arXiv:2304.06220v1 [math.CO] 13 Apr 2023

雅可比多项式与设计理论 II

Himadri Shekhar Chakraborty、Reina Ishikawa 和 Yuuho Tanaka*

Abstract. 本文介绍若干与线性码相关的新多项式，定义域为 $\mathbb{F}_q$。特别地，我们引入定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的线性码的多个坐标位置集所对应的分裂完全 Jacobi 多项式的概念，并给出其麦克威廉斯型恒等式。我们还提出广义 q彩色 t设计的概念。作为广义q彩色 t设计的一项应用，我们推导出一个公式，用于求得定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的线性码的分裂完全 Jacobi 多项式。此外，我们定义彩色打包（分别为覆盖）设计的概念。最后，我们给出彩色设计在 III 型和 IV 型码中的一些编码理论应用。

关键词：码、雅可比多项式、设计、不变理论。2010年数学主题分类。主要分类号 11T71；次要分类号 94B05、11F11。

1. Introduction

1997年，Ozeki [35] 引入了线性码的雅可比多项式这一概念，它是格的雅可比形式 [16] 的类比。许多作者研究了编码理论中的雅可比多项式，例如 [6, 7, 8,13, 14, 19]。在这些文章中，Bonnecaze 等人 [6, 7, 8] 指出了雅可比多项式与支撑设计的码之间的一些刻画。此外，Bonnecaze、Rains 和 Sol´e [7] 引入了彩色 t-设计的概念，并将这些设计应用于 $\mathbb{Z}_4$-码：利用极化算子，根据 $\mathbb{Z}_4$-码的对称化重量枚举式计算雅可比多项式。后来，Bonnecaze、Sol´e 和 Udaya [8]研究了 III 型码情形下的 3-色 3-设计。此外，Cameron [10]给出了组合 t-设计的一种新推广。在本文中，我们将这些设计称为广义 t-设计。在最近的一项研究中，Chakraborty、Miezaki、Oura 和 Tanaka [15]引入了

*通讯作者。

线性码的雅可比多项式这一概念，其中包含多个参考向量，并给出了这些雅可比多项式在研究广义 t-设计中的一种设计理论应用。

本文提出了 $\mathbb{F}_q$ 上线性码的分裂完全重量枚举式这一概念，其定义不同于 Bonnecaze 等人 [8]的定义。我们还提出了定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的线性码的分裂完全 Jacobi 多项式这一概念，该多项式关联于码的多组坐标位置。我们证明，这两种码多项式——分裂完全重量枚举式和分裂完全 Jacobi 多项式——都满足 MacWilliams 型恒等式。特别地，按照本文的定义， $\mathbb{F}_3$ 上线性码的完全 Jacobi 多项式等价于按照 Bonnecaze 等人 [8]的定义， $\mathbb{F}_3$上码的分裂完全重量枚举式。此外，我们定义了广义彩色 t-设计的概念，并类比 Bonnecaze 等人 [8], ，给出了 $\mathbb{F}_q$上线性码的分裂完全 Jacobi 多项式之极化的组合解释。此外，我们运用不变理论研究了若干特定长度的 III 型码（分别为 IV 型码）的完全 Jacobi 多项式，以构造与完全 Jacobi 多项式系数相对应的彩色装填设计（分别为覆盖设计）。Bonnecaze 等人 [8] 研究了极值 III 型码的 3-彩色 t-设计结构。本文研究了若干特定长度的 IV 型码，并得到了 4-彩色 t-设计结构。

本文结构如下。第 2 节讨论本文所用的基本定义和记号。我们还证明了 $\mathbb{F}_q$ 上码的分裂完全重量枚举式的麦克威廉斯型恒等式（定理 2.2）。第 3 节介绍若干彩色设计，即广义彩色 t-设计、彩色打包（分别为覆盖）设计及其一些性质。第 4 节给出 $\mathbb{F}_q$ 上线性码的分裂完全雅可比多项式的麦克威廉斯型恒等式（定理 4.1）。我们还探讨了极化算子如何作用于码的多个坐标位置集合，从而得到与之关联的分裂完全雅可比多项式（定理 4.3、定理 4.4）。第 5 节借助完全雅可比多项式，揭示特定长度的 III 型（分别为 IV 型）码与彩色设计之间的一些关系。我们还证明，长度为 6 的厄米特 IV 型码中固定组成的码字构成 4-彩色 2-设计（定理 5.12）。最后，我们在第 6 节以若干评论作为全文结尾。

本文中的所有计算机计算均借助 Magma [9]完成。

2. Preliminaries

设 $\mathbb{F}_q$ 是一个阶为 q 的有限域，其中 q 是一个素数幂。则 $\mathbb{F}_q^n$表示 $\mathbb{F}_q$上的 n 维向量空间。$\mathbb{F}_q^n$的元素称为向量。向量 $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{F}_q^n$ 的汉明重量记为 $\mathrm{wt}(\mathbf{u})$，定义为满足$u_i \neq 0$的 i的数量。两个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^n$的内积为

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n,$$

其中 $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$，$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$。若 q是任意素数 p的偶次幂，则考虑另一种称为厄米内积的内积会更方便，其定义如下:

$$\mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}} := u_1 \overline{v_1} + \cdots + u_n \overline{v_n},$$

其中 $\overline{v_i} := v_i^{\sqrt{q}}$。长度为 n 的 $\mathbb{F}_q$-线性码是$\mathbb{F}_q^n$的一个向量子空间。$\mathbb{F}_q$-线性码的元素称为码字。长度为 n 的 $\mathbb{F}_q$-线性码 C 的对偶码定义为

$$C^{\perp} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^n \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ for all } \mathbf{u} \in C\}.$$

$\mathbb{F}_q$-线性码 C 称为自对偶码，当且仅当 $C = C^{\perp}$。设 q 为任意素数的偶次幂。则长度为 n 的 $\mathbb{F}_q$-线性码 C 称为厄米自对偶码，当且仅当 $C = C^{\perp_H}$，其中 $C^{\perp_H}$ 表示 C 的厄米对偶码，其定义为

$$C^{\perp_H} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^n \mid \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}} = 0 \text{ for all } \mathbf{u} \in C\}.$$

本文中的大多数结果都针对采用通常内积的 $\mathbb{F}_q$-线性码进行表述，但同样可以毫无差别地改述为采用厄米内积的码的情形。

设 $X \subseteq [n]$。附加于 X的元素 $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n$ 的组成是如下 q元组:

$$\mathrm{comp}_X(\mathbf{u}) := (n_{a,X}(\mathbf{u}) : a \in \mathbb{F}_q),$$

其中 $n_{a,\,X}(\mathbf{u}) := \#\{i \in X \mid u_i = a\}$。显然，$\sum_{a \in \mathbb{F}_q} n_{a,\,X}(\mathbf{u}) = |X|$。如果 $X = [n]$，我们更倾向于将 $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n$ 的组成写成

$$\mathrm{comp}(\mathbf{u}) := (n_a(\mathbf{u}) : a \in \mathbb{F}_q),$$

其中 $n_a(\mathbf{u})$ 表示 $\mathbf{u}$ 中等于 $a \in \mathbb{F}_q$ 的坐标数。

众所周知，$\mathbb{F}_q$ 上的自对偶码的长度为 n，且为偶数，维数为 $n/2$。关于自对偶码的详细研究，请读者参阅 [5, 17, 23, 34]。若 $\mathbb{F}_3$ 上的自对偶码 C 的长度为$n \equiv 0$ （模 4），则称其为 III 型码，当且仅当 C中每个码字的重量

是 3 的倍数。类似地，若 $\mathbb{F}_4$ 上的自对偶码 C 的长度为 $n \equiv 0$（模 2）且重量为偶数，则称其为 IV 型码。

定义 2.1. 设 C 是一个长度为 n 的 $\mathbb{F}_q$ 线性码。那么， C 的重量枚举式定义为

$$W_C(x,y) := \sum_{\mathbf{u}\in C} x^{n-\mathrm{wt}(\mathbf{u})} y^{\mathrm{wt}(\mathbf{u})}.$$

定义 2.2. 设 C 是一个长度为 n 的 $\mathbb{F}_q$ 线性码。那么， C 的完全重量枚举器定义为

$$\mathbf{cwe}_C(\{x_a\}_{a\in\mathbb{F}_q}) := \sum_{\mathbf{u}\in C} \prod_{a\in\mathbb{F}_q} x_a^{n_a(\mathbf{u})}.$$

注 2.1. $W_C(x,y) = \mathbf{cwe}_C(x_0 \leftarrow x, \{x_a \leftarrow y\}_{0\neq a\in\mathbb{F}_q})$。

定义 2.3. 设 C 是一个长度为 n 的 $\mathbb{F}_q$ 线性码。那么，附属于码 C 的分裂完全重量枚举式，针对码的坐标位置中两两不相交的子集 ℓ X_1、...、 X_ℓ，使得

$$X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_\ell = [n]$$

定义如下：

$$\mathbf{scwe}_{C,X_1,\ldots,X_\ell}(\{\{x_{X_i,a}\}_{a\in\mathbb{F}_q}\}_{1\le i\le \ell}) := \sum_{\mathbf{u}\in C} \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{a\in\mathbb{F}_q} x_{X_i,a}^{n_{a,X_i}(\mathbf{u})}.$$

注意，当 $\ell = 1$ 时， C 上的 $\mathbb{F}_q$ 线性码的分裂完全重量枚举式与其完全重量枚举式相同。

例 2.1. 设 C_4 是一个长度为 4 的 $\mathbb{F}_3$ 线性码，其生成矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

C_4 的元素列举如下：

$$\begin{array}{lll} (0,0,0,0), & (0,1,1,2), & (0,2,2,1), \\ (1,0,1,1), & (1,1,2,0), & (1,2,0,2), \\ (2,0,2,2), & (2,1,0,1), & (2,2,1,0). \end{array}$$

因此， C_4 的完全重量枚举式为

$$\mathbf{cwe}_{C_4}(x_0,x_1,x_2) = x_0^4 + x_0^1x_1^3 + x_0^1x_2^3 + 3x_0^1x_1^2x_2^1 + 3x_0^1x_1^1x_2^2.$$

设 $X_1 = \{1,2\}$ 和 $X_2 = \{3,4\}$ 是两个不相交的集合，使得 $X_1 \sqcup X_2 = [4]$。则与 C_4 关联的分裂完全重量枚举式

与 X_1 和 X_2 关联的是

$$\begin{aligned}&\mathbf{scwe}_{C_4,X_1,X_2}(x_{X_1,0},x_{X_1,1},x_{X_1,2},x_{X_2,0},x_{X_2,1},x_{X_2,2})\\&\quad=x_{X_1,0}^2x_{X_2,0}^2+x_{X_1,0}^1x_{X_1,1}^1x_{X_2,1}^2+x_{X_1,0}^1x_{X_1,2}^1x_{X_2,2}^2\\&+x_{X_1,0}^1x_{X_1,1}^1x_{X_2,1}^1x_{X_2,2}^1+x_{X_1,1}^2x_{X_2,0}^1x_{X_2,2}^1+x_{X_1,1}^1x_{X_1,2}^1x_{X_2,0}^1x_{X_2,1}^1\\&+x_{X_1,0}^1x_{X_1,2}^1x_{X_2,1}^1x_{X_2,2}^1+x_{X_1,1}^1x_{X_1,2}^1x_{X_2,0}^1x_{X_2,2}^1+x_{X_1,2}^2x_{X_2,0}^1x_{X_2,1}^1.\end{aligned}$$

