arXiv:2304.06323v1 [math.DG] 13 Apr 2023

关于 d_1度量的 J 泛函极值函数

Sam Bachhuber、Aaron Benda、Benjamin Christophel、Tam´as Darvas

谨以此文献给 L´aszl´o Lempert，祝贺他 70 岁生日。

摘要

在先前的工作中，Darvas–George–Smith 在环面 K¨ahler 度量/射线空间上，得到了关于 J 泛函相对于 d_1 度量的大尺度渐近行为的不等式。本文证明了这些不等式在所有环面 K¨ahler 流形上的尖锐性，并研究极值势/射线。在一般 K¨ahler 流形上，我们证明径向极值元的存在等价于具有多重次支撑的流的存在；这类流由 McCleerey 引入并加以研究。

1 引言与主要结果

设 (X,ω) 是一个维数为 n 的 K¨ahler 流形。我们考虑与 ω 上同调的 K¨ahler 度量空间：

$$\mathcal{H} := \{\tilde{\omega} \text{ Kähler on } X \text{ and } [\tilde{\omega}]_{dR} = [\omega]_{dR}\}$$

¯根据 $\partial\partial$-引理，对于所有 $\tilde{\omega} \in \mathcal{H}$，存在 $u \in C^\infty(X)$，其在加上常数的意义下唯一，使得 ¯ $\tilde{\omega} = \omega_u := \omega + i\partial\partial u$. 因此，与其直接研究 $\mathcal{H}$，不如研究 K ¨ahler 势函数空间：

$$\mathcal{H}_\omega := \{u \in C^\infty(X) \text{ s.t. } \omega + i\partial\bar{\partial}u > 0\}.$$

用 PSH(X,ω) 表示满足以下条件的准多重次调和函数 u 所构成的空间 $\omega_u :=_$ $\omega + i\partial\partial u \geq 0$，其中等式在流的意义下成立。显然，$\mathcal{H}_\omega \subset$ PSH(X,ω)，因此所有 K¨ ahler 势函数都是 ω-多重次调和的（ω-psh）。关于 ω-psh 函数的全面论述，请参阅近期出版的著作 [GZ16；如需快速入门，请参阅 [Da19，附录 A。1]，[Bl13，第 2] 节。

设 $I: \mathcal{H}_\omega \to \mathbb{R}$为 Monge–Amp `ere 能量，它是 K¨ahler 几何中最基本的泛函之一：

$$I(u) := \frac{1}{(n+1)V} \sum_{j=0}^{n} \int_X u\omega^j \wedge \omega_u^{n-j}, \tag{1}$$

其中，$V = \int_X \omega^n$ 是（X,ω）的体积。关于 I 泛函的详细分析，请参阅 [Bl13，第 111] 页，以及 [Da19，第 3 节7]。与之密切相关的 J 泛函 $J: \mathcal{H}_\omega \to \mathbb{R}$ 定义如下：

定义如下：

$$J(u) = \frac{1}{V}\int_X u\omega^n - I(u).$$

利用斯托克斯定理可以证明 $J(u) \geq 0$，并且在很多方面， J 在 $\mathcal{H}_\omega$ 上起着类范数表达式的作用。这一方面将在本文中再次探讨。

根据定义，K¨ahler 势函数空间 $\mathcal{H}_\omega$ 是 $C^\infty(X)$ 的凸开子集，因此它是一个平凡的“Fr´echet 流形”。受稳定性问题的启发，可以在$\mathcal{H}_\omega$ 上引入一种 L^1 型芬斯勒度量 [Da15]。若 $u \in \mathcal{H}_\omega$ 和 $\xi \in T_u\mathcal{H}_\omega \simeq C^\infty(X)$，则 ξ 的 L^1-长度由下列表达式给出：

$$\|\xi\|_u = \frac{1}{V}\int_X |\xi|\omega_u^n. \tag{2}$$

类似的 L^2 型度量由 Mabuchi [Ma87] 引入（Semmes [Se92] 和 Donaldson [Do99]也独立发现了它）。Chen [Ch00], 详细研究了这一黎曼度量。关于更多历史细节，请参阅 [Da19，第 3] 章。

与式 (2) 中的芬斯勒度量相对应，可以在 $\mathcal{H}_\omega$ 上定义路径长度伪度量 $d_1(\cdot,\cdot)$。正如 [Da15] 中所证明的， d_1 实际上是一个度量，而 $(\mathcal{H}_\omega, d_1)$ 是一个测地度量空间；其抽象完备化可识别为 $(\mathcal{E}^1, d_1)$，其中 $\mathcal{E}^1 \subset \mathrm{PSH}(X,\omega)$ 是一个势函数空间，由 Guedj–Zeriahi [GZ07], 引入，其灵感来自 Cegrell [Ce98] 在局部情形下的工作。

环面情形下的极值势与凸分析。根据 [Da15，注 6.3]，人们已知 d_1 与 J 在 $\mathcal{H}_\omega$ 上渐近等价。在 [DGS21] 中，作者着手改进 J 与 d_1 渐近比较中的常数，并证明了环面 K¨ahler 流形上的以下全局不等式：

定理1.1（[DGS21]）。设（X,ω）是一个环面K¨ahler流形。则存在一个常数$D > 0$ 使得

$$\frac{2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n J(u) - D \leq d_1(0,u) \leq 2J(u) + D, \quad u \in \mathcal{H}_\omega^T \cap I^{-1}(0). \tag{3}$$

在 $X = \mathbb{C}P^n$ 的情况下 且 ω 是 Fubini-Study度量时，乘在 $J(u)$ 前的常数是尖锐的 .

