arXiv:2304.06265v1 [math.GT] 13 Apr 2023

拓扑切片与有理切片纽结

Jennifer Hom、Sungkyung Kang 和 JungHwan Park

摘要。若结 S^3 在 B^4 中界定一个局部平坦圆盘，则称其为拓扑切片。若结 S^3 在一个有理同调球中界定一个光滑圆盘，则称其为有理切片。我们证明，由拓扑切片且有理切片的纽结构成的光滑同痕群含有一个 $\mathbb{Z}^\infty$ 子群。此前已知的所有既拓扑切片又有理切片的纽结，其阶数均为二。由此可直接得出，存在无穷多个拓扑切片的纽结，它们是强有理可切的，但不是 slice结。

1. 引言

拓扑切结的光滑同痕群包含一个 $\mathbb{Z}^\infty \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\infty$ 子群；Endo 于 1995年 首先利用规范理论证明了 $\mathbb{Z}^\infty$ 子群的存在性 [End95], ，而直到近 20 年后，人们才借助 Heegaard Floer 同调证明了 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\infty$ 子群的存在性 [HKL16]。这两项证明都依赖于 Freedman 的里程碑式结果 [Fre82]：任何 Alexander 多项式为 1 的纽结都是拓扑切片的。

类似地，有理切片纽结的光滑同痕群也包含一个 $\mathbb{Z}^\infty \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\infty$ 子群。然而，我们对有理切片纽结的理解沿着相反的方向发展：$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\infty$ 子群 [Cha07] 的证明比 $\mathbb{Z}^\infty$ 子群 [HKPS22] 的证明早了 15 年。就其阻碍性方面而言，前一个证明依赖于J. Levine 的代数同痕群 [Lev69] ，而后一个证明依赖于对合Heegaard Floer同调 [HM17]。就其构造性方面而言，他们利用了八字结是有理切片的这一事实，并将其证明加以推广。Cochran 利用 Fintushel-Stern 的工作观察到了这一事实 [FS84]。

那么，既是拓扑切片又是有理切片的纽结呢?

- 有理切片但不是 slice结： [Cha07]中的纽结并非拓扑切片，因为它们甚至不是代数切片的。同样， [HKPS22]中 $\mathbb{Z}^\infty$ 子群的生成集也不是代数切片的。
- 拓扑切片但不是slice结：可以通过对 [Cha07, 定理 4.16] 的证明进行直接修改，证明表示 [HKL16] 的 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\infty$ 子群的结是有理切片的。Endo 的族 [End95]（椒盐结 $P(-2k-1, 4k+1, 4k+3)$，其中 $k \geq 1$）的生成集不是有理切片的。文献中还有更多拓扑切片的结，其中许多已知不是有理切片的（例如参见 [Hom15, OSS17, KP18, FPR19, DHST21]），而其中一些尚不清楚是否为有理切片（例如参见 [HK12, CHH13, CK21, Cha21, KKK22]）。

请注意，此前所有已知的同时拓扑切片与有理切片的纽结，在光滑同痕群中都具有二阶。本文旨在证明，拓扑切片与有理切片纽结的光滑同痕群实际上包含一个 $\mathbb{Z}^\infty \oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\infty$ 子群。对于任意纽结 K，令 $\mathrm{Wh}^+(K)$ 表示 K 的正怀特黑德复合，并令 $K_{p,\,-1}$ 表示 K 的 $(p,\ -1)$-缆结。

定理 1.1。 分别用 T 和 E 表示右手三叶结和八字结。那么该族中的每个结

$$\left\{K_n := (\mathrm{Wh}^+(T)\#E)_{2n+1,-1}\# - (\mathrm{Wh}^+(T))_{2n+1,-1}\# - E_{2n+1,-1} \mid n > 0\right\}$$

在拓扑意义上和有理意义上均为 *slice*结，并且在光滑同痕群中具有无限阶。此外，给定的族包含光滑同痕群中的一个无限线性无关子集。

2020 数学学科分类。 57K10, 57K18。关键词和短语。 拓扑切片，有理切片，对合结 Floer 同调。

如定理 1.1 中所述，纽结 K_n 是拓扑 slice结且有理切片。事实上，在拓扑同痕意义下，我们可以忽略 $\mathrm{Wh}^+(T)$，从而得到 $E_{2n+1,\ -1}\#-E_{2n+1,\ -1}$，它显然是一个 slice结。类似地，在有理同痕意义下，我们可以忽略 E，这同样会得到一个 slice结。我们的纽结族利用了这样一个事实：缆结运算不会在同痕群上诱导一个同态；关于卫星算子和同痕群的进一步讨论，请参见 [HPC21] 。

我们可以自然地将主定理作如下解读。令 $\mathcal{T}$ 为拓扑切片结的光滑同痕群，$\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ 为拓扑切片结的光滑有理同痕群。由于两个同痕结必然有理同痕，因此有如下自然的满同态：

$$\psi_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T}\to\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}.$$

注意， [HKL16] 的主定理表明，$\ker\psi_{\mathcal{T}}$包含无穷多个二阶元素。作为我们主定理的直接推论，我们得到以下结果：

推论 1.2。 群 $\ker\psi_{\mathcal{T}}$ 包含一个与 $\mathbb{Z}^\infty$ 同构的子群。

此外，定理 1.1 中的纽结可用于证明存在一个拓扑切片且强有理可切、但不是 slice结的结。强有理可切纽结是指能够在有理同调球中界定光滑嵌入圆盘的纽结，其中包含映射诱导一个同构。

$$H_1(S^3-K;\mathbb{Z})\xrightarrow{\cong}H_1(X-\Delta;\mathbb{Z})/\mathrm{torsion}.$$

区分强有理可切结与 slice结的问题非常微妙；这类结的首个例子由 [KP22] 找到。将 [KP22 定理 1.4] 的证明直接应用于定理 1.1 中的结，我们立即得到以下推论。

推论 1.3. 令 $\{K_n\}$ 为定理 *1.1* 中的纽结。则每个 $(K_n)_{2,1}$ 都是拓扑 *slice* 结且强有理可切，并且在光滑同痕群中具有无限阶。

回顾一下，存在一个自然的满同态 $\psi\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$，它定义于光滑同痕群到光滑有理同痕群。作为其在拓扑范畴中的对应物，我们也可以考虑映射

$$\psi^{\mathrm{top}}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{top}}\to\mathcal{C}^{\mathrm{top}}_{\mathbb{Q}}$$

从拓扑同痕群到拓扑有理同痕群定义。尽管我们知道存在子群 $\mathbb{Z}^\infty\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\infty$ in $\ker\psi$ and $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\infty$ in $\ker\ \psi^{\mathrm{top}}$ [Cha07, HKPS22], , 但 $\ker\psi^{\mathrm{top}}$ 中是否存在无限阶元素仍未可知。因此，我们提出如下问题：

问题 1.4。 $\ker\psi^{\mathrm{top}}$中是否存在一个无限阶元素?