$\mathbb{F}_q$的一个特征，其中 $q=p^f$ （对某个素数 p而言），是从加法群 $\mathbb{F}_q$ 到非零复数的乘法群的同态。我们回顾 [13, 15, 24] ，以引入 $\mathbb{F}_q$上的一些固定的非平凡特征。现在设 $F(x)$ 是 $\mathbb{F}_p$ 上的一个次数为 f 的本原不可约多项式，且令 λ 为 $F(x)$ 的一个根。那么任意元素 $a\in\mathbb{F}_q$ 都可以唯一表示为:

$$a=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_{f-1}\lambda^{f-1},$$

其中 $a_i\in\mathbb{F}_p$。对于 $b\in\mathbb{F}_q$，我们定义 $\chi_b(a):=\zeta_p^{a_0b_0+\cdots+a_{f-1}b_{f-1}}$，其中 ζ_p 是单位的第 p 个本原根 $e^{2\pi i/p}$。当 $b\neq0$ 时， χ_b 是 $\mathbb{F}_q$ 的非平凡特征。设 χ是 $\mathbb{F}_q$ 的非平凡特征。那么对于任意 $a\in\mathbb{F}_q$，我们有如下性质:

$$\sum_{b\in\mathbb{F}_q}\chi(ab):=\begin{cases}q & \text{if} \quad a=0,\\0 & \text{if} \quad a\neq0.\end{cases}$$

引理 2.1（[24]）。设 C 是一个长度为 n 的 $\mathbb{F}_q$-线性码。对于 $\mathbf{v}\in\mathbb{F}_q^n$，定义

$$\delta_{C^\perp}(\mathbf{v}):=\begin{cases}1 & \textit{if } \mathbf{v}\in C^\perp,\\0 & \textit{otherwise.}\end{cases}$$

那么我们有如下恒等式:

$$\delta_{C^\perp}(\mathbf{v})=\frac{1}{|C|}\sum_{\mathbf{u}\in C}\chi(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}).$$

现在我们有如下关于分裂完全重量枚举式的麦克威廉斯型恒等式。该定理的证明很直接，因此留给读者。

定理 2.2. 设 C 是一个长度为 n 的 $\mathbb{F}_q$-线性码。再设 χ 是 $\mathbb{F}_q$ 的一个非平凡特征。那么

$$\begin{aligned}&\mathbf{scwe}_{C^\perp,X_1,\ldots,X_\ell}(\{\{x_{X_i,a}\}_{a\in\mathbb{F}_q}\}_{1\le i\le \ell})\\&\quad=\frac{1}{|C|}\mathbf{scwe}_{C,X_1,\ldots,X_\ell}\left(\left\{\left\{\sum_{b\in\mathbb{F}_q}\chi(ab)x_{X_i,b}\right\}_{a\in\mathbb{F}_q}\right\}_{1\le i\le\ell}\right).\end{aligned}$$

3. Generalized colored designs

设 v 为正整数，并设 $\mathsf{v}:=(v_1,\ldots,v_\ell)$，满足 $v=\sum_{i=1}^{\ell}v_i$。设 $\mathsf{X}:=(X_1,\ldots,X_\ell)$，其中 X_i 是两两不交集，且对于所有 i，$|X_i|=v_i$。再设

$$\mathcal{B}\subseteq B_1\times\cdots\times B_\ell,$$

其中 B_i 是对所有 i 对应于 X_i 的区组集合。

那么，广义彩色关联结构是一个三元组 $\mathcal{D}:=(\mathsf{X},\mathcal{B},\mathcal{C})$，其中 $\mathcal{C}$ 是颜色集，并配有一个函数

$$\rho_i:X_i\times B_i\to\mathcal{C}$$

对于所有 i。我们称 $\mathcal{B}$ 在 p 处的第 i 个分量中具有颜色 $\rho_i(p,b)$。对于元素 $\mathsf{K}:=(K_1,\ldots,K_\ell)\in\mathcal{B}$，我们定义一个函数 $n_i:\mathcal{C}\to\mathbb{Z}$，称为 K_i 上关于 $1\le i\le\ell$ 的调色板，它统计颜色 $c\in\mathcal{C}$ 在 K_i 中出现的次数。若每种颜色 $c\in\mathcal{C}$ 在每个元素 $\mathsf{K}\in\mathcal{B}$ 中出现 $\sum_{i=1}^{\ell}n_i(c)$ 次，则称该广义彩色关联结构是均匀的。

定义 3.1. 一致彩色关联结构 $\mathcal{D}$ 称为广义彩色 t-设计，如果 $\mathsf{t}:=(t_1,\ldots,t_\ell)$ 满足 $t=\sum_{i=1}^{n}t_i$，那么对于每个 $\mathsf{C}:=(C_1,\ldots,C_\ell)$ 满足 C_i 是颜色的 t_i-多重集（允许重复选择），对于所有 i，存在一个数 $\lambda\ge 0$，使得对于任意选择 $\mathsf{T}:=(T_1,\ldots,T_\ell)$，其中 $T_i\in\binom{X_i}{t_i}$ 对所有 i 都成立，恰有 λ 个成员 $\mathsf{K}:=(K_1,\ldots,K_n)\in\mathcal{B}$ 满足 $T_i\subseteq K_i$ 对所有 i 都成立，并且这些成员在 T_i 中的点上使用颜色的 t_i-多重集 C_i。

设 $\mathcal{D}=(\mathsf{X},\mathcal{B},\mathcal{C})$ 是一个广义着色 t-设计，其颜色集为 $\mathcal{C}=\{1,2,\ldots,r\}$。由上述定义可直接看出，$\lambda$'s 并不独立于颜色的选择。因此，通过 $\lambda_{(j_1(1),\ldots,j_1(r)),\ldots,(j_\ell(1),\ldots,j_\ell(r))}$，我们表示使用颜色 $c\in\mathcal{C}$ $j_i(c)$ 次的 $\mathsf{K}=(K_1,\ldots,K_\ell)$ 区组数，其中在 K_i 中，$\sum_{c=1}^{r}j_i(c)$ 对所有 $1\le i\le\ell$ 都满足 $=t_i$。显然，广义着色 t-设计 $\mathcal{D}=(\mathsf{X},\mathcal{B},\mathcal{C})$ 的参数仅取决于对所有 i 而言 X_i 中的点数 v_i、区组数 $|\mathcal{B}|$ 和调色板

((n1(1) n1(2) . . . ,) . . . , (nℓ(1) nℓ(2) . . .)), 因此将广义着色 t-设计写成如下形式较为方便:

$$t-(\mathbf{v},((n_1(1),n_1(2),\ldots,),\ldots,(n_\ell(1),n_\ell(2),\ldots)),|\mathcal{B}|)$$

设计。注意, 当 k =(k) 且 v = (v) 时, 广义彩色 t-设计与彩色 t-设计相同。关于彩色 t-设计的详细讨论, 请参阅 [7, 8]。

利用长度为 n、定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的线性码 C构造广义彩色 t-设计。设 v =(v1, . . . , vℓ) 满足 $\sum_{i=1}^{\ell} v_i = n$, 且 X =(X1, . . . , Xℓ) 是由两两不交集 $X_i \subseteq [n]$ 组成的集合, 满足 $|X_i| = v_i$。我们定义分裂组成 s :=(s1, . . . , sℓ), 使得对于所有满足 $\sum_{j=1}^{q} s_{ij} = v_i$ 的 i, 都有 s_i =(si1, . . . , siq)。对于任意码字 u $\in C$, 令 K(u) :=(K_{X_1}(u) . . . , K_{X_ℓ}(u)), 使得对于所有 i, K_{X_i}(u) 都是 u 的支撑在坐标位置 X_i 上的特征向量。令 $C_{\mathbf{s}}$ 为码字 u $\in C$ 的集合, 满足对于所有 i, comp^{X_i}(u) $= s_i$。我们记

$$\mathcal{B}(C_{\mathbf{s}}) := \{\mathbf{K}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in C_{\mathbf{s}}\}.$$

一般来说, $\mathcal{B}(C_{\mathbf{s}})$是一个多重集。令 $\mathcal{C}$ 为一个颜色集。于是, 如果三元组 (X $\mathcal{B}(C_{\mathbf{s}})$ $\mathcal{C}$) 连同 u_p 的函数 $\rho_i(p,b)$构成一个广义着色 t-设计, 我们就称 $C_{\mathbf{s}}$是一个广义着色 t-设计。如果对于每个给定的 s, 码字集 $C_{\mathbf{s}}$ 构成一个广义着色 t-设计, 我们就称码 C 是广义逐色 t-齐次的。当 $t = 1$时, 该码称为广义逐色齐次。特别地, 对于任意 $\mathbb{F}_q$-线性码, 如果 $u_p = a$, 其中 $a \in \mathbb{F}_q$, 则可以选取函数 $\rho_i(p,b) = a$。

具有参数 t-(v, (n(1) n(2) . . .), ($\lambda_1^{a_1}(P) \ldots, \lambda_N^{a_N}(P)$)) 的彩色设计, 是一个由区组 $\mathcal{B}$ 构成的集合, 其调色板为 (n(1) n(2) . . .), 定义在一个包含 v 个点的集合上, 这些点称为点集; 此外, 还包括将所有 t 元组划分为 N 个组 $G_1, \ldots, G_N$ 的一种划分, 并满足: 对于每个颜色多重集 t（允许重复选择）, 存在一个数 λ_i, 使得对于属于 G_i 的每个 t 集（例如 a_i 个这样的 t 集）, 在 $\mathcal{B}$ 中恰有 λ_i 个区组使用颜色多重集 t P。

当 $N = 1$ 时, 它显然是一个有色 t-设计。参数为 t-(v, (n(1) n(2) . . .) λ(P)) 的有色装填（分别为覆盖）设计, 是满足 max(λ_i) $= \lambda$（分别为 min(λ_i) $= \lambda$）的有色设计。覆盖（分别为装填）设计的最小（分别为最大）区组数记作 $C_{\lambda_{j(1)},\ldots,j(r)}$(v, (n(1) . . . , n(r)) t)（分别为 $D_{\lambda_{j(1)},\ldots,j(r)}$(v, (n(1) . . . , n(r)) t）。注意, 2- 有色装填（分别为覆盖）设计就是 Bonnecaze 等人 [6] 意义下的装填（分别为覆盖）设计。

4. Jacobi polynomials and polarization

关于具有一个参考向量的 $\mathbb{F}_q$-线性码的 Jacobi 多项式的麦克威廉斯型恒等式，见 [35]。本节给出一种麦克威廉斯型恒等式，该恒等式涉及附着于码的多个坐标位置集合的 $\mathbb{F}_q$-线性码的 Jacobi 多项式。Bonnecaze 等人 [7] 定义了 Aronhold 极化算子，并将此算子应用于从码的对称化重量枚举式计算 $\mathbb{Z}_4$-码的 Jacobi 多项式，得到了一个公式。随后，[8] 给出了该公式的类似形式，用于 $\mathbb{F}_3$-线性码的完全重量枚举器。本节将推广极化运算，并利用这些算子计算附着于多个参考集合的 $\mathbb{F}_q$-线性码的完全 Jacobi 多项式。

定义 4.1. 设 C 是一个长度为 n 的 $\mathbb{F}_q$-线性码。则附属于码 C 的坐标位置集合 T 的 Jacobi 多项式定义如下:

$$J_{C,T}(w,z,x,y) := \sum_{\mathbf{u}\in C} w^{m_{0,T}(\mathbf{u})} z^{m_{1,T}(\mathbf{u})} x^{m_{0,[n]\setminus T}(\mathbf{u})} y^{m_{1,[n]\setminus T}(\mathbf{u})},$$

其中 $T \subseteq [n]$，并且对于 $\mathbf{u}, \in C$,

$$\begin{aligned} m_{0,T}(\mathbf{u}) &:= \#\{i \in T \mid u_i = 0\}, \\ m_{1,T}(\mathbf{u}) &:= \#\{i \in T \mid u_i \neq 0\}, \\ m_{0,[n]\setminus T}(\mathbf{u}) &:= \#\{i \in [n] \setminus T \mid u_i = 0\}, \\ m_{1,[n]\setminus T}(\mathbf{u}) &:= \#\{i \in [n] \setminus T \mid u_i \neq 0\}. \end{aligned}$$

注记 4.1。若 $T \subseteq [n]$ 为空，则 $J_{C,\ T}(w,z,x,y) = W_C(x,y)$】【。

定义 4.2。设 C 是一个长度为 n的 $\mathbb{F}_q$-线性码。那么，与码 C 的坐标位置集合 T 相关联的完备 Jacobi 多项式定义如下:

$$\mathrm{CJ}_{C,T}(\{x_a, y_a\}_{a\in\mathbb{F}_q}) := \sum_{\mathbf{u}\in C} \prod_{a\in\mathbb{F}_q} x_a^{n_{a,T}(\mathbf{u})} y_a^{n_{a,[n]\setminus T}(\mathbf{u})},$$

其中 $T \subseteq [n]$，以及 $n_{a,\ T}(\mathbf{u})$ 是 $\mathbf{u}$ 在 T 和 n_a 上的组成，$_{[n]\setminus T}(\mathbf{u})$ 是 $\mathbf{u}$ 在 $[n]\setminus T$ 上的组成。

注记 4.2. $J_{C,T}(w,z,x,y) = \mathrm{CJ}_{C,T}(x_0 \leftarrow w, \{x_a \leftarrow z\}_{0\neq a\in\mathbb{F}_q}, y_0 \leftarrow x, \{y_a \leftarrow y\}_{0\neq a\in\mathbb{F}_q})$.