在（3）中获得尖锐性的动机源于典范K¨ahler度量的存在性判据。我们预计，（X,ω）的一致K稳定性与相对于 d_1 度量 [BBJ] 的能量适当性相关。另一方面，在具体情形中，通常可以证明相对于 J 泛函的能量适当性，这也意味着典范度量的存在（例如 [SZ20]）。自然地，人们希望尽可能理想地将这类适当性判据转化为K稳定性判据，反之亦然。

在 [DGS21 的第 3] 页，作者提出研究上述不等式在任意环面K¨ahler流形（而不只是射影空间）情形下的尖锐性。这正是本文所要探讨的问题，我们证明（3）对任意环面K¨ahler流形都是尖锐的。

正如 [DGS21 第 2], 节所指出，利用勒让德变换，(3) 中的一对不等式等价于一对关于凸域上的凸函数的积分不等式，如下方的 (4) 所示。我们证明，这对不等式在任意凸域上都是尖锐的，从而证明 (3) 在任意环面 K¨ahler 流形上都是尖锐的：

定理 1.2。设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界开凸集。
(i)[DGS21] 对于 任意满足 $\int_P \phi = 0$ 的凸函数 $\phi \in L^1(P)$，以下不等式成立 :

$$-\frac{2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \inf_P \phi \le \frac{1}{\mu(P)}\int_P |\phi| d\mu \le -2\inf_P \phi, \tag{4}$$

(ii) 存在一个凸函数 $\phi \in L^1(P)$，使得 $\int_P \phi = 0$ 且

$$-\frac{2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \inf_P \phi = \frac{1}{\mu(P)}\int_P |\phi| d\mu. \tag{5}$$

本文将满足 (5) 的势函数 ϕ 称为极值函数。当 P 为单位单纯形（对应于射影空间）时，极值函数的存在性已在[DGS21，命题 4.2] 中得到证明。

关于 (4) 中的第一个不等式，我们不仅证明了极值函数的存在性，还明确刻画了它们，从而回答了[DGS21 第 3] 页提出的另一个问题（见定理 3.6）。此外，在第 3.1 节中，我们刻画了P 存在仿射极值函数的区域。这类区域 P 总是非常特殊：它们是一个锥与一个半空间的交集。

关于 (4) 中的第二个不等式，很容易看出它总是尖锐的，但不存在任何极值函数（见注 3.2）。

极值射线与具有多重次支撑的流。在 [DGS21] 中，人们猜想定理1.1对于一般的 K¨ahler 流形也成立。为此提供佐证，作者证明了预期结果的径向版本；我们现在回顾这一结果，并介绍 [DL20]中的相关术语。

设 $\{u_t\} \in \mathcal{R}^1$为（$\mathcal{E}^1, d_1$）的一条 d_1-测地射线 $[0,\infty) \ni t \to u_t \in \mathcal{E}^1$，其起点为 $u_0 = 0 \in \mathcal{H}_\omega$，并归一化为 $I(u_t) = 0$，$t \ge 0$。由于 J 泛函沿测地线是凸的，因此可以定义它沿测地射线的斜率（非正式地称为径向 J泛函）：

$$\{u_t\} := \lim_{t\to\infty} \frac{J(u_t)}{t}. \tag{6}$$

一条射线 $\{u_t\}_t$ 的 L^1 速度只是量 $d_1(0, u_1)$。我们有以下关于 L^1 速度与径向 J 泛函的不等式：

定理 1.3. [DGS21] 假设(X, ω) 是一个紧致卡 ¨勒流形且 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^1$。则以下不等式成立：

$$\frac{2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n J\{u_t\} \le d_1(0, u_1) \le 2J\{u_t\}. \tag{7}$$

在（$\mathbb{CP}^n$，ω_{FS}）的情形下，该不等式是尖锐的。

由于射线具有恒定速度，请注意，上述不等式中的中间项也可以替换为极限 $\lim_{t\to\infty} \frac{d_1(0,\ u_t)}{t}$。特别地，对于一般的 K¨ahler 流形，猜想中的不等式 (3) 可立即推出 (7)。

在任意 K¨ahler 流形上，借助类似于注 3.2 的例子，不难论证 (7) 中第二个不等式的尖锐性。与定理 1.2(ii) 一样，我们关心的是 (7) 中第一个不等式在任意 K¨ahler 流形上的尖锐性，并寻找所有极值射线。

事实证明，这个问题与 [MC21] 中引入并研究的 PSH(X,ω) 中多重拟处处支撑势函数的存在性有关。回顾一下，如果 $\int_X \omega_v \wedge \omega^{n-1} = 0$，那么 $v \in$ PSH(X,ω) 是多重拟处处支撑的，也就是说，电流 ω_v 支撑在一个多重极集上。

定理1.4. 假设 (X,ω)是一个紧致凯¨勒流形。那么存在 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^1$ 使得 $J\{u_t\}/d_1(0,u_1) = {}_{(n+1)}{}_{2n^n}^{n+1}$，当且仅当存在 $v \in$ ~~拟次调和~~函数(X,ω) 具有复支撑。

极值射线 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^1$ 通过多重次支撑的流$v \in$ 拟次调和函数(X,ω)构造而成，过程相当明确，并在定理 4.7 中作了详细阐述。更重要的是，由定理 4.7 可知，所有这类极值射线都源自同一构造。

多重拟处处支撑的势函数的存在性是一个深刻问题，与该领域中的若干重要猜想有关。详情请参阅 [MC21]。然而，如果 (X,ω) 是一个射影 K¨ahler 流形，那么存在 $v \in$ 拟次调和函数(X,ω)，使得 $\omega_v = [D]$，其中某个除子为$D \subset X$。显然，这样的 v 是多重拟处处支撑的。因此我们得到以下推论：

推论 1.5。设 (X,ω) 是一个射影 K¨ahler 流形。那么存在$\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^1$ 使得 $J\{u_t\}/d_1(0,u_1) = {}_{(n+1)}{}_{2n^n}^{n+1}$。特别地，(7) 中的第一个~~不等式~~是紧的。

致谢。本 REU 项目于 2021 年春季和夏季学期开展，部分经费由 NSF 资助项目 DMS-1846942（CAREER）和 Alfred P. Sloan Fellowship 提供。感谢匿名审稿人提出的建议，这些建议改进了本文的呈现。

在本文发表于《Analysis Mathematica》之后，我们从 Kewei Zhang 处得知，定理 1.2 和定理 1.3 中的常数已在非阿基米德背景下出现于 [BHJ17, 定理 7.9], ，但未讨论其最优性。尽管这些结果并不重叠，但论证所用的技巧确有相通之处。令人称奇的是，同一种思想竟适用于截然不同的非阿基米德情形和环面情形。倘若我们当时已知晓 [BHJ17, 定理 7.9]，那么本文和 [DGS21] 的呈现方式都会有所不同。