最后，我们指出，八字结的正怀特黑德复合也是一个很好的候选对象，很可能在 $\ker\psi_{\mathcal{T}}$ 中具有无限阶。据作者所知，甚至尚不清楚这个结是否是 slice结。在此，我们提出：

问题 1.5。 由 $\mathrm{Wh}^+(E)$ 生成的子群是否与 $\ker\psi_{\mathcal{T}}$ 同构于 $\mathbb{Z}$? 更具体地说，$\mathrm{Wh}^+(E)$ 是 slice结吗?

1.1. **证明概要**。 为方便读者，我们在此简要概述证明策略。证明依赖于带边界的结 Floer 同调和对合结 Floer 同调，并运用了若干技巧和方法，尽可能简化计算。

(1) 在 ι_K-局部等价意义下，我们可以用 $T\#E$ 替换 $\mathrm{Wh}^+(T)$（引理 4.3）。(2) 存
在一个（非对合的）包含映射

$$i_T:\widehat{CFD}(S^3-T)\to\widehat{CFD}(S^3-(T\#E)).$$

使用 Zhan 的带边 Floer 同调计算器 [Zha], , 我们确定某些 D 型态射是零伦的（引理 4.1 和 4.2），从而得出 i_T 诱导出一个几乎 ι_K-局部映射，将（$2n+1,\ -1$）-缆结 T 的几乎 ι_K-复形映射到 $T\#E$ 的几乎 ι_K-复形（等价地，也就是 $\mathrm{Wh}^+(T)$ 的几乎 ι_K-复形，如方程 4.1 所示）。

（3）我们将（2）中的结果与 [KP22] 的结果结合起来，根据水平几乎 ι_K-局部等价群上的偏序（见第 2 节），比较我们的纽结 K_n 与某些标准复形 C_n。利用 C_n 与偏序相互作用方式的性质，我们得到了所需的线性无关结论。

致谢。作者感谢 Gary Guth 在使用 Zhan 的带边 Floer 同调计算器方面提供的帮助。JH 获得了美国国家科学基金会 DMS-2104144 项目资助和 Simons Fellowship 的部分支持。SK 获得了基础科学研究院（IBS-R003-D1）的资助。JP 获得了三星科学技术基金会（SSTF-BA2102-02）和 POSCO TJ Park 科学奖学金的部分支持。

2. 水平几乎 ι_K-局部等价群

我们假设读者熟悉对合结 Floer 同调 [HM17]以及 ι_K-局部等价群 [HMZ18]。关于这些概念的介绍性综述，请参见 [HKPS22，第 2] 节。本文聚焦于水平几乎 ι_K-局部等价群，其优势在于，模去八字结的像之后，该群具有全序结构。以下简要概述 [KP22，第2]节的内容。

一个水平近乎 ι_K-复形 是一个有序对 (C,ι)，其中 C 是由有限生成自由模$\widehat{\quad}\quad\widehat{\quad}\quad\widehat{\quad}$构成的双分次复形，定义在 $\mathbb{F}_2[U]$ 上，并且 $\iota\colon C\to C$是一个链同伦等价；其中 C是 C的帽型截断，且满足以下条件。

- 形式变量 U 的双重分次为 $(-2,\ 0)$。
- $U^{-1}C\simeq\mathbb{F}_2[U,U^{-1}]$
- ι 是斜分次的，即将一个（$a,\ b$）双分次元素映射为一个（$b,\ a$）双分次元素。
- $\Phi\iota\Phi\iota\sim\iota\Phi\iota\Phi$.
- $\iota^2\sim 1+\Phi\iota\Phi\iota$.
- 存在一个链映射 $f\colon\ C\to C$，其帽型截断与 $\iota\Phi$ 同伦 ι.

这里，Φ 表示 C 的微分关于形式变量 U的形式导数，这是一个定义到同伦意义下唯一的链映射。

一个保次数链映射 $f\colon C\to D$，介于水平几乎 ι_K-复形 $(C,\ \iota_C)$ 和 $(D,\ \iota_D)$ 之间，若满足以下条件，则为几乎 ι_K-局部映射。

- f是局部的，即局部化映射 $U^{-1}f\colon U^{-1}C\to U^{-1}D$是同伦等价。$\widehat{\quad}\quad\widehat{\quad}\quad\widehat{\quad}$
- $\iota_C f\sim f\iota_D$，其中 f是 f 的帽型截断。

此外，若存在几乎 ι_K-局部映射 $f\colon C\to D$ 和 $g\colon D\to C$，则称 $(C,\ \iota_C)$ 和 $(D,\ \iota_D)$ 是 几乎 ι_K-局部等价。

我们将水平几乎 ι_K-复形的几乎 ι_K-局部等价类记为 $\mathfrak{I}_K^U$。我们在该集合上定义张量积运算 $\otimes$，如下所示：$(C,\ \iota_C)\otimes(D,\ \iota_D)=(C\otimes D,\ \iota_{C\otimes D})$，其中 $\iota_{C\otimes D}$定义为$\iota_{C\otimes D}=\iota_C\otimes\iota_D+\Phi\iota_C\otimes\iota_D\Phi$。尽管此运算不对称，群 $\mathfrak{I}_K^U$确实是阿贝尔群 [KP22，命题 2.6]。

对合结 Floer 同调数据为一个结 K 关联一个良定义的 $\mathfrak{I}_K^U$中的元素，该元素由链复形 $CFK^-(S^3,\ K)$以及 $\widehat{CFK}(S^3,\ K)$上的 ι_K-作用共同给出。为简便起见，我们将此元素记为 $[K]$。显然，这定义了一个群同态

$$\mathcal{C}\to\mathfrak{I}_K^U,$$

whe其中 $\mathcal{C}$ 是光滑同痕群。平凡结的像记为 $0\in\mathfrak{I}_K^U$.