定义 4.3. 设 C 是长度为 n 的 $\mathbb{F}_q$-线性码。设 $X_1, \ldots, X_\ell$ 是 ℓ 个两两不相交的集合，使得

$$[n] = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_\ell.$$

那么，附属于 $T_1,\ldots,T_\ell$ 的 C 分裂完全 Jacobi 多项式定义为：对于所有 i，$T_i \subseteq X_i$ 杏彩

$$\mathrm{SCJ}_{C,X_1(T_1),\ldots,X_\ell(T_\ell)}(\{\{x_{X_i,a},y_{X_i,a}\}_{a\in\mathbb{F}_q}\}_{1\le i\le \ell}) := \sum_{\mathbf{u}\in C}\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{a\in\mathbb{F}_q} x_{X_i,a}^{n_{a,T_i}(\mathbf{u})} y_{X_i,a}^{n_{a,X_i\setminus T_i}(\mathbf{u})}.$$

注意，若 $\ell=1$，上述定义与带一个参考向量的完全 Jacobi 多项式（定义 4.1）完全等价。

例 4.1. 考虑例 2.1 中的码 C_4。则附属于坐标位置集合 $T=\{1,3\}$ 的 C_4 的完全 Jacobi 多项式为

$$\begin{aligned}\mathrm{CJ}_{C_4,T}(x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2) &= x_0^2y_0^2 + x_1^2y_0^1y_1^1 + x_2^2y_0^1y_2^1 + x_0^1x_1^1y_1^1y_2^1\\ &\quad + x_1^1x_2^1y_0^1y_1^1 + x_0^1x_2^1y_1^2 + x_0^1x_2^1y_1^1y_2^1 + x_0^1x_1^1y_2^2 + x_1^1x_2^1y_0^1y_2^1\end{aligned}$$

考虑例 2.1 中相同的 X_1 和 X_2。令 $T_1=\{1\}$ 和$T_2=\{3\}$。则附属于 $T_1\subseteq X_1$ 和 $T_2\subseteq X_2$ 的 C_4 的分裂完全 Jacobi 多项式如下：

$$\begin{aligned}&\mathrm{SCJ}_{C_4,X_1(T_1),X_2(T_2)}(\{\{x_{X_i,a},y_{X_i,a}\}_{a\in\mathbb{F}_q}\}_{i=1,2})\\ &= x_{X_1,0}^1y_{X_1,0}^1x_{X_2,0}^1y_{X_2,0}^1 + x_{X_1,1}^1y_{X_1,0}^1x_{X_2,1}^1y_{X_2,1}^1 + x_{X_1,2}^1y_{X_1,0}^1x_{X_2,2}^1y_{X_2,2}^1\\ &+ x_{X_1,0}^1y_{X_1,1}^1x_{X_2,1}^1y_{X_2,2}^2 + x_{X_1,1}^1y_{X_1,1}^1x_{X_2,2}^1y_{X_2,0}^1 + x_{X_1,2}^1y_{X_1,1}^1x_{X_2,0}^1y_{X_2,1}^1\\ &+ x_{X_1,0}^1y_{X_1,2}^1x_{X_2,2}^1y_{X_2,1}^1 + x_{X_1,1}^1y_{X_1,2}^1x_{X_2,0}^1y_{X_2,2}^1 + x_{X_1,2}^1y_{X_1,2}^1x_{X_2,1}^1y_{X_2,0}^1\end{aligned}$$

附属于多个集合的 $\mathbb{F}_q$-线性码的完全 Jacobi 多项式满足以下麦克威廉斯型恒等式。

定理 4.1（麦克威廉斯恒等式）。设 C 是长度为 n的 $\mathbb{F}_q$-线性码。再设 χ 是 $\mathbb{F}_q$的非平凡特征。则

$$\begin{aligned}&\mathrm{SCJ}_{C^\perp,X_1(T_1),\ldots,X_\ell(T_\ell)}(\{\{x_{X_i,a},y_{X_i,a}\}_{a\in\mathbb{F}_q}\}_{1\le i\le\ell})\\ &\quad= \frac{1}{|C|}\mathrm{SCJ}_{C,X_1(T_1),\ldots,X_\ell(T_\ell)}\left(\left\{\left\{\sum_{b\in\mathbb{F}_q}\chi(ab)x_{X_i,b},\sum_{b\in\mathbb{F}_q}\chi(ab)y_{X_i,b}\right\}_{a\in\mathbb{F}_q}\right\}_{1\le i\le\ell}\right).\end{aligned}$$

证明。由引理 2.1，可写为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{SCJ}_{C^\perp,X_1(T_1),\ldots,X_\ell(T_\ell)}(\{\{x_{X_i,a},y_{X_i,a}\}_{a\in\mathbb{F}_q}\}_{1\le i\le \ell})\\
&\quad=\sum_{\mathbf{u}\in C^\perp}\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{a\in\mathbb{F}_q}x_{X_i,a}^{n_{a,T_i}(\mathbf{u})}y_{X_i,a}^{n_{a,X_i\setminus T_i}(\mathbf{u})}\\
&\quad=\sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{F}_q^n}\delta_{C^\perp}(\mathbf{v})\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{a\in\mathbb{F}_q}x_{X_i,a}^{n_{a,T_i}(\mathbf{v})}y_{X_i,a}^{n_{a,X_i\setminus T_i}(\mathbf{v})}\\
&\quad=\frac{1}{|C|}\sum_{\substack{\mathbf{u}\in C\\ \mathbf{v}\in\mathbb{F}_q^n}}\chi(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{a\in\mathbb{F}_q}x_{X_i,a}^{n_{a,T_i}(\mathbf{v})}y_{X_i,a}^{n_{a,X_i\setminus T_i}(\mathbf{v})}\\
&\quad=\frac{1}{|C|}\sum_{\substack{\mathbf{u}\in C\\ \mathbf{v}\in\mathbb{F}_q^n}}\chi(u_1v_1+\cdots+u_nv_n)\prod_{i=1}^{\ell}\left(\prod_{j\in T_i}x_{X_i,v_j}\right)\left(\prod_{j\in X_i\setminus T_i}y_{X_i,v_j}\right)\\
&\quad=\frac{1}{|C|}\sum_{\mathbf{u}\in C}\prod_{i=1}^{\ell}\left(\prod_{j\in T_i}\sum_{v_j\in\mathbb{F}_q}\chi(u_jv_j)x_{X_i,v_j}\right)\left(\prod_{j\in X_i\setminus T_i}\sum_{v_j\in\mathbb{F}_q}\chi(u_jv_j)y_{X_i,v_j}\right)\\
&\quad=\frac{1}{|C|}\sum_{\mathbf{u}\in C}\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{a\in\mathbb{F}_q}\left(\sum_{b\in\mathbb{F}_q}\chi(ab)x_{X_i,b}\right)^{n_{a,T_i}(\mathbf{u})}\left(\sum_{b\in\mathbb{F}_q}\chi(ab)y_{X_i,b}\right)^{n_{a,X_i\setminus T_i}(\mathbf{u})}\\
&\quad=\frac{1}{|C|}\mathrm{SCJ}_{C,X_1(T_1),\ldots,X_\ell(T_\ell)}\left(\left\{\left\{\sum_{b\in\mathbb{F}_q}\chi(ab)x_{X_i,b},\sum_{b\in\mathbb{F}_q}\chi(ab)y_{X_i,b}\right\}_{a\in\mathbb{F}_q}\right\}_{1\le i\le\ell}\right).
\end{aligned}
$$

至此，证明完成。 □

以下结果体现了引入与多个集合相关的分裂完全 Jacobi 多项式这一概念的基本动机。由于该定理可由定义直接推出，我们省略其证明。

定理 4.2. 设 C 是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上、长度为 n 的线性码。设 $\mathbf{v}:=(v_1,\ldots,v_\ell)$ 满足 $\sum_i^\ell v_i = n$。设 $\mathbf{X}:=(X_1,\ldots,X_\ell)$ 是两两不相交的集合 $X_i\subseteq[n]$，且对所有 i 都有 $|X_i|=v_i$。那么，对于每个给定的分裂组成，C 的码字集合构成一个广义 q 色 t-设计，其 $\mathbf{t}$ 为 $=(t_1,\ldots,t_\ell)$，满足 $\sum_{i=1}^\ell t_i = t$，当且仅当对于所有 i，满足 $T_i\in\binom{X_i}{t_i}$ 的分裂完全 Jacobi 多项式 $\mathrm{SCJ}_{C,X_1(T_1)\ldots,X_\ell(T_\ell)}$ 与集合 $T_1,\ldots,T_\ell$ 的选取无关。

设 C 是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上、长度为 n 的线性码。由 C 在坐标位置 i 处进行删节（分别为缩短）得到码 $C-i$（分别为 C/i）。对于所有 $a \in \mathbb{F}_q$，我们将 C 中第 i 个分量取值为 a 的各子码（在 i 处删节后）记为 $C+i_a$。

令 ℓ、n 为正整数。设 $\mathbf{v} := (v_1, \ldots, v_\ell)$，满足 $\sum_{i=1}^{\ell} v_i = n$。设 $P(\{\{x_{X_i,a}, y_{X_i,a}\}_{a\in\mathbb{F}_q}\}_{1\le i\le \ell})$ 是一个次数为 n、含 $2q\ell$ 个变量的多项式，且其中每一项里 $x_{X_i,\,a}$ 和 $y_{X_i,\,a}$ 的幂次之和对所有 $a \in \mathbb{F}_q$ 均为 v_i，对所有 i 均成立。再令 $P'_{k,\,a}$ 表示对 $y_{X_k,\,a}$ 的偏导数，其中 $1 \le k \le \ell$ 和 $a \in \mathbb{F}_q$ 为任意整数。对任意整数 $1 \le k \le \ell$，定义极化算子 $A_{2m\ell,\,k}$ 如下：

$$A_{2q\ell,k} \cdot P := \frac{1}{v_k} \sum_{a\in\mathbb{F}_q} x_{X_k,a} P'_{k,a}.$$

当 $\ell = 1$ 时，将极化算子记作 A_{2q} 而非 $A_{2q\ell,\,k}$ 更为方便。这个特例的具体情况如下：

设 $P(\{x_a, y_a\}_{a\in\mathbb{F}_q})$ 是一个关于 $2q$ 个变量、次数为 n 的多项式。设 P'_{y_a} 是对 y_a 求偏导数，其中 $a \in \mathbb{F}_q$。那么

$$A_{2q} \cdot P := \frac{1}{n} \sum_{a\in\mathbb{F}_q} x_a P'_{y_a}.$$

现在我们得到 [7, 定理 1] 的 $\mathbb{F}_q$ 类比的如下推广。

定理 4.3. 设 C 是一个长度为 n、定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的线性码。设 $\mathbf{v} := (v_1, \ldots, v_\ell)$ 满足 $\sum_{i=1}^{\ell} v_i = n$。我们还设 $X_1, \ldots, X_\ell$ 是 $[n]$ 的两两不相交子集，满足 $X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_\ell = [n]$，且对所有 i 均有 $|X_i| = v_i$。那么，对于 $1 \le k \le \ell$ 的每个坐标位置 $i \in X_k$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{SCJ}_{C,X_1(\emptyset),\ldots,X_{k-1}(\emptyset),X_k(\{i\}),X_{k+1}(\emptyset),\ldots,X_\ell(\emptyset)} &= x_{X_k,0}\mathbf{scwe}_{C/i,X_1,\ldots,X_{k-1},X_k,X_{k+1},\ldots,X_\ell} \\ &\quad + \sum_{a\in\mathbb{F}_q, a\neq 0} x_{X_k,a}\mathbf{scwe}_{C+i_a,X_1,\ldots,X_{k-1},X_k,X_{k+1},\ldots,X_\ell}.\end{aligned}$$