2 预备知识

2.1 环面 K¨ähler 流形分析

在这一简短章节中，我们指出不等式 (3) 和 (4) 如何等价。这里的内容主要沿袭 [DGS21 第 3], 节，该节本身受 [DG16 第 6] 节和 [ZZ08] 启发。若我们能够将 (X,ω) 嵌入 X，使得 $(\mathbb{C}^*)^n$ 在 X 内的补集是一个 Zariski 闭集，我们就称 (X,ω) 是一个维数为 n 的环面 K¨ähler 流形。此外，我们要求

作用 $\mathbb{T}^n := (S^1)^n$ 在 $(\mathbb{C}^*)^n$ 上的平凡作用可延拓到 X，并且 K¨ahler 形式 ω 是$\mathbb{T}^n$-不变的。

利用 ω 是 $\mathbb{T}^n$-不变的这一事实，我们得到的是

$$\omega = i\partial\bar{\partial}(\psi_0 \circ L) \text{ on } (\mathbb{C}^*)^n, \tag{8}$$

其中 $\psi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和 $L(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (\log |z_1|, \log |z_2|, \ldots, \log |z_n|) \in \mathbb{R}^n$. 由于 $\psi_0 \circ L$ 在 $(\mathbb{C}^*)^n$ 上是拟次调和函数，势函数 ψ_0 必须在 $\mathbb{R}^n$ 上是严格凸的，并且我们可以取 $\psi_0(0) = 0$。

我们用 $\mathcal{H}^T$ 表示环面不变的度量 $\omega' \in \mathcal{H}$，即 $(S^1)^n$ 通过等距变换作用于 ω'。$\mathcal{H}^T_\omega$ 表示相应的环面势空间。

对于 $u \in \mathcal{H}^T_\omega$，我们可以引入如下势函数

$$\psi_u := \psi_0 + u \circ E,$$

其中 $E(x) = E(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_n})$ $x \in \mathbb{R}^n$. 关键在于 $\omega_u = i\partial\partial\psi_u \circ L$ 在 $(\mathbb{C}^*)^n$。

勒让德变换。给定 $\omega_u \in \mathcal{H}^T_\omega$，根据 Atiyah–Guillemin–（参见 [CS08，第 27] 章）的一项结果可知，“矩映射” $\nabla\psi_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一一映射，并将 $\mathbb{R}^n$ 映至 $P :=$Im $\nabla\psi_u$。这是一个有界凸多面体，且与 u 无关。

虽然我们不会用到这一点，但根据 Delzant 定理，P 还满足若干其他性质（单纯，即每个顶点处有 n 条边相交；有理，即在顶点 p 处相交的边是有理的，也就是说，每条边都可写成 $p + tu_i, 0 \le t < \infty$，其中 $u_i \in \mathbb{Z}^n$；光滑，即这些 $u_1, \ldots, u_n$ 可以选作 $\mathbb{Z}^n$ 的一组基）。此外，这样的 Delzant 多面体 P 唯一确定环面 K¨ahler 结构 (X, ω)（参见 [Ab00] 和 [CS08，第 28] 章）。

由于 $\psi_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是凸的，我们可以对其进行勒让德变换，得到一个对偶凸函数 ϕ_u，其可能的取值为 $+\infty$:

$$\phi_u(s) = \psi_u^*(s) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big(\langle s, x\rangle - \psi_u(x)\big), \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

由于 Im $\nabla\psi_u = P$，可知 $\phi_u(s)$ 有限当且仅当 $s \in P$。此外，根据对合性质，对所有 $x \in \mathbb{R}^n$，我们都有

$$\phi_u^* = \psi_u^{**} = \psi_u,$$

$$\phi_u(\nabla\psi_u(x)) = \langle x, \nabla\psi_u(x)\rangle - \psi_u(x) \quad \text{and} \quad \nabla\psi_u(x) = s \Leftrightarrow \nabla\phi_u(s) = x.$$

综上，勒让德变换 $u \to \psi_u^* = \phi_u$ 在 $\mathcal{H}^T_\omega$ 的元素与类 $\mathcal{C}(P)$ 之间建立了一一对应关系:

$$\mathcal{C}(P) := \{f : P \to \mathbb{R} \text{ is convex and } f - \phi_0 \in C^\infty(\overline{P})\},$$

其中 $\phi_0 = \psi_0^*$。此外，正如 [Gu14，命题 4.5]，中所指出的，$(S^1)^n$-不变的拟次调和函数$(X, \omega) \cap L^\infty$ 与凸函数f 之间存在一一对应关系：$P \to \mathbb{R}$ 其中 $f - \phi_0$ 仅在 P 上有界。特别地，$\phi_0 \in L^\infty(P)$。

环面度量的 L^1 几何。我们简要介绍限制在 $\mathcal{H}_u^T$ 上的 $\mathcal{H}_\omega$ L^1 几何。设 $[0,1] \ni t \to u_t \in \mathcal{H}_\omega^T$ 是一条连接 u_0、$u_1 \in \mathcal{H}_\omega^T$ 的光滑曲线。对势函数 ψ_{u_t} 作勒让德变换，我们得到

$$\phi_{u_t}(s) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x, s\rangle - \psi_{u_t}(x)\} = \langle x_t, s\rangle - \psi_{u_t}(x_t),\ s \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

其中 $x_t = x_t(s)$ 满足 $\nabla\psi_{u_t}(x_t) = s$。

经过初等但繁琐的计算（见 [DGS21，第 3] 节），我们得出

$$\int_X |\dot{u}_t|\omega_{u_t}^n = \pi^n n! \int_{\mathbb{R}^n} |\dot{\psi}_{u_t}| MA_{\mathbb{R}}(\psi_{u_t}) = \pi^n n! \int_P |\dot{\phi}_{u_t}(s)| d\mu(s), \tag{10}$$

因此，勒让德变换将 $\mathcal{H}_\omega^T$ 上的 L^1 几何映射为 P 上凸函数的平坦 L^1 几何。特别地，当 $u_t := t$ 时，我们得到关于 K¨ahler 体积的以下有用公式：

$$\int_X \omega^n = V = \pi^n n! \int_P d\mu. \tag{11}$$

关于底层的路径长度度量，式 (10) 有如下重要推论：

定理 2.1. 设 $u_0, u_1 \in \mathcal{H}_\omega^T$。则

$$d_1(u_0, u_1) = \frac{1}{\mu(P)} \int_P |\phi_{u_0}(s) - \phi_{u_1}(s)| d\mu(s), \tag{12}$$