注意到，几乎 ι_K-局部映射的存在性在 $\mathfrak{I}_K^U$ 上给出了一个偏序。特别地，我们称$C\ \le\ D$ ，如果存在一个几乎 ι_K-局部映射 $C\to D$。事实证明，这实际上是一个全序$\mathfrak{I}_K^U$，模去八字结复形 $[E]$，即由八字结的对合结 Floer 同调诱导的 2-挠元 E。换言之，两个元素 $C,D\in\mathfrak{I}_K^U$ 不可比较，当且仅当 $C=D+[E]$ [KP22，定理 2.11]。我们将利用这一排序来证明主定理。

3. 对合边界 Floer 同调中的引理

我们假设读者熟悉带边界Heegaard Floer 同调中的标准资料，特别是 [LOT18] 中的资料。

为简单起见，从现在起，我们将带 ∞-框的实心环面作为边界流形记为 T_∞。给定一个图案 $P \subset T_\infty$，我们可以定义负型 A 类模 $CFA^-(T_\infty, P)$，它是系数环为 $\mathbb{F}_2[U]$、定义在环面代数 $\mathcal{A}(T^2)$ 上的 A 类结构。我们将其截断记为 $U=0$ as $CFA(T_\infty, P)$。此外，我们还可以从 T_∞ 中移除 P 的一个管状邻域，并在新形成的环面边界上赋予 0-框；这定义了一个具有两个环面边界的边界流形 $\widehat{\ }$，其 DA 类边界 Floer 同调记为 $CFDA(T_\infty - P)$。注意，我们有

$$\widehat{CFD}(S^3 - P(K)) \simeq \widehat{CFDA}(T_\infty - P) \boxtimes \widehat{CFD}(S^3 - K)$$

通过标准的粘合公式。

我们将 T_∞ 内的纵向结记为 ν。特别地，我们有如下粘合公式 [LOT18，定理 11。29]:

$$CFK^-(S^3, K) \simeq CFA^-(T_\infty, \nu) \boxtimes \widehat{CFD}(S^3 - K),$$

其中 CFK^- 表示由 $V=0$ 对 $CFK_{UV}(S^3, K)$ 进行截断所得的部分。注意，我们也可以应用粘合公式得到如下同一性

$$CFA^-(T_\infty, P) \simeq CFA^-(T_\infty, \nu) \boxtimes \widehat{CFDA}(T_\infty - P).$$

给定一个带有一个环面边界的边界流形 M，其 D 类边界对合具有如下形式

$$\iota_M : \widehat{CFDA}(\mathbf{AZ}) \boxtimes \widehat{CFD}(M) \to \widehat{CFD}(M),$$

其中 $\mathbf{AZ}$ 表示 Auroux-Zarev 片，其定义见 [LOT11，第 4] 节。尽管由于带边界 Floer 同调缺乏自然性，ι_M 在同伦意义下并未良好定义，但它仍是一个同伦等价；而且无论如何，我们并不需要它的唯一性。我们将 M 的所有可能的 D 类边界对合的同伦类集合记为 $\mathbf{Inv}_D(M)$。

下面的引理可由 [KP22，定理 4.5] 的证明推出。其证明可直接由 [Kan22，定理 1.2],证明之前的讨论得到，因此为简洁起见，我们略去证明。

引理 3.1. 给定两个结 K_1, K_2，设 $f\colon \widehat{CFD}(S^3 - K_1) \to \widehat{CFD}(S^3 - K_2)$ 是一个 D 型态射。给定一个图案 $P \subset T_\infty$，考虑诱导的 D 型态射 $P(f)\colon \widehat{CFD}(S^3 - P(K_1)) \to \widehat{CFD}(S^3 - P(K_2))$，其定义如下

$$\begin{aligned}\widehat{CFD}(S^3 - P(K_1)) &\simeq \widehat{CFDA}(T_\infty - P) \boxtimes \widehat{CFD}(S^3 - K_1) \\ &\xrightarrow{\mathrm{id}_{\widehat{CFDA}(T_\infty - P)} \boxtimes f} \widehat{CFDA}(T_\infty - P) \boxtimes \widehat{CFD}(S^3 - K_2) \simeq \widehat{CFD}(S^3 - P(K_2)).\end{aligned}$$

于是我们有

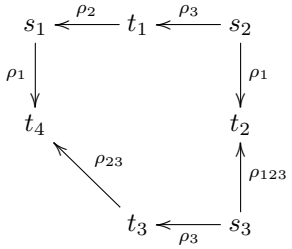
$$\iota_{S^3 - P(K_2)} \circ \left(\mathrm{id}_{\widehat{CFDA}(\mathbf{AZ})} \boxtimes P(f)\right) \circ \iota^{-1}_{S^3 - P(K_1)} \sim P\left(\iota_{S^3 - K_2} \circ \left(\mathrm{id}_{\widehat{CFDA}(\mathbf{AZ})} \boxtimes f\right) \circ \iota^{-1}_{S^3 - K_1}\right)$$

对于每个 $i \in \{1, 2\}$，适当选取边界对合 $\iota_{S^3 - P(K_i)} \in \mathbf{Inv}_D(S^3 - P(K_i))$ 和 $\iota_{S^3 - K_i} \in \mathbf{Inv}_D(S^3 - K_i)$ 即可。

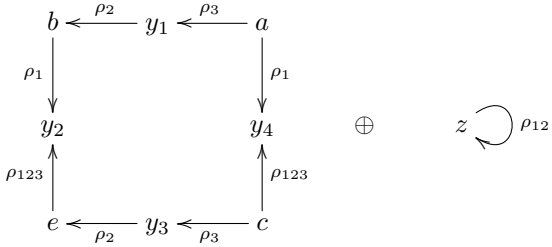
4. 主定理的证明

我们先给出带边界 Floer 同调模的一些显式计算。对于 S^3 中任意一个结 K，都可以由纽结 Floer 链复形 $CFK_{UV}(S^3, K)$ 轻松计算出其 D 型模 $\widehat{CFD}(S^3 - K)$。例如，对于右手三叶结 T，其 0-框架补空间的 D 型模 $\widehat{CFD}(S^3 - T)$

