arXiv:2304.06289v1 [math-ph] 13 Apr 2023

二维泡利算子的阈值共振

JONATHAN BREUER 和 HYNEK KOVA˘R´IK

Abstract. 众所周知，由于自旋与磁场之间的相互作用，二维泡利算子在其本质谱的阈值处有一个特征值 0。我们证明，当它受到与一个小参数 ε 相耦合的有效正扰动 V 时，这些特征值会变成共振。此外，我们推导出在极限 $\varepsilon \searrow 0$ 下其虚部首项的显式表达式。特别是，这表明共振虚部对 ε 的依赖关系由磁场通量决定。我们分别讨论零特征值非简并和简并的情形。我们还讨论了主要结果在具有反常磁矩的粒子中的应用。

关键词：共振、自旋、阈值特征值、反常磁矩。

MSC 2020：35Q40, 35P05, 81Q10

1. 引言与主要结果概述

1.1. 基本设定。本文研究与自旋为1 2 的费米子相关的哈密顿量，这些费米子与垂直于粒子所受限平面的磁场相互作用。此类磁场可由函数 $B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 表示。若 $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是满足 $\operatorname{curl} A = B$ 的磁矢势，则相应的非相对论哈密顿量由 Pauli 算子给出

$$P(A) = \begin{pmatrix} P_-(A) & 0 \\ 0 & P_+(A) \end{pmatrix} \qquad \text{with} \quad P_\pm(A) := (i\nabla + A)^2 \pm B, \tag{1.1}$$

作用于 $L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ 上。对于满足温和正则性假设的B，该算子在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ 上本质自伴。算子 $P_+(A)$（$P_-(A)$），作用于 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上，表示 Pauli 算子在自旋向下（分别为自旋向上）子空间上的限制。更多内容请参阅 [21] 。

当 B 在无穷远处趋于零时（这在我们的假设下成立），则

$$\sigma\left(P(A)\right) = \sigma_{\mathrm{es}}(P(A)) = [0,\infty). \tag{1.2}$$

后者例如可由 [2, 定理 6.5]得到。此外，众所周知的阿哈罗诺夫-卡谢尔定理 [1, 5, 6, 16], 指出，如果 $B \in L^1(\mathbb{R}^2)$, 并且如果通量

$$\alpha := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} B(x)\,dx \tag{1.3}$$

满足 $|\alpha| > 1$，则零是 $P(A)$ 的一个特征值。更准确地说，当 $P_-(A)$ 时，零是 $\alpha > 1$ 的一个特征值；而当$P_+(A)$ 时，零是 $\alpha < -1$的一个特征值，详见第 2.5 节。该特征值的重数 N 由下式给出：

$$N = [\,|\alpha|\,] \quad \text{if} \quad \alpha \notin \mathbb{Z}, \qquad N = |\alpha| - 1 \quad \text{if} \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \tag{1.4}$$

其中， $[x]$ 表示 x的整数部分。

Now 设 V_1、$V_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为多项式衰减函数，且 $\varepsilon > 0$。我们记为

$$P_\varepsilon(A) = P(A) + \varepsilon\mathcal{V}, \qquad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}.$$

©2023年 作者所有。Fait 允许以任何方式完整复制本文，但仅限非商业用途 s.

受扰泡利算子。由于 $P_\varepsilon(A)$ 是一个对角矩阵算子，而且我们只关注其中一个元素，因此不失一般性地令

$$V_1 = V_2 = V.$$

如果微扰 V 为负，则 $P(A)$ 的阈值特征值会产生 $P_\varepsilon(A)$ 的离散负特征值。对于径向 $\varepsilon \searrow 0$，在极限 B 下，V 的这类特征值的渐近展开式已通过变分方法得到，见 [7], 另请参见 [3]。

本文探讨一个不同的问题。也就是说，当微扰 V 为正时，$P(A)$ 的零特征值会发生什么？显然，在这种情况下，$P_\varepsilon(A)$ 没有负特征值；而且在对 B 和 V 施加非常宽松的衰减与正则性条件时，它也不可能有正特征值，见 [9, 2]。因此，如果零不再是 $P_\varepsilon(A)$ 的特征值，那么自然会预期它转变为共振。然而，众所周知，对后者并没有唯一的定义。这里我们采用 [15], 的动力学方法，另见[8, 10, 20, 17, 18, 22], ；在这种方法中，共振表现为相关生存概率的（准）指数衰减。

更确切地说，我们将 $P_\varepsilon(A)$ 的一个共振理解为一对 $(\Psi, \lambda_\varepsilon)$，满足 $\|\Psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)} = 1$, $\lambda_\varepsilon = x_\varepsilon - i\gamma_\varepsilon$且有 $\gamma_\varepsilon > 0$，并且满足

$$\left\langle \Psi,\, e^{-itP_\varepsilon(A)}\,\Psi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)} = e^{-it\lambda_\varepsilon} + \delta(t,\varepsilon) \qquad \forall\, t > 0, \tag{1.5}$$

其中

$$\delta_\varepsilon := \sup_{t>0} |\delta(t,\varepsilon)| \to 0 \qquad \text{as} \qquad \varepsilon \searrow 0. \tag{1.6}$$

我们将 λ_ε 称为共振位置，将 Ψ 称为共振本征态。根据阿哈罗诺夫-卡谢尔定理，后者的自然候选者是

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{if} \quad \alpha > 0, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} \quad \text{if} \quad \alpha < 0, \tag{1.7}$$

其中 ψ 分别是 $P_-(A)$ 和 $P_+(A)$ 的零特征函数。注意，方程（1.5）若没有误差项 $\delta(t,\ \varepsilon)$ 则无法成立，因为生存概率仅当 t 既不太小也不太大时才会呈指数衰减，参见 [18,第 2]节。

1.2. 主要结果。 我们的目标是证明共振的存在，其意义如方程（1.5）所示，并推导出 λ_ε 在 $\varepsilon \searrow 0$时渐近展开的首项的显式表达式。我们的结果在定理 3.1、 3.10、 3.16、 4.3、 4.5和 4.6中作了精确描述。这里我们简要介绍这些结果。

在生命之中 由于一阶微扰理论的 w, λ_ε 的实部满足.....并不令人意外。

$$x_\varepsilon = \varepsilon \left\langle \Psi, \mathcal{V}\,\Psi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)} + o(\varepsilon),$$

其中，右侧的第一项根据假设为正。

一个重要得多的量是虚部 λ_ε，也称为宽度，γ_ε，因为它决定了生存概率 $|\langle \Psi$的衰减速率，$e^{-itP_\varepsilon(A)}\Psi\rangle|^2$，见方程 (1.5)，进而决定共振的平均寿命。

结果表明，γ_ε 对 ε 的依赖关系由通量（1.3）决定。为了更详细地描述其渐近行为，方便起见，记为

$$\mu = \min_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha - k| \in [0, 1/2\,] \tag{1.8}$$

α 和 $\mathbb{Z}$之间的距离。由于算子 $P_+(-A)$与 $P_-(A)$酉等价，我们可以假设av电影

$$\alpha > 0. \tag{1.9}$$

We 现在根据其值区分 γ_ε 的渐近行为的各种情形 α.

非退化阈值特征值。 如果零是 $P(A)$ 的单特征值，那么根据方程 (1.4)，我们必有 $\alpha \leq 2$。对于非整数磁通的情形，即 $1 < \alpha < 2$，我们的结果表明 $P_\varepsilon(A)$ 存在一个满足以下条件的共振

$$\gamma_\varepsilon = \Gamma_1 \varepsilon^\alpha \big(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^\mu)\big) + \Gamma_2 \varepsilon^{3-\alpha} \big(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^\mu)\big), \tag{1.10}$$

其中系数 $\Gamma_1 > 0$ 和 $\Gamma_2 \geq 0$ 在定理 3.1 中计算得到，特别参见方程 (3.20)。相应的误差项 (1.6) 满足 $\delta_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^\mu)$。尽管一般而言 $\Gamma_2 > 0$，但在某些情形下 Γ_2 可能消失。例如，当 B 和 V 均为径向对称时，就会发生这种情况，参见注记 3.9。注意，如果 $\Gamma_2 = 0$，那么通过改变 α，(1.10) 中 ε 的幂覆盖整个区间 $]1, 2[$。另一方面，如果 $\Gamma_2 > 0$，则 (1.10) 中首项的 ε 的幂在 $\alpha = \frac{3}{2}$时达到最大值；在这种情况下，我们有 $\gamma_\varepsilon \sim \varepsilon^{\frac{3}{2}}$。同样的耦合常数依赖关系，即 $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$，通常也会由三维非磁性 Schr¨odinger 算子的阈值特征值所产生的共振表现出来， [10, 定理 5.1]。作为比较，由 Schr¨odinger 算子的嵌入特征值所产生的共振通常满足渐近规律 $\gamma_\varepsilon \sim \varepsilon^2$ ，该规律由费米黄金法则预言，参见例如[17, 第 4]节。

在临界情形下 $\alpha = 2$ 有 $\mu = 0$ ，且方程（1.10）替换为

$$\gamma_\varepsilon = \Gamma_3 \varepsilon^2 + \Gamma_4 \frac{\varepsilon}{(\log \varepsilon)^2} \big[1 + \mathcal{O}\big(|\log \varepsilon|^{-1}\big)\big], \tag{1.11}$$

其中 $\Gamma_3 > 0$， $\Gamma_4 \geq 0$，误差项满足 $\delta_\varepsilon = \mathcal{O}$（$|\log \varepsilon|^{-1}$），当 $\Gamma_4 > 0$时；而当 $\delta_\varepsilon = o$时，满足（1）。系数 b_3 和 Γ_4 的显式表达式见定理3.10 和3.16。与方程（1.10）类似，当 Γ_4 和 B 均为 V 径向时，系数 $\gamma_\varepsilon = \Gamma_3 \varepsilon^2$消失。此时共振宽度满足 $\gamma_\varepsilon = \Gamma_3 \varepsilon^2$，且没有误差项，参见注3.17。

注 1.1. 对于上述结果中误差项 δ_ε 的上界是否最优，我们不作任何论断。一般而言，可以通过在方程（ δ_ε 1.5）中将 Ψ 替换为满足 Ψ_ε的适当数列 $\|\Psi_\varepsilon - \Psi\|_2 \to 0$，当 $\varepsilon \searrow 0$时，改进 δ_ε 。关于具有伸缩解析势的薛定谔算子的此类分析见 [8], ，关于更一般势的分析见 [4]。本文不讨论这一问题。

我们的主要结果的一个有趣应用涉及具有反常磁矩的粒子。根据狄拉克方程，具有自旋1 2 的费米子的磁矩标准值等于 2。然而，存在一些费米子，其磁矩与该数值略有不同。由我们的结果可知，即使 $V = 0$，泡利算子也可能存在共振，参见第3.4节。

简并阈值特征值。当零是 $P(A)$的简并特征值时，正如预期的那样，情况要微妙得多。正如[11], 所指出的，最自然的共振本征态候选是算子 $\mathrm{P}_0 V \mathrm{P}_0$, 的特征函数，其中 P_0 是到零特征空间的投影。对 V的关键假设现在要求该算子具有一个 $\psi_0^{(V)}$ 对应于单的正特征值的特征函数。在第4 节中，我们证明，在某些附加假设下， $\psi_0^{(V)}$ 是算子 $P_\varepsilon(A)$ 的一个共振本征态，并计算其位置 λ_ε 在 $\varepsilon \searrow 0$时的渐近公式，参见定理4.3、4.5 和4.6。

此外，在第 4.4 节中，我们处理一个具体例子，其中零是 $P(A)$ 的二重简并特征值，并且算子 $P_\varepsilon(A)$在 ε中有两个共振，其宽度具有不同的数量级，见方程（4.28）、（4.29）和（4.30）。对于 α的一般取值，当 0 是 $P(A)$ 的重数为 N的特征值时，见（1.4），第 4 节的结果保证了，在关于特征函数 $\mathrm{P}_0 V \mathrm{P}_0$, 存在$N$ 共振的适当假设下，参见注 4.7。

注 1.2. 本文的方法也可应用于所研究问题的相对论描述，即哈密顿量由二维狄拉克算子给出的情形。关于后者的共振将在后续论文中讨论。

1.3. 论文结构。下一节将陈述关于 B 的主要假设，并汇总一些后文需要的预备结果。非退化阈值特征值情形下的主要结果及其证明将在第3节给出。由简并特征值产生的共振将在第4节讨论。在第3.4 节，我们将讨论其在具有反常磁矩的粒子中的应用。

致谢 本研究部分得到了 Vigevani 研究项目奖（JB 和 HK）以及以色列科学基金会（JB，资助编号 1378/20）的支持。JB 感谢布雷西亚大学数学系 Sezione di Matematica 的热情接待；HK 感谢耶路撒冷希伯来大学爱因斯坦数学研究所的热情接待，本研究的部分工作即在那里完成。

2. 预备知识与记号

2.1. 假设。我们将在以下关于 B 的衰减条件下开展研究。

假设 2.1。函数 $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是连续的，并且满足

$$|B(x)| \lesssim (1+|x|^2)^{-\rho}. \tag{2.1}$$

对于某个 $\rho > 7/2$。

我们来评论一下假设 2.1 中给出的衰减条件。上界 (2.1) 事实证明是泡利算子在阈值处的预解式展开的充分条件，参见 $P(A)$，它是我们证明中的主要工具之一。不过，我们自然会预期，这里给出的结果在对 B 采用较弱衰减假设的情况下也应成立，尤其是对任何具有有限通量的磁场。

2.2. 记号。我们需要算子 $P_(A)$ 在带权 Sobolev 空间 $\mathrm{H}^{k,s}$ 的拓扑下的预解式展开，该空间配备范数

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{k,s}} = \| \langle x\rangle^s (1-\Delta)^{k/2}\, u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}. \qquad k\in\mathbb{Z},\ s\in\mathbb{R}, \tag{2.2}$$

其中 $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$。记

$$\mathcal{B}(k,s;k',s') = \mathcal{B}(\mathrm{H}^{k,s};\mathrm{H}^{k',s'})$$

为如下空间 从 $\mathrm{H}^{k,s}$ 到 $\mathrm{H}^{k',s'}$ 的有界线性算子空间；对于 $k=0$，我们使用以下简写

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{0,s}} = \|u\|_{2,s} = \| \langle\,\cdot\,\rangle^s\, u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \qquad L^{2,s}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{H}^{0,s}, \qquad \mathcal{B}(0,s;0,s') = \mathcal{B}(s;s'),$$

其中 $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$。我们将 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的内积定义为对第二个变量线性，即令

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f}\, g\,.$$

给定集合 M 和两个函数 f_1、$f_2 : M \to \mathbb{R}$，如果存在数值常数 c，使得对于所有 $m\in M$，$f_1(m) \le c\, f_2(m)$，则记作 $f_1(m) \lesssim f_2(m)$。符号 $f_1(m) \gtrsim f_2(m)$ 的定义类似。此外，我们使用记号

$$f_1(m) \sim f_2(m) \quad\Longleftrightarrow\quad f_1(m) \lesssim f_2(m) \ \wedge\ f_2(m) \lesssim f_1(m),$$