其中 $\mu(P)$ 是 P 的勒贝格测度。

由上述定理可知， d_1-完备化 $\mathcal{H}_\omega^T$ 可与 P上的凸函数空间等同，这些函数在 P上也可积。

环面度量的 I 和 J 泛函。本段中，我们通过勒让德变换来分析 I 和 J泛函。

I 能量本质上就是应用勒让德变换后的勒贝格积分。事实上，设 $[0,1] \ni t \to v_t \in \mathcal{H}_\omega^T$ 是连接 $v_0 = 0$ 和 $v_1 = u$的任意一条光滑曲线。经过初等但繁琐的计算（见 [DGS21，第 3] 节），可得以下公式：

$$I(u) = I(u) - I(0) = \frac{-1}{\mu(P)} \int_0^1 \int_P \dot{\phi}_{v_t}(s) d\mu(s) dt = \frac{-1}{\mu(P)} \int_P (\phi_u(s) - \phi_0(s)) d\mu(s). \tag{13}$$

由于 $\phi_0 \in L^\infty(P)$ [Gu14，命题 4.5],，我们得出存在 $C = C(X, \omega) > 0$，使得

$$\frac{-1}{\mu(P)} \int_P \phi_u d\mu - C \le I(u) \le \frac{-1}{\mu(P)} \int_P \phi_u d\mu + C,\ \ u \in \mathcal{H}_\omega^T. \tag{14}$$

关于 J 能量，我们可以用勒让德变换表示其大小。这足以满足我们的分析需要（参见 [DGS21，命题 3.2]）：

命题 2.2. 存在 $C := C(X,\omega) > 0$，使得对于所有满足 $I(u) = 0$ 的 $u \in \mathcal{H}^T_\omega$，我们都有

$$-\inf_P \phi_u - C \le J(u) = \frac{1}{V}\int_X u\omega^n \le -\inf_P \phi_u + C.$$

结合定理 2.1、(14)和命题2.2，我们得到不等式 (3) 和 (4) 的等价性，正如本小节开头所要求的那样。

2.2 TheRoss–Witt Nystr¨om 对应关系

在本小节中，我们回顾测地射线与测试曲线之间的对应关系，该对应关系在 [DX20,第3节中建立, 1] 并在 [DDL18b, 第 4], 节中基于 [RWN14]进一步发展。

次线性次测地射线是一个次测地线射线 $(0,+\infty) \ni t \mapsto u_t \in$ 拟次调和函数(X,ω)（记号$\{u_t\}_{t>0}$），满足 $u_t \to_{L^1} u_0 := 0$ 当 $t \to 0$ 时，并且存在 $C \in \mathbb{R}$，使得对于所有 $t \ge 0, x \in X$，都有 $u_t(x) \le Ct$。

拟次调和测地线射线是满足次线性条件的次测地线射线，并且还满足以下极大性：对于任意 $0 < a < b$，次测地线 $(0,1) \ni t \mapsto v^{a,}{}_t{}^b := u_{a(1-t)+bt} \in$PSH$(X,\omega)$ 可以按以下方式恢复：

$$v_t^{a,b} := \sup_{h\in\mathcal{S}} h_t\,, \quad t \in [0,1]\,, \tag{15}$$

其中，$\mathcal{S}$ 是次测地线 $(0,1) \ni t \to h_t \in$ 拟次调和函数(X,ω) 的集合，使得 t

$$\lim_{t\searrow 0} h_t \le u_a\,, \quad \lim_{t\nearrow 1} h_t \le u_b\,.$$

我们注意到，$v \mapsto \sup_X v$ 沿射线的映射具有以下性质，这些性质已在 [DX20，引理 3.1] 中得到证实：

引理 2.3。对于任意拟次调和测地线射线 $\{u_t\}_t$，映射 $t \mapsto \sup_X u_t$ 是线性的。对于次线性次测地线，映射 $t \mapsto \sup_X u_t$ 是凸的。

关于次测地线的结论可由 t-凸性推出。要论证拟次调和测地线射线的结论，可以将 [Da17, 定理 1] 与有界测地线逼近以及 $u \mapsto \sup_X u$ 在 PSH(X,ω) 的弱 L^1-拓扑下的连续性结合起来。

映射 $\mathbb{R} \ni \tau \mapsto \psi_\tau \in$ 拟次调和函数(X,ω) 是一条拟次调和测试曲线，记作 $\{\psi_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$，如果

(i) 对任意 $x \in X$，$\tau \mapsto \psi_\tau(x)$ 都是凹函数、递减且上半连续。

(ii) 对所有足够大的 τ，$\psi_\tau \equiv -\infty$；且当 $\tau \to -$ 时，ψ_τ 几乎处处递增至 0。 ∞.

条件（ii）允许引入以下常数：

$$\tau_\psi^+ := \inf\{\tau \in \mathbb{R} : \psi_\tau \equiv -\infty\}\,. \tag{16}$$

注 2.4。我们采用以下记号约定：拟次调和测试曲线始终以 τ为参数，而射线始终以 t 为参数。因此，$\{\psi_t\}_t$ 始终指某种射线，而 $\{\phi_\tau\}_\tau$ 则指某种测试曲线。如下文所述，射线与测试曲线互为对偶，因此也应将参数 t 和 τ 视为互相对偶。

给定 $v \in$ 拟次调和函数(X,ω)，我们考虑以下包络概念：

$$P[v] = \mathrm{usc}\big(\sup\{w \in \mathrm{PSH}(X,\omega),\ w \le 0,\ w \le v + C \text{ for some } C > 0\}\big) \tag{17}$$

拟次调和测试曲线 $\{\psi_\tau\}_\tau$ 可以具有以下性质：
(i) 若 $P[\psi_\tau] = \psi_\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$，则 $\{\psi_\tau\}_\tau$是极
大的。(ii) 若

$$\int_{-\infty}^{\tau_\psi^+} \left(\int_X \omega_{\psi_\tau}^n - \int_X \omega^n \right) \mathrm{d}\tau > -\infty\,. \tag{18}$$

(iii) 若 $\psi_\tau = 0$ 对足够小的 τ 成立，我们称 $\{\psi_\tau\}_\tau$ 有界。在这种情况下，我们引入以下常数，以补充 (16)：

$$\tau_\psi^- := \sup\{\,\tau \in \mathbb{R} : \psi_\tau \equiv 0\,\}\,. \tag{19}$$