如果 C 不含汉明重量小于 1 的非零码字，我们有

$$\begin{aligned} v_i(A_{2q\ell,k} \cdot \mathbf{scwe}_{C,X_1,\ldots,X_{k-1},X_k,X_{k+1},\ldots,X_\ell}) \\ = x_{X_k,0} \sum_{i \in X_k} \mathbf{scwe}_{C/i,X_1,\ldots,X_{k-1},X_k,X_{k+1},\ldots,X_\ell} \\ + \sum_{a \in \mathbb{F}_q, a \neq 0} x_{X_k,a} \sum_{i \in X_k} \mathbf{scwe}_{C+i_a,X_1,\ldots,X_{k-1},X_k,X_{k+1},\ldots,X_\ell}. \end{aligned}$$

如果 C 是一个广义逐色齐次码，那么

$$\mathrm{SCJ}_{C,X_1(\emptyset),\ldots,X_{k-1}(\emptyset),X_k(\{i\}),X_{k+1}(\emptyset),\ldots,X_\ell(\emptyset)} = A_{2q\ell,k} \cdot \mathbf{scwe}_{C,X_1,\ldots,X_{k-1},X_k,X_{k+1},\ldots,X_\ell}.$$

证明。证明沿用了 [7, 定理1]中的类似论证，因此省略细节。□

下面的定理是上述定理关于 $t > 1$的一个类似结果。证明留给读者。

定理 4.4. 设 C 是一个定义在 $\mathbb{F}_q$上、长度为 n 的线性码。设 $\mathbf{v} := (v_1, \ldots, v_\ell)$ 满足 $\sum_{i=1}^{\ell} v_i = n$。再设 $X_1, \ldots, X_\ell$ 是 $[n]$ 的两两不交子集，满足 $X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_\ell = [n]$，且对所有 k都有 $|X_k| = v_k$。如果 C 是广义逐色 t-齐次码，且不含重量小于 t的码字，那么对于满足 $\sum_{i=1}^{\ell} t_i = t$的 $\mathbf{t} := (t_1, \ldots, t_\ell)$，有

$$\mathrm{SCJ}_{X_1(T_1),\ldots,X_\ell(T_\ell)} = A_{2q\ell,\ell}^{t_\ell} \cdots A_{2q\ell,1}^{t_1} \cdot \mathbf{scwe}_{C,X_1,\ldots,X_\ell},$$

对于每个（T_1，...，T_ℓ），

$\in \binom{X_1}{t_1} \times \cdots \times \binom{X_\ell}{t_\ell}$。

5. Application to colored design theory

Bonnecaze 等人 [8] 利用 III 型码给出了有色 t-设计结构。本节利用他们的思想，使用 III 型码和 IV 型码构造一些（广义）有色设计，例如有色打包设计（分别为覆盖设计）。

5.1. 不变理论。设 G 是一个有限的 $n \times n$ 矩阵群，它作用于多项式环 $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$；对于 $g \in G$ 和 $f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$,

$$gf(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f(g(x_0, \ldots, x_{n-1})^t).$$

Then

$$\widehat{G} = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \middle| \, g \in G \right\}$$

以自然方式作用于多项式环 $\mathbb{C}[x_0,\dots,x_{n-1},y_0,\dots,y_{n-1}]$。

设 $M_{i,j}^G = \mathbb{C}[x_0,\dots,x_{n-1},y_0,\dots,y_{n-1}]_{i,j}^G$ 是次数为 (i,j) 的不变量:

$$\mathbb{C}[x_0,\dots,x_{n-1},y_0,\dots,y_{n-1}]_{i,j}^G = \{f \in \mathbb{C}[x_0,\dots,x_{n-1},y_0,\dots,y_{n-1}] \mid (g,h)f = f, \quad f\text{在 } \{x_k\} \text{中的次数为 } i, \quad f \text{ 在 } \{y_k\} \text{ 中的次数为 } j\}.$$

在 [37], 中，Stanley 定义了双变量莫利恩级数

$$f(u,v) = \sum_{u,v} \dim(M_{i,j}^{\widehat{G}}) u^i v^j,$$

并证明了 $f(u,v)$可表示如下:

$$f(u,v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \frac{1}{\det(1-ug)\det(1-vg)}.$$

我们用 $f[d]$表示 $f(u,v)$的 d 次齐次部分。要得到一个不变量，雷诺算子很有用。对于 $f \in \mathbb{C}[x_0,\dots,x_{n-1},y_0,\dots,y_{n-1}]$, f和 G 的雷诺算子定义如下:

$$R(f,\widehat{G}) := \sum_{(g,g)\in\widehat{G}} (g,g)\cdot f.$$

那么很容易证明, $R(f,G)$是 G的不变量。

5.2. III 型码。麦克威廉变换和一些同余条件表明，III 型码的完全重量枚举器在阶为 G_{III} 的群的作用下保持不变；该群由以下四个矩阵生成:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/3} & e^{4\pi i/3} \\ 1 & e^{4\pi i/3} & e^{2\pi i/3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i/3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{\pi i/6} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pi i/6} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi i/6} \end{bmatrix}.$$

容易证明，III 型码的分裂完全重量枚举式是 G_{III} 的不变量。

^现在假设 G 是一个 2×2 矩阵群，并且 G 作用于$\mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1]$。设 $P \in \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1]$ 是一个总次数为 n 的多项式。现在定义极化算子 A_4 如下：

$$A_4 \cdot P := \frac{x_0 P'_{y_0} + x_1 P'_{y_1}}{n}.$$

定义 5.1. 若长度为 n 、定义在 $\mathbb{F}_3$ 上的线性码满足：每个给定汉明重量的码字都构成一个 t-设计，则称其为 t-齐次。

定义 5.2. 如果每个给定组成的码字构成一个 3-彩色 t-设计，则称一个长度为 n 的 $\mathbb{F}_3$-线性码是按颜色t-齐次的。

引理5.1([8]). 设 C 是一个在 $\mathbb{F}_3$上长度为 n 的线性码。如果 C 是 t-齐次的，且不含汉明重量小于 t 的非零字，那么对于所有大小为 t 的 T，我们得到

$$J_{C,T} = A_4^t \cdot W_C.$$

设 P 是关于 6 个变量 x_0、x_1、x_2、y_0、y_1、y_2 的总次数为 n 的多项式。现在定义极化算子 A_6 和特化算子 S 如下：

$$A_6 \cdot P := \frac{x_0 P'_{y_0} + x_1 P'_{y_1} + x_2 P'_{y_2}}{n},$$
$$S_6 \cdot P(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) := P(x_0, x_1, x_1, y_0, y_1, y_1).$$

引理 5.2（[8]）。设 C 是 $\mathbb{F}_3$ 上长度为 n 的线性码。如果 C 是按颜色 t-齐次的，且不存在汉明重量小于 t 的非零字，那么对于所有大小为 t 的 T，我们得到

$$\mathrm{CJ}_{C,T} = A_6^t \cdot \mathbf{cwe}_C.$$

5.2.1. 长度 12。

例 5.1（长度 12）。令 C_{12}^{III} 为 [18] 中第一个长度为 12 的三元自对偶码。

$$f[12] = 2u^{12} + 2u^{11}v + 3u^{10}v^2 + 4u^3v^9 + \cdots.$$

在这种情况下，成立以下引理。

引理 5.3（[8]）。通过对 $M_{3\,9}^{\widehat{G_{\mathrm{III}}},}$ 应用 $R(f, \widehat{G_{\mathrm{III}}})$ 可得到一个基，其中 f 遍历单项式

$$x_0^3 y_0^9,\ x_0^3 y_0^3 y_1^6,\ x_0^3 y_0^3 y_1^3 y_2^2,\ x_0^2 x_1 y_0^4 y_1^5.$$

引理 5.4（[8]）。对于 $\ell = 1$，2，3，我们有

$$\dim(S_6 \cdot M_{\ell,12-\ell}^{\widehat{G_{\mathrm{III}}}}) = \dim(M_{\ell,12-\ell}^{\widehat{G_{\mathrm{III}}}}).$$

结合前面的引理和双变量 Molien 级数，我们得到以下定理。

定理 5.5（[8]）。三元 Golay 码中固定组成的码字构成 3-色 3-设计。

由于 C_{12}^{III} 中固定组成的码字构成 3-色 3-设计，我们假设 $|T| = 1$、2、3。于是

$$\mathrm{CJ}_{C_{12}^{\mathrm{III}},1} = x_0(y_0^{11} + 11y_0^5y_1^6 + 110y_0^5y_1^3y_2^3 + 11y_0^5y_2^6 + 55y_0^2y_1^6y_2^3 + 55y_0^2y_1^3y_2^6) + x_1(y_1^{11} + 11y_0^6y_1^5 + 55y_0^6y_1^2y_2^3 + 110y_0^3y_1^5y_2^3 + 55y_0^3y_1^2y_2^6 + 11y_1^5y_2^6) + x_2(y_2^{11} + 55y_0^6y_1^3y_2^2 + 11y_0^6y_2^5 + 55y_0^3y_1^6y_2^2 + 110y_0^3y_1^3y_2^5 + 11y_1^6y_2^5),$$

$$\mathrm{CJ}_{C_{12}^{\mathrm{III}},2} = x_0^2(y_0^{10} + 5y_0^4y_1^6 + 50y_0^4y_1^3y_2^3 + 5y_0^4y_2^6 + 10y_0y_1^6y_2^3 + 10y_0y_1^3y_2^6) + x_0x_1(12y_0^5y_1^5 + 60y_0^5y_1^2y_2^3 + 60y_0^2y_1^5y_2^3 + 30y_0^2y_1^2y_2^6) + x_0x_2(60y_0^5y_1^3y_2^2 + 12y_0^5y_2^5 + 30y_0^2y_1^6y_2^2 + 60y_0^2y_1^3y_2^5) + x_1^2(5y_0^6y_1^4 + 10y_0^6y_1y_2^3 + 50y_0^3y_1^4y_2^3 + 10y_0^3y_1y_2^6 + 5y_1^4y_2^6 + y_1^{10}) + x_1x_2(30y_0^6y_1^2y_2^2 + 60y_0^3y_1^5y_2^2 + 60y_0^3y_1^2y_2^5 + 12y_1^5y_2^5) + x_2^2(10y_0^6y_1^3y_2 + 5y_0^6y_2^4 + 10y_0^3y_1^6y_2 + 50y_0^3y_1^3y_2^4 + 5y_1^6y_2^4 + y_2^{10}),$$

$$\mathrm{CJ}_{C_{12}^{\mathrm{III}},3} = x_0^3(y_0^9 + 2y_0^3y_1^6 + 20y_0^3y_1^3y_2^3 + 2y_0^3y_2^6 + y_1^6y_2^3 + y_1^3y_2^6) + x_0^2x_1(9y_0^4y_1^5 + 45y_0^4y_1^2y_2^3 + 18y_0y_1^5y_2^3 + 9y_0y_1^2y_2^6) + x_0^2x_2(45y_0^4y_1^3y_0^2 + 9y_0^4y_2^5 + 9y_0y_1^6y_2^2 + 18y_0y_1^3y_2^5) + x_0x_1^2(9y_0^5y_1^4 + 18y_0^5y_1y_2^3 + 45y_0^2y_1^4y_2^3 + 9y_0^2y_1y_2^6) + x_0x_2^2(18y_0^5y_1^3y_2 + 9y_0^5y_2^4 + 9y_0^2y_1^6y_2 + 45y_0^2y_1^3y_2^4) + x_0x_1x_2(54y_0^5y_1^2y_2^2 + 54y_0^2y_1^5y_2^2 + 54y_0^2y_1^2y_2^5) + x_1^3(2y_0^6y_1^3 + y_1^9 + y_0^6y_2^3 + 20y_0^3y_1^3y_2^3 + y_0^3y_2^6 + 2y_1^3y_2^6) + x_1^2x_2(9y_0^6y_1y_2^2 + 45y_0^3y_1^4y_2^2 + 18y_0^3y_1y_2^5 + 9y_1^4y_2^5) + x_1x_2^2(9y_0^5y_1y_2^3 + 18y_0^3y_1^5y_2 + 45y_0^3y_1^2y_2^4 + 9y_1^5y_2^4) + x_2^3(y_0^6y_1^3 + 2y_0^6y_2^3 + y_0^3y_1^6 + y_2^9 + 20y_0^3y_1^3y_2^3 + 2y_1^6y_2^3)$$