最后，我们用 $\mathbb{1}_M$ 表示 M的示性函数。

2.3.SLFG公式。 恒等式（2.5）在文献中被称为 Schur-Livsic-Feshbach-Grushin（简称 SLFG）公式，参见例如 [10, 19]。由于我们会多次用到它，这里简要回顾一下。假设希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 是两个希尔伯特空间的直和；$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$。设 a 是作用在$\mathcal{H}$上的闭算子。那么 a 可以表示为矩阵形式

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

此外，假设 a_{22} 在 $\mathcal{H}_2$ 上有界可逆。那么， a 可逆当且仅当其 Schur 补

$$S = a_{11} - a_{12}\, a_{22}^{-1}\, a_{21} \tag{2.4}$$

可逆。在这种情况下，我们有

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

其中

$$b_{11} = S^{-1}, \qquad b_{12} = -S^{-1}\, a_{12}\, a_{22}^{-1}, \qquad b_{21} = -a_{22}^{-1}\, a_{21}\, S^{-1}, \qquad b_{22} = a_{22}^{-1} - a_{22}^{-1}\, a_{21}\, S^{-1}\, a_{12}\, a_{22}^{-1}.$$

2.4. 规范。 由于共振的定义具有规范不变性，见方程 (1.5)，我们可以选取任意满足旋度 A 的矢势 $A = B$。为作出合适的选择 A，我们令

$$h(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} B(y) \log|x-y|\, dy. \tag{2.6}$$

于是我们有 $-\Delta h = B$，这意味着矢势

$$A_h = \left(\partial_2 h\,,\, -\partial_1 h\right) \tag{2.7}$$

满足

$$\operatorname{curl} A_h = -\Delta h = B. \tag{2.8}$$

此外，我们定义参考矢势

$$A_0(x) = \alpha\,(-x_2, x_1) \min\left\{\, |x|^{-1},\, |x|^{-2} \right\}. \tag{2.9}$$

显然，旋度 $A_0 \neq B$，但经过简短计算可知 A_0 产生的磁场与 B具有相同的通量。为后续讨论，我们需要选择 A，使其在无穷远处足够接近 A_0。为此，我们利用规范变换函数 χ： $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 其构造见 [12, 命题 2。2]，，它满足

$$|A_h(x) + \nabla\chi(x) - A_0(x)| \;\lesssim\; \langle x\rangle^{-\rho+1} \tag{2.10}$$

当 B 满足假设 2.1时成立。因此，接下来我们令

$$A = A_h + \nabla\chi, \tag{2.11}$$

因此旋度 $A = B$，见方程 (2.8)。还需注意，对于径向 B，可以取 $\chi = 0$， [12, 第 3 节4]。

注 2.2。 在证明我们的结果时，我们将使用由（2.11）给出的矢势。不过请注意，生存概率是规范不变的。

2.5. 阿哈罗诺夫-卡谢尔态。 我们来描述规范 A （定义见2.11）下泡利算子的零特征空间结构。阿哈罗诺夫-卡谢尔定理表明， Ψ 是 $P(A)$ 的零特征函数，当且仅当

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi(x) = e^{i\chi(x)+h(x)} \sum_{j=1}^{N} c_j \, (x_1 + i x_2)^{j-1} \qquad \text{for} \quad \alpha > 0 \\ \Psi &= \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}, \qquad \psi(x) = e^{i\chi(x)-h(x)} \sum_{j=1}^{N} c_j \, (x_1 - i x_2)^{j-1} \qquad \text{for} \quad \alpha < 0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

参见[1, 5, 6, 16]。此处 N 由（1.4）给出，且 $c_j \in \mathbb{C}$ 是任意的。由（2.6）可推得

$$h(x) = -\alpha \log |x| + \mathcal{O}(|x|^{-1}), \qquad |x| \to \infty. \tag{2.13}$$

这尤其表明， $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$。除了零特征函数外，我们还需要所谓的零虚束缚态，即满足 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \setminus L^2(\mathbb{R}^2)$ 的 $P_-(A)\varphi = 0$ 的解。对于 $\alpha > 0$ ，这些解为

$$\varphi(x) = e^{i\chi(x)+h(x)} \sum_{j=1}^{N+1} c_j \, (x_1 - i x_2)^{j-1} \quad \text{if } \alpha \notin \mathbb{Z}, \qquad \varphi(x) = e^{i\chi(x)+h(x)} \sum_{j=1}^{N+2} c_j \, (x_1 - i x_2)^{j-1} \quad \text{if } \alpha \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

由于假设通量为正，阿哈罗诺夫-卡谢尔定理表明 $P_+(A)$ 没有特征值，因此我们可以将注意力限制在算子 $P_-(A)$ 上。这意味着我们将研究该算子的共振行为

$$P_-(A, \varepsilon) = (i\nabla + A)^2 - B + \varepsilon V$$

在极限 $\varepsilon \searrow 0$ 中。

下文中，我们用 P_0 表示到 $P_-(A)$ 的零特征空间上的正交投影。

2.6. $P_-(A)$ 的预解式展开。我们主要结果证明中的一个主要技术要素是 $(P_-(A) - z)^{-1}$ 在极限 $z \to 0$ 下的渐近展开。我们将分别针对 α 的非整数值和整数值表述这些展开式。为此，我们定义函数 $\zeta, \omega \colon \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 如下。

$$\zeta(s) = -\frac{4^{s-1}\,\Gamma(s)\, e^{i\pi s}}{\pi\,\Gamma(1-s)} \qquad \text{and} \qquad \omega(s) = \frac{1}{\zeta(s)\,\|e^h\|_2^2}, \qquad 0 < s \notin \mathbb{Z}. \tag{2.15}$$

采用上述记号，我们陈述

命题 2.3。 令 $1 < \alpha \notin \mathbb{Z}$。假设 B 满足假设 2.1。令 A 由（2.11）给出。则存在一个自伴算子 $S_0 \in \mathcal{B}(-1, s; 1, -s)$ $s > 3$，使得

$$(P_-(A) - z)^{-1} = -z^{-1}\mathrm{P}_0 + \frac{\omega(1+\alpha')\, z^{\alpha'-1}}{1 + c_1\omega(1+\alpha')\, z^{\alpha'}}\, \psi\langle\psi\,, \cdot\,\rangle - \frac{\zeta(\alpha')z^{-\alpha'}}{1 + \varrho\,\zeta(\alpha')z^{1-\alpha'}}\, \varphi\langle\varphi\,, \cdot\,\rangle + S_0 + o(1) \tag{2.16}$$

在 $\mathcal{B}(-1, s; 1, -s)$ $s > 3$ 中，当 $z \to 0$时，$\operatorname{Im} z \geq 0$。这里， $c_1 \in \mathbb{R}$ 是一个常数，当 $1 < \alpha < 2$ 时其等于 1，

$$\alpha' = \alpha - N \tag{2.17}$$

是 α、 $\varrho \in \mathbb{R}$、 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 的小数部分是 $P_-(A)$ 的一个特定零特征函数，而 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \setminus L^2(\mathbb{R}^2)$ 是一个特定的虚束缚态。

请注意，为避免混淆，我们对（2.16）中的记号相较于 [12, 定理 5。6]进行了略微修改。更确切地说，我们有

$$\psi = d\,\|e^h\|_2\,\psi^-,$$

其中， ψ^- 由[12, 式（5.36）] 给出， $d \in \mathbb{C}$ 是一个归一化常数。常数 c_1的精确值以及 φ 的定义可见 [12, 第 5.6] 节。

注 2.4. 若 B 是径向的，则

$$\varphi(x) = \text{const}\,(x_1 + ix_2)\, e^{h(x)}, \tag{2.18}$$

参见 [12,推论 5。10]。

在 $\alpha \in \mathbb{Z}$ 的情形下，我们必须考虑两个线性无关解 φ_j，其形式为（2.14），且满足 $\varphi_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \setminus L^p(\mathbb{R}^2)$，对所有 $2 \le p < \infty$均成立；并且 $\varphi_2 \in L^p(\mathbb{R}^2) \setminus L^2(\mathbb{R}^2)$，对所有 $2 < p \le \infty$均成立。关于这些函数的显式表达式，请参见 [12, 第 6]节。随后定义

$$\Pi_{jk} = \langle\, \varphi_j, \cdot \,\rangle\, \varphi_k \qquad\qquad j,k = 1,2. \tag{2.19}$$

现在我们有

命题 2.5。 设 $\alpha \in \mathbb{Z}$， $\alpha \ge 2$，并假设 B 满足假设 2.1。设 A 由（2.11）给出。则存在自伴算子 $T_0 \in \mathcal{B}(-1,\ s;\ 1,\ -s)$ $s > 3$以及一个常数 $m_\circ \in \mathbb{R}$，使得

$$(P_-(A) - z)^{-1} = -z^{-1}\,\mathrm{P}_0 + \frac{\langle \varphi_2\,, \cdot\,\rangle\,\varphi_2}{\pi\, z\,(\log z + m_\circ - i\pi)} - (\log z - i\pi)\,\mathcal{K} + \mathrm{T}_0 + o(1), \tag{2.20}$$

在 $\mathcal{B}(-1, s; 1, -s)$ $s > 3$ 中成立，当 $z \to 0$、$\mathrm{Im}\ z \ge 0$ 时。这里

$$\mathcal{K} = \frac{1}{4\pi}\left[\,\Pi_{11} + \overline{\varkappa}\,\Pi_{12} + \varkappa\,\Pi_{21} + |\varkappa|^2\,\Pi_{22}\right] + \frac{\pi}{4\|e^h\|_2^2}\,\langle \psi\,, \cdot\,\rangle\,\psi, \tag{2.21}$$

其中 $\varkappa \in \mathbb{C}$，且 ψ 见命题2.3。

注 2.6. 若 B 是径向的，则

$$\varphi_1(x) = \text{const}\,(x_1 + ix_2)^2\, e^{h(x)}, \qquad \varphi_2(x) = \text{const}\,(x_1 + ix_2)\, e^{h(x)}\,, \tag{2.22}$$

参见[12,推论 6。7]。

命题2.3 和2.5 直接由 [12]中的结果得出。证明见附录A。

3. 非退化阈值特征值产生的共振

在本节中，我们假设 $P_-(A)$ 的零特征值是单重的。根据方程（1.4），这等价于条件

$$1 < \alpha \le 2. \tag{3.1}$$

方程 在（2.12）意味着相应的零特征函数在规范（2.11），由 b 给出 y

$$\psi_0 = c_0\, e^{h + i\chi}\ , \tag{3.2}$$

其中选择 c_0 使得 $\|\psi_0\|_2 = 1$。显然，我们有

$$\mathrm{P}_0 = \psi_0\,\langle \psi_0\,, \cdot\,\rangle.$$

3.1. 生存概率　　能力。为分析生存概率的振幅，我们使用表示式

$$\left\langle \psi_0,\, e^{-itP_-(A,\varepsilon)}\,\psi_0 \right\rangle = \frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0+}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\,\mathrm{Im}\left\langle \psi_0,\,(P_-(A,\varepsilon)-x-iy)^{-1}\,\psi_0\right\rangle dx, \tag{3.3}$$

并证明，若将上述方程中的被积函数替换为洛伦兹峰　　k

$$\frac{\gamma_\varepsilon}{(x-x_\varepsilon)^2+\gamma_\varepsilon^2},$$

并适当选取 x_ε 和 γ_ε，则会产生一个误差 $\delta(t,\varepsilon)$，当 $\varepsilon \searrow 0$ 时，该误差关于 $t>0$一致趋于零。正如引言中所述，我们假设 V具有正性。事实上，我们并不要求 $V>0$ 逐点成立。只需假设

$$\beta := \left\langle \psi_0, V\psi_0\right\rangle > 0. \tag{3.4}$$

我们还将 V 因式分解如下；

$$V = vUv, \qquad \text{where}\quad v=\sqrt{|V|}, \quad \text{and}\quad U(x)=\begin{cases} -1 & \text{if}\quad V(x)<0\,,\\ 1 & \text{elsewhere}\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

我们将使用 SLFG公式，将 $\left\langle \psi_0, (P_-(A,\varepsilon)-z)^{-1}\,\psi_0\right\rangle$ 表示为一个有效的、依赖于 z 的（一维）算子的预解式，其中取 $\mathcal{H}_1 = P_0L^2(\mathbb{R}^2)$ 和 $\mathcal{H}_2 = Q_0L^2(\mathbb{R}^2)$。

按照 [10, 节 2], 中的做法，令 $Q_0 = I - P_0$ 并记

$$\begin{aligned} R(z) &= Q_0(Q_0P_-(A,\varepsilon)Q_0 - z)^{-1}Q_0\\ R_0(z) &= Q_0(Q_0P_-(A)Q_0 - z)^{-1}Q_0 = Q_0(P_-(A)-z)^{-1}Q_0 \end{aligned}$$

$P_-(A,\varepsilon)$ 和 $P_-(A)$（分别）在 ψ_0 的正交子空间上的限制的逆。预解式方程表明

$$\begin{aligned} R(z) &= R_0(z) - \varepsilon R_0(z)VR(z) = R_0(z) - \varepsilon R(z)VR_0(z) = R_0(z) - R_0(z)\left(\varepsilon V - \varepsilon^2 VR(z)V\right)R_0(z)\\ &= R_0(z) - \varepsilon R_0(z)v\left(U - \varepsilon UvR(z)vU\right)vR_0(z), \end{aligned} \tag{3.6}$$

并且这可以与

$$\left(U+\varepsilon vR_0(z)v\right)\left(U-\varepsilon UvR(z)vU\right) = I$$

（将 (3.6) 中的第一个等式右乘 εvU，并注意到 $U^2=I$，即可得到）

$$R(z) = R_0(z) - \varepsilon R_0(z)v\left(U+\varepsilon vR_0(z)v\right)^{-1}vR_0(z). \tag{3.7}$$

舒尔补，见方程 (2.4)，因此为

$$S(z) = F(z,\varepsilon)\,P_0, \tag{3.8}$$

其中

$$F(z,\varepsilon) = \beta\varepsilon - z - \varepsilon^2\left\langle \psi_0, vU\big(G(z) - \varepsilon G(z)[U+\varepsilon G(z)]^{-1}G(z)\big)Uv\,\psi_0\right\rangle, \tag{3.9}$$

and

$$G(z) = vR_0(z)v = v(P_-(A)-z)^{-1}\,v + z^{-1}\,v\,\mathrm{P}_0\,v\,. \tag{3.10}$$

方程（2.5）因此给出

$$\left\langle \psi_0,\,(P_-(A,\varepsilon)-z)^{-1}\,\psi_0\right\rangle = \frac{1}{F(z,\varepsilon)}. \tag{3.11}$$