以上我们遵循约定 $P[-\infty] = -\infty$，并注意到有界测试曲线显然具有有限能量。

我们回顾一下勒让德变换，它有助于建立各种极大测试曲线与测地射线之间的对偶性。给定凸函数 $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$，其勒让德变换定义为

$$\hat{f}(\tau) := \inf_{t\ge 0}(f(t) - t\tau) = \inf_{t>0}(f(t) - t\tau)\,, \quad \tau \in \mathbb{R}\,. \tag{20}$$

递减凹函数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 的（逆）勒让德变换为

$$\check{g}(t) := \sup_{\tau\in\mathbb{R}}(g(\tau) + t\tau)\,, \quad t \ge 0\,. \tag{21}$$

不过，与凸分析文献相比，我们所选用的勒让德变换存在符号差异，但这种选择更适合我们。

给定一条次线性次测地射线 $\{\phi_t\}_t$（拟次调和测试曲线 $\{\psi_\tau\}_\tau$），我们可以将其在 $x \in X$ 处的（逆）勒让德变换定义为

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_\tau(x) &:= \inf_{t>0}(\phi_t(x) - t\tau)\,, \quad \tau \in \mathbb{R}\,, \\ \check{\psi}_t(x) &:= \sup_{\tau\in\mathbb{R}}(\psi_\tau(x) + t\tau)\,, \quad t > 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Ross–Witt Nystrom 对应描述了各种类型的射线与极大测试曲线之间的对偶性，该对应在 [DX20, 定理 3.7] 中得到了证明：

˘ 定理 2.5. 勒让德变换 $\{\psi_\tau\}_\tau \mapsto \{\psi_t\}_t$ 给出了一个双射，其逆映射为 ˆ$\{\phi_t\}_t \mapsto \{\phi_\tau\}_\tau$，对应于以下两类对象之间：
(i) 多重次调和测试曲线与次线性次测地射线,
(ii) 极大拟次调和测试曲线与拟次调和测地线射线,
(ii)*[RWN14]* 极大有界测试曲线和有界测地射线。在这种情况下，我们还可以得到

$$\tau_\psi^- t \le \check{\psi}_t \le \tau_\psi^+ t\,, \quad t \ge 0\,.$$

(iv) 极大有限能量测试曲线和有限能量测地线射线。在这种情况下，我们还可以得到

$$I\{\psi_t\} := \frac{I(\check{\psi}_t)}{t} = \frac{1}{V}\int_{-\infty}^{\tau_\psi^+}\left(\int_X \omega_{\psi_\tau}^n - \int_X \omega^n\right)\mathrm{d}\tau + \tau_\psi^+,\ t>0. \tag{23}$$

这里 I 是式 (1) 中定义的 Monge–Amp`ere 泛函。

3 凸体上的极值函数

令 $P\subset\mathbb{R}^n$ 为一个有界开凸集。由于 P 的凸性，我们有 $\mathrm{int}\overline{P}=P$。

对于任意的 $f:\ P\to\mathbb{R}$ 凸，众所周知，$f:\ \overline{P}\to(-\infty,\infty]$的下半连续扩展也具有凸性，并且其取值可能为 ∞。由于不会产生混淆，我们不再区分 f 与其下半连续扩展。由于 $\overline{P}$ 是紧的，f 的下确界总能在这个更大的集合上取得，这将在下文的讨论中发挥关键作用。

在讨论定理 1.2(i) 的尖锐性和极值势之前，让我们回顾一下该结果在 [DGS21]中的证明：

定理 3.1. *[DGS21]* 设 $P\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界开凸集。那么对于 $\phi\in L^1(P)$ 凸且满足 $\int_P \phi d\mu=0$的情形，下列不等式成立：

$$-\frac{2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \inf_P\phi \le \frac{1}{\mu(P)}\int_P|\phi|d\mu \le -2\inf_P\phi, \tag{24}$$

其中积分是针对勒贝格测度进行的。

证明。首先我们证明第二个不等式。令

$$P_-^\phi := \{x\in P:\phi<0\}\quad\text{and}\quad P_+^\phi := \{x\in P:\phi\ge 0\} \tag{25}$$

由于 $\int_P\phi=\int_{P_-^\phi}\phi+\int_{P_+^\phi}\phi=0$，我们有

$$\int_P|\phi| = -\int_{P_-^\phi}\phi+\int_{P_+^\phi}\phi = -2\int_{P_-^\phi}\phi.$$

此外，$\int_{P^\phi}\phi\ge\mu\big(P_-^\phi\big)\inf_{P^\phi}\phi\ge\mu(P)\inf_P\phi$，第二个估计由此得出。

我们来证明第一个估计。对所有 $a\in\mathbb{R}$，令

$$P_a^\phi := \{x\in P:\phi(x)<a\}.$$

对 ϕ 重新缩放后，不失一般性，可假设 $\inf_P\phi=-1$。我们首先声称

$$\int_P|\phi|\ge-\frac{2}{n+1}\mu\big(P_-^\phi\big). \tag{26}$$

令 $y\in\overline{P}$ 满足 $\phi(y)=\inf_P\phi=-1$。

由于 ϕ 的凸性： $\overline{P} \to (-\infty, \infty]$，如果 $-1 < a < b$，我们有

$$\frac{b-a}{b+1} y + \frac{a+1}{b+1} P_b^\phi \subset P_a^\phi, \quad \text{for any } -1 < a < b. \tag{27}$$

对两边取测度，得到

$$\mu\left(P_b^\phi\right) \leq \left(\frac{b+1}{a+1}\right)^n \mu\left(P_a^\phi\right), \quad \text{for any } -1 < a < b. \tag{28}$$

由于 $\int_P \phi = \int_{P_+^\phi} \phi + \int_{P_-^\phi} \phi = 0$，我们有 $\int_P |\phi| = 2\int_{P_-^\phi} |\phi|$，从而可以对 $\int_P |\phi|$ 进行界定，并证明所需结论：

$$\int_P |\phi| = 2\int_{P_-} |\phi| = 2\int_{-1}^0 \mu\left(P_x^\phi\right) dx \geq 2\int_{-1}^0 (1+x)^n \mu\left(P_-^\phi\right) dx = \frac{2}{n+1}\mu(P_-^\phi), \tag{29}$$