】【。

推论 5.6（[8]）。存在具有以下参数的简单 3-色 3-设计：三个参数为 3-(12, (n(0) n(1) n(2)), 220) 的设计，其中 (n(0) n(1) n(2)) 等于 (6, 3, 3) 或其三个排列之一。三个参数为 3-(12, (n(0) n(1) n(2)), 22) 的设计，其中 (n(0) n(1) n(2)) 等于 (6, 6, 0) 或其三个排列之一。

具有 $|T| = 4$ 的雅可比多项式空间 $\mathsf{CJ}_{C_{12}^{\mathrm{III}},\ T}$ 可由以下两个多项式生成

$$\begin{aligned}
C^1_{C_{12}^{\mathrm{III}},4} &= x_0^4(y_0^8 + y_0^2y_1^6 + 6y_0^2y_1^3y_2^3 + y_0^2y_2^6) + x_0^3x_1(4y_0^3y_1^5 + 28y_0^3y_1^2y_2^3 \\
&\quad + 4y_1^5y_2^3) + x_0^3x_2(28y_0^3y_1^3y_2^2 + 4y_0^3y_2^5 + 4y_1^3y_2^5) + x_0^2x_1^2(12y_0^4y_1^4 \\
&\quad + 18y_0^4y_1y_2^3 + 18y_0y_1^4y_2^3 + 6y_0y_1y_2^6) + x_0^2x_1x_2(60y_0^4y_1^2y_2^2 + 24y_0y_1^5y_2^2 \\
&\quad + 24y_0y_1^2y_2^5) + x_0^2x_2^2(18y_0^4y_1^3y_2 + 12y_0^4y_2^4 + 6y_0y_1^6y_2 + 18y_0y_1^3y_2^4) \\
&\quad + x_0x_1^3(4y_0^5y_1^3 + 4y_0^5y_2^3 + 28y_0^2y_1^3y_2^3) + x_0x_1^2x_2(24y_0^5y_1y_2^2 + 60y_0^2y_1^4y_2^2 \\
&\quad + 24y_0^2y_1y_2^5) + x_0x_1x_2^2(24y_0^5y_1^2y_2 + 24y_0^2y_1^5y_2 + 60y_0^2y_1^2y_2^4) \\
&\quad + x_0x_2^3(4y_0^5y_1^3 + 4y_0^5y_2^3 + 28y_0^2y_1^3y_2^3) + x_1^4(y_0^6y_1^2 + 6y_0^3y_1^2y_2^3 + y_1^8 \\
&\quad + y_1^2y_2^6) + x_1^3x_2(28y_0^3y_1^3y_2^2 + 4y_0^3y_2^5 + 4y_1^3y_2^5) + x_1^2x_2^2(6y_0^6y_1y_2 \\
&\quad + 18y_0^3y_1^4y_2 + 18y_0^3y_1y_2^4 + 12y_1^4y_2^4) + x_1x_2^3(4y_0^3y_1^5 + 28y_0^3y_1^2y_2^3 \\
&\quad + 4y_1^5y_2^3) + x_2^4(y_0^6y_2^2 + 6y_0^3y_1^3y_2^2 + y_1^6y_2^2 + y_2^8), \\
C^2_{C_{12}^{\mathrm{III}},4} &= x_0^4(y_0^8 + 8y_0^2y_1^3y_2^3) + x_0^3x_1(8y_0^3y_1^5 + 24y_0^3y_1^2y_2^3 + 4y_1^2y_2^6) \\
&\quad + x_0^3x_2(24y_0^3y_1^3y_2^2 + 8y_0^3y_2^5 + 4y_1^6y_2^2) + x_0^2x_1^2(6y_0^4y_1^4 + 24y_0^4y_1y_2^3 \\
&\quad + 24y_0y_1^4y_2^3) + x_0^2x_1x_2(60y_0^4y_1^2y_2^2 + 24y_0y_1^5y_2^2 + 24y_0y_1^2y_2^5) \\
&\quad + x_0^2x_2^2(6y_0^4y_2^4 + 24y_0^4y_1^3y_2 + 24y_0y_1^3y_2^4) + x_0x_1^3(8y_0^5y_1^3 + 24y_0^5y_2^3 \\
&\quad + 4y_0^2y_2^6) + x_0x_1^2x_2(24y_0^5y_1y_2^2 + 60y_0^2y_1^4y_2^2 + 24y_0^2y_1y_2^5) \\
&\quad + x_0x_1x_2^2(24y_0^5y_1^2y_2 + 24y_0^2y_1^5y_2 + 60y_0^2y_1^2y_2^4) \\
&\quad + x_0x_2^3(8y_0^5y_2^3 + 4y_0^2y_1^6 + 24y_0^2y_1^3y_2^3) + x_1^4(8y_0^3y_1^2y_2^3 + y_1^8) \\
&\quad + x_1^3x_2(4y_0^6y_2^2 + 24y_0^3y_1^3y_2^2 + 8y_1^3y_2^5) + x_1^2x_2^2(24y_0^3y_1^4y_2 + 24y_0^3y_1y_2^4 \\
&\quad + 6y_1^4y_2^4) + x_1x_2^3(4y_0^6y_1^2 + 24y_0^3y_1^2y_2^3 + 8y_1^5y_2^3) + x_2^4(8y_0^3y_1^3y_2^2 + y_2^8).
\end{aligned}$$

结合这两个方程，我们得到参数为

$$4\text{-}(12,(6,6,0),(\lambda_1^1(P),\lambda_2^1(P))) \text{ and } 4\text{-}(12,(6,3,3),(\lambda_1^2(P),\lambda_2^2(P)),$$

其中，$\lambda(P)$'s 如表 5.1 所示。根据该码的完全重量枚举器中项 $y_0^{n(0)}y_1^{n(1)}y_2^{n(2)}$ 的系数，我们得到 $D_{\lambda_{\max}(P)}(12,(n(0)\ n(1)\ n(2)),4)$ 的上界（分别为$C_{\lambda_{\max}(P)}(12,(n(0)\ n(1)\ n(2)),4)$ 的下界)。

$$\begin{aligned}
D_{\lambda^1_{\max}(P)}(12,(6,6,0),4) \le 22 \le C_{\lambda^1_{\min}(P)}(12,(6,6,0),4), \\
D_{\lambda^2_{\max}(P)}(12,(6,3,3),4) \le 220 \le C_{\lambda^2_{\min}(P)}(12,(6,3,3),4).
\end{aligned}$$

$\lambda_{\max}(P)$（分别为 $\lambda_{\min}(P)$）列于表 5.1 中。

三色 4-设计中的 TABLE 5.1. λ

P	0000	0001	0002	0011	0012	0022	0111	0112
$\lambda_1^1(P)$	1	4	0	12	0	0	4	0
$\lambda_2^1(P)$	0	8	0	6	0	0	8	0
$\lambda_{\max}^1(P)$	1	8	0	12	0	0	8	0
$\lambda_{\min}^1(P)$	0	4	0	6	0	0	4	0
$\lambda_1^2(P)$	6	28	28	18	60	18	4	24
$\lambda_2^2(P)$	8	24	24	24	60	0	24	24
$\lambda_{\max}^2(P)$	8	28	28	24	60	18	24	24
$\lambda_{\min}^2(P)$	6	24	24	18	60	0	4	24
P	0122	0222	1111	1112	1122	1222	2222	-
$\lambda_1^1(P)$	0	0	1	0	0	0	0	-
$\lambda_2^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0	-
$\lambda_{\max}^1(P)$	0	0	1	0	0	0	0	-
$\lambda_{\min}^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0	-
$\lambda_1^2(P)$	24	4	0	0	6	0	0	-
$\lambda_2^2(P)$	24	0	0	4	0	4	0	-
$\lambda_{\max}^2(P)$	24	4	0	4	6	4	0	-
$\lambda_{\min}^2(P)$	24	0	0	0	0	0	0	-

类似地，我们可以得到 D （分别为 C）个三色 4-设计的上界（分别为下界），其中（n(0) n(1) n(2)）等于以下四种选择中的任意一种：(6, 0, 6)、(0, 6, 6)、(3, 3, 6)、(3, 6, 3)。

5.3. IV型码。麦克威廉变换和一些同余条件表明，IV型码的完全重量枚举器在阶为 G_{IV} 的群的作用下保持不变，该群由以下四个矩阵生成：

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

很容易证明，Type$\widehat{\ }$IV码的分裂完全重量枚举式是 G_{IV} 的不变量。

令 $\mathbb{F}_4$ 的元素为 0、1、s、s^2。设 P 是 8 个变量 x_0、x_1、x_s、x_{s^2}、y_0、y_1、y_s、y_{s^2} 中的总次数为 n 的多项式。现在定义极化算子 A_8 和特化算子 S 如下:

$$A_8 \cdot P := \frac{x_0 P'_{y_0} + x_1 P'_{y_1} + x_s P'_{y_s} + x_{s^2} P'_{y_{s^2}}}{n},$$

$S_8 \cdot P(x_0, x_1, x_s, x_{s^2}, y_0, y_1, y_s, y_{s^2}) := P(x_0, x_1, x_1, x_1, y_0, y_1, y_1, y_1)$。

定义 5.3. 若一个长度为 n 的 $\mathbb{F}_4$-线性码，其每种给定组成的码字构成一个 4-着色 t-设计，则称该码为逐色 t-齐次。

现在我们给出引理 5.1 和引理 5.2 的以下 $\mathbb{F}_4$-码类比。

引理 5.7. 设 C 是一个定义在 $\mathbb{F}_4$ 上、长度为 n 的线性码。若 C 是 t-齐次的，且不存在汉明重量小于 t 的非零码字，则对所有大小为 t 的 T，有

$$J_{C,T} = A_4^t \cdot W_C.$$

引理 5.8. 设 C 是一个定义在 $\mathbb{F}_4$上的、长度为 n 的线性码。若 C 是逐色 t-齐次的，且不存在汉明重量小于 t 的非零码字，则对所有大小为 t 的 T，有

$$\mathrm{CJ}_{C,T} = A_8^t \cdot \mathbf{cwe}_C.$$

5.3.1. 长度 4。

例 5.2. 令 C_4^{IV}为 [18]上长度为 4 的 $\mathbb{F}_4$ 厄米特自对偶码。

$$f[4] = u^4 + u^3 v + 2u^2 + uv^3 + v^2.$$

由于 C_4^{IV}中的固定组成码字构成四色 1-设计，我们假设 $|T| = 1$。那么,

$$\begin{aligned}\mathrm{CJ}_{C_4^{\mathrm{IV}},1} = {} & x_0(y_0^3 + y_0 y_1^2 + y_0 y_s^2 + y_0 y_{s^2}^2) + x_1(y_0^2 y_1 + y_1^3 + y_1 y_s^2 + y_1 y_{s^2}^2) \\ & + x_s(y_0^2 y_s + y_1^2 y_s + y_s^3 + y_s y_{s^2}^2) + x_{s^2}(y_0^2 y_{s^2} + y_1^2 y_{s^2} + y_s^2 y_{s^2} + y_{s^2}^3).\end{aligned}$$