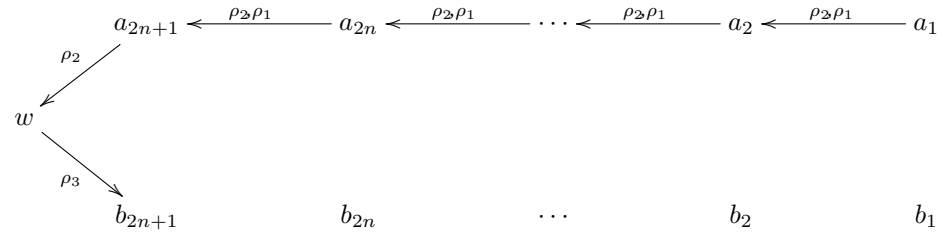
T 的 0-框架补空间可描述如下：



类似地，对于下图所示的八字结的 0-框架补空间，我们也可以描述 $\widehat{CFD}(S^3 - E)$。我们将其由 $a, b, c, e, y_1, y_2, y_3, y_4$ 生成的直和项称为方形模，并将其记为 S。



我们还需要下图所示的 ∞-框架实心环面 T_∞ 中（$2n+1, -1$）-缆结模式的（帽版本）A 型模 $CFA(T_\infty, P_{2n+1,-1})$。注意，$CFA^-(T_\infty, P_{2n+1,-1})$ 最初是在 [OSS17，第 8.3] 引理中计算的；我们只需取 $U = 0$，便截取了他们的计算结果。



根据这些计算，我们现在将证明两个计算引理，它们在定理 1.1 的证明中起着关键作用。

引理 4.1。 任意从 $\widehat{CFD}(S^3 - T)$ 到平方直和项 S 的 D 型态射，在与任意正整数 n对应的 $CFA(T_\infty, P_{2n+1,-1})$ 的恒等态射进行盒张量后，均为零伦。

证明。 Zhan 的带边 Floer 同调计算器 [Zha] 告诉我们，D 型态射从 $\widehat{CFD}(S^3 - T)$ 到 S 的同伦类空间 $H_*\text{Mor}(\widehat{CFD}(S^3 - T), S)$ 是六维的，在 $\mathbb{F}_2$ 上由以下元素生成：$f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$。这些元素定义如下。

$$
\begin{aligned}
&f_1 : s_2 \mapsto e,\ t_2 \mapsto \rho_{23} y_2,\\
&f_2 : s_1 \mapsto e,\ s_2 \mapsto c,\ t_2 \mapsto \rho_{23} y_4,\ t_4 \mapsto \rho_{23} y_2,\\
&f_3 : s_2 \mapsto b,\ s_3 \mapsto e,\ t_2 \mapsto \rho_{23} y_2,\\
&g_1 : s_3 \mapsto \rho_3 y_1,\\
&g_2 : s_3 \mapsto \rho_3 y_3,\\
&g_3 : s_1 \mapsto \rho_1 y_4.
\end{aligned}
$$

因此，为了证明该引理，我们只需证明，这六个态射与$\mathrm{id}_{\widehat{CFA}(T_\infty, P_{2n+1,-1})}$作盒式张量后变为零伦。为简便起见，我们采用以下约定：链复形 Cover $\mathbb{F}_2$ 具有一个无环直和项（∂：$a \to b$），如果 a 和 b 生成 C 和 $\partial a = b$的一个直和项。

我们从映射 f_1 开始。 $w\otimes s_2$ 和 $a_{2n+1}\otimes t_2$ 是唯一的简单张量（由基元素构成），在其上id$_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes f_1$ 取非平凡值。特别地，我们有

$$\left(\mathrm{id}_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes f_1\right)(w\otimes s_2)=w\otimes e \quad \text{and} \quad \left(\mathrm{id}_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes f_1\right)(a_{2n+1}\otimes t_2)=b_{2n+1}\otimes y_2.$$

然而， $w\otimes s_2$ 包含在无环直和项（∂: $w\otimes s_2\to b_{2n+1}\otimes t_1$）中，而 $b_{2n+1}\otimes y_2$ 包含在无环直和项（∂: $a_{2n}\otimes y_3\to b_{2n+1}\otimes y_2$）中。因此，id$_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes f_1$ 是零伦的。

对于 f_2，映射id$_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes f_2$ 仅在 $w\otimes s_1$、 $a_{2n+1}\otimes t_1$（二者都映射到 $w\otimes e$）以及 $w\otimes s_2$上取非零值。但是， $w\otimes e$和 $w\otimes s_2$分别包含在无环直和项（∂: $a_{2n+1}\otimes y_3\to w\otimes e$）和（$\partial$: $w\otimes s_2\to b_{2n+1}\otimes t_1$）中。因此，id$_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes f_2$ 是零伦的。

类似地，映射 id$_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes f_3$ 在 $w\otimes s_2$和 $w\otimes s_3$上取非平凡值，而它们包含在无环直和项（∂: $w\otimes s_2\to b_{2n+1}\otimes t_1$）和（$\partial$: $w\otimes s_3\to b_{2n+1}\otimes t_3$）中。因此，id$_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes f_3$也是零伦的。

对于映射 g_1 和 g_2，唯一使id$_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes g_i$ 在 $i=1,2$ 时取非平凡值的简单张量是 $w\otimes s_3$；在该张量上，id$_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes g_i$ 在 $i=1$ 时取值 $b_{2n+1}\otimes y_1$，在 $i=2$ 时取值 $b_{2n+1}\otimes y_3$。但前者包含于无环直和项（∂: $w\otimes a\to b_{2n+1}\otimes y_1$）中，而后者包含于无环直和项（$\partial$: $w\otimes c\to b_{2n+1}\otimes y_3$）中。因此，id$_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes g_i$ 在 $i=1,2$ 时是零伦的。

仍需证明id$_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes g_3$是零伦的。其非平凡值的完整列表如下:

$$a_1\otimes t_1\mapsto a_2\otimes y_4,\cdots,a_{2n}\otimes t_1\mapsto a_{2n+1}\otimes y_4.$$

但对每个 $i\in\{1,\cdots,2n\}$，我们都有 $a_i\otimes t_1$包含在无环直和项 (∂: $a_i\otimes t_1\to a_{i+1}\otimes t_4$) 中，因此 id$_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes g_3$ 也零伦。□