3.2. 非整数磁通。 我们回顾命题2.3中给出的预解式展开。由于 $1 < \alpha < 2$ 且 $\mathrm{P}_0 = \psi_0 \langle \psi_0 , \cdot \rangle$，方程（2.16）具有如下形式

$$(P_-(A) - z)^{-1} = -z^{-1}\mathrm{P}_0 + \frac{\omega(\alpha)\, z^{\alpha-2}}{1+\omega(\alpha)\, z^{\alpha-1}}\, \psi_0 \langle \psi_0 , \cdot \rangle - \frac{\zeta(\alpha-1)\, z^{1-\alpha}}{1+\varrho\,\zeta(\alpha-1)\, z^{2-\alpha}}\, \varphi \langle \varphi, \cdot \rangle + S_0 + o(1) \tag{3.12}$$

in $\mathcal{B}(-1,s;1,-s)$ $s>3$, 当 $z \to 0$ 时。为简化下文的记号，我们记

$$\eta = \frac{4\pi^2}{4^\alpha\, \Gamma^2(\alpha)\, \|e^h\|_2^2}\,, \qquad \sigma = \frac{4^\alpha}{16\, \Gamma^2(2-\alpha)}, \tag{3.13}$$

and

$$\omega = \omega(\alpha), \qquad \zeta = \zeta(\alpha-1),$$

接着，我们定义函数 $g:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，如下

$$g(x) = \frac{\eta\, \beta^2 x^{\alpha-2}}{|1+\omega\, x^{\alpha-1}|^2} + \frac{\sigma\, |\mathrm{w}|^2 x^{1-\alpha}}{|1+\varrho\,\zeta\, x^{2-\alpha}|^2}\,, \tag{3.14}$$

其中

$$\mathrm{w} = \langle V\psi_0, \varphi \rangle\,, \tag{3.15}$$

并且 ϱ 是命题2.3中的常数。 $g(x)$ 在 $x \searrow 0$ 处的渐近行为取决于 w 是否 $=0$。因此我们设

$$\nu = \begin{cases} \mu & \text{if } \ \mathrm{w} \neq 0\,, \\ \alpha - 1 & \text{if } \ \mathrm{w} = 0\,. \end{cases} \tag{3.16}$$

现在我们可以陈述非整数磁通情形下的结果。

定理 3.1。 令 $1<\alpha<2$，令 B 满足假设 (2.1)，并假设 $V \lesssim \langle\cdot\rangle^{-\rho}$ 对于某个 $\rho > 6$。此外，假设 (3.4) 成立。那么存在一个常数 C 使得当 ε 充分小时，我们有

$$\sup_{t>0} \left| \left\langle \psi_0,\, e^{-itP_-(A,\varepsilon)}\, \psi_0 \right\rangle - e^{-it(x_\varepsilon - i\gamma_\varepsilon)} \right| \ \leq\ C\, \varepsilon^{\mu}, \tag{3.17}$$

其中 x_ε 和 γ_ε 满足

$$x_\varepsilon = \beta\, \varepsilon \big(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{\nu})\big) \tag{3.18}$$

$$\gamma_\varepsilon = \varepsilon^2 g(x_\varepsilon)\,. \tag{3.19}$$

方程（3.19）给出

$$\gamma_\varepsilon = \eta\, \beta^\alpha \varepsilon^\alpha \big(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1})\big) + \sigma\, \beta^{1-\alpha}\, |\mathrm{w}|^2\, \varepsilon^{3-\alpha}\, \big(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{2-\alpha})\big). \tag{3.20}$$

因此，一般而言，也就是说当 $\mathrm{w} \neq 0$ 时，共振宽度满足 $\gamma_\varepsilon \sim \varepsilon^{1+\mu}$。

注 3.2。 关于 V 在定理3.1以及后续所有定理中的衰减条件，是由命题 $s>3$ 中的条件所决定的，该命题见2.3。事实上，由于 $v \lesssim \langle\cdot\rangle^{-\rho}$ 且 $\rho > 3$，见（3.5），我们可以将渐近展开式（3.12）代入方程（3.10），并在 $G(z)$ 下，对 $z \to 0$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的一致算子拓扑中进行展开。

注 3.3. 条件（3.4）实际上是共振存在的必要条件。事实上，若 $\langle \psi_0,\ V\psi_0 \rangle \leq 0$，则零会变成 $P_-(A,\ \varepsilon)$ 的负离散特征值。这可由一个简单的试验函数论证得出。

证明　　定理 3.1 中的 f 将被细分为一系列辅助引理。首先，我们记

$$J_\varepsilon := \Big(\frac{\beta\varepsilon}{2}\,,\,\frac{3\beta\varepsilon}{2}\Big), \tag{3.21}$$

并且接下来 [10] 我们通过设定以下内容对（3.3）中的积分进行拆分

$$p_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0+}\int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\,\mathrm{Im}\,\big\langle\psi_0,\,(P_-(A,\varepsilon)-x-iy)^{-1}\,\psi_0\big\rangle\,dx, \tag{3.22}$$

其中 $I_\varepsilon \subset J_\varepsilon$ 是一个稍后将具体说明的区间。证明的核心思想是表明，上述对（3.3）的贡献将产生指数项 $e^{-it(x_\varepsilon - i\gamma_\varepsilon)}$，以及一个误差项，该误差项将与在 $\mathbb{R}\setminus I_\varepsilon$上的积分一起被吸收到 δ（ε，t）中。结合（3.11）和（3.22），我们得到

$$p_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi}\int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\lim_{y\to 0+}\mathrm{Im}\Big(\frac{1}{F(x+iy,\varepsilon)}\Big)\,dx. \tag{3.23}$$

Let

$$K(z,\varepsilon) = \beta\varepsilon - z - \varepsilon^2\big\langle\psi_0, VH(z)V\,\psi_0\big\rangle = \beta\varepsilon - z - \varepsilon^2\Big(\frac{\omega\,\beta^2\,z^{\alpha-2}}{1+\omega\,z^{\alpha-1}} - \frac{\zeta\,|\mathrm{w}|^2\,z^{1-\alpha}}{1+\varrho\,\zeta\,z^{2-\alpha}}\Big), \tag{3.24}$$

其中

$$H(z) = \frac{\omega\,z^{\alpha-2}}{1+\omega\,z^{\alpha-1}}\,\mathrm{P}_0 - \frac{\zeta\,z^{1-\alpha}}{1+\varrho\,\zeta\,z^{2-\alpha}}\,\varphi\,\big\langle\varphi,\,\cdot\,\big\rangle\,. \tag{3.25}$$

约定。 $P_-(A)$ 不存在正特征值，加上极限吸收原理，意味着该极限存在。

$$G(x) = \lim_{y\to 0+} G(x+iy), \qquad x\in(0,\infty)$$

i在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的一致算子拓扑中。因此，鉴于 (3.23)，我们定义

$$F(x,\varepsilon) = \lim_{y\to 0+} F(x+iy,\varepsilon)\,, \qquad x>0. \tag{3.26}$$

相同的记号　　ion 将针对以下量进行调整 $K(x,\varepsilon)$ 定义为 $\lim_{y\to 0+} K(x+iy,\varepsilon)$，参见 (3.2　　4).

定理证明的第一步 3.1 是证明 $K(x,\ \varepsilon)$ 是 $F(x,\ \varepsilon)$ 的良好近似，当 x 属于区间 J_ε时。事实上，由 (3.9) 和 (3.24) 可推得

$$F(x,\varepsilon) - K(x,\varepsilon) = \varepsilon^3\big\langle\psi_0, vUG(z)[U+\varepsilon G(x)]^{-1}G(x)\,Uv\,\psi_0\big\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{3.27}$$

于是我们有

引理 3.4。当 ε 足够小时

$$\sup_{x\in J_\varepsilon}|F(x,\varepsilon)-K(x,\varepsilon)| \;\lesssim\; \varepsilon^{1+2\nu}+\varepsilon^2\,. \tag{3.28}$$

证明。 如注 3.2 所述，关于 V的衰减假设允许合并方程（3.10）和（3.12）。由此得到

$$\varepsilon\|G(x)\|_{2\to 2} = \varepsilon\|vH(x)v\|_{2\to 2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \;\lesssim\; \varepsilon^{\alpha-1}+\varepsilon^{2-\alpha}.$$

因此 $U+\varepsilon G(x)$ 对于 $x\in J_\varepsilon$ 且 ε 足够小时有界可逆。由命题 2.3 可得

$$\varepsilon^3\big\langle\psi_0, vUG(x)[U+\varepsilon G(x)]^{-1}G(x)\,Uv\,\psi_0\big\rangle = \mathcal{O}(\varepsilon^{2\alpha-1}) + |\mathrm{w}|^2\,\mathcal{O}(\varepsilon^{5-2\alpha})\,.$$

鉴于（3.27），这便证明了该结论。 □

接下来我们将 K 分解为实部和虚部，分别记为 K_1 和 K_2 ；

$$K(x,\varepsilon) = K_1(x,\varepsilon) + iK_2(x,\varepsilon).$$

恒等式

$$\Gamma(1-z)\,\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \qquad z \notin \mathbb{Z} \tag{3.29}$$

和方程 (2.15) 表明

$$\mathrm{Im}\Big(\frac{\omega\, x^{\alpha-2}}{1+\omega\, x^{\alpha-1}}\Big) = \frac{\eta\, x^{\alpha-2}}{|1+\omega\, x^{\alpha-1}|^2}\,, \qquad \mathrm{Im}\Big(\frac{\zeta\, x^{1-\alpha}}{1+\varrho\,\zeta\, x^{2-\alpha}}\Big) = \frac{-\sigma\, x^{1-\alpha}}{|1+\varrho\,\zeta\, x^{2-\alpha}|^2}\,.$$

由 (3.14) 和 (3.24) 可得

$$K_2(x,\varepsilon) = -\varepsilon^2 g(x). \tag{3.30}$$

至于 K 的实部，我们注意到以下结果。

引理 3.5。我们有

$$\sup_{x\in J_\varepsilon} |\, K_1(x,\varepsilon) - \beta\varepsilon + x\,| = \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\nu}). \tag{3.31}$$

此外，当 ε 足够小时，存在唯一的 $x_\varepsilon \in J_\varepsilon$，使得 $K_1(x_\varepsilon,\varepsilon) = 0$。

证明。由（3.24）可得

$$K_1(x,\varepsilon) = \beta\varepsilon - x - \varepsilon^2 f(x), \tag{3.32}$$

其中

$$f(x) = \beta^2\, \frac{\mathrm{Re}(\omega)\, x^{\alpha-2} + |\omega|^2\, x^{2\alpha-3}}{|1+\omega\, x^{\alpha-1}|^2} - |\mathrm{w}|^2\, \frac{\mathrm{Re}(\zeta)\, x^{1-\alpha} + \varrho|\zeta|^2\, x^{3-2\alpha}}{|1+\varrho\,\zeta\, x^{2-\alpha}|^2}\,. \tag{3.33}$$

容易验证

$$\sup_{J_\varepsilon} \varepsilon^2\, |f^{(j)}(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\nu-j})\,, \qquad j = 0,1,2. \tag{3.34}$$

这推出（3.31）。因此，当 ε 足够小时，有 $K_1\,(\frac{\beta\varepsilon}{2},\ \varepsilon) > 0$，$K_1\,(\frac{3\beta\varepsilon}{2},\ \varepsilon) < 0$，并且

$$\partial_x K_1(x,\varepsilon) \le -\frac{1}{2}\,, \qquad \forall\, x \in J_\varepsilon. \tag{3.35}$$

这就证明了该断言的第二部分。 □

引理 3.5 显然意味着 $x_\varepsilon = \beta\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\nu})$。因此我们令

$$I_\varepsilon = \Big[x_\varepsilon - \frac{\beta\varepsilon}{4},\, x_\varepsilon + \frac{\beta\varepsilon}{4}\Big] \tag{3.36}$$

并注意，当 ε 足够小时，$I_\varepsilon \subset J_\varepsilon$。

引理 3.6。对于足够小的 ε，

$$\sup_{t>0}\Big|\, p_\varepsilon(t) - \frac{1}{\pi}\int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\,\mathrm{Im}\Big[\,\frac{1}{K(x,\varepsilon)}\Big]\,dx\,\Big| \lesssim \varepsilon^\mu.$$

证明。由（3.28）

$$\Big|\frac{1}{F(x,\varepsilon)} - \frac{1}{K(x,\varepsilon)}\Big| \lesssim \frac{\varepsilon^{1+2\nu}+\varepsilon^2}{|F(x,\varepsilon)K(x,\varepsilon)|} \lesssim \frac{\varepsilon^{1+2\nu}+\varepsilon^2}{|K(x,\varepsilon)|^2}\,.$$

另一方面，方程（3.30）和（3.14）意味着

$$|K_2(x,\varepsilon)| \gtrsim \varepsilon^{1+\nu}$$

并且，根据（3.35），

$$|K_1(x,\varepsilon)| \gtrsim |x - x_\varepsilon|\,. \tag{3.37}$$

因此

$$\int_{I_\varepsilon}\Big|\frac{1}{F(x,\varepsilon)}-\frac{1}{K(x,\varepsilon)}\Big|\,dx\ \lesssim\ \int_{\mathbb{R}}\frac{\varepsilon^{1+2\nu}+\varepsilon^2}{|K(x,\varepsilon)|^2}\,dx\ \lesssim\ \int_{\mathbb{R}}\frac{\varepsilon^{1+2\nu}+\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^{2+2\nu}}\,dx\ \lesssim\ \varepsilon^{\mu},$$

且结论由（3.23）得出。 □

现在我们写出

$$L(x,\varepsilon)=L_1(x,\varepsilon)+iL_2(x,\varepsilon)=x_\varepsilon-x-i\varepsilon^2g(x_\varepsilon)=x_\varepsilon-x-i\gamma_\varepsilon.$$

其中 L_1 和 L_2 分别表示 L的实部和虚部。回忆一下， γ_ε 由方程（3.19）给出。

引理 3.7. 当 ε 足够小时

$$\sup_{t>0}\Big|\int_{I_\varepsilon}e^{-itx}\Big[\frac{1}{K(x,\varepsilon)}-\frac{1}{L(x,\varepsilon)}\Big]\,dx\Big|\ \lesssim\ \varepsilon^{\nu}\,. \tag{3.38}$$

证明。 注意，由（3.32）

$$x_\varepsilon=\beta\varepsilon-\varepsilon^2f(x_\varepsilon)\,.$$

因此

$$L_1(x,\varepsilon)-K_1(x,\varepsilon)=\varepsilon^2(f(x)-f(x_\varepsilon)).$$

类似地，由（3.30）可得

$$L_2(x,\varepsilon)-K_2(x,\varepsilon)=\varepsilon^2(g(x)-g(x_\varepsilon)).$$

函数 g 显然满足与函数 f相同的界（3.34）：

$$\sup_{I_\varepsilon}\varepsilon^2\,|g^{(j)}|=\mathcal{O}(\varepsilon^{1+\nu-j})\,,\qquad j=0,1,2. \tag{3.39}$$

因此，中值定理给出

$$|L(x,\varepsilon)-K(x,\varepsilon)|\ \le\ \varepsilon^2\sup_{I_\varepsilon}|f'+ig'||x-x_\varepsilon|\ \lesssim\ \varepsilon^{\nu}|x-x_\varepsilon| \tag{3.40}$$

此外，对 f 和 g 应用（3.34），取 $j=2$ 并运用泰勒定理，可得

$$\big|L(x,\varepsilon)-K(x,\varepsilon)-\varepsilon^2[f'(x_\varepsilon)+ig'(x_\varepsilon)]\,(x-x_\varepsilon)\big|\ \lesssim\ \varepsilon^{\nu-1}\,(x-x_\varepsilon)^2\,. \tag{3.41}$$