这里我们用到了：对任意非负的μ-可测 f，有 $\int f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu\{f \geq t\} dt = \int_0^{+\infty} \mu\{f > t\} dt$；对 $-1 < x < 0$，估计式 (28)；以及 $P_0^\phi = P_-^\phi$。

接下来，我们应用 $-1 < 0 < x$ 的估计式 (28) 来估计 $\int_{P_+} \phi$:

$$\begin{aligned}
\int_{P_+^\phi} \phi &= \int_0^\infty \mu\left(P \setminus P_x^\phi\right) dx \geq \int_0^{\frac{1}{n}} \mu\left(P \setminus P_x^\phi\right) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \mu(P) - \mu\left(P_x^\phi\right) dx && (30)\\
&\geq \int_0^{\frac{1}{n}} \mu(P) - (1+x)^n \mu\left(P_-^\phi\right) dx && (31)\\
&= \frac{1}{n}\mu(P) - \frac{(\frac{1}{n}+1)^{n+1}}{n+1}\mu(P_-^\phi) + \frac{1}{n+1}\mu(P_-^\phi)
\end{aligned}$$

然后令 $A > 0$，使得 $\frac{1}{2}\int_P |\phi| = \int_{P_+^\phi} |\phi| = \int_{P_-^\phi} |\phi| = A\mu(P_-^\phi)$。合并各项后，得到

$$A\mu(P_-^\phi) = \int_{P_+^\phi} \phi \geq \frac{1}{n}\mu(P) - \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \mu(P_-^\phi) + \frac{1}{n+1}\mu(P_-^\phi),$$

这意味着

$$\int_P |\phi| = 2A\mu(P_-^\phi) \geq \frac{2A}{nA + \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \frac{n}{n+1}}\mu(P).$$

右侧是关于 A 的递增函数，根据 (26) 我们知道 $A \geq \frac{1}{n+1}$。这意味着右侧在该值处取得最小值，因此

$$\int_P |\phi| \geq \frac{\frac{2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\mu(P) = \frac{2}{(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \mu(P). \tag{32}$$

□

注 3.2. 我们简要讨论式 (24) 中第二个不等式的尖锐性。对于任意$P \subset \mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon > 0$，都可以找到 ψ_ε： $P \to \mathbb{R}^+$ 凸，使得 $\mu(\{\psi = 0\})/\mu(P) \geq 1 - \varepsilon$和 $\int_X \psi d\mu > 0$。令 $\phi_\varepsilon := \psi - \int_P \psi$。

那么 $\{\psi = 0\} = \{\phi_\varepsilon = \inf_P \phi_\varepsilon\} \subseteq P_-^\varepsilon = \{\phi_\varepsilon < 0\}$。这意味着

$$\int_P |\phi_\varepsilon| = -\int_{P_-^\varepsilon} \phi_\varepsilon + \int_{P_+^\varepsilon} \phi_\varepsilon = -2\int_{P_-^\varepsilon} \phi_\varepsilon \geq -2\mu(\{\psi = 0\}) \inf_P \phi_\varepsilon \geq -2(1-\varepsilon)\mu(P) \inf_P \phi_\varepsilon.$$

因此，最后一个不等式（24）是尖锐的。此外，这一论证表明，不存在使该等式成立的极值函数。

最后，我们讨论（24）中的第一个不等式的极值子存在性。为统一记号，我们引入极值势集合：

$$\mathcal{W}(P) := \left\{ \psi : P \to \mathbb{R} \text{ convex}, \quad \int_P \psi = 0, \quad \text{and} \quad -\frac{2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \inf_P \psi = \frac{1}{\mu(P)} \int_P |\psi|. \right\}$$

注意到 $\phi \in \mathcal{W}(P)$ 蕴含 $r\phi \in \mathcal{W}(P)$，其中 $r > 0$。为处理这一问题，我们通常将 $\mathcal{W}(P)$ 的元素归一化，使其满足 $\inf_P \phi = -1$。借用定理 3.1 的证明中的表述，我们注意到 $\mathcal{W}(P)$ 的元素具有以下特殊性质：

命题 3.3. 设 $B \subset \mathbb{R}^n$ 有界开凸集 $\phi \in \mathcal{W}(P)$，且 $\inf_P \phi = \phi(y) = -1$，其中某个 $y \in \overline{P}$。则 $\sup_P \phi = \frac{1}{n}$ 并且

$$P_a^\phi := \{\phi < a\} = \frac{1-an}{1+n} y + \frac{na+n}{1+n} P, \quad \text{for any} \quad -1 < a < \frac{1}{n}. \tag{33}$$

证明。该论证是对定理 3.1关于 $\phi \in \mathcal{W}(P)$ 和$\inf_P \phi = -1$的证明进行的细致分析。我们还将多次使用以下事实：由于布伦-明可夫斯基不等式， $x \to \mu(P_x^\phi)$ 是连续的（ϕ 是凸的）。

由于 $\phi \in \mathcal{W}(P)$，我们必须有 $A = \frac{1}{n+1}$，否则（32）中的不等式就是严格不等式。出于类似的原因，对于 $x \geq \frac{1}{n}$，我们还必须有 $\mu(P) = \mu(P_x^\phi)$，否则（30）中的不等式就是严格不等式。这意味着 $\sup_P \phi \leq \frac{1}{n}$。

由于（29）中等号成立，我们得到，对于 $x \in [-1, 0]$， $\mu(P_x^\phi) = (1+x)^n \mu(P_0^\phi)$。同样，由于（31）中等号成立，我们有，对于 $x \in [0, \frac{1}{n}]$， $\mu(P_x^\phi) = (1+x)^n \mu(P_0^\phi)$。结合以上两点，我们得到（28）中的等号成立：

$$\mu\left(P_b^\phi\right) = \left(\frac{b+1}{a+1}\right)^n \mu\left(P_a^\phi\right), \quad \text{for any} \quad -1 < a \leq b < \frac{1}{n}.$$

由于（27）两边开凸集的测度相同，根据下面的引理 3.4，我们得出，对于任意 $-1 < a < b < \frac{1}{n}$，$\frac{b-a}{b+1} y + \frac{a+1}{b+1} P_b^\phi = P_a^\phi$。令 $b \nearrow \frac{1}{n}$，我们便得到 $P_a^\phi = \frac{1-an}{1+n} y + \frac{na+n}{1+n} P$，证毕。