回忆一下，带边界HeegaardFloer 同调带有由非阿贝尔群给出的分次；给定一个带边界3-流形 Y，其边界为 $\mathcal{Z}$，相应的 D型模 $CFD(Y)$ 按一个传递的 $G(\mathcal{Z})$-集合分次。因此，关于 $CFD(Y)$的保次数自同态的概念是定义良好的。关于带边界 Floer 同调中分次的详细描述，参见 [LOT18, 第 10]章。

引理 4.2. 设 f是 $\widehat{CFD}(S^3-T)$的保次数自同态。那么 f要么是零伦的，要么与恒等态射同伦。

证明. 利用 Zhan 的带边 Floer 同调计算器可以证明，空间 $H_*\mathrm{End}(\widehat{CFD}(S^3-T))$ 是六维的，由恒等态射以及下文描述的态射 $h_1,\cdots,h_5$生成。

$$\begin{aligned}
&h_1: s_1\mapsto \rho_3t_4,\ s_2\mapsto s_3,\ t_1\mapsto t_3,\ t_2\mapsto \rho_{23}t_2,\\
&h_2: s_2\mapsto s_1,\ s_3\mapsto \rho_1t_3,\ t_2\mapsto \rho_{23}t_4,\\
&h_3: s_1\mapsto \rho_1t_2,\\
&h_4: s_2\mapsto \rho_1t_2,\\
&h_5: s_3\mapsto \rho_3t_1.
\end{aligned}$$

很容易看出， $h_1,\cdots,h_5$都不保次数。因此， $\widehat{CFD}(S^3-T)$ 的保次数 D 型自同态空间是一维的，由恒等态射生成。□

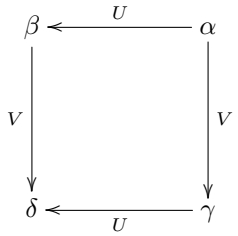
我们还需要一个关于 $\mathrm{Wh}^+(T)$ 的对合结 Floer 同调的 ι_K-局部等价类的引理，为简便起见，我们将其记为 D 。

引理 4.3。 ι_K复形 D 与扭结 5_2,的结 *Floer* 复形在 ι_K局部等价，或等价地， $T\#E$。

证明。 由 [HKL16，引理 A.1]的证明可知

$$CFK_{UV}(S^3,D)\simeq CFK_{UV}(S^3,T)\oplus A^{\oplus 3},$$

其中 A 是一个单位方框直和项，如下所示。



我们沿用 [HM17 命题 8.1], 的证明思路，不过要注意，本例中的结并非薄结。特别是，该证明在链同伦意义下唯一确定了 ι_K，模去 $(U,\ V)$。我们将其总结在下表中。注意，我们有三份 A；对于$i=0,\ 1,\ 2$，我们将它们的生成元分别记为 $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \delta_i$。

	∂	gr_U	gr_V	A	ι_K 模去 $(U,\ V)$
ρ	0	0	-2	1	τ
σ	$U\rho+V\tau$	-1	-1	0	$\sigma+\delta_0$
τ	0	-2	0	-1	ρ
α_0	$U\beta_0+V\gamma_0$	-1	-1	0	$\alpha_0+\sigma$
β_0	$V\delta_0$	0	-2	1	$\gamma_0+\tau$
γ_0	$U\delta_0$	-2	0	-1	$\beta_0+\rho$
δ_0	0	-1	-1	0	δ_0
α_1	$U\beta_i+V\gamma_1$	-2	-2	0	α_2
β_1	$V\delta_1$	-1	-3	1	γ_2
γ_1	$U\delta_1$	-3	-1	-1	β_2
δ_1	0	-2	-2	0	δ_2
α_2	$U\beta_i+V\gamma_2$	-2	-2	0	$\alpha_1+\delta_1$
β_2	$V\delta_2$	-1	-3	1	γ_1
γ_2	$U\delta_2$	-3	-1	-1	β_1
δ_2	0	-2	-2	0	δ_1

我们还需考虑 ι_K 可能包含 U 或 V 的倍数项。由于双次数的原因，这类项只可能在 ι_K 取值为 $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \delta_i$ 时出现，其中 $i=1,\ 2$。由于 $\partial\alpha_1=U\beta_1+V\gamma_1$，我们可以对 ι_K 作同伦变形；这只会改变 ι_K 在 $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$ 处的取值，从而消去 $\iota_K(\alpha_1)$ 中系数含有非平凡 U 或 V 指数的所有项。然后，由于 $\partial\beta_1=V\delta_1$，我们可以进一步对 ι_K 作同伦变形；这只会改变 ι_K 在 $\beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1$ 处的取值，从而消去 $\iota_K(\beta_1)$ 中涉及非平凡 U 指数的所有项。因此，我们可以假设

$$\iota_K(\alpha_1)=\alpha_2 \quad \text{and} \quad \iota_K(\beta_1)=\gamma_2+Vc$$

对于某个元素 c。但此时 c 应位于双次数 $(-3,\ 1)$，而给定的复形中不存在这样的元素，因此我们应有

$$\iota_K(\beta_1)=\gamma_2.$$

于是可得

$$V\gamma_2+U\iota_K(\gamma_1)=\iota_K(\partial\alpha_1)=\partial\iota_K(\alpha_1)=U\beta_2+V\gamma_2$$

即 $\iota_K(\gamma_1)=\beta_2$，然后我们由此推得

$$U\iota_K(\delta_1)=\iota_K(\partial\beta_1)=\partial\iota_K(\beta_1)=U\delta_2$$

使得 $\iota_K(\delta_1)=\delta_2$。因此，总结而言，我们已将 ι_K 同伦到由$\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1\}$ 生成的平方直和项中，使其作用为

$$\alpha_1\mapsto\alpha_2,\quad \beta_1\mapsto\gamma_2,\quad \gamma_1\mapsto\beta_2,\quad \delta_1\mapsto\delta_2.$$

同样，我们也可 o 将 ι_K 在由 $\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\delta_2\}$ 生成的平方直和项中进行同伦变形，使其作用为

$$\alpha_2\mapsto\alpha_1+\delta_1,\quad \beta_2\mapsto\gamma_1,\quad \gamma_2\mapsto\beta_1,\quad \delta_2\mapsto\delta_1.$$