最后两个界对所有 $x\in I_\varepsilon$均成立，将是我们估计（3.38）中积分的主要工具。按照[10]我们将其分解为

$$\int_{I_\varepsilon}e^{-itx}\Big[\frac{1}{K(x,\varepsilon)}-\frac{1}{L(x,\varepsilon)}\Big]\,dx=\int_{I_\varepsilon}e^{-itx}\Big[\frac{L(x,\varepsilon)-K(x,\varepsilon)}{L^2(x,\varepsilon)}+\frac{(L(x,\varepsilon)-K(x,\varepsilon))^2}{L^2(x,\varepsilon)K(x,\varepsilon)}\Big]\,dx\,. \tag{3.42}$$

为了估计右侧的第一个积分，我们使用（3.41）并写成

$$\Big|\int_{I_\varepsilon}e^{-itx}\,\frac{L(x,\varepsilon)-K(x,\varepsilon)}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx\Big|\ \lesssim\ \varepsilon^2\,|f'(x_\varepsilon)+ig'(x_\varepsilon)|\,\Big|\int_{I_\varepsilon}e^{-itx}\,\frac{x-x_\varepsilon}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx\Big|+\varepsilon^{\nu-1}\int_{I_\varepsilon}\frac{(x-x_\varepsilon)^2}{|L(x,\varepsilon)|^2}\,dx$$

$$\lesssim\ \varepsilon^{\nu}\,\Big|\int_{I_\varepsilon}e^{-itx}\,\frac{x-x_\varepsilon}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx\Big|+\varepsilon^{\nu}\,,$$

这里我们使用了方程（3.34）和（3.39），以及以下事实

$$\int_{I_\varepsilon}\frac{(x-x_\varepsilon)^2}{|L(x,\varepsilon)|^2}\,dx=\int_{I_\varepsilon}\frac{(x-x_\varepsilon)^2}{(x-x_\varepsilon)^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dx=\mathcal{O}(\varepsilon),$$

见（3.19）、（3.36）。对于剩余的积分，我们得到：

$$\Big|\int_{I_\varepsilon}e^{-itx}\,\frac{x-x_\varepsilon}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx\Big|=\Big|\int_{I_\varepsilon}e^{-itx}\,\Big(\frac{1}{L(x,\varepsilon)}+\frac{i\gamma_\varepsilon}{L^2(x,\varepsilon)}\Big)\,dx\Big|\ \le\ \Big|\int_{I_\varepsilon}\frac{e^{-itx}}{L(x,\varepsilon)}\,dx\Big|+\int_{I_\varepsilon}\frac{\gamma_\varepsilon}{(x-x_\varepsilon)^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dx\,. \tag{3.43}$$

（3.43）右侧的第二个积分满足

$$\int_{I_\varepsilon} \frac{\gamma_\varepsilon}{(x-x_\varepsilon)^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dx \;\le\; \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma_\varepsilon}{(x-x_\varepsilon)^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dx \;=\pi.$$

鉴于引理 B. 1 (3.43) 右端的第一项有界，只要 ε 足够小，b y

$$\Big|\int_{I_\varepsilon} \frac{e^{-itx}}{L(x,\varepsilon)}\,dx\Big| = \Big|\int_{-\frac{\beta\varepsilon}{4}}^{\frac{\beta\varepsilon}{4}} \frac{e^{-it\xi}}{\xi+i\gamma_\varepsilon}\,d\xi\Big| = \Big|\int_{-\frac{\beta\varepsilon}{4\gamma_\varepsilon}}^{\frac{\beta\varepsilon}{4\gamma_\varepsilon}} \frac{e^{-it\gamma_\varepsilon y}}{y+i}\,dy\Big| \le C, \tag{3.44}$$

其中 C 是一个与 ε 和 t无关的常数。这里我们用到了 $\frac{\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\to\infty$ 当 $\varepsilon\searrow 0$时成立这一事实。至此，我们完成了对（3.42）右侧第一项的讨论。为了控制（3.42）中的第二项，我们使用界（3.37）和（3.40），并计算

$$\int_{I_\varepsilon} \frac{|L(x,\varepsilon)-K(x,\varepsilon)|^2}{|L(x,\varepsilon)|^2|K(x,\varepsilon)|}\,dx \lesssim \varepsilon^{2\nu}\int_{I_\varepsilon}\frac{|x-x_\varepsilon|}{|L(x,\varepsilon)|^2}\,dx = \varepsilon^{2\nu}\int_{-\frac{\beta\varepsilon}{4}}^{\frac{\beta\varepsilon}{4}} \frac{|y|}{y^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dy = \varepsilon^{2\nu}\,\log\Big(1+\frac{\beta^2\varepsilon^2}{16\,\gamma^2(\varepsilon)}\Big) = o(\varepsilon^\nu),$$

参见（3.20）。引理的证明到此完成。 □

引理 3.8。当 ε 足够小时

$$\sup_{t>0}\big|p_\varepsilon(t)-e^{-it(x_\varepsilon-i\gamma_\varepsilon)}\big| \lesssim \varepsilon^\mu. \tag{3.45}$$

证明。经过显式计算可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}\,\mathrm{Im}\Big(\frac{1}{L(x,\varepsilon)}\Big)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-ixt}\,\gamma_\varepsilon}{(x-x_\varepsilon)^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dx = e^{-it(x_\varepsilon-i\gamma_\varepsilon)}\,. \tag{3.46}$$

因此，鉴于引理 3.6 和 3.7，

$$\big|p_\varepsilon(t)-e^{-it(x_\varepsilon-i\gamma_\varepsilon)}\big| \lesssim \varepsilon^\mu + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus I_\varepsilon}\frac{\gamma_\varepsilon}{(x-x_\varepsilon)^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dx\,.$$

然而，

$$\int_{\mathbb{R}\setminus I_\varepsilon}\frac{\gamma_\varepsilon}{(x-x_\varepsilon)^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dx = 2\int_{\frac{\beta\varepsilon}{4}}^{\infty}\frac{\gamma_\varepsilon}{y^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dy \le 2\int_{\frac{\beta\varepsilon}{4}}^{\infty}\frac{\gamma_\varepsilon}{y^2}\,dy = \frac{8\gamma_\varepsilon}{\beta\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon^\nu)\,.$$

证明至此完成。 □

定理 **3.1** 的证明。 有了引理 3.8 之后，接下来只需重述 Hunziker 的论证 [8] , 另见 [10]。首先，我们将方程（3.45）与 $t=0$ 结合，得到

$$\big|\langle\psi_0, \mathbb{1}_{I_\varepsilon}(P_-(A,\varepsilon))\,\psi_0\rangle - 1\big| \;\lesssim\; \varepsilon^\mu\,, \tag{3.47}$$

因此，

$$\|\big(1-\mathbb{1}_{I_\varepsilon}(P_-(A,\varepsilon))\big)^{\frac12}\,\psi_0\|_2 \;\lesssim\; \varepsilon^\mu\,. \tag{3.48}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\big|\langle\psi_0,\, e^{-itP_-(A,\varepsilon)}\,\psi_0\rangle - p_\varepsilon(t)\big| &= \big|\big\langle\big(1-\mathbb{1}_{I_\varepsilon}(P_-(A,\varepsilon))\big)^{\frac12}\,\psi_0,\, e^{-itP_-(A,\varepsilon)}\big(1-\mathbb{1}_{I_\varepsilon}(P_-(A,\varepsilon))\big)^{\frac12}\,\psi_0\big\rangle\big)\\ &\le \|\big(1-\mathbb{1}_{I_\varepsilon}(P_-(A,\varepsilon))\big)^{\frac12}\,\psi_0\|_2 \lesssim \varepsilon^\mu\,.\end{aligned} \tag{3.49}$$

不等式（3.17）由引理 3.8即可推出。 □

注记 3.9 （径向对称场）。若 B 是径向的，那么 h 也同样是径向的，并且 $\chi=0$， [12, 第 3 节。4]。因此，若 V也具有径向对称性，则由（3.15）和（2.18），

$$\mathrm{w} = \langle V\psi_0,\,\varphi\rangle = 0,$$

并且根据方程（3.14）、（3.19），我们有

$$\gamma_\varepsilon = \eta\,\beta^\alpha\varepsilon^\alpha\big(1+\mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1})\big)\,.$$

另一方面，方程（3.20）表明，如果 B 或 V 不是径向对称的，那么 γ_ε 通常会增大，因此共振的平均寿命会缩短。

3.3. 整数磁通。 与非整数磁通的情形类似，当零是 $P(A)$ 的非退化特征值时，预解式展开会略微简化。事实上，方程（2.20）现在仍然成立，其中算子 $\mathcal{K}$ 定义为

$$\mathcal{K} = \frac{1}{4\pi}\left[\Pi_{11} + \overline{\varkappa}\,\Pi_{12} + \varkappa\,\Pi_{21} + |\varkappa|^2\,\Pi_{22}\right] + \frac{\pi\,\mathrm{P}_0}{4\|e^h\|_2^2}\,, \tag{3.50}$$

其中算子 Π_{jk} 定义于(2.19)中。由于 $P(A)$具有两个虚束缚态， φ_1 和 φ_2 (见第2.6节)，我们引入系数

$$\mathrm{w}_1 = \langle V\psi_0, \varphi_1\rangle \qquad \text{and} \qquad \mathrm{w}_2 = \langle V\psi_0, \varphi_2\rangle\,.$$

结果发现， γ_ε 的渐近行为取决于 $\mathrm{w}_2 \neq 0$ 还是 $\mathrm{w}_2 = 0$。我们先从前一种情况开始。 .

定理 3.10. 设 $\alpha = 2$。设 B满足假设（2.1），并假设 $V \lesssim \langle\cdot\rangle^{-\rho}$对某个 $\rho > 6$成立。此外，假设（3.4）成立，且 $\mathrm{w}_2 \neq 0$。那么存在一个常数 C 使得对于充分小的 ε

$$\sup_{t>0}\left|\langle\psi_0,\, e^{-itP_-(A,\varepsilon)}\,\psi_0\rangle - e^{-it(x_\varepsilon - i\gamma_\varepsilon)}\right| \,\leq\, \frac{C}{|\log\varepsilon|}\,,$$

其中 x_ε 和 γ_ε 满足

$$x_\varepsilon = \beta\varepsilon\left[1 + \mathcal{O}\big(|\log\varepsilon|^{-1}\big)\right] \tag{3.51}$$

$$\gamma_\varepsilon = \frac{\varepsilon\,|\mathrm{w}_2|^2}{\beta(\log\varepsilon)^2}\left[1 + \mathcal{O}\big(|\log\varepsilon|^{-1}\big)\right]. \tag{3.52}$$

定理 3.10 的证明与定理 3.1的证明类似。唯一显著的区别是，我们必须将函数 $F(x,\varepsilon)$（见（3.9））展开到更高阶。为此，我们引入辅助函数

$$\mathfrak{g}(x) = \frac{|\mathrm{w}_2|^2}{x\,(\log x)^2}\,, \qquad f(x) = \frac{\mathfrak{g}(x)}{\pi}\,(\log x + m_\circ), \qquad h(x) = \frac{|\mathrm{w}_2|^2\,\langle\varphi_2, V\varphi_2\rangle}{\pi^2\,(x\log x)^2} \tag{3.53}$$

定义在 J_ε上，参见（3.21）。这里 $m_\circ$ 是命题2.5中引入的常数。

引理 3.11. 当 ε 充分小时，我们有

$$F(x,\varepsilon) = \beta\varepsilon - x - \varepsilon^2 f(x) + \varepsilon^3 h(x) - i\varepsilon^2\mathfrak{g}(x) + \mathcal{O}\big(\varepsilon|\log\varepsilon|^{-3}\big)$$

对于 $x \in J_\varepsilon$，误差项关于 $x \in J_\varepsilon$一致。

证明。 由命题2.5 以及方程（3.9）、（3.10），

$$F(x,\varepsilon) = \beta\varepsilon - x - \varepsilon^2\big\langle\psi_0, vU\mathcal{G}(x)Uv\,\psi_0\big\rangle + \varepsilon^3\big\langle\psi_0, vU\mathcal{G}(x)[U + \varepsilon\mathcal{G}(x)]^{-1}\mathcal{G}(x)Uv\,\psi_0\big\rangle + \mathcal{O}\big(\varepsilon^2\,|\log\varepsilon|\,\big), \tag{3.54}$$

其中 $\mathcal{G}(x)$ 是作用于 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的有界算子，其定义为

$$\mathcal{G}(x) = \frac{v\,\Pi_{22}\,v}{\pi\,x\,(\log x + m_\circ - i\pi)}\,.$$

对于任意 $x \in J_\varepsilon$，我们有

$$\varepsilon^2\big\langle\psi_0, vU\mathcal{G}(x)Uv\,\psi_0\big\rangle = \frac{\varepsilon^2\,|\mathrm{w}_2|^2}{\pi x(\log x + m_\circ - i\pi)} = \varepsilon^2 f(x) + i\varepsilon^2\mathfrak{g}(x) + \mathcal{O}\big(\varepsilon|\log\varepsilon|^{-3}\big)\,.$$

另一方面，

$$\sup_{x\in J_\varepsilon}\varepsilon\|\mathcal{G}(x)\| = \mathcal{O}\big(|\log\varepsilon|^{-1}\big) \tag{3.55}$$

因此，(3.54) 右端的最后一项的阶为 $\mathcal{O}\big(\varepsilon|\log\,\varepsilon|^{-2}\big)$，这与$\varepsilon^2\mathfrak{g}(x)$ 的阶相同。因此，为了将 $F(x,\varepsilon)$ 展开到所需的精度，我们必须从$\big\langle\psi_0, vU\mathcal{G}(x)[U+\varepsilon\mathcal{G}(x)]^{-1}\mathcal{G}(x)Uv\,\psi_0\big\rangle$中提取首项。由于 $U^2=\mathbb{1}$，方程 (3.55) 给出

$$[U+\varepsilon\mathcal{G}(x)]^{-1}=[\mathbb{1}+\varepsilon U\mathcal{G}(x)]^{-1}\,U=U+\mathcal{O}\big(|\log\varepsilon|^{-1}\big)\,.$$

这意味着展开式

$$\begin{aligned}\varepsilon^3\big\langle\psi_0, vU\mathcal{G}(x)[U+\varepsilon v\mathcal{G}(x)v]^{-1}\mathcal{G}(x)Uv\,\psi_0\big\rangle &= \varepsilon^3\big\langle\psi_0, vU\mathcal{G}(x)U\mathcal{G}(x)Uv\,\psi_0\big\rangle+\mathcal{O}\big(\varepsilon|\log\varepsilon|^{-3}\big)\\ &= \frac{\varepsilon^3|\mathrm{w}_2|^2\,\langle\varphi_2, V\,\varphi_2\rangle}{\pi^2\,x^2(\log x+m_\circ-i\pi)^2}+\mathcal{O}\big(\varepsilon|\log\varepsilon|^{-3}\big)\\ &= \varepsilon^3h(x)+\mathcal{O}\big(\varepsilon|\log\varepsilon|^{-3}\big)\end{aligned}$$

holds 在中一致地 x 在 $J_{\varepsilon\circ}$ 将上述估计代入（3.54）即完成证明。 □

从这里开始，我们遵循定理的证明 3.1。因此我们令

$$K(x,\varepsilon)=K_1(x,\varepsilon)+iK_2(x,\varepsilon)=\beta\varepsilon-x-\varepsilon^2f(x)+\varepsilon^3h(x)-i\varepsilon^2\mathfrak{g}(x),$$