存在具有以下参数的简单四色 1-设计：六个参数为 1-(4, (n(0) n(1) n(s) n(s^2)), 2) 的设计，其中 (n(0) n(1) n(s) n(s^2)) 等于 (2, 2, 0, 0) 或其四种置换中的任意一种。具有 $|T| = 2$ 的雅可比多项式空间 $\mathrm{CJ}_{C_4^{\mathrm{IV}},\,T}$ 可由以下两个多项式生成

$$\mathrm{CJ}^1_{C_4^{\mathrm{IV}},2} = (x_0^2 + x_1^2 + x_s^2 + x_{s^2}^2)(y_0^2 + y_1^2 + y_s^2 + y_{s^2}^2),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{CJ}^2_{C_4^{\mathrm{IV}},\,2} = {} & x_0^2 y_0^2 + 2x_0 x_1 y_0 y_1 + 2x_0 x_s y_0 y_s + 2x_0 x_{s^2} y_0 y_{s^2} + x_1^2 y_1^2 + 2x_1 x_s y_1 y_s \\ & + 2x_1 x_{s^2} y_1 y_{s^2} + x_s^2 y_s^2 + 2x_s x_{s^2} y_s y_{s^2} + x_{s^2}^2 y_{s^2}^2.\end{aligned}$$

将这两个方程结合起来，我们得到参数为

$$2\text{-}(4,(2,2,0,0),(\lambda_1(P),(\lambda_2(P))),$$

其中 $\lambda(P)$ 的值列于表5.2。根据该码的完全重量枚举器中项 $y_0^2y_1^2$ 的系数，我们得到 $D_{\lambda_{\max}(P)}(4,(2,2,0,0),2)$ 的上界（分别为下界）$C_{\lambda_{\max}(P)}(4,(2,2,0,0),2)$。

$$D_{\lambda_{\max}(P)}(4,(2,2,0,0),2) \le 2 \le C_{\lambda_{\min}(P)}(4,(2,2,0,0),2).$$

$\lambda_{\max}(P)$（分别为 $\lambda_{\min}(P)$）的值列于表5.2。同样，我们可以得到 D（分别为 C）个 4-彩色 2-设计的上界（分别为下界），其中 $(n(0)\ n(1)\ n(s)\ n(s^2))$ 等于以下四种情况之一：(2, 0, 2, 0)、(2, 0, 0, 2)、(0, 2, 2, 0)、(0, 0, 2, 2)。

4-彩色 2-设计中的 TABLE 5.2. λ 值

P	00	01	$0s$	$0s^2$	11	$1s$	$1s^2$	ss	ss^2	s^2s^2
$\lambda_1(P)$	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$\lambda_2(P)$	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_{\max}(P)$	1	2	0	0	1	0	0	0	0	0
$\lambda_{\min}(P)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5.3.2. 长度 6.

例5.3. 设 C_6^{IV} 是 [18] 中长度为 6 的 $\mathbb{F}_4$ 上第二个厄米特自对偶码。

$$f[6] = 2u^6 + 2u^5v + 3u^4v^2 + 4u^3v^3 + 3u^2v^4 + 2uv^5 + 2v^6.$$

在这种情况下，以下引理和定理成立。

引理 5.9. $M_{2\,4}^{\widehat{G_{\mathrm{IV}}}}$ 的一组基可通过对单项式应用 $R(f,\widehat{G_{\mathrm{IV}}})$ 得到，其中 f 遍历

$$x_0^2y_0^4,\ x_0^2y_1^2y_s^2,\ x_0x_1y_0y_1y_s^2.$$

引理 5.10. $M_{3\,3}^{\widehat{G_{\mathrm{IV}}}}$ 的一组基可通过对单项式应用 $R(f,\widehat{G_{\mathrm{IV}}})$ 得到，其中 f 遍历

$$x_0^3y_0^3,\ x_0^2x_1y_1y_s^2,\ x_0x_1^2y_0y_s^2,\ x_0x_1x_sy_0y_1y_s.$$

我们需要注意，该特化映射在这些空间上是一一对应的。

引理 5.11. 对于 $\ell = 1$，我们有 2

$$\dim(S_8 \cdot M_{\ell,6-\ell}^{\widehat{G_{\mathrm{IV}}}}) = \dim(M_{\ell,6-\ell}^{\widehat{G_{\mathrm{IV}}}}).$$

证明。对前面的基取 S_8 的像即可得到。□

定理 5.12. 长度 6 的厄米特 IV 型码中固定组成的码字构成 4-彩色 2-设计。

证明。我们需要证明 $\mathrm{CJ}_{C,T}$ 不依赖于 T，对于 $|T| = 2$。由于它属于 $M_{2\,4}^{G_{\mathrm{IV}}}$，我们可以在引理 5.9 给出的基上用不定系数展开。厄米特码是 3-齐次的。通过特化以及引理 5.7 和引理 5.11，我们可以通过求解一个 3×3 线性方程组完全确定这些系数。□

注意，由于 $\mathrm{CJ}_{C,T}$ 属于 $M_{3\,3}^{G_{\mathrm{IV}}}$，我们可以针对 $|T| = 3$ 用引理 5.10 给出的基上的不定系数展开它。但我们无法通过特化以及引理 5.7 和引理 5.11 求解一个 3×3 线性方程组来完全确定这些系数。

由于 C_6^{IV} 中固定组成码字构成一个 4 色 2-设计，我们假设 $|T| = 1$, 2。于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{CJ}_{C_6^{\mathrm{IV}},1} &= x_0(y_0^5 + 5y_0y_1^2y_s^2 + 5y_0y_1^2y_{s^2}^2 + 5y_0y_s^2y_{s^2}^2) + x_1(5y_0^2y_1y_s^2 \\
&\quad + 5y_0^2y_1y_{s^2}^2 + y_1^5 + 5y_1y_s^2y_{s^2}^2) + x_s(5y_0^2y_1^2y_s + 5y_0^2y_sy_{s^2}^2 \\
&\quad + 5y_1^2y_sy_{s^2}^2 + y_s^5) + x_{s^2}(5y_0^2y_1^2y_{s^2} + 5y_0^2y_s^2y_{s^2} + 5y_1^2y_s^2y_{s^2} + y_{s^2}^5), \\
\mathrm{CJ}_{C_6^{\mathrm{IV}},2} &= x_0^2(y_0^4 + y_1^2y_s^2 + y_1^2y_{s^2}^2 + y_s^2y_{s^2}^2) + x_0x_1(4y_0y_1y_s^2 + 4y_0y_1y_{s^2}^2) \\
&\quad + x_0x_s(4y_0y_1^2y_s + 4y_0y_sy_{s^2}^2) + x_0x_{s^2}(4y_0y_1y_{s^2}^2 + 4y_0y_s^2y_{s^2}) \\
&\quad + x_1^2(y_0^2y_s^2 + y_0^2y_{s^2}^2 + y_1^4 + y_s^2y_{s^2}^2) + x_1x_s(4y_0^2y_1y_s + 4y_1y_sy_{s^2}^2) \\
&\quad + x_1x_{s^2}(4y_0^2y_1y_{s^2} + y_1y_s^2y_{s^2}) + x_s^2(y_0^2y_1^2 + y_0^2y_{s^2}^2 + y_1^2y_{s^2}^2 + y_s^4) \\
&\quad + x_sx_{s^2}(4y_0^2y_sy_{s^2} + 4y_1^2y_sy_{s^2}) + x_{s^2}^2(y_0^2y_1^2 + y_0^2y_s^2 + y_1^2y_s^2 + y_{s^2}^4).
\end{aligned}$$

推论 5.13. 设 $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, s, s^2\}$。存在具有以下参数的简单 4-色 2-设计：四个参数为 2-(6, (n(0) n(1) n(s) n(s^2)), 15) 的设计，其中 (n(0) n(1) n(s) n(s^2)) 等于 (2, 2, 2, 0) 或其四种置换中的任意一种。

雅可比多项式空间 $\mathrm{CJ}_{C_6^{\mathrm{IV}},\ T}$ 在 $|T|=3$ 条件下可由两个多项式生成。

$$\begin{aligned}
\mathrm{CJ}^1_{C_6^{\mathrm{IV}},3} &= x_0^3y_0^3 + 3x_0^2x_1y_1y_s^2 + 3x_0^2x_sy_sy_{s^2}^2 + 3x_0^2x_{s^2}y_1^2y_{s^2} + 3x_0x_1^2y_0y_{s^2}^2 \\
&\quad + 6x_0x_1x_sy_0y_1y_s + 6x_0x_1x_{s^2}y_0y_1y_{s^2} + 3x_0x_s^2y_0y_1^2 + 6x_0x_sx_{s^2}y_0y_sy_{s^2} \\
&\quad + 3x_0x_{s^2}^2y_0y_s^2 + x_1^3y_1^3 + 3x_1^2x_sy_0^2y_s + 3x_1^2x_{s^2}y_s^2y_{s^2} + 3x_1x_s^2y_1y_{s^2}^2 \\
&\quad + 6x_1x_sx_{s^2}y_1y_sy_{s^2} + 3x_1x_{s^2}^2y_0^2y_1 + x_s^3y_s^3 + 3x_s^2x_{s^2}y_0^2y_{s^2} \\
&\quad + 3x_sx_{s^2}^2y_1^2y_s + x_{s^2}^3y_{s^2}^3, \\
\mathrm{CJ}^2_{C_6^{\mathrm{IV}},3} &= x_0^3y_0^3 + 3x_0^2x_1y_1y_{s^2}^2 + 3x_0^2x_sy_1^2y_s + 3x_0^2x_{s^2}y_s^2y_{s^2} + 3x_0x_1^2y_0y_s^2 \\
&\quad + 6x_0x_1x_sy_0y_1y_s + 6x_0x_1x_{s^2}y_0y_1y_{s^2} + 3x_0x_s^2y_0y_{s^2}^2 + 6x_0x_sx_{s^2}y_0y_sy_{s^2} \\
&\quad + 3x_0x_{s^2}^2y_0y_1^2 + x_1^3y_1^3 + 3x_1^2x_sy_sy_{s^2}^2 + 3x_1^2x_{s^2}y_0^2y_{s^2} + 3x_1x_s^2y_0^2y_1 \\
&\quad + 6x_1x_sx_{s^2}y_1y_sy_{s^2} + 3x_1x_{s^2}^2y_1y_s^2 + x_s^3y_s^3 + 3x_s^2x_{s^2}y_1^2y_{s^2} + 3x_sx_{s^2}^2y_0^2y_s \\
&\quad + x_{s^2}^3y_{s^2}^3.
\end{aligned}$$

结合这两个方程，我们得到参数为

$$3\text{-}(6,(2,2,2,0),(\lambda_1(P),(\lambda_2(P))),$$

其中 $\lambda(P)$ 的取值见表5.3。根据码的完全重量枚举器中 $y_0^2y_1^2y_s^2$ 项的系数，我们得到 $D_{\lambda_{\max}(P)}(6,(2,2,2,0),3)$ 的上界（下界为 $C_{\lambda_{\max}(P)}(6,(2,2,2,0),3)$）。

$$D_{\lambda_{\max}(P)}(6,(2,2,2,0),3) \le 15 \le C_{\lambda_{\min}(P)}(6,(2,2,2,0),3).$$

$\lambda_{\max}(P)$（分别为 $\lambda_{\min}(P)$）列于表5.3。类似地，我们可以得到 D（分别为 C）四色 3-设计的上界（分别为下界），其中 $(n(0)\ n(1)\ n(s)\ n(s^2))$ 等于以下三种选择之一：(2, 2, 0, 2)、(2, 0, 2, 2)、(0, 2, 2, 2)。

TABLE 5.3. λ 在四色 3-设计中的取值

P	000	001	$00s$	$00s^2$	011	$01s$	$01s^2$	$0ss$	$0ss^2$	$0s^2s^2$
$\lambda_1(P)$	0	0	3	0	3	6	0	0	0	0
$\lambda_2(P)$	0	3	0	0	0	6	0	3	0	0
$\lambda_{\max}(P)$	0	3	3	0	3	6	0	3	0	0
$\lambda_{\min}(P)$	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0
P	111	$11s$	$11s^2$	$1ss$	$1ss^2$	$1s^2s^2$	sss	sss^2	ss^2s^2	$s^2s^2s^2$
$\lambda_1(P)$	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0
$\lambda_2(P)$	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_{\max}(P)$	0	3	0	3	0	0	0	0	0	0
$\lambda_{\min}(P)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5.3.3. 长度 8。