最后，我们看到， P_a 随着$a \nearrow \frac{1}{n}$严格递增，因此 $\sup_P \phi = \frac{1}{n}$。 □

引理 3.4. 假设 A、 $B \subset \mathbb{R}^n$均为凸、有界、开且 $B \subset A$。若 $\mu(A) = \mu(B)$，则 $A = B$。

证明。令 $x \in A$。由于 A 是开集，存在 y_0、y_1、.....、$y_n \in A$，使得 x 位于以 y_0、y_1、.....、y_n 为顶点的单纯形内部。由于 $\mu(A) = \mu(B) < \infty$， B 在 A 中稠密。因此，对于所有 $j \in \{0, \ldots, n\}$，都存在足够接近 y_j 的 $z_j \in B$，使得 x 位于以 z_0、z_1、.....、z_n 为顶点的单纯形内部。由于 B 是凸集，它必定包含以 z_0、z_1、.....、$z_n \in B$ 为顶点的单纯形内部，因此也包含 x。

□

经过一些计算，我们验证命题 3.3 的逆命题也成立：

命题3.5.设 $\phi \in L^1(P)$ 为凸的。假设存在 $y \in \overline{P}$使得 $P_a^\phi := \{\phi < a\} = \frac{1-an}{1+n}y + \frac{na+n}{1+n}P$ 对任意 $-1 < a < \frac{1}{n}.$，则 $\int_P \phi = 0$ 和 $\phi \in \mathcal{W}(P)$。

证明。令 $a \searrow -1$ 和 $a \nearrow \frac{1}{n}$ 属于 $P_a^\phi := \{\phi < a\} = \frac{1-an}{1+n}y + \frac{na+n}{1+n}P$，我们得出 $\inf_P \phi = \phi(y) = -1$ 和 $\sup_P \phi = \frac{1}{n}$。此外，取测度后，我们还有 $\mu(P_x^\phi) = (1+x)^n \mu(P_0^\phi)$，对 $x \in [-1, \frac{1}{n}]$ 成立。

接下来我们验证 $\int_P \phi = 0$。为此，我们进行以下辅助计算。

$$\int_{P_-^\phi} |\phi| = \int_{-1}^{0} \mu\left(P_x^\phi\right) dx = \int_{-1}^{0} (1+x)^n \mu\big(P_0^\phi\big) dx = \frac{1}{n+1}\mu(P_0^\phi),$$

$$\begin{aligned}\int_{P_+^\phi} \phi &= \int_0^{\frac{1}{n}} \mu\left(P \setminus P_x^\phi\right) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \mu\left(P\right) - \mu\left(P_x^\phi\right) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \mu\left(P\right) - (1+x)^n \mu\big(P_0^\phi\big) dx \\ &= \frac{1}{n}\mu(P) - \frac{(\frac{1}{n}+1)^{n+1}}{n+1}\mu(P_0^\phi) + \frac{1}{n+1}\mu(P_0^\phi) \\ &= \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mu(P_0^\phi) - \frac{(\frac{1}{n}+1)^{n+1}}{n+1}\mu(P_0^\phi) + \frac{1}{n+1}\mu(P_0^\phi) = \frac{1}{n+1}\mu(P_0^\phi).\end{aligned}$$

比较上述结果，我们得出 $\int_P \phi = \int_{P_+} \phi + \int_{P_-} \phi = 0$，正如所需。

最后，利用上述事实，我们看到定理 3.1 证明中的每个不等式实际上都是等式，最终得到：

$$-\frac{2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \inf_P \phi = \frac{1}{\mu(P)} \int_P |\phi| d\mu.$$

□

借助前面的两个命题，我们得到极值子的如下刻画：

定理3.6。对于任意 $\phi \in \mathcal{W}(P)$，存在唯一的 $y_\phi \in \overline{P}$ 使得 $\inf_P \phi = \phi(y_\phi)$。此外，映射 $F: \mathcal{W}(P) \cap \{\inf_P \phi = -1\} \to \overline{P}$ 由 $F(\phi) = y_\phi$ 给出，是一个双射函数。

正如匿名审稿人向我们指出的那样，如何根据 $\mathcal{W}(P)$ 中元素的勒让德变换对其进行刻画，是一个引人入胜的问题。

证明。令 $\phi \in \mathcal{W}(P)$。不失一般性，我们可以假设$\inf_P \phi = -1$。该$y_\phi \in \overline{P}$是唯一的，这由（33）可知。这证明映射 $F(\phi) = y_\phi$ 是良定义的。

为证明 F 在 $\mathcal{W}(P) \cap \{\inf_P \phi = -1\}$ 上是单射，我们注意到恒等式$P_a^\phi := \{\phi < a\} = \frac{1-an}{1+n}y_\phi + \frac{na+n}{1+n}P$，$a \in (-1, \frac{1}{n})$ 唯一确定了 ϕ。

为证明满射性，令 $y \in \overline{P}$。我们将构造一个极值函数 $\phi_y \in \mathcal{W}(P)$，使其满足 $\inf_P \phi_y = -1$ 且 $F(\phi_y) = y$。

令 $x \in P$。我们将 $\phi_y(x)$ 定义如下：

$$\phi_y(x) = \inf\left\{r \in \Big[-1, \frac{1}{n}\Big] \text{ such that } x \in \frac{1-rn}{1+n}y + \frac{nr+n}{1+n}P\right\}$$

根据 ϕ_y 的定义，我们有：

$$P_a^\phi := \{\phi_y < a\} = \frac{1-an}{1+n}y + \frac{na+n}{1+n}P,\ a \in \Big[-1, \frac{1}{n}\Big]. \tag{34}$$

我们证明 ϕ_y 是凸的。设 x、$z \in P$，并假设 $\phi_y(x) < a$ 且 $\phi_y(z) < b$。我们将证明 $\phi_y(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha a + (1-\alpha)b$, $\alpha \in [0,1]$。只要证明 $\alpha\{\phi_y < a\} + (1-\alpha)\{\phi_y < a\} \subseteq \{\phi_y < \alpha a + (1-\alpha)b\}$ 即可。由 (34)，这等价于：

$$\alpha\frac{na+n}{1+n}P + (1-\alpha)\frac{nb+n}{1+n}P \subseteq \frac{n(\alpha a + (1-\alpha)b)+n}{1+n}P.$$