其中，K_1 和 K_2 分别表示 K 的实部和虚部。此外，我们注意到

$$\sup_{J_\varepsilon}\varepsilon^2\,|\mathfrak{g}^{(j)}|+\sup_{J_\varepsilon}\varepsilon^3\,|h^{(j)}|=\mathcal{O}(\varepsilon^{1-j}\,|\log\varepsilon|^{-2})\,,\qquad \sup_{J_\varepsilon}\varepsilon^2\,|f^{(j)}|=\mathcal{O}(\varepsilon^{1-j}\,|\log\varepsilon|^{-1}) \tag{3.56}$$

对 $j=0$、1、2 成立。

引理 3.12. 当 ε 足够小时，我们有

$$K_1(x,\varepsilon)=\beta\varepsilon-x+\mathcal{O}(\varepsilon|\log\varepsilon|^{-1})$$

对于 $x\in J_{\varepsilon\circ}$ 此外，存在唯一的 $x_\varepsilon\in J_\varepsilon$，使得 $K_1(x_\varepsilon,\varepsilon)=0_\circ$

证明。根据（3.56），不难验证 K_1 满足（3.35）。该结论可仿照引理 3.5 的证明得出。 □

注意，x_ε 满足

$$x_\varepsilon=\beta\varepsilon-\varepsilon^2f(x_\varepsilon)+\varepsilon^3h(x_\varepsilon).$$

与之前一样，设

$$I_\varepsilon=\Big[x_\varepsilon-\frac{\beta\varepsilon}{4},\,x_\varepsilon+\frac{\beta\varepsilon}{4}\,\Big] \tag{3.57}$$

并注意，当 ε 充分小时，$I_\varepsilon\subset J_{\varepsilon\circ}$

引理 3.13。当 ε 足够小时

$$\sup_{t>0}\Big|\,p_\varepsilon(t)-\frac{1}{\pi}\int_{I_\varepsilon}e^{-itx}\,\mathrm{Im}\Big[\,\frac{1}{K(x,\varepsilon)}\,\Big]\,dx\Big|\;\lesssim\;|\log\varepsilon|^{-1}\,.$$

证明。我们按照引理证明中的方法进行 3.6。首先注意，对于 ε 充分小且 $x\in J_\varepsilon$

$$|g(x)|\;\geq\;\frac{|\mathrm{w}_2|^2}{\frac{3\beta\varepsilon}{2}\,(\log\,(\varepsilon/2))^2}\;\geq\;\frac{|\mathrm{w}_2|^2}{\frac{3\beta\varepsilon}{2}\,(2\log\varepsilon)^2}$$

因此使得

$$K_2(x,\varepsilon)^2\;=\;\varepsilon^4g(x)^2\;\geq\;\frac{4|\mathrm{w}_2|^4}{9\beta^2}\frac{\varepsilon^2}{(2\log\varepsilon)^4}=c(\varepsilon).$$

现在，借助引理 3.11 和 3.12我们估计

$$\Big|\frac{1}{F(x,\varepsilon)}-\frac{1}{K(x,\varepsilon)}\Big|\;\lesssim\;\frac{|K(x,\varepsilon)-F(x,\varepsilon)|}{|K(x,\varepsilon)|^2}\;\lesssim\;\frac{\varepsilon|\log\varepsilon|^{-3}}{(x-x_\varepsilon)^2+c(\varepsilon)^2}\,,$$

其中我们还使用了方程（3.35）。因此

$$\int_{I_\varepsilon} \Big|\frac{1}{F(x,\varepsilon)} - \frac{1}{K(x,\varepsilon)}\Big|\,dx \;\lesssim\; \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon|\log\varepsilon|^{-3}}{(x-x_\varepsilon)^2+c(\varepsilon)^2}\,dx \;=\; \frac{\pi\varepsilon|\log\varepsilon|^{-3}}{c(\varepsilon)} \;\lesssim\; |\log\varepsilon|^{-1},$$

且结论由（3.23）得出。 □

与上文类似，现在令

$$\gamma_\varepsilon = \varepsilon^2\mathfrak{g}(x_\varepsilon), \tag{3.58}$$

并注意到

$$\gamma_\varepsilon \;\sim\; \frac{\varepsilon}{(\log\varepsilon)^2}\,. \tag{3.59}$$

继续进行，像之前一样令

$$L(x,\varepsilon) = L_1(x,\varepsilon) + iL_2(x,\varepsilon) = x_\varepsilon - x - i\gamma_\varepsilon, \tag{3.60}$$

引理 3.14。取足够小的 ε

$$\sup_{t>0}\Big|\int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\Big[\frac{1}{K(x,\varepsilon)} - \frac{1}{L(x,\varepsilon)}\Big]\,dx\Big| \;\lesssim\; |\log\varepsilon|^{-1}. \tag{3.61}$$

证明。 我们沿用引理 3.7 的证明步骤。由于

$$L_1(x,\varepsilon) - K_1(x,\varepsilon) = \varepsilon^2(f(x)-f(x_\varepsilon)) - \varepsilon^3(h(x)-h(x_\varepsilon)),$$

and

$$L_2(x,\varepsilon) - K_2(x,\varepsilon) = \varepsilon^2(\mathfrak{g}(x)-\mathfrak{g}(x_\varepsilon)),$$

由 (3.56) 可得

$$|L(x,\varepsilon) - K(x,\varepsilon)| \;\le\; \varepsilon^2 \sup_{I_\varepsilon}|f' - \varepsilon h' + ig'||x-x_\varepsilon| \;\lesssim\; |\log\varepsilon|^{-1}|x-x_\varepsilon|\,. \tag{3.62}$$

并且

$$\big|L(x,\varepsilon) - K(x,\varepsilon) - \varepsilon^2[f'(x_\varepsilon) - \varepsilon h'(x_\varepsilon) + ig'(x_\varepsilon)]\,(x-x_\varepsilon)\big| \;\lesssim\; \frac{(x-x_\varepsilon)^2}{\varepsilon|\log\varepsilon|}\,.$$

由于 $(x-x_\varepsilon)^2 \le |L(x,\ \varepsilon)|^2$，最后一个方程结合 (3.56) 可推出

$$\begin{aligned}\Big|\int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\,\frac{L(x,\varepsilon)-K(x,\varepsilon)}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx\Big| &\lesssim |\log\varepsilon|^{-1}\Big|\int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\,\frac{x-x_\varepsilon}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx\Big| + \varepsilon^{-1}|\log\varepsilon|^{-1}\int_{I_\varepsilon}\frac{(x-x_\varepsilon)^2}{|L(x,\varepsilon)|^2}\,dx\\ &\lesssim |\log\varepsilon|^{-1}\Big|\int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\,\frac{x-x_\varepsilon}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx\Big| + |\log\varepsilon|^{-1}.\end{aligned}$$

对于剩余的积分，我们得到：

$$\begin{aligned}\Big|\int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\,\frac{x-x_\varepsilon}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx\Big| &= \Big|\int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\Big(\frac{1}{L(x,\varepsilon)} + \frac{i\gamma_\varepsilon}{L^2(x,\varepsilon)}\Big)\,dx\Big|\\ &\le \Big|\int_{I_\varepsilon}\frac{e^{-itx}}{L(x,\varepsilon)}\,dx\Big| + \int_{\mathbb{R}}\frac{\gamma_\varepsilon}{(x-x_\varepsilon)^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dx \;\lesssim\; 1,\end{aligned}$$

这里用到了 引理B.1 用于估计第一项（如引理3.7的证明中）。综上，我们得到 nd

$$\Big|\int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\,\frac{L(x,\varepsilon)-K(x,\varepsilon)}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx\Big| \;\lesssim\; |\log\varepsilon|^{-1}\,. \tag{3.63}$$

另一方面，利用（3.37）、（3.59）和（3.62），我们得到

$$\int_{I_\varepsilon} \frac{|L(x,\varepsilon)-K(x,\varepsilon)|^2}{|L(x,\varepsilon)|^2|K(x,\varepsilon)|}\,dx \lesssim |\log\varepsilon|^{-2}\int_{I_\varepsilon}\frac{|x-x_\varepsilon|}{|L(x,\varepsilon)|^2}\,dx = |\log\varepsilon|^{-2}\int_0^{\frac{\beta\varepsilon}{4}}\frac{2|y|}{y^2+\gamma_\varepsilon^2}\,dy$$
$$= |\log\varepsilon|^{-2}\,\log\Big(1+\frac{\beta^2\varepsilon^2}{16\,\gamma_\varepsilon^2}\Big) = o(|\log\varepsilon|^{-1})\,.$$

因此，由方程（3.42）和（3.63）可得此结论。 □

最后，我们需要一个引理 3.8的类似结果。

引理 3.15。当 ε 足够小时

$$\sup_{t>0}\big|p_\varepsilon(t)-e^{-it(x_\varepsilon-i\gamma_\varepsilon)}\big| \lesssim |\log\varepsilon|^{-1}\,.$$

证明。 根据引理 3.13、3.14和方程（3.46），

$$\big|p_\varepsilon(t)-e^{-it(x_\varepsilon-i\gamma_\varepsilon)}\big| \lesssim |\log\varepsilon|^{-1}+\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus I_\varepsilon}\frac{\gamma_\varepsilon}{(x-x_\varepsilon)^2+\gamma_\varepsilon^2}\,dx\,.$$

由方程（3.59，右侧最后一项满足

$$\int_{\mathbb{R}\setminus I_\varepsilon}\frac{\gamma_\varepsilon}{(x-x_\varepsilon)^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dx = \int_{\frac{\beta\varepsilon}{4}}^{\infty}\frac{2\gamma_\varepsilon}{y^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dy \le \int_{\frac{\beta\varepsilon}{4}}^{\infty}\frac{2\gamma_\varepsilon}{y^2}\,dy = \frac{8\gamma_\varepsilon}{\beta\varepsilon} = \mathcal{O}(|\log\varepsilon|^{-2})\,.$$

由此得证。 □

定理的证明 **3.10**。 仿照 Hunziker 在定理 3.1 的证明中的论证，我们得到

$$\big|\langle\psi_0\,,\,e^{-itP_-(A,\varepsilon)}\,\psi_0\rangle - p_\varepsilon(t)\big| \lesssim |\log\varepsilon|^{-1}\,.$$

现在，定理的表述由引理 3.15得出。 □

在 $\mathrm{w}_2=0$ 的情况下，我们有如下结果。

定理 3.16。 设 $\alpha=2$。设 B满足假设（2.1），并设 V使得 $V\lesssim\langle\cdot\rangle^{-\rho}$对于某个 $\rho>6$。此外，假设（3.4）成立。若 $\mathrm{w}_2=0$，则

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\big|\langle\psi_0,\,e^{-itP_-(A,\varepsilon)}\,\psi_0\rangle - e^{-it(x_\varepsilon-i\gamma_\varepsilon)}\big| = 0, \tag{3.64}$$

对 $t>0$一致，其中 x_ε 和 γ_ε 满足

$$x_\varepsilon = \beta\varepsilon\big(1+\mathcal{O}(\varepsilon\log\varepsilon)\big) \tag{3.65}$$

$$\gamma_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{4}\Big(|\mathrm{w}_1|^2+\frac{\pi^2\beta^2}{\|e^h\|_2^2}\Big). \tag{3.66}$$

注 3.17。 与注 3.9 中一样，我们注意到，若 B和 V均为径向的，则方程（2.22）蕴含 $\mathrm{w}_1=\mathrm{w}_2=0$。定理3.16于是给出

$$\gamma_\varepsilon = \varepsilon^2\,\frac{\pi^2\beta^2}{4\|e^h\|_2^2}\,.$$

为证明定理 3.16 ，我们采用与上文类似的方法。设

$$a_1 = \langle \psi_0, V\,\mathcal{K}\,V\,\psi_0 \rangle\,. \qquad a_2 = \langle \psi_0, V\,\mathrm{T}_0\,V\,\psi_0 \rangle\,.$$

注意到 $\mathcal{K}$ 和 T_0 是自伴的，参见命题2.5，因此 a_1， $a_2 \in \mathbb{R}$。由于 $\mathrm{w}_2 = 0$，方程 (2.20)、(3.9) 和 (3.10) 可得

$$F(x,\varepsilon) = \beta\varepsilon - x + \varepsilon^2 a_1\,(\log x - i\pi) - \varepsilon^2 a_2 + o(\varepsilon^2),$$

因此我们令

$$K(x,\varepsilon) = \beta\varepsilon - x + \varepsilon^2 a_1\,(\log x - i\pi) - \varepsilon^2 a_2, \qquad \gamma_\varepsilon = a_1 \pi \varepsilon^2, \tag{3.67}$$

并像上文一样，将 K_1 和 K_2 分别记为 K的实部和虚部。对引理3.5 稍作修改即可证明，对于 ε 充分小，存在唯一的 $x_\varepsilon \in J_\varepsilon$ 使得 $K_1(x_\varepsilon,\ \varepsilon) = 0$，并且

$$x_\varepsilon = \beta\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \log \varepsilon). \tag{3.68}$$

此外， K_1 满足 (3.37)。我们再次按照 (3.57) 定义 I_ε ，因此有

引理 3.18。对于 ε充分小

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \Big| p_\varepsilon(t) - \frac{1}{\pi} \int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\,\mathrm{Im}\Big[\,\frac{1}{K(x,\varepsilon)}\,\Big]\,dx \Big| = 0,$$

在 t 上一致成立。回忆一下， $p_\varepsilon(t)$ 由 (3.23) 给出。

证明。 与引理 3.6 的证明中一样，我们对 $x \in I_\varepsilon$

$$\Big|\frac{1}{F(x,\varepsilon)} - \frac{1}{K(x,\varepsilon)}\Big| \;\lesssim\; \frac{|K(x,\varepsilon) - F(x,\varepsilon)|}{|K(x,\varepsilon)|^2} \;=\; \frac{o(\varepsilon^2)}{(x - x_\varepsilon)^2 + \gamma_\varepsilon^2}\,,$$

这意味着

$$\int_{I_\varepsilon} \Big|\frac{1}{F(x,\varepsilon)} - \frac{1}{K(x,\varepsilon)}\Big|\,dx \;\lesssim\; \int_{\mathbb{R}} \frac{o(\varepsilon^2)}{(x - x_\varepsilon)^2 + \gamma^2(\varepsilon)}\,dx \;= o(1),$$

参见（3.67）。 □

引理 3.19。 设 $L(x,\varepsilon)$ 由 (3.60) 给出。那么当 ε 充分小时

$$\sup_{t>0} \Big| \int_{I_\varepsilon} e^{-itx} \Big[\,\frac{1}{K(x,\varepsilon)} - \frac{1}{L(x,\varepsilon)}\,\Big]\,dx \Big| \;\lesssim\; \varepsilon.$$