例5.4。设 C_8^{IV} 是 [18] 中长度为 8 的第三个厄米特自对偶码。

$$f[8] = 3u^8 + 5u^7v + 7u^6v^2 + 8u^5v^3 + 10u^4v^4 + \cdots .$$

由于 C_8^{IV} 中的固定组成码字构成一个 4 色 3-设计，我们假设 $|T| = 1$、2、3。然后，

$$\begin{aligned}
\mathrm{CJ}_{C_8^{\mathrm{IV}},1} &= x_0(y_0^7 + 7y_0^3y_1^4 + 7y_0^3y_s^4 + 7y_0^3y_{s^2}^4 + 42y_0y_1^2y_s^2y_{s^2}^2)\\
&\quad + x_1(7y_0^4y_1^3 + 42y_0^2y_1y_s^2y_{s^2}^2 + y_1^7 + 7y_1^3y_s^4 + 7y_1^3y_{s^2}^4)\\
&\quad + x_s(7y_0^4y_s^3 + 42y_0^2y_1^2y_sy_{s^2}^2 + 7y_1^4y_s^3 + y_s^7 + 7y_s^3y_{s^2}^4)\\
&\quad + x_{s^2}(7y_0^4y_{s^2}^3 + 42y_0^2y_1^2y_s^2y_{s^2} + 7y_1^4y_{s^2}^3 + 7y_s^4y_{s^2}^3 + y_{s^2}^7),\\
\mathrm{CJ}_{C_8^{\mathrm{IV}},2} &= x_0^2(y_0^6 + 3y_0^2y_1^4 + 3y_0^2y_s^4 + 3y_0^2y_{s^2}^4 + 6y_1^2y_s^2y_{s^2}^2)\\
&\quad + x_0x_1(8y_0^3y_1^3 + 24y_0y_1y_s^2y_{s^2}^2) + x_0x_s(8y_0^3y_s^3 + 24y_0y_1^2y_sy_{s^2}^2)\\
&\quad + x_0x_{s^2}(8y_0^3y_{s^2}^3 + 24y_0y_1^2y_s^2y_{s^2}) + x_1^2(3y_0^4y_1^2 + 6y_0^2y_s^2y_{s^2}^2\\
&\quad + y_1^6 + 3y_1^2y_s^4 + 3y_1^2y_{s^2}^4) + x_1x_s(24y_0^2y_1y_sy_{s^2}^2 + 8y_1^3y_s^3)\\
&\quad + x_1x_{s^2}(24y_0^2y_1y_s^2y_{s^2} + 8y_1^3y_{s^2}^3) + x_s^2(3y_0^4y_s^2 + 6y_0^2y_1^2y_{s^2}^2\\
&\quad + 3y_1^4y_s^2 + 3y_s^2y_{s^2}^4 + y_s^6) + x_sx_{s^2}(24y_0^2y_1^2y_sy_{s^2} + 8y_s^3y_{s^2}^3)\\
&\quad + x_{s^2}^2(3y_0^4y_{s^2}^2 + 6y_0^2y_1^2y_s^2 + 3y_1^4y_{s^2}^2 + 3y_s^4y_{s^2}^2 + y_{s^2}^6),\\
\mathrm{CJ}_{C_8^{\mathrm{IV}},3} &= x_0^3(y_0^5 + y_0y_s^4 + y_0y_s^4 + y_0y_{s^2}^4) + x_0^2x_1(6y_0^2y_1^3 + 6y_1y_s^2y_{s^2}^2)\\
&\quad + x_0^2x_s(6y_0^2y_s^3 + 6y_1^2y_sy_{s^2}^2) + x_0^2x_{s^2}(6y_0^2y_{s^2}^3 + 6y_1^2y_s^2y_{s^2})\\
&\quad + x_0x_1^2(6y_0^3y_1^2 + 6y_0y_s^2y_{s^2}^2) + 24x_0x_1x_sy_0y_1y_sy_{s^2}^2\\
&\quad + 24x_0x_1x_{s^2}y_0y_1y_s^2y_{s^2} + x_0x_s^2(6y_0^3y_s^2 + 6y_0y_1^2y_{s^2}^2)\\
&\quad + 24x_0x_sx_{s^2}y_0y_1^2y_sy_{s^2} + x_0x_{s^2}^2(6y_0^3y_{s^2}^2 + 6y_0y_1^2y_s^2)\\
&\quad + x_1^3(y_0^4y_1 + y_1^5 + y_1y_s^4 + y_1y_{s^2}^4) + x_1^2x_s(6y_0^2y_sy_{s^2}^2 + 6y_1^2y_s^3)\\
&\quad + x_1^2x_{s^2}(6y_0^2y_s^2y_{s^2} + 6y_1^2y_{s^2}^3) + x_1x_s^2(6y_0^2y_1y_{s^2}^2 + 6y_1^3y_s^2)\\
&\quad + x_1x_{s^2}^2(6y_0^2y_1y_s^2 + 6y_1^3y_{s^2}^2) + 24x_1x_sx_{s^2}y_0^2y_1y_sy_{s^2}\\
&\quad + x_s^3(y_0^4y_s + y_1^4y_s + y_s^5 + y_sy_{s^2}^4) + x_s^2x_{s^2}(6y_0^2y_1^2y_{s^2} + 6y_s^2y_{s^2}^3)\\
&\quad + x_sx_{s^2}^2(6y_0^2y_1^2y_s + 6y_s^3y_{s^2}^2) + x_{s^2}^3(y_0^4y_{s^2} + y_1^4y_{s^2} + y_s^4y_{s^2} + y_{s^2}^5).
\end{aligned}$$

存在具有以下参数的简单四色 3-设计：六个参数为 3-(8, (n(0) n(1) n(s) n(s^2)), 14) 的设计，其中 (n(0) n(1) n(s) n(s^2)) 等于 (4, 4, 0, 0) 或其四种置换中的任意一种。雅可比多项式的空间 $\mathrm{CJ}_{C_8^{\mathrm{IV}},\ T}$ with $|T| = 4$ 可由这两个生成

多项式

$$\begin{aligned}\mathrm{CJ}^1_{C_8^{\mathrm{IV}},4} &= x_0^4(y_0^4+y_1^4+y_s^4+y_{s^2}^4)+x_0^2x_1^2(12y_0^2y_1^2+12y_s^2y_{s^2}^2)\\ &+x_0^2x_s^2(12y_0^2y_s^2+12y_1^2y_{s^2}^2)+x_0^2x_{s^2}^2(12y_0^2y_{s^2}^2+12y_1^2y_s^2)\\ &+96x_0x_1x_sx_{s^2}y_0y_1y_sy_{s^2}+x_1^4(y_0^4+y_1^4+y_s^4+y_{s^2}^4)+x_1^2x_s^2(12y_0^2y_{s^2}^2\\ &+12y_1^2y_s^2)+x_1^2x_{s^2}^2(12y_0^2y_s^2+12y_1^2y_{s^2}^2)+x_s^4(y_0^4+y_1^4+y_s^4+y_{s^2}^4)\\ &+x_s^2x_{s^2}^2(12y_0^2y_1^2+12y_s^2y_{s^2}^2)+x_{s^2}^4(y_0^4+y_1^4+y_s^4+y_{s^2}^4),\\ \mathrm{CJ}^2_{C_8^{\mathrm{IV}},4} &= x_0^4y_0^4+4x_0^3x_1y_0y_1^3+4x_0^3x_sy_0y_s^3+4x_0^3x_{s^2}y_0y_{s^2}^3+6x_0^2x_1^2y_0^2y_1^2\\ &+12x_0^2x_1x_sy_1y_sy_{s^2}^2+12x_0^2x_1x_{s^2}y_1y_s^2y_{s^2}+6x_0^2x_s^2y_0^2y_s^2\\ &+12x_0^2x_sx_{s^2}y_1^2y_sy_{s^2}+6x_0^2x_{s^2}^2y_0^2y_{s^2}^2+4x_0x_1^3y_0^3y_1+12x_0x_1^2x_sy_0y_sy_{s^2}^2\\ &+12x_0x_1^2x_{s^2}y_0y_s^2y_{s^2}+12x_0x_1x_s^2y_0y_1y_{s^2}^2+24x_0x_1x_sx_{s^2}y_0y_1y_sy_{s^2}\\ &+12x_0x_1x_{s^2}^2y_0y_1y_s^2+4x_0x_s^3y_0^3y_s+12x_0x_s^2x_{s^2}y_0y_1^2y_{s^2}\\ &+12x_0x_sx_{s^2}^2y_0y_1^2y_s+4x_0x_{s^2}^3y_0^3y_{s^2}+x_1^4y_1^4+4x_1^3x_sy_1y_s^3\\ &+4x_1^3x_{s^2}y_1y_{s^2}^3+6x_1^2x_s^2y_1^2y_s^2+12x_1^2x_sx_{s^2}y_0^2y_sy_{s^2}+6x_1^2x_{s^2}^2y_1^2y_{s^2}^2\\ &+4x_1x_s^3y_1^3y_s+12x_1x_s^2x_{s^2}y_0^2y_1y_{s^2}+12x_1x_sx_{s^2}^2y_0^2y_1y_s+4x_1x_{s^2}^3y_1^3y_{s^2}\\ &+x_s^4y_s^4+4x_s^3x_{s^2}y_sy_{s^2}^3+6x_s^2x_{s^2}^2y_s^2y_{s^2}^2+4x_sx_{s^2}^3y_s^3y_{s^2}+x_{s^2}^4y_{s^2}^4.\end{aligned}$$

结合这两个方程，我们得到参数为以下数值的 4-设计。

$$4\text{-}(8,(4,4,0,0),(\lambda_1^1(P),\lambda_2^1(P)))\text{ and }4\text{-}(8,(2,2,2,2),(\lambda_1^2(P),\lambda_2^2(P)),$$

其中 $\lambda(P)$ 的取值见表 5.4。根据该码的完全重量枚举器中项 $y_0^{n(0)}y_1^{n(1)}y_s^{n(s)}y_{s^2}^{n(s^2)}$ 的系数，我们得到 $D_{\lambda_{\max}(P)}(8,(n(0)\ n(1)\ n(s)\ n(s^2)),4)$（上界），（下界）为 $C_{\lambda_{\max}(P)}(8,(n(0)\ n(1)\ n(s)\ n(s^2)),4)$。

$$\begin{aligned}D_{\lambda^1_{\max}(P)}(8,(4,4,0,0),4)\le 14\le C_{\lambda^1_{\min}(P)}(8,(4,4,0,0),4),\\ D_{\lambda^2_{\max}(P)}(8,(2,2,2,2),4)\le 168\le C_{\lambda^2_{\min}(P)}(8,(2,2,2,2),4).\end{aligned}$$

$\lambda_{\max}(P)$（分别为 $\lambda_{\min}(P)$）列于表 5.4。类似地，我们可以得到 D（分别为 C）四色 3-设计的上界（分别为下界），其中（$n(0)\ n(1)\ n(s)\ n(s^2)$）等于以下五种取值之一：(4, 0, 4, 0)、(4, 0, 0, 4)、(0, 4, 4, 0)、(0, 4, 0, 4)、(0, 0, 4, 4)。

对于包含全一向量、长度为 n的极值I型（分别为IV 型）码，其构成如表5.5（分别为表5.6）所示的3-（分别为4-）色 t设计。

6. Concluding remarks

设 D_w 是码 C 关于重量 w 的支撑设计，并且

$$\delta(C) := \max\{t \in \mathbb{N} \mid \forall w, D_w \text{ is a } t\text{-design}\},$$
$$s(C) := \max\{t \in \mathbb{N} \mid \exists w \text{ s.t. } D_w \text{ is a } t\text{-design}\}.$$

我们注意到，$\delta(C) \leq s(C)$。在我们之前的论文中，[3, 20, 29, 30, 31, 32, 33], 我们研究了 $\delta(C) < s(C)$可能出现的情形。这项研究的动机源于 Lehmer 猜想；该猜想是格与顶点算子代数理论中 $\delta(C) < s(C)$的一个类比。详情请参见 [1, 2, 4, 22, 26, 27, 29, 38, 39]。