但随后， ι_K的作用分解为它在由 $\rho,\sigma,\tau,\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\delta_0$生成的直和项上的作用，以及在由 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i,\ i=1,2$ 生成的直和项上的作用。由于后一项在对$(U,V)^{-1}$局部化后是无圈的，我们看到给定的 ι_K-复形与其由$\rho,\sigma,\tau,$ $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\delta_0$生成的直和项 ι_K-局部等价。然而， [HM17，命题 8.1] 表明，这一直和项与 $T\#E$的对合结 Floer 复形 ι_K-局部等价。引理得证。□

现在我们可以证明定理 1.1；证明分为两部分。第一部分中，我们将证明这些纽结

$$\{K_n=(D\#E)_{2n+1,-1}\#-D_{2n+1,-1}\#-E_{2n+1,-1}\mid n>0\}$$

在光滑同痕群中具有无限阶。然后，在第二部分中，我们将证明无穷多个 K_n 构成光滑同痕群的一个线性无关族。

定理 *1.1* 的证明，第一部分。 由引理 4.3 和 [Kan22, 定理 1.2] 可得

$$[(D\#E)_{2n+1,-1}]=[(T\#E\#E)_{2n+1,-1}]=[T_{2n+1,-1}]\in\mathfrak{I}_K^U.$$

由于 $CFK_{UV}(S^3,\ D)$ 以 $CFK_{UV}(S^3,\ T)$ 为直和项，D 型模 $\widehat{CFD}(S^3-D)$ 也以$\widehat{CFD}(S^3-T)$ 为直和项；这里，所有结补都赋予 0-框。取包含映射

$$i_T\colon\widehat{CFD}(S^3-T)\to\widehat{CFD}(S^3-D).$$

通过与 D 型 DA 模 $CFDA(T_\infty-P_{2n+1,\ -1})$ 上的恒等态射进行盒张量积，我们得到一个 D 型态射

$$(i_T)_{2n+1,-1}\colon\widehat{CFD}(S^3-T_{2n+1,-1})\to\widehat{CFD}(S^3-D_{2n+1,-1}).$$

将此态射与 $CFA^-(T_\infty,\nu)$ 上的恒等态射进一步作盒张量，得到一个保持 (n_z,n_w)-双次数的链映射

$$\mathrm{Minus}\left((i_T)_{2n+1,-1}\right):CFK^-(S^3,T_{2n+1,-1})\to CFK^-(S^3,D_{2n+1,-1}),$$

其通过 $U=0$ 截断后由 Hat$((i_T)_{2n+1,\ -1})$ 给出。于是，由 [KP22 引理 3.1] 和引理 3.1 可知

$$\iota_{D_{2n+1,-1}}\circ\mathrm{Hat}\left((i_T)_{2n+1,-1}\right)\circ\iota_{T_{2n+1,-1}}^{-1}\sim\mathrm{id}_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes\left(\iota_{S^3-D}\circ\left(\mathrm{id}_{\widehat{CFDA}(\mathbf{AZ})}\boxtimes i_T\right)\circ\iota_{S^3-T}^{-1}\right)$$

对于某些边界对合 $\iota_{S^3-D}\in\mathbf{Inv}_D(S^3-D)$ 和 $\iota_{S^3-T}\simeq\mathbf{Inv}_D(S^3-T)$，因为我们有

$$\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})\simeq\widehat{CFA}(T_\infty,\nu)\boxtimes\widehat{CFDA}(T_\infty-P_{2n+1,-1}).$$

因此，如果我们考虑 D 型态射

$$F=i_T+\iota_{S^3-D}\circ\left(\mathrm{id}_{\widehat{CFDA}(\mathbf{AZ})}\boxtimes i_T\right)\circ\iota_{S^3-T}^{-1},$$

于是我们得到

$$\mathrm{Hat}((i_T)_{2n+1,-1})+\iota_{D_{2n+1,-1}}\circ\mathrm{Hat}((i_T)_{2n+1,-1})\circ\iota_{T_{2n+1,-1}}^{-1}\sim\mathrm{id}_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes F.$$

断言： $\mathrm{id}_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes F$ **是零伦的**。假设该断言成立，我们立即得到

$$\mathrm{Hat}((i_T)_{2n+1,-1})\circ\iota_{T_{2n+1,-1}}\sim\iota_{D_{2n+1,-1}}\circ\mathrm{Hat}((i_T)_{2n+1,-1}).$$

为证明这一论断，我们回顾一下， $CFK_{UV}(S^3,D)\simeq CFK_{UV}(S^3,T)\oplus A^{\oplus 3}$；注意，这三个 A 加项位于不同的双分次中，但此处我们不必在意这个问题。根据 [LOT18，定理 11.26],这对应于分裂。

$$\widehat{CFD}(S^3-D)\simeq\widehat{CFD}(S^3-T)\oplus S^{\oplus 3},$$

其中， $\widehat{CFD}(S^3-T)$ 直和项的包含映射是映射 i_T。任取三个S直和项中的一个，并取其投影映射

$$\mathrm{pr}_S:\widehat{CFD}(S^3-D)\to S.$$

因此由引理 4.1 可知，$\mathrm{id}_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes(\mathrm{pr}_S\circ F)$ 是零伦的。

还需证明 $\mathrm{id}_{\widehat{CFA}(T_\infty,P_{2n+1,-1})}\boxtimes(\mathrm{pr}_T\circ F)$ 是零伦，其中 pr_T 表示到三叶结直和项的投影映射，即

$$\mathrm{pr}_T:\widehat{CFD}(S^3-D)\to\widehat{CFD}(S^3-T).$$

实际上，我们将证明一个更强的断言，即 $\mathrm{pr}_T\circ F$ 是零伦的。为此，我们从 F 保持次数这一事实出发，这意味着$\mathrm{pr}_T\circ F$ 是$\widehat{CFD}(S^3-T)$的保持次数的D型自同态。由引理 4.2可知，$\mathrm{pr}_T\circ F$要么是零伦的，要么同伦于恒等态射。然而，如果它同伦于恒等态射，那么我们应当有