证明。 如上所述，我们沿用引理 3.7 的证明。对 (3.40) 和 (3.41) 作直接修改可得

$$|L(x,\varepsilon) - K(x,\varepsilon)| \;\lesssim\; \varepsilon |x - x_\varepsilon|\,. \tag{3.69}$$

and

$$\Big|L(x,\varepsilon) - K(x,\varepsilon) + \frac{a_1 \varepsilon^2}{x_\varepsilon}\,(x - x_\varepsilon)\Big| \;\lesssim\; (x - x_\varepsilon)^2.$$

因此由（3.68），

$$\Big| \int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\,\frac{L(x,\varepsilon) - K(x,\varepsilon)}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx \Big| \;\lesssim\; \varepsilon \Big| \int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\,\frac{x - x_\varepsilon}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx \Big| + \int_{I_\varepsilon} \frac{(x - x_\varepsilon)^2}{|L(x,\varepsilon)|^2}\,dx \;\lesssim\; \varepsilon \Big| \int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\,\frac{x - x_\varepsilon}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx \Big| + \varepsilon.$$

对于剩余的积分，我们再次使用引理 B.1 得到

$$\begin{aligned} \Big| \int_{I_\varepsilon} e^{-itx}\,\frac{x - x_\varepsilon}{L^2(x,\varepsilon)}\,dx \Big| &= \Big| \int_{I_\varepsilon} e^{-itx} \Big(\frac{1}{L(x,\varepsilon)} + \frac{i\gamma_\varepsilon}{L^2(x,\varepsilon)} \Big)\,dx \Big| \\ &\le \Big| \int_{I_\varepsilon} \frac{e^{-itx}}{L(x,\varepsilon)}\,dx \Big| + \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma_\varepsilon}{(x - x_\varepsilon)^2 + \gamma^2(\varepsilon)}\,dx \;\lesssim\; 1, \end{aligned}$$

另一方面，(3.69) 蕴含

$$\int_{I_\varepsilon} \frac{|L(x,\varepsilon)-K(x,\varepsilon)|^2}{|L(x,\varepsilon)|^2|K(x,\varepsilon)|}\,dx \lesssim \varepsilon^2 \int_{I_\varepsilon} \frac{|x-x_\varepsilon|}{|L(x,\varepsilon)|^2}\,dx = |\log\varepsilon|^{-2}\int_0^{\frac{\beta\varepsilon}{4}} \frac{2|y|}{y^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dy = \varepsilon^2\,\log\Big(1+\frac{\beta^2\,\varepsilon^2}{16\,\gamma^2(\varepsilon)}\Big) = o(\varepsilon)\,.$$

鉴于方程 (3.42)，证明至此完成。 □

定理 **3.16** 的证明。 由于

$$\int_{\mathbb{R}\setminus I_\varepsilon} \frac{\gamma_\varepsilon}{(x-x_\varepsilon)^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dx = \int_{\frac{\beta\varepsilon}{4}}^{\infty} \frac{2\gamma_\varepsilon}{y^2+\gamma^2(\varepsilon)}\,dy \le \int_{\frac{\beta\varepsilon}{4}}^{\infty} \frac{2\gamma_\varepsilon}{y^2}\,dy = \mathcal{O}(\varepsilon)\,,$$

通过仿照引理 3.15 的证明，我们得出

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \big|p_\varepsilon(t) - e^{-it(x_\varepsilon - i\gamma_\varepsilon)}\big| = 0,$$

关于 $t>0$一致。接着应用 Hunziker 论证可得方程 (3.64)。为完成证明，还需回顾 (3.68)、(3.67)，并注意到

$$a_1 = \frac{1}{4\pi}\left(|\mathrm{w}_1|^2 + \frac{\pi^2\beta^2}{\|e^h\|_2^2}\right),$$

这由 (2.21) 以及 $\mathrm{w}_2=0$ 这一事实（根据假设）可得。 □

3.4.由反常磁矩诱导的共振。具有自旋 $1/2$ 和磁矩 g 的基本费米子的二维泡利算子表示为

$$P(A,g) = \begin{pmatrix} P_-(A,g) & 0 \\ 0 & P_+(A,g)\end{pmatrix}, \qquad P_\pm(A,g) = (i\nabla + A)^2 \pm \frac{g}{2}B$$

在 $L^2(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C}^2)$ 。狄拉克理论预言，自旋为 $1/2$ 的费米子应具有磁矩 $g=2$。注意到 $P(A,\ 2)=P(A)$ ，见方程（1.1）。然而，某些粒子的磁矩可能与该值略有不同。可以通过写成 ε 来用参数 $g=2-2\varepsilon$表示磁矩的异常。于是

$$P_-(A,g) = (i\nabla + A)^2 - (1-\varepsilon)B.$$

且有

推论 3.20。 设 $1<\alpha<2$ 并设 B 满足假设（2.1）。假设 $\varepsilon = \frac{2-g}{2} > 0$。那么存在一个常数 C 使得当 ε 足够小时

$$\sup_{t>0} \big|\langle \psi_0,\, e^{-itP_-(A,g)}\,\psi_0\rangle - e^{-it(x_\varepsilon - i\gamma_\varepsilon)}\big| \le C\,\varepsilon^\mu, \tag{3.70}$$

其中 x_ε 和 γ_ε 满足

$$x_\varepsilon = \beta\varepsilon\big(1+\mathcal{O}(\varepsilon^\nu)\big)$$
$$\gamma_\varepsilon = \eta\,\beta^\alpha\,\varepsilon^\alpha\,\big(1+\mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1})\big) + \sigma\,|\mathrm{w}|^2\,\beta^{1-\alpha}\,\varepsilon^{3-\alpha}\,\big(1+\mathcal{O}(\varepsilon^{2-\alpha})\big)$$

其中 η，σ，μ 由式（3.13）、（1.8）和（3.16）给出，并且

$$\beta = \langle \psi_0, B\,\psi_0\rangle, \qquad \mathrm{w} = \langle \psi_0, B\,\varphi\rangle\,. \tag{3.71}$$

证明。由于 $P_-(A)\psi_0 = (i\nabla+A)^2\psi - B\,\psi_0 = 0$，Hardy不等式

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^2}{1+|x|^2\,\log^2|x|}\,dx \lesssim \|(i\nabla+A)u\|^2 \qquad u\in H^1(\mathbb{R}^2), \tag{3.72}$$

对于任意满足下式的 $A\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，$\operatorname{rot} A \not\equiv 0$，见 [14, 23, 13], 可推出

$$\beta = \langle \psi_0, (i\nabla+A)^2\,\psi_0\rangle = \|(i\nabla+A)\psi_0\|_2^2 > 0.$$

因此，我们可以应用定理3.1 ，其中 $V = B$，结论由此得证。 □

推论 **3.21.** 设 $\alpha = 2$。设 B 满足假设（2.1），并设 β 由（3.71）给出。则

$$\lim_{g \searrow 2} \left| \langle \psi_0, e^{-itP_-(A,g)} \psi_0 \rangle - e^{-it(x_\varepsilon - i\gamma_\varepsilon)} \right| = 0 \tag{3.73}$$

关于 $t > 0$ 一致，其中 $\varepsilon = \frac{2-g}{2}$，$x_\varepsilon = \beta\varepsilon\big[1 + \mathcal{O}\big(|\log \varepsilon|^{-1}\big)\big]$，且

$$\gamma_\varepsilon = \frac{\varepsilon\, |\langle \psi_0, B\, \varphi_2 \rangle|^2}{(\log \varepsilon)^2} \left[1 + \mathcal{O}\big(|\log \varepsilon|^{-1}\big)\right] \qquad \text{if} \quad \langle \psi_0, B\, \varphi_2 \rangle \neq 0,$$

$$\gamma_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{4} \Big(\big|\langle \psi_0, B\, \varphi_1 \rangle\big|^2 + \frac{\pi^2 \beta^2}{\|e^h\|_2^2} \Big) \qquad \text{if} \quad \langle \psi_0, B\, \varphi_2 \rangle = 0.$$

证明。 由于 $\beta > 0$，这可由定理 3.10 和 3.16 在 $V = B$ 的条件下应用得到。 □

4. 由简并特征值产生的共振

本节讨论未扰动算子在阈值处具有简并特征值时产生的共振。根据(1.4)，当 $P(A)$ 满足 $\alpha > 2$ 时，零不再是 $P_0 V P_0$ 的单特征值。为了研究共振行为，我们需要分离出一个零特征函数。因此，自然要考虑 $P_0 V P_0$ 的特征函数。于是，我们考虑如下产生的共振：

$$\langle \psi_0^{(V)}, e^{-itP_-(A,\varepsilon)} \psi_0^{(V)} \rangle$$

其中 $\psi_0^{(V)} \in P_0 L^2(\mathbb{R}^2)$ 是 简单的 特征函数，对应于 $P_0 V P_0$。与 [11], 类似，为了处理这种情况，我们两次应用SLFG公式：首先得到预解式在 $P_0 L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的限制，然后再次应用该公式以获得所需的矩阵元。

明确地说，算子 $P_0 V P_0$作为作用于 $P_0 L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的算子，是一个秩至多为 N （回顾 1.4），并且我们作出以下假设。

假设**4.1**。算子 $P_0 V P_0$ 具有一个单一的正特征值 $\kappa > 0$，其（归一化）特征函数为$\psi_0^{(V)}$。我们让 P_1 表示投影到由 $\psi_0^{(V)}$）和 $Q_1 = P_0 - P_1$张成的子空间上的投影。

4.1. SLFG公式在简并情形中的应用。 与非简并情形一样，我们取$\mathcal{H}_1 = P_0 L^2(\mathbb{R}^2)$，从而（根据（3.7））

$$S(z) = \varepsilon P_0 V P_0 - z P_0 - \varepsilon^2 P_0 v U \big(G(z) - \varepsilon G(z)\, (U + \varepsilon G(z))^{-1}\, G(z)\big) U v P_0$$

其中 $G(z)$ 如（3.10）中所定义。为简化记号，我们令

$$\widetilde{S}(z) = P_0 v U \big(G(z) - \varepsilon G(z)\, (U + \varepsilon G(z))^{-1}\, G(z)\big) U v P_0. \tag{4.1}$$

现在我们写

$$S(z) = \begin{pmatrix} s_{11}(z) & s_{12}(z) \\ s_{21}(z) & s_{22}(z) \end{pmatrix}$$

其中

$$s_{11}(z) = \langle \psi_0^{(V)}, S(z) \psi_0^{(V)} \rangle,$$

因此，根据两次应用的 SLFG公式，

$$\begin{aligned}
&\left\langle \psi_0^{(V)}, \left(P_-(A,\varepsilon)-z\right)^{-1}\psi_0^{(V)}\right\rangle = \left\langle \psi_0^{(V)}, S(z)^{-1}\psi_0^{(V)}\right\rangle \\
&\quad = \left(s_{11}(z)-s_{12}(z)s_{22}(z)^{-1}s_{21}(z)\right)^{-1} \\
&\quad = \left(\kappa\varepsilon - z - \varepsilon^2\left\langle \psi_0^{(V)}, \widetilde{S}(z)\psi_0^{(V)}\right\rangle - \varepsilon^4\left\langle \psi_0^{(V)}, \widetilde{S}(z)Q_1\left(\varepsilon Q_1VQ_1 - zQ_1 - \varepsilon^2Q_1\widetilde{S}(z)Q_1\right)^{-1}Q_1\widetilde{S}(z)\psi_0^{(V)}\right\rangle\right)^{-1} \\
&\quad = \widetilde{F}(z,\varepsilon)^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2. 非整数磁通。 对于 $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ， 我们回顾分解式（2.17），并结合命题2.3 ， 记

$$\widetilde{H}(x) = \frac{\omega(1+\alpha')\,x^{\alpha'-1}}{1+c_1\omega(1+\alpha')\,x^{\alpha'}}\,\psi\langle\psi,\cdot\rangle - \frac{\zeta(\alpha')\,x^{-\alpha'}}{1+\varrho\,\zeta(\alpha')\,x^{1-\alpha'}}\,\varphi\langle\varphi,\cdot\rangle. \tag{4.3}$$

and

$$\widetilde{J}_\varepsilon := \left(\frac{\kappa\varepsilon}{2}, \frac{3\kappa\varepsilon}{2}\right) \tag{4.4}$$

我们还定义系数

$$\mathrm{w}_3 = \left\langle V\psi_0^{(V)}, \psi\right\rangle, \qquad \mathrm{w}_4 = \left\langle V\psi_0^{(V)}, \varphi\right\rangle, \tag{4.5}$$

and

$$\widetilde{\nu} = \begin{cases} \mu & \text{if } \ \mathrm{w}_3 \neq 0 \neq \mathrm{w}_4, \\ \alpha' & \text{if } \ \mathrm{w}_3 \neq 0 = \mathrm{w}_4, \\ 1-\alpha' & \text{if } \ \mathrm{w}_3 = 0 \neq \mathrm{w}_4, \ , \end{cases} \tag{4.6}$$

其中 μ由（1.8）定义。最后，令

$$\widetilde{K}(x,\varepsilon) = \kappa\varepsilon - x - \varepsilon^2\left\langle \psi_0^{(V)}, V\widetilde{H}(x)V\psi_0^{(V)}\right\rangle. \tag{4.7}$$

引理 4.2。当 $\varepsilon > 0$ 充分小时

$$\sup_{x\in\widetilde{J}_\varepsilon}\left|\widetilde{F}(x,\varepsilon) - \widetilde{K}(x,\varepsilon)\right| \lesssim \varepsilon^{1+2\widetilde{\nu}} + \varepsilon^2.$$

~这里 F（x， ε）的定义方式与 F（x， ε）相同，见方程（3.26）。

证明。注意到

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(x,\varepsilon) - \widetilde{K}(x,\varepsilon) &= \varepsilon^3\left\langle \psi_0^{(V)}, vUG(x)\left(U+\varepsilon G(x)\right)^{-1}G(x)Uv\psi_0^{(V)}\right\rangle \\
&\quad - \varepsilon^4\left\langle \psi_0^{(V)}, \widetilde{S}(x)Q_1\left(\varepsilon Q_1VQ_1 - xQ_1 - \varepsilon^2Q_1\widetilde{S}(x)Q_1\right)^{-1}Q_1\widetilde{S}(x)\psi_0^{(V)}\right\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

我们分别处理上述两项。第一项的处理方式与引理 3.4 中相同：当 ε 足够小时，$(U+\varepsilon G(x))$ 有界可逆，因此由 (2.16),

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3\left|\left\langle \psi_0^{(V)}, vUG(x)\left(U+\varepsilon G(x)\right)^{-1}G(x)Uv\psi_0^{(V)}\right\rangle\right| &\lesssim \varepsilon^3\left\|v\widetilde{H}(x)V\psi_0^{(V)}\right\|^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \lesssim \varepsilon^3\left|\mathrm{w}_3\varepsilon^{\alpha'-1} + \mathrm{w}_4\varepsilon^{-\alpha'}\right|^2 \\
&\lesssim \varepsilon^{1+2\widetilde{\nu}} + \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