设 CD_w 为码 C 关于重量 w 的支撑彩色设计，并且

$$\delta_c(C) := \max\{t \in \mathbb{N} \mid \forall w, CD_w \text{ is a colored } t\text{-design}\},$$
$$s_c(C) := \max\{t \in \mathbb{N} \mid \exists w \text{ s.t. } CD_w \text{ is a colored } t\text{-design}\}.$$

对于所有极值 I型、III型和 IV型码，给出 $\delta_c(C)$ 和 $s_c(C)$ 的上界和下界是很自然的。

我们将在 [11] 中继续研究本文，将其推广到 $\mathbb{Z}_k$码的情形，这是对 Bonnecaze 等人 [6]所开展工作的推广。此外，我们还将研究 [12] 中 Kleinian 码的彩色设计。

Declaration of competing interest

作者声明，他们不存在任何已知的、可能影响本文所报告研究工作的竞争性经济利益或个人关系。

Acknowledgements

作者感谢 Tsuyoshi Miezaki 和 Manabu Oura 对本研究提出的有益讨论和意见。

Data availability statement

支持本研究发现的数据可向通讯作者获取。

References

[1]E. Bannai 和 T. Miezaki，D. H. Lehmer 猜想的玩具模型。《日本数学会志》62（2010），第 3 期，687–705。[2] E. Bannai 和 T. Miezaki，D. H. Lehmer 猜想的玩具模型 II。二次及高次形式，1–27，数学发展，第 31 卷，Springer，纽约，2013 年。

[3] E. Bannai、T. Miezaki 和 H. Nakasora，关于某些二元码的 Assmus–Mattson定理 II，已投稿。[4] E. Bannai、T. Miezaki 和 V.A. Yudin，Lehmer 猜想玩具模型的初等方法。（俄文）《俄罗斯科学院数学辑》75（2011），第 6 期，3–16；译文载于《数学汇刊》75（2011），第 6 期，1093–1106。[5] E.R. Berlekamp、F.J. MacWilliams 和 N.J.A. Sloane，关于自对偶码的 Gleason 定理，《IEEE 信息论汇刊》IT-18（1972），409–414。[6] A. Bonnecaze、B. Mourrain 和 P. Sol´e，雅可比多项式、II型码与设计，《设计、码与密码学》16（1999），第 3 期，215–234。[7] A. Bonnecaze、E. Rains 和 P. Sol´e，3 色 5-设计与 $\mathbb{Z}_4$-码，《统计规划与推断杂志》86（2000），349–368。[8] A. Bonnecaze、P. Sol´e 和 P. Udaya，III 型码中的三色 3-设计，《离散数学》241（2001），129–138。[9] W. Bosma、J. Cannon 和 C. Playoust，Magma 代数系统 I：用户语言，《符号计算杂志》24（1997），235–265。[10] P.J. Cameron，t-设计的一种推广，《离散数学》309（2009），4835–4842。[11] H.S. Chakraborty、R. Ishikawa、T. Miezaki 和 Y. Tanaka，雅可比多项式与设计理论 III，准备中。[12] H.S. Chakraborty、R. Ishikawa、T. Miezaki 和 Y. Tanaka，雅可比多项式与设计理论 IV，准备中。[13] H.S. Chakraborty 和 T. Miezaki，编码理论中的雅可比多项式变体，《设计、码与密码学》90（2022），2583–2597。[14] H.S. Chakraborty、T. Miezaki 和 M. Oura，重量枚举式、交集枚举式与雅可比多项式 II，《离散数学》345(12)（2022），论文编号 113098。[15] H.S. Chakraborty、T. Miezaki、M. Oura 和 Y. Tanaka，雅可比多项式与设计理论 I，《离散数学》346(6)（2023），论文编号 113339。[16] M. Eichler 和 D. Zagier，《雅可比形式理论》，《数学进展》，第 55 卷，Birkhauser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1985 年。[17] A.M. Gleason，自对偶码的重量多项式与 MacWilliams 恒等式，载于：《国际数学家大会论文集》（尼斯，1970），第 3 卷，Gauthier-Villars，巴黎，1971 年，第 211–215 页。[18]M. Harada 和 A. Munemasa，自对偶码数据库，https://www.math.is.tohoku.ac.jp/˜munemasa/selfdualcodes.htm。[19] K. Honma、T. Okabe 和 M. Oura，重量枚举式、交集枚举式与雅可比多项式，《离散数学》343（2020），第 6 期，111815。[20] N. Horiguchi、T. Miezaki 和 H. Nakasora，关于极值二元双偶自对偶码的支撑设计，《设计、码与密码学》72（2014），529–537。[21] W. C. Huffman 和 V. Pless，《纠错码基础》，第一版，剑桥大学出版社，英国，2003 年。[22] D.H. Lehmer，Ramanujan 的 $\tau(n)$ 的消失，《杜克数学杂志》14（1947），429–433。[23] F.J. MacWilliams、C.L. Mallows 和 N.J.A. Sloane，关于自对偶码重量枚举式的 Gleason 定理的推广，《IEEE 信息论汇刊》IT-18（1972），794–805。[24] F.J. MacWilliams 和 N.J.A. Sloane，《纠错码理论》，第一版，Elsevier/North Holland，纽约，1977 年。

[25] T. Miezaki，码、格与顶点算子代数之间的设计理论类比，《设计、码与密码学》89（2021年），763–780.[26] T. Miezaki，共形设计与 D.H. Lehmer猜想，《代数杂志》374（2013年），59–65.[27] T. Miezaki，码、格与顶点算子代数之间的设计理论类比，《设计、码与密码学》89（2021年），第5期，763–780.[28] T. Miezaki，A. Munemasa 和 H. Nakasora，关于 Assmus–Mattson定理的注记，《设计、码与密码学》89（2021年），843–858.[29] T. Miezaki，A. Munemasa 和 H. Nakasora，关于 Assmus–Mattson 类型定理的注记，《设计、码与密码学》89（2021年），843–858.[30] T. Miezaki 和 H. Nakasora，极值二元双偶自对偶码的支撑t设计的 t 值的一个上界，《设计、码与密码学》79（2016年），37–46.[31] T. Miezaki 和 H. Nakasora，长度 48 的三重偶二元码的支撑设计，《组合设计杂志》27（2019年），673–681.[32] T. Miezaki 和 H. Nakasora，关于某些二元码的 Assmus–Mattson定理的注记，《设计、码与密码学》90（2022年），第6期，1485–1502.[33] T. Miezaki 和 H. Nakasora，关于I型和偶形式自对偶码的 Assmus–Mattson 类型定理，已提交.[34] G. Nebe，E.M. Rains 和 N.J.A. Sloane，《自对偶码与不变理论》，《数学中的算法与计算》第17卷，施普林格出版社，柏林，2006年.[35] M. Ozeki，关于码的雅可比多项式概念，《剑桥哲学会数学论文集》121（1）（1997年），15–30.[36] N.J.A. Sloane，纠错码与不变理论：十九世纪技术的新应用，《美国数学月刊》84（1977年），82–107.[37] R.P. Stanley，有限群的不变量及其在组合学中的应用，《美国数学会公报（新辑）》1（3）（1979年），475–511.[38] B.B. Venkov，偶幺模极值格（俄文），《代数几何及其应用》，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》165（1984年），43–48；英译见《斯捷克洛夫数学研究所论文集》165（1985年），47–52.[39] B.B. Venkov，R´格与球面设计´，《法文》 [格与球面设计] R´欧几里得格、球面设计与模形式´，10–86，《数学教学专著》37，《数学教学》，日内瓦，2001年.

Department of Mathematics,
Shahjalal University of Science andTechnology, Sylhet 3114,
BANGLADESH电子邮件地址：himadri-mat@sust.edu
Graduate School of Science and Engineering, Waseda University,
Tokyo 169-8555, Japan电子邮件地址：reina.i@suou.waseda.jp
Graduate School of Science and Engineering, Waseda University,
Tokyo, 169-8555, Japan电子邮件地址：tanaka yuuho dc
@akane.waseda.jp

4 色 4-设计中的 TABLE 5.4. λ 值

P	0000	0001	$000s$	$000s^2$	0011	$001s$	$001s^2$
$\lambda_1^1(P)$	1	0	0	0	12	0	0
$\lambda_2^1(P)$	0	4	0	0	6	0	0
$\lambda_{\max}^1(P)$	1	4	0	0	12	0	0
$\lambda_{\min}^1(P)$	0	0	0	0	6	0	0
$\lambda_1^2(P)$	0	0	0	0	12	0	0
$\lambda_2^2(P)$	0	0	0	0	0	12	12
$\lambda_{\max}^2(P)$	0	0	0	0	12	12	12
$\lambda_{\min}^2(P)$	0	0	0	0	0	0	0
P	$00ss$	$00ss^2$	$00s^2s^2$	0111	$011s$	$011s^2$	$01ss$
$\lambda_1^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_2^1(P)$	0	0	0	4	0	0	0
$\lambda_{\max}^1(P)$	0	0	0	4	0	0	0
$\lambda_{\min}^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_1^2(P)$	12	0	12	0	0	0	0
$\lambda_2^2(P)$	0	12	0	0	12	12	12
$\lambda_{\max}^2(P)$	12	12	12	0	12	12	12
$\lambda_{\min}^2(P)$	0	0	0	0	0	0	0
P	$01ss^2$	$01s^2s^2$	$0sss$	$0sss^2$	$0ss^2s^2$	$0s^2s^2s^2$	1111
$\lambda_1^1(P)$	0	0	0	0	0	0	1
$\lambda_2^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_{\max}^1(P)$	0	0	0	0	0	0	1
$\lambda_{\min}^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_1^2(P)$	96	0	0	0	0	0	0
$\lambda_2^2(P)$	24	12	0	12	12	0	0
$\lambda_{\max}^2(P)$	96	12	0	12	12	0	0
$\lambda_{\min}^2(P)$	24	0	0	0	0	0	0
P	$111s$	$111s^2$	$11ss$	$11ss^2$	$11s^2s^2$	$1sss$	$1sss^2$
$\lambda_1^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_2^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_{\max}^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_{\min}^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_1^2(P)$	0	0	12	0	12	0	0
$\lambda_2^2(P)$	12	0	0	12	0	0	12
$\lambda_{\max}^2(P)$	12	0	12	12	12	0	12
$\lambda_{\min}^2(P)$	0	0	0	0	0	0	0
P	$1ss^2s^2$	$1s^2s^2s^2$	$ssss$	$ssss^2$	sss^2s^2	$ss^2s^2s^2$	$s^2s^2s^2s^2$
$\lambda_1^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_2^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_{\max}^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_{\min}^1(P)$	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_1^2(P)$	0	0	0	0	12	0	0
$\lambda_2^2(P)$	12	0	0	0	0	0	0
$\lambda_{\max}^2(P)$	12	0	0	0	12	0	0
$\lambda_{\min}^2(P)$	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 5.5. 3色 t-$(n,(n_0,n_1,n_2)\ |\mathcal{B}|)$设计，采用III型码

n	t	cwe（n_0,n_1,n_2）中的区组在置换意义下	区组数
12	1	(6, 3, 3)	220
	1	(6, 6, 0)	22
	2	(6, 3, 3)	220
	2	(6, 6, 0)	22
	3	(6, 3, 3)	220
	3	(6, 6, 0)	22

TABLE 5.6. 4色 t-$(n,(n_0,n_1,n_s,n_{s^2})\ |\mathcal{B}|)$ 设计于 IV型码中

n	t	cwe 中的区组 (n_0,n_1,n_s,n_{s^2}) 模置换	区组数
4	1	(2, 2, 0, 0)	2
6	1	(2, 2, 2, 0)	15
8	1	(4, 4, 0, 0)	14
8	1	(2, 2, 2, 2)	168
6	2	(2, 2, 2, 0)	15
8	2	(4, 4, 0, 0)	14
8	2	(2, 2, 2, 2)	168
8	3	(4, 4, 0, 0)	14
8	3	(2, 2, 2, 2)	168