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{\widehat{CFK}(S^3,T)}&=\mathrm{id}_{\widehat{CFA}(T_\infty,\nu)}\boxtimes(\mathrm{pr}_T\circ F)\\&\sim\mathrm{pr}_{\widehat{CFK}(S^3,T)}\circ\left(\mathrm{id}_{\widehat{CFA}(T_\infty,\nu)}\boxtimes F\right)\\&\sim\mathrm{pr}_{\widehat{CFK}(S^3,T)}\circ\left(\mathrm{Hat}((i_T)_{2n+1,-1})+\iota_{D_{2n+1,-1}}\circ\mathrm{Hat}\left((i_T)_{2n+1,-1}\right)\circ\iota^{-1}_{T_{2n+1,-1}}\right),\end{aligned}$$

其中，$\mathrm{pr}_{\widehat{CFK}(S^3,T)}$表示从 $\widehat{CFK}(S^3,D)$ 到其直和项 $\widehat{CFK}(S^3,T)$ 的投影映射。然而，上述等式的右端是 $CFK_{UV}(S^3,T)$ 的一个链自同态经过 $U=V=0$ 截断后的结果，该链自同态在由$(U,V)^{-1}$ 局部化后变为零伦。这是不可能的，因为 $\widehat{CFK}(S^3,T)$的恒等映射显然不满足这一性质。因此，$\mathrm{pr}_T\circ F$ 应为零伦，结论得证。

既然我们已经

$$\mathrm{Hat}((i_T)_{2n+1,-1})\circ\iota_{T_{2n+1,-1}}\sim\iota_{D_{2n+1,-1}}\circ\mathrm{Hat}((i_T)_{2n+1,-1}),$$

由此可知，根据 [KP22，引理 3.3], , Minus$((i_T)_{2n+1,-1})$ 是一个几乎 ι_K-局部映射；也就是说，我们有一个不等式

$$[T_{2n+1,-1}]\le[D_{2n+1,-1}]. \tag{4.1}$$

由于 $[(D\#E)_{2\ n+1,-1}]=[T_{2n+1,-1}]\in\mathfrak{I}^U_K$ 和 $K_n=(D\#E)_{2n+1,-1}\#-D_{2n+1,-1}\#-E_{2n+1,-1}$，我们 g et

$$[K_n]=[T_{2n+1,-1}]-[D_{2n+1,-1}]-[E_{2n+1,-1}]\le-[E_{2n+1,-1}].$$

此外，在 [KP22，定理 4.5] 的证明中表明，$0<[E_{2n+1,-1}]$ 和 $[E_{2n+1,-1}]$ 在 $\mathfrak{I}^U_K$中具有无限阶。因此，我们推得

$$[K_n]\le-[E_{2n+1,-1}]<0,$$

和 $[K_n]$ 有 i 在 $\mathfrak{I}^U_K$ 中具有无限阶。因此，K_n 在光滑同痕群中具有无限阶。 □

为了证明定理 1.1 的线性无关部分，我们回顾关于 $\mathfrak{I}^U_K$ 的更多事实，这些事实来自 [KP22]。回顾 [KP22 第 4] 节，对于每个 $n\ge2$，水平几乎 ι_K-复形 C_n 由以下元素生成：a_n、b_n、c_n、d_n、x_n，其中 a_n 和 x_n 的双次数均为 (0、0)。微分定义为

$$\partial a_n=U^nb_n,\ \partial c_n=U^nd_n,\ \partial b_n=\partial d_n=\partial x_n=0$$

$\widehat{\ }$ 及其帽型截断 C_n 上的对合定义为

$$\iota_{C_n}(a_n)=a_n+x_n,\ \iota_{C_n}(b_n)=c_n,\ \iota_{C_n}\text{ fixes }d_n,x_n.$$

这些复形在 $\mathfrak{I}^U_K$ 中满足以下不等式（详细讨论见 [KP22 引理 4.6 和定理 4.7] 的证明）。首先，对于任意 $n\ge2$，我们有

$$0<[C_n]\quad\text{and}\quad M\cdot[C_n]<[C_{n+1}]\quad\text{for any integer }M. \tag{4.2}$$

此外，对于任意 $n\ge2$，我们有

$$[C_n]\le[E_{2n+1,-1}]. \tag{4.3}$$

最后，如果一个结 J 满足 $CFK_{UV}(S^3、J)\simeq\mathbb{F}_2[U,V]\oplus A$，对于某个无环直和项 A（每个结 K_n 都属于这种情形），那么存在一个正整数 $N\ge2$ 使得

$$M\cdot[J]<[C_N]\quad\text{for any integer }M. \tag{4.4}$$

现在，我们准备证明主定理的第二部分。

定理 *1.1* 第二部分的证明。由定理 1.1 证明的第一部分和 (4.3) 可知，对于每个 $n \geq 2$，我们有

$$[K_n] \leq -[E_{2n+1,-1}] \leq -[C_n].$$

此外，根据 (4.4)，对于每个正整数 n，存在一个正整数 $N(n)$，使得

$$-[C_{N(n)}] < M \cdot [K_n] \quad \text{for any intger } M.$$

因此，若我们选取一个递增的整数序列 $\{s_n\}$，使得对于每个 $n \geq 1$，都有 $s_1 = 2$ 和 $s_{n+1} \geq N(s_n)$，那么结合上述两个不等式与 (4.2)，可得

$$[K_{s_{n+1}}] \leq -[C_{s_{n+1}}] \leq -[C_{N(s_n)}] < M \cdot [K_{s_n}] \quad \text{for any intger } M.$$

假设纽结 K_{s_n} 在光滑同痕群中线性相关。那么存在一个有限的非零整数序列 $D_1, D_2, \ldots, D_n$，使得

$$D_1 \cdot [K_{s_1}] + D_2 \cdot [K_{s_2}] + \cdots + D_n \cdot [K_{s_n}] = 0.$$

不失一般性，我们可以假设 $D_n > 0$。那么有

$$\begin{aligned} 0 &= D_1 \cdot [K_{s_1}] + D_2 \cdot [K_{s_2}] + \cdots + D_n \cdot [K_{s_n}] \\ &< (D_2 - 1) \cdot [K_{s_2}] + D_3 \cdot [K_{s_3}] + \cdots + D_n \cdot [K_{s_n}] \\ &< (D_3 - 1) \cdot [K_{s_3}] + D_4 \cdot [K_{s_4}] + \cdots + D_n \cdot [K_{s_n}] \\ &< \cdots < (D_n - 1) \cdot [K_{s_n}] \leq 0, \end{aligned}$$