至于第二项，注意到

$$\varepsilon^2 \sup_{x\in\widetilde{J}_\varepsilon}\|\widetilde{S}(x)\|_{2\to2} \lesssim \varepsilon^{1+\mu}$$

~且对于充分小的 ε 以及任意 $x \in J_\varepsilon$，

$$\mathrm{dist}(x, \mathrm{spec}(Q_1VQ_1)) = \mathrm{dist}\left(x, \mathrm{spec}(P_0VP_0)\setminus\{\kappa\}\right) > \varepsilon.$$

Thus

$$\left\|\left(\varepsilon Q_1VQ_1 - xQ_1 - \varepsilon^2Q_1\widetilde{S}(x)Q_1\right)^{-1}\right\|_{2\to2} \lesssim \frac{1}{\varepsilon}, \tag{4.8}$$

这意味着

$$\varepsilon^4 \left|\langle \psi_0^{(V)}, \widetilde{S}(x) Q_1 \big(\varepsilon Q_1 V Q_1 - x Q_1 - \varepsilon^2 Q_1 \widetilde{S}(x) Q_1\big)^{-1} Q_1 \widetilde{S}(x) \psi_0^{(V)} \rangle\right| \lesssim \varepsilon^3 \big\| \widetilde{S}(x) \psi_0^{(V)} \big\|^2 .$$

再次利用 $U + \varepsilon G(x)$ 在 ε 足够小时有界可逆这一事实，直接计算可得，对于这样的 ε

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \big\| \widetilde{S}(x) \psi_0^{(V)} \big\|^2 &\lesssim \varepsilon^3 \big\| V \widetilde{H}(x) V \psi_0^{(V)} \big\|^2 + \varepsilon^4 \big\| V \widetilde{H}(x) V \psi_0^{(V)} \big\| \big\| V \widetilde{H}(x) v (U + \varepsilon G(z))^{-1} v \widetilde{H}(x) V \psi_0^{(V)} \big\| \\ &\quad + \varepsilon^5 \big\| V \widetilde{H}(x) v (U + \varepsilon G(x))^{-1} v \widetilde{H}(x) \psi_0^{(V)} \big\|^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &\lesssim \varepsilon^{1+2\widetilde{\nu}} + \varepsilon^{1+3\widetilde{\nu}} + \varepsilon^{1+4\widetilde{\nu}} + \varepsilon^2 \lesssim \varepsilon^{1+2\widetilde{\nu}} + \varepsilon^2 . \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

现在定义

$$\widetilde{\eta} = \frac{\pi^2 |d|^2}{4^{\alpha'} \Gamma^2(1+\alpha')} , \qquad \widetilde{\sigma} = \frac{4^{\alpha'-1}}{\Gamma^2(1-\alpha')} . \tag{4.9}$$

and

$$\widetilde{g}(x) = \frac{\widetilde{\eta} \, |\mathrm{w}_3|^2 \, x^{\alpha'-1}}{|1 + c_1 \omega (1+\alpha') \, x^{\alpha'}|^2} + \frac{\widetilde{\sigma} \, |\mathrm{w}_4|^2 \, x^{-\alpha'}}{|1 + \varrho \, \zeta(\alpha') \, x^{1-\alpha'}|^2} , \tag{4.10}$$

则可陈述

定理 4.3。 设 $2 < \alpha \notin \mathbb{Z}$ 并设 B 满足假设 2.1。此外，假设 $V \lesssim \langle \cdot \rangle^{-\rho}$ 对于某个 $\rho > 6$。设 $\psi_0^{(V)}$ 是 $\mathrm{P}_0 V \mathrm{P}_0$ 的一个特征函数，且满足假设 4.1，并假设

$$|\mathrm{w}_3|^2 + |\mathrm{w}_4|^2 > 0. \tag{4.11}$$

那么，当 ε 充分小时，我们有

$$\sup_{t>0} \left| \langle \psi_0^{(V)}, \, e^{-itP_-(A,\varepsilon)} \, \psi_0^{(V)} \rangle - e^{-it(x_\varepsilon - i\gamma_\varepsilon)} \right| \lesssim \varepsilon^{\mu},$$

其中

$$x_\varepsilon = \kappa \, \varepsilon \big(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{\widetilde{\nu}})\big)$$

and

$$\gamma_\varepsilon = \varepsilon^2 \, \widetilde{g}(x_\varepsilon). \tag{4.12}$$

回想一下，系数 w_3 和 w_4 在（4.5）中定义。

证明。设

$$\widetilde{f}(x) = \frac{\mathrm{Re}(\omega(1+\alpha')) \, x^{\alpha'-1} + |\omega(1+\alpha')|^2 \, x^{2\alpha'-1}}{|1 + c_1 \omega (1+\alpha') \, x^{\alpha'}|^2} \, |\mathrm{w}_3|^2 - \frac{\mathrm{Re}(\zeta(\alpha')) \, x^{-\alpha'} + \varrho \, |\zeta(\alpha')|^2 \, x^{1-2\alpha'}}{|1 + \varrho \, \zeta(\alpha') \, x^{1-\alpha'}|^2} \, |\mathrm{w}_4|^2 . \tag{4.13}$$

由（3.29）和（2.15），我们得到

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_1(x,\varepsilon) &= \mathrm{Re}\big(\widetilde{K}(x,\varepsilon)\big) = \varepsilon\kappa - x - \varepsilon^2 \widetilde{f}(x) \\ \widetilde{K}_2(x,\varepsilon) &= \mathrm{Im}\big(\widetilde{K}(x,\varepsilon)\big) = -\varepsilon^2 \, \widetilde{g}(x) \end{aligned} \tag{4.14}$$

˜对所有 $x > 0$。注意，在非简并情形下，当 $1 < \alpha < 2$ 时，我们有 $\alpha = 1 + \alpha'$。因此，上述定义的函数 $\widetilde{g}$，f与其（非简并）对应函数（3.14）、（3.33）具有相同的结构，只是系数不同。从这里开始，我们便可以逐步重复非简并情形分析中的论证。特别是，对引理 3.5 作直接修改即可得到

$$\widetilde{K}_1(x,\varepsilon) = \kappa\varepsilon - x + \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\widetilde{\nu}}). \tag{4.15}$$

~ ~此外，当 ε 足够小时，存在唯一的 $x_\varepsilon \in J_\varepsilon$，使得 $K_1(x_\varepsilon, \varepsilon) = 0$。取此 x_ε，我们定义

$$\widetilde{I}_\varepsilon = \Big[x_\varepsilon - \frac{\kappa\varepsilon}{4},\, x_\varepsilon + \frac{\kappa\varepsilon}{4}\Big],$$

and

$$\widetilde{p}_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\widetilde{I}_\varepsilon} e^{-itx}\ \mathrm{Im}\Big[\ \frac{1}{\widetilde{F}(x,\varepsilon)}\Big]\,dx\,.$$

根据引理3.6-3.8 的证明，我们由此得出

$$\sup_{t>0}\big|\widetilde{p}_\varepsilon(t) - e^{-it(x_\varepsilon - i\gamma_\varepsilon)}\big| \lesssim \varepsilon^\mu.$$

对 ε 足够小时成立。为证明该断言，只需应用 Hunziker 论证，如定理3.1的证明中所述，特别参见方程（3.47）-（3.49）。□

注 4.4。约束条件 $\kappa > 0$ 在假设 4.1 中取代了非简并情形中的条件 3.4 。还要注意，定理 4.3 和方程（4.10）意味着

$$\gamma_\varepsilon = \widetilde{\eta}\,\kappa^{\alpha'-1}\,|\mathrm{w}_3|^2\,\varepsilon^{1+\alpha'}\big(1+\mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha'})\big) + \widetilde{\sigma}\,\kappa^{-\alpha'}|\mathrm{w}_4|^2\,\varepsilon^{2-\alpha'}\,\big(1+\mathcal{O}(\varepsilon^{1-\alpha'})\big).$$

4.3. 整数磁通。给定 $\mathrm{P}_0 V \mathrm{P}_0$ 的特征函数 $\psi_0^{(V)}$，我们记

$$\mathrm{w}_6 = \big\langle V\psi_0^{(V)},\, \varphi_2\big\rangle \tag{4.16}$$

与单特征值的情形类似，我们首先证明当 $\mathrm{w}_6 \neq 0$ 时的结果。

定理 4.5。设 $2 < \alpha \in \mathbb{Z}$ 且设 B 满足假设 2.1。此外，假设 $V \lesssim \langle\cdot\rangle^{-\rho}$ 对某个$\rho > 6$成立。设 $\psi_0^{(V)}$ 是 $\mathrm{P}_0 V \mathrm{P}_0$ 的一个特征函数，满足假设 4.1，并假设 $\mathrm{w}_6 \neq 0$。那么，当 ε 充分小时，我们有

$$\sup_{t>0}\big|\big\langle\psi_0^{(V)},\, e^{-itP_-(A,\varepsilon)}\,\psi_0^{(V)}\big\rangle - e^{-it(x_\varepsilon - i\gamma_\varepsilon)}\big| \lesssim |\log\varepsilon|^{-1},$$

其中 $x_\varepsilon = \kappa\,\varepsilon\big(1+\mathcal{O}(|\log\ \varepsilon|^{-1})\big)$，且其中

$$\gamma_\varepsilon = \frac{\varepsilon\,|\mathrm{w}_6|^2}{\kappa\,(\log\varepsilon)^2}\,\big[1+\mathcal{O}\big(|\log\varepsilon|^{-1}\big)\big]\,.$$

证明。由方程 (4.1) 和预解式展开 (2.20)，可推得当 ε充分小时，

$$\sup_{x\in\widetilde{J}_\varepsilon}\|\widetilde{S}(x)\|_{2\to2} \lesssim \frac{1}{\varepsilon|\log\varepsilon|}$$

预解式方程结合 (4.8) 因而表明，作为作用在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的有界算子，

$$\big(\varepsilon Q_1 V Q_1 - xQ_1 - \varepsilon^2 Q_1\widetilde{S}(x)Q_1\big)^{-1} = \big(\varepsilon Q_1 V Q_1 - xQ_1\big)^{-1} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\varepsilon|\log\varepsilon|}\Big),$$

其中误差项关于 $x \in \widetilde{J}_\varepsilon$一致。因此，记 $\Phi(x) = Q_1\widetilde{S}(x)\psi_0^{(V)}$ 由 (4.2) 可得

$$\widetilde{F}(x,\varepsilon) = \kappa\varepsilon - x - \varepsilon^2\big\langle\psi_0^{(V)}, \widetilde{S}(x)\psi_0^{(V)}\big\rangle - \varepsilon^4 k(x;\varepsilon) + \mathcal{O}\big(\varepsilon\,|\log\varepsilon|^{-3}\big), \tag{4.17}$$

其中我们简写了

$$k(x;\varepsilon) = \big\langle\Phi(x), (\varepsilon Q_1 V Q_1 - xQ_1)^{-1}\,\Phi(x)\big\rangle\,.$$

注意到 $k(x,\varepsilon) \in \mathbb{R}$ 对于任意 $x > 0$。类似于（3.53），我们现在定义

$$\widehat{\mathfrak{g}}(x) = \frac{|\mathrm{w}_6|^2}{x\,(\log x)^2}\,, \qquad \widehat{f}(x) = \frac{\widehat{\mathfrak{g}}(x)}{\pi}\,(\log x + m_\circ), \qquad \widehat{h}(x) = \frac{|\mathrm{w}_6|^2\,\langle\varphi_2, V\varphi_2\rangle}{\pi^2\,(x\log x)^2}, \tag{4.18}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$和 $K(x;\varepsilon) = K_1(x;\varepsilon) + iK_1(x;\varepsilon)$ 以及

$$\widehat{K}_1(x;\varepsilon) = \kappa\varepsilon - x - \varepsilon^2\,\widehat{f}(x) + \varepsilon^3\,\widehat{h}(x) - \varepsilon^4 k(x;\varepsilon)$$
$$\widehat{K}_2(x;\varepsilon) = -\varepsilon^2\,\widehat{\mathfrak{g}}(x).$$

由方程 (4.17) 可得

$$\sup_{x\in\widetilde{J}_\varepsilon} |\widetilde{F}(x,\varepsilon) - \widehat{K}(x,\varepsilon)| \;\lesssim\; \varepsilon\,|\log\varepsilon|^{-3}\,. \tag{4.19}$$

这取代了非简并情形下引理 3.11 中的估计。显然，方程 (3.56) 仍然成立，只需将 $f, \mathfrak{g}, h$ 替换为在 (4.18) 中定义的函数。此外，经过简单计算可得

$$\sup_{x\in\widetilde{J}_\varepsilon} \varepsilon^4\,|\partial_x^j\,k(x;\varepsilon)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{1-j}\,|\log\varepsilon|^{-2})\,, \qquad j = 0,1,2.$$

因此，我们可以逐行仿照定理 3.10 证明的其余部分，参见引理 3.12-3.15，其中 x_ε 是 $\widehat{K}_1(x;\varepsilon)$ 在 $\widetilde{J}_\varepsilon$ 中的唯一零点，且 $\gamma_\varepsilon = \varepsilon^2\,\widehat{\mathfrak{g}}(x_3)$。由此即可得到所述结论。□

为求出 γ_ε 在系数 w_6 消失时的首项，我们记为。

$$\mathrm{w}_5 = \big\langle V\psi_0^{(V)}, \varphi_1\big\rangle$$

于是可得

定理 4.6。 设 $2 < \alpha \in \mathbb{Z}$ 并设 B 满足假设 2.1。此外，假设 $V \lesssim \langle\cdot\rangle^{-\rho}$ 对于某个 $\rho > 6$ 成立。设 $\psi_0^{(V)}$ 是 $\mathrm{P}_0 V\,\mathrm{P}_0$ 的一个特征函数，且满足假设 4.1。假设 $\mathrm{w}_6 = 0$，并且

$$|\mathrm{w}_3|^2 + |\mathrm{w}_5|^2 > 0. \tag{4.20}$$

Then

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\sup_{t>0} \big|\big\langle\psi_0^{(V)},\, e^{-itP_-(A,\varepsilon)}\,\psi_0^{(V)}\big\rangle - e^{-it(x_\varepsilon - i\gamma_\varepsilon)}\big| = 0,$$

其中 $x_\varepsilon = \kappa\,\varepsilon\big(1 + \mathcal{O}(|\log\,\varepsilon|^{-1}\big)$，并且

$$\gamma_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{4}\Big(\,|\mathrm{w}_5|^2 + \frac{\pi^2|\mathrm{w}_3|^2}{\|e^h\|_2^2}\,\Big).$$

回忆一下，系数 w_3 定义于（4.5）中。

证明。我们再次沿用非简并情形中的论证思路。设

$$\widetilde{a}_1 = \big\langle\psi_0^{(V)}, V\,\mathcal{K}\,V\,\psi_0^{(V)}\big\rangle\,. \qquad \widetilde{a}_2 = \big\langle\psi_0^{(V)}, V\,\mathrm{T}_0\,V\,\psi_0^{(V)}\big\rangle$$

