] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M.-H. Kim, S.-J. Oh, *Simplicity of heads and socles of tensor products*, Compos.Math. 151 (2015) 377–396.[15] M.Kashiwara, *On level zero representations of quantum affine algebras*, Duke Math. J. 112 (2002)117–175.[16] M. Kashiwara, M.-H. Kim, *Laurent phenomenon and simple modules of quiver Hecke algebras*, Com- pos.Math. 155 (2019) 2263–2295.[17] M. Kashiwara, M. Kim, S. Oh, E. Park, *Monoidal categorification and quantum affine algebras*, Compos.Math. 156 (2020) 1039–1077.[18] M. Kashiwara,M. Kim, S.Oh, E.Park, *Monoidal categorification and quantum affine algebras II*预印本 (2021) arXiv:2103.10067.[19] Y.Koga, *Commutation relations of vertex operators related with the spin representation of* $U_q(D_n^{(1)})$, 大阪 J. Math. 35 (1998) 447–486.

[20] A. Kuniba,M. Okado, *Tetrahedron equation and quantum R matrices for q-oscillator representations of* $U_q(A_{2n}^{(2)})$ $U_q(C_n^{(1)})$ *and* $U_q(D_{n+1}^{(2)})$, Comm.Math.Phys. 334 (2015) 1219–1244.[21] A.Kuniba, M. Okado, S. Sergeev, *Tetrahedron equation and generalized quantum groups*, J.Phys. A: Math. Theor.48 (2015) 304001（38页）.[22] J.-H. Kwon, S.-M.Lee, *Super duality for quantum affine algebras of type A*, Int.Math. Res.Not.23 (2022) 18446–18525.[23] J.-H. Kwon, S.-M. Lee, *Affinization of q-oscillator representations of* $U_q(\mathfrak{gl}_n)$,Lett. Math. Phys.113(2023) 第3期，第58号论文，49页.[24] J.-H.Kwon, J.Yu, *R-matrix for generalized quantum groups of type A*, J. Algebra, 566 (2021) 309–341.[25] J.-H. Kwon, M. Okado, *Higher level q-oscillator representations for* $U_q(C_n^{(1)})$ $U_q(C^{(2)}(n+1))$ *and*$U_q(B^{(1)}(0,n))$, Comm.Math. Phys. 385 (2021) 1041–1082.{v[26] G. Letzter, *Symmetric pairs for quantized enveloping algebras*, 《代数杂志》220（1999）729–767。[27] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, 《数学进展》第110卷，Birkhäuser，1993年。[28] S. Machida, *Quantized superalgebras and generalized quantum groups*，硕士论文（2017年），大阪市立大学，见 https://www.omu.ac.jp/orp/ocami/assets/23_09.pdf[29] E. Mukhin，C. A. S. Young, *Affinization of category* $\mathcal{O}$ *for quantum groups*, 《美国数学会汇刊》366（2014）4815–4847。[30] T. Nakashima, *Crystal base and a generalization of the Littlewood-Richardson rule for the classical Lie algebras*, 《数学物理通讯》154（1993）215–243。[31] M. Okado, *Quantum R matrices related to the spin representations of* B_n *and* D_n, 《数学物理通讯》134（1990）467–486。[32] A. Sartori，D. Tubbenhauer, *Webs and q-Howe dualities in types BCD*, 《美国数学会汇刊》371（2019）7387–7431。[33] W. Wang, *Duality in infinite-dimensional Fock representations*, 《当代数学通讯》1（1999）155–199。[34] H. Yamane, *Quantized enveloping algebras associated to simple Lie superalgebras and universal R-matrices*, 《数学科学研究所刊》30（1994）15–84。[35] H.Yamane, *On defining relations of affine Lie superalgebras and affine quantized universal envelopingsuperalgebras*, 《数学科学研究所刊》35（1999）321–390。

Department of Mathematical Sciences and RIM, Seoul National University, Seoul 08826, Ko-rea*Email address*: jaehoonkw@snu.ac.kr
Department of Mathematical Sciences, Seoul National University, Seoul 08826, Korea
Email address: luckydark@snu.ac.kr
Osaka Central Advanced Mathematical Institute & Department of Mathematics, Osaka Metropolitan University, 3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585, Japan
Email address: okado@omu.ac.jp