这就产生了矛盾。因此，纽结 K_{s_n} 线性无关，正如所需。 □

注 4.4. 应用 HKPS22 引理 3 的证明中所用的论证可知，我们可以取 $N(n)$ 为 $2n+2$。通过对 K_n 的 ι_K 进行更明确的计算，我们预计 $N(n)$ 可以取小得多的值。

注 4.5. 定理 1.1 证明第二部分中所用的论证可概括如下；请注意，同样的论证也用于 [KP22]。设 $\{K_n\}$ 是一个有理切片纽结序列，且对于任意 $i \geq 2$，都存在一个正整数 n_i，使得 $[K_{n_i}] \geq [C_i]$ 属于 $\mathfrak{I}_K^U$。那么 $\{K_n\}$ 在 $\mathcal{C}$ 中有一个线性无关的无限子序列。

参考文献

[Cha07] Jae Choon Cha, 《纽结有理同痕群的结构》, Mem. 美国数学会 189 (2007), no. 885, x+95. MR 2343079[Cha21] , 《拓扑切片纽结的光滑同痕群的主分解》, Forum Math. Sigma 9 (2021 57, 37 4299596), Paper No. e . MR CHH Tim D. Cochran、Shelly Harvey 和 Peter Horn, [13] 《拓扑切片纽结的光滑同痕类过滤》, Geom. Topol. **17** 2013 4, 2103 2162 3109864 ( ), no. – . [21] MR CK Jae Choon Cha 和 Min Hoon Kim, 《拓扑切片纽结的双极过滤》, Adv. Math. 388 (2021), Paper No. 107868, 32. MR 4283760[DHST21] Irving Dai、Jennifer Hom、Matthew Stoffregen 和 Linh Truong, 《来自纽结 Floer 同调的更多同痕同态》, Geom. Topol. **25** 2021 1, 275 338 4226231 ( ), no. – . MR End Hisaaki Endo, [95] 《拓扑切片纽结在光滑协边群中的线性无关性》, Topology Appl. 63 (1995 3, 257 262 1334309), no. – . [19] MR FPR Peter Feller、JungHwan Park 和 Arunima Ray, 《关于 Upsilon 不变量与卫星纽结》, Math. Z. 292 (2019), no. 3 4, 1431 1452 3980298 - – . MR Fre Michael H. Freedman, 《四维流形的拓扑》, J. Differential [82] Geometry 17 (1982), no. 3, 357– 453. MR 679066[FS84] Ronald Fintushel 和 Ronald J. Stern, 一个边界为可定向有理球的 μ-不变量非零的同调三球面, 《四流形理论》（新罕布什尔州达勒姆，1982）, Contemp. Math., vol. 35, 美国数学会，罗德岛州普罗维登斯, 1984, pp. 265–268. MR 780582[HK12] Matthew Hedden 和 Paul Kirk, 《瞬子、同痕与怀特海德倍增》, J. Differential Geom. 91 (2012), no. 2, 281–319. MR 2971290[HKL16] Matthew Hedden、Se-Goo Kim 和 Charles Livingston, 《光滑同痕阶为二的拓扑切片结》, J. Differential Geom. 102 (2016), no. 3, 353–393. MR 3466802[HKPS22] Jennifer Hom、Sungkyung Kang、JungHwan Park 和 Matthew Stoffregen, 《有理切片纽结的线性无关性》, Geom. Topol. 26 (2022), no. 7, 3143–3172. MR 4540903

[HM17] Kristen Hendricks 和 Ciprian Manolescu, 《对合 Heegaard Floer 同调》, Duke Math. J. 166 7, 1211 2017 1299 3649355 ( ), no. – . MR[HMZ18] Kristen Hendricks、Ciprian Manolescu 和 Ian Zemke, 《对合 Heegaard Floer 同调的连通和公式》, Selecta Math. (N.S.) **24** 2018 2, 1183 1245 3782421 ( ), no. – . MR [15] Hom Jennifer Hom, 《拓扑切片纽结的一个无穷秩直和项》, Geom. Topol. 19 (2015), no. 2, 1063–1110. MR 3336278[HPC21] Matthew Hedden 和 Juanita Pinzón-Caicedo, 《光滑同痕群中的无穷秩卫星结》, Invent. Math. **225** 2021 1, 131 157 4270665 ( ), no. – . MR Kan Sungkyung Kang, 《对合结 Floer 同调与带边界模》, [22] arXiv 预印本 arXiv:2202.12500 (2022)。[KKK22] Min Hoon Kim、Se-Goo Kim 和 Taehee Kim, 《单极拓扑切片纽结与主分解》, Int. Math. Res. Not. IMRN (2022 11, 8314 8346 4425839), no. – . MR KP Min [18] Hoon Kim 和 Kyungbae Park, 《Alexander 多项式平凡的纽结的一个无穷秩直和项》, J. Symplectic Geom. 16 (2018), no. 6, 1749–1771. MR 3934241[KP22] Sungkyung Kang 和 JungHwan Park, 《纽结同痕群中的扭转与缆结》, arXiv 预印本 arXiv:2207.11870 (2022)。[Lev69] Jerome Levine, 《余维二结的协边群》, Comment. Math. Helv. 44 (1969), 229–244. MR 246314[LOT11] Robert Lipshitz、Peter Ozsváth 和 Dylan Thurston, 《作为态射空间的 Heegaard Floer 同调》, Quantum Topology 2 (2011), no. 4, 381–449. [LOT18] ,《带边界 Heegaard Floer 同调》, vol. 254, 美国数学会, 2018。[OSS17] Peter Ozsváth、András Stipsicz 和 Zoltán Szabó, 《来自纽结 Floer 同调的同痕同态》, Adv. Math. **315** 2017 366 426 3667589 ( ), – . MR Zha Bohua Zhan, bfh_python, https://github.co [ ] m/bzhan/bfh_python。

佐治亚理工学院数学学院电子邮箱地址: hom@math.gatech.edu

基础科学研究院几何与物理中心电子邮箱地址: sungkyung38@icloud.com

韩国科学技术院数学科学系电子邮箱地址: jungpark0817@kaist.ac.kr