其中 $\mathcal{K}$ 和 T_0 由命题 2.5给出。 $\mathcal{K}$ 和 T_0 的自伴性因此蕴含 $\widetilde{a}_1,\ \widetilde{a}_2 \in \mathbb{R}$。由于 $\mathrm{w}_6 = 0$，方程（4.2）和（4.1）结合命题 2.5 可得

$$\widetilde{F}(x,\varepsilon) = \kappa\varepsilon - x + \varepsilon^2\,\widetilde{a}_1\,(\log x - i\pi) - \varepsilon^2\,\widetilde{a}_2 + o(\varepsilon^2),$$

and

$$\widetilde{a}_1 = \frac{1}{4}\Big(\,|\mathrm{w}_5|^2 + \frac{\pi^2|\mathrm{w}_3|^2}{\|e^h\|_2^2}\,\Big)\,.$$

因此，若定义

$$\widehat{K}(x,\varepsilon) = \kappa\varepsilon - x + \varepsilon^2\,\widetilde{a}_1\,(\log x - i\pi) - \varepsilon^2\,\widetilde{a}_2, \tag{4.21}$$

then

$$\sup_{x\in\widetilde{J}_\varepsilon} |\widetilde{F}(x,\varepsilon) - \widehat{K}(x,\varepsilon)| = o(\varepsilon^2).$$

令 x_ε 为区间 $\widetilde{J}_\varepsilon$ 内 $\mathrm{Re}\big(\widehat{K}(x,\varepsilon)\big) = \kappa\varepsilon - x + \varepsilon^2\,\widetilde{a}_1\log\,x - \varepsilon^2\,\widetilde{a}_2$ 的唯一零点，并

$$\gamma_\varepsilon = \widetilde{a}_1\pi\varepsilon^2$$

因此我们可以沿用定理 3.16的证明，并完成该定理的证明 . □

4.4. 例子： $2 < \alpha \leq 3$。下面我们给出一个例子，其中 $P(A)$ 的一个二重简并特征值产生了两个共振，它们在 $\varepsilon \searrow 0$ 时遵循不同的渐近规律。

令 $B(x)$ 满足假设 2.1 并假设 $B(x) = b(|x|)$ 对某个函数 $b\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$。假设

$$2 < \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} B(x)\,dx \leq 3.$$

于是，0 是 $P_-(A)$ 的二重简并特征值，具有归一化特征函数

$$\psi_1(x) = c_1\, e^{h(x)}, \qquad \psi_2(x) = c_2\,(x_1 + ix_2)\, e^{h(x)}\,. \tag{4.22}$$

由于 h 在此情形下是径向的，因此有 $\langle \psi_1,\ \psi_2\rangle = 0$。此外，根据 [12, 推论 5。10],

$$\psi(x) = \frac{(x_1 + ix_2)\, e^{h(x)}}{\|(x_1 + ix_2)\, e^{h}\|_2^2}\,. \tag{4.23}$$

现在令

$$V_\rho(x) = (1 + x_1^2 - x_2^2)\, u(|x|), \tag{4.24}$$

其中 $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 满足 $u \geq 0$ 和 $u \lesssim \langle\,\cdot\,\rangle^{-\rho}$，其中某个 $\rho > 8$。于是我们有

$$\mathrm{P}_0 V\, \mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} \kappa_1\, \psi_1 \langle \psi_1\,,\,\cdot\,\rangle & 0 \\ 0 & \kappa_2\, \psi_2 \langle \psi_2\,,\,\cdot\,\rangle \end{pmatrix}\,, \tag{4.25}$$

其中

$$\kappa_1 = \langle \psi_1, V\psi_1\rangle > 0, \qquad \kappa_2 = \langle \psi_2, V\psi_2\rangle > 0.$$

最后两个不等式由 u 的正性以及这一事实推出，即

$$\int_{\mathbb{R}^2} (x_1^2 - x_2^2)\, u(|x|)\, |\psi_j(x)|^2\, dx = 0 \qquad j = 1, 2.$$

因此， ψ_1 和 ψ_2 是$\mathrm{P}_0 V\, \mathrm{P}_0$ 的特征函数，其特征值分别为 $\kappa_1 >$ 和 $\kappa_2 > 0$。此外，通过以适当的方式选取 u ，例如将 $u = 0$ 置于以原点为中心且半径足够大的球内，我们可以确保

$$\kappa_1 = \int_{\mathbb{R}^2} u(|x|)\, |\psi_1(x)|^2\, dx < \int_{\mathbb{R}^2} u(|x|)\, |\psi_2(x)|^2\, dx = \kappa_2,$$

参见（4.22），因此假设 4.1 对 ψ_1 和 ψ_2均成立。现在我们讨论以下情形：

$2 < \alpha < 3$。由 [12, 推论 5。10],

$$\varphi(x) = (x_1 + ix_2)^2\, e^{h(x)}\,.$$

经过简短计算可得

$$\mathrm{w}_3^{(1)} = \langle V\psi_1\,,\,\psi\rangle = 0, \qquad \mathrm{w}_3^{(2)} = \langle V\psi_2\,,\,\psi\rangle \neq 0 \tag{4.26}$$

$$\mathrm{w}_4^{(2)} = \langle V\psi_2\,,\,\varphi\rangle = 0, \qquad \mathrm{w}_4^{(1)} = \langle V\psi_1\,,\,\varphi\rangle \neq 0. \tag{4.27}$$

条件（4.11）因此成立，定理 4.3 可分别应用于 $\psi_0^{(V)} = \psi_1$ 和 $\psi_0^{(V)} = \psi_2$。因此P_-（A， ε）存在两个共振，它们满足

$$\begin{aligned} x_\varepsilon^{(1)} &= \varepsilon\kappa_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{2-\alpha'}) \qquad & \gamma_\varepsilon^{(1)} &= \widetilde{\sigma}\,\big|\mathrm{w}_4^{(1)}\big|^2\, \kappa_1^{-\alpha'}\, \varepsilon^{2-\alpha'} + \mathcal{O}(\varepsilon^{1+2\alpha'}) \\ x_\varepsilon^{(2)} &= \varepsilon\kappa_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\alpha'}) \qquad & \gamma_\varepsilon^{(2)} &= \widetilde{\eta}\,\big|\mathrm{w}_3^{(2)}\big|^2\, \kappa_2^{\alpha'-1}\, \varepsilon^{1+\alpha'} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-2\alpha'}) \end{aligned} \tag{4.28}$$

$\alpha = 3$。显然，系数 $\mathrm{w}_3^{(j)}\,, j = 1, 2,$ 仍满足（4.26）。零虚束缚态由下式给出

$$\varphi_1(x) = (x_1 + ix_2)^3\, e^{h(x)}\,, \qquad \varphi_2(x) = (x_1 + ix_2)^2\, e^{h(x)},$$

参见 [12, 推论 6。7]。因此，经过简单计算可得

$$\mathrm{w}_6^{(1)} = \langle V\psi_1 \, , \, \varphi_2 \rangle \neq 0 \, .$$

因此定理 4.5 适用，并指出

$$\sup_{t>0} \left| \langle \psi_1 \, e^{-itP_-(A,\varepsilon)} \, \psi_1 \rangle - e^{-it(x_\varepsilon^{(1)} - i\gamma_\varepsilon^{(1)})} \right| \lesssim |\log \varepsilon|^{-1}$$

其中 $x_\varepsilon^{(1)} = \kappa_1 \, \varepsilon \big(1 + \mathcal{O}(\text{对数 } \varepsilon|^{-1})\big)$ 并且

$$\gamma_\varepsilon^{(1)} = \frac{\varepsilon \left| \mathrm{w}_6^{(1)} \right|^2}{\kappa_1 (\log \varepsilon)^2} \left[1 + \mathcal{O}\big(|\log \varepsilon|^{-1} \big) \right] . \tag{4.29}$$

另一方面，对于特征函数 ψ_2 ，我们有

$$\mathrm{w}_6^{(2)} = \langle V\psi_2 \, , \, \varphi_2 \rangle = \mathrm{w}_5^{(2)} = \langle V\psi_2 \, , \, \varphi_1 \rangle = 0.$$

这意味着定理 4.5 不适用于 ψ_2。然而，根据方程（4.26），我们可以应用定理4.6，由此可得

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sup_{t>0} \left| \langle \psi_2, \, e^{-itP_-(A,\varepsilon)} \, \psi_2 \rangle - e^{-it(x_\varepsilon^{(2)} - i\gamma_\varepsilon^{(2)})} \right| = 0,$$

其中 $x_\varepsilon^{(2)} = \kappa_2 \, \varepsilon \big(1 + \mathcal{O}(\text{对数 } \varepsilon|^{-1})\big)$ 并且

$$\gamma_\varepsilon^{(2)} = \varepsilon^2 \, \frac{\pi^2 \left| \mathrm{w}_3^{(2)} \right|^2}{\|e^h\|_2^2} \, . \tag{4.30}$$

注 4.7。 一般而言，给定任意 $\alpha > 1$，我们注意到，如果算子 $\mathrm{P}_0 V \mathrm{P}_0$ 的所有特征值均为正且为单重，并且相应的特征函数满足条件（4.11）或（4.20），那么 P_ε（A）的共振数至少等于 0 作为 P（A）的特征值时的重数。

Appendix A.

命题 2.3 和 2.5 的证明。尽管文中没有明确说明，(2.16) 中算子 S_0 的存在性可由 [12, 定理 5.6]的证明推出。通过考察$z = -x$在 $x > 0$条件下的展开式 (2.16)，即可证明 S_0 的自伴性。于是 $(P_-(A) - z)^{-1} = (P_-(A) + x)^{-1}$ 是自伴的。另一方面， $\omega(1+\alpha')(-x)^{\alpha'-1}$ 和$\zeta(\alpha')(-x)^{-\alpha'}$ 均为实数，见方程 (2.15)。因此，(2.16) 右侧的前三个算子都是自伴的。所以 S_0 也是自伴的。以同样的方式，可以证明命题 2.5 中 T_0 的存在性和自伴性。□

Appendix B.

以下技术结果并非新结果，参见 [10, 式 (3.56)]。为求完整起见，我们给出一个简短证明。

引理 B.1. 设 $a > 1$。则

$$\sup_{s>0} \sup_{R>a} \left| \int_{-R}^{R} \frac{e^{-is\frac{y}{R}}}{y+i} \, dy \right| < \infty.$$

证明。根据留数定理，

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{-is\frac{y}{R}}}{y+i} \, dy \; = -2\pi i \, e^{-\frac{s}{R}} - \int_{\Gamma} \frac{e^{-is\frac{z}{R}}}{z+i} dz$$

其中， Γ 是以原点为圆心、半径为 R 、位于下半复平面的半圆，方向为从$(R,0)$到$(-R,0)$。右侧的第一项显然关于 $s>0$和 $R>a$一致有界。至于第二项，按通常方式对 Γ 进行参数化，可得

$$\Big|\int_{\Gamma}\frac{e^{-is\frac{z}{R}}}{z+i}dz\Big|=R\Big|\int_{0}^{\pi}\frac{e^{-is\cos\theta-s\sin\theta}e^{i\theta}}{R\cos\theta-iR\sin\theta+i}\,d\theta\Big|\leq\frac{\pi R}{R-1}\leq\frac{\pi a}{a-1}\,,$$

因为 $|R\cos\theta-iR\sin\ \theta+i|\geq R-1$。 □

References

[1] Y. Aharonov 和 A. Casher：二维磁场中自旋$-\frac{1}{2}$带电粒子的基态。 *Phys. Rev. A* **19**(6)（1979年）2461–2462。[2] S. Avramska-Lukarska、D. Hundertmark、H. Kovaˇrık：二维磁薛定谔算子不存在正特征值。 *Calc. Var. Partial Differential Equations* **62**(2023年) n. 63。[3] F. Bentosela、R.M. Cavalcanti、P. Exner、V.A. Zagrebnov：局域磁场导致的异常电子俘获。 *J. Phys. A*32（1999年）3029–3041。[4] H. Cornean、A. Jensen、G. Nenciu：费米黄金法则常数为零时的亚稳态。 *Commun. Math. Phys.*334（2015年）1189–1218。[5] H.L. Cycon、F.G. Froese、W. Kirsch、B. Simon： *Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and GlobalGeometry*。Springer Verlag，1987年。[6] L. Erd˝os、V. Vougalter：测度值磁场下的泡利算子和阿哈罗诺夫–卡西尔定理。 *Comm. Math. Phys.*225（2002年）399–421。[7] R.L. Frank、S. Morozov 和 S. Vugalter：泡利算子的弱耦合束缚态， *Calc. Var. Partial Differential Equations*40（2011年）253–271。[8] W. Hunziker：微扰理论中的共振、亚稳态与指数衰减定律。 *Commun. Math. Phys.* **132** (1990年) 177–188。[9] T. Ikebe、Y. Saito：薛定谔算子的极限吸收方法与绝对连续性。 *J. Math. Kyoto Univ.* **12**-3（1972年）513–542。[10] A. Jensen、G. Nenciu：奇数维阈值处的费米黄金法则及其形式。 *Commun. Math. Phys.* **261** (2006年) 693–727。[11] A. Jensen、G. Nenciu：论费米黄金法则：简并特征值。 *Perspectives in operator algebras and mathematicalphysics*， *Theta Ser. Adv. Math.* **8** (2008年) 91–103。[12] H. Kovaˇrık：二维泡利算子和狄拉克算子的谱性质及波函数的时间衰减。 *Adv. Math.*398（2022年），108244。[13] H. Kovaˇrık：二维磁薛定谔算子的特征值界。 *J. Spectr. Theory* **1**(2011年) 363–387。[14] A. Laptev 和 T. Weidl：磁狄利克雷型的哈代不等式， *Oper. Theory Adv. Appl.* **108** (1999年) 299–305。[15] A. Orth：量子力学共振与极限吸收：多体问题。 *Commun. Math. Phys.* **126** (1990 年) 559–573。[16] G. Rozenblum 、N. Shirokov：带奇异磁场的泡利算子的零模无穷多。 *J. Funct. Anal.* **223**(2006年) 135–172。[17] B. Simon：具有膨胀解析势的n体量子系统中的共振与含时微扰理论的基础。 *Ann. of Math.* **97**(1973年) 247–274。[18] B. Simon：共振与复标度：严格综述。 *Int. J. Quant. Chem.* **14**(1978年) 529–542。[19] J. Sj¨ostrand、M. Zworski：高级谱问题中的初等线性代数。 *Ann. Inst. Fourier* **57** (2007年) 2095–20141。[20] A. Soffer、M. Weinstein：含时共振理论。 *Geom. Funct. Anal.* **8** (1988年) 1086–1128。[21] B. Thaller： *The Dirac Equation*，《物理学教材与专著》。Springer-Verlag，柏林，1992年。[22] R. Waxler：一类亚稳态的时间演化。 *Commun. Math. Phys.* **171** (1995年) 535–549。[23] T. Weidl：关于带磁场的临界薛定谔算子的哈代型不等式的一点注记。 *Op. Theory: Adv. andAppl.* **110**(1999年) 247–254。

Jonathan Breuer, Einstein Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, 91904, Israel
Email address: jbreuer@math.huji.ac.il

Hynek Kovařík, DICATAM, Sezione di Matematica, Università degli studi di Brescia,Via Branze 38 - 25123, Brescia,Italy

Email address: hynek.kovarik@unibs.it