但这一包含关系可由 P 是凸的这一事实推出。

最后，由 (34) 和命题 3.5 可知 $\int_P \phi_y = 0$，以及 $\phi_y \in \mathcal{W}(P)$。 □

3.1 仿射极值函数的情形

给定一个极值函数 $\phi \in \mathcal{W}(P)$，只要 $y_\phi \in P$ 满足定理 3.1，ϕ 的图像就是一个以 y_ϕ 为顶点的锥。然而，当 $y_\phi \in \partial P$时，ϕ 的图像形状可能会发生巨大变化。特别是，正如 DGS21 的证明 [Proposition 4.2]，中所指出的，在某些情况下，这样的极值函数 ϕ 是仿射函数。在这个简短的小节中，我们指出，只有在一种非常特殊的情况下才会出现这种情形：当 P 是一个凸锥与一个半空间的交集。

令 $L \subset \mathbb{R}^n$ 为开集。我们称 L 是线性锥，如果 $L + L \subset L$ 且 $\alpha L \subset L$ 对任意 $\alpha > 0$。我们称 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是凸锥，如果 $C = y + L$ 对某个 $y \in \mathbb{R}^n$ 且 L 是线性锥。

如果存在某个线性函数 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得 $H \subset \mathbb{R}^n$ 可表示为 $H = \{\chi < c\}$，其中 $c \in \mathbb{R}$，则称 $H \subset \mathbb{R}^n$ 为开半空间。如果 $0 \in H$，则有 $c > 0$，在这种情况下，我们总能令 $H = \{\chi < 1 + \frac{1}{n}\}$。这一归一化唯一确定了 $\chi := \chi_H$，我们称 χ_H 为 H 的线性定义函数。

定理 3.7. 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开凸集。当且仅当 $P = C \cap H$时，存在仿射的 $\phi \in \mathcal{W}(P)$，其中 $C = y + L$ 是凸锥，而 H 是半空间。在后一种情况下，$\psi(x) := \chi_{H-y}(x-y) - 1 \in \mathcal{W}(P)$ 是一个仿射极值函数。

证明。假设 $\phi : P \to \mathbb{R}$ 是仿射函数且 $\phi \in \mathcal{W}(P)$。令 $y \in \overline{P}$ 满足 $\phi(y) = \inf_P \phi$。将 P 替换为 $P - y$，并将 $\phi(x)$ 替换为 $\phi(x+y)$ 后，我们可以假设 $y = 0$。我们还可以假设 $\inf_P \phi = -1$。

特别地，$\psi(x) := \phi(x) + 1$，$x \in \mathbb{R}^n$ 是线性的，因为 ψ 是仿射的，且 $\psi(0) = 0$。我们引入 $H := \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) < \frac{1}{n}\} = \{x \in \mathbb{R} : \psi(x) < 1 + \frac{1}{n}\}$。

令 $L := \{rP,\ r > 0\}$。显然，L 是一个线性锥，因为 P 是凸的。我们声称 $P = L \cap H$。由于 $P = P_{\underline{1}}^\phi \subset H$，容易得到的包含关系是 $P \subset L \cap H$。反过来$_n$

包含关系，令 $p \in L \cap H$。则存在 $q \in P$ 和 $r > 0$ 使得 $p = rq$ 和 $p \in H$。后者意味着

$$\psi(p) = \phi(p) + 1 = r\psi(q) = r(\phi(q) + 1) < 1 + \frac{1}{n}. \tag{35}$$

若 $r \in [0, 1]$，则结论成立，因为 $p = rq = 0(1 - r) + rq \in P(0 \in \overline{P}$ 且 P 是开集)。若 $r > 1$，则由 (35) 得到 $\phi(p/r) < \frac{1}{r} - 1 + \frac{1}{nr}$.。这意味着 $p/r \in P_{\frac{1}{r}-1+\frac{1}{nr}}$。由于 $\phi \in \mathcal{W}(P)$，由 (33) 可得

$$p \in rP_{\frac{1}{r}-1+\frac{1}{nr}} = P.$$

反过来，假设若 $P = C \cap H$，其中 $C = y + L$ 是一个凸锥，且 H 是半空间。令 χ_{H-y} 为 H 的线性定义函数。

在这种情况下，我们取 $\phi(x) := \chi_{H-y}(x - y) - 1$。注意到 $\phi(y) = -1$，$\sup_P \phi = \frac{1}{n}$。此外，由于 ϕ 是仿射的，我们得到

$$P_a^\phi := \{\phi < a\} = \frac{1 - an}{1 + n} y + \frac{na + n}{1 + n} P, \quad -1 < a < \frac{1}{n}.$$

由命题 3.5 可得 $\int_P \phi = 0$ 以及 $\phi \in \mathcal{W}(P)$。

□

4 极值射线与多重拟处处支撑流

在证明定理 1.4 时，我们大量依赖 [DL20] 关于测地射线度量空间所建立的形式体系。有关背景和细节，请参阅该文。

用 $\mathcal{E}^1 \subset \mathrm{PSH}(X, \theta)$ 表示有限能量势函数空间：$u \in \mathcal{E}^1$ 若 $\int_X \theta_u^n = \int_X \omega^n$（其中 θ_u^n 是非多重极点复 Monge–Ampère 测度，定义见 [GZ07，第 1] 节），此外 $\int_X |u| \theta_u^n < \infty$。

用 $\mathcal{R}^1$ 表示 L^1 Mabuchi 测地射线空间 $[0, \infty) \ni t \to u_t \in \mathcal{E}^1$，其归一化条件为 $u_0 = 0$ 和 $I(u_t) = 0$，$t \geq 0$。

根据 [BDL1，命题 5.1]，映射 $t \to d_1(u_t, v_t)$ 对任意 $\{u_t\}_t, \{v_t\}_t \in \mathcal{R}^1$ 都是凸的，此处我们采用了备注 2.4 中的约定。在 [DL20] 中，这一性质被用于定义如下度量（另见 [CC18]）：

$$d_1^c(\{u_t\}_t, \{v_t\}_t) = \lim_{t \to \infty} \frac{d_1(u_t, v_t)}{t}.$$

根据 [DL20，定理 1.3 和 1.4]，我们知道 $(\mathcal{R}^1, d_1^c)$ 是完备的；此外，归一化有界测地射线 $\mathcal{R}^\infty$ 在 $\mathcal{R}^1$ [中稠密。DL20，定理 1.5]。

(6)中的径向 J 泛函可以用非常简单的形式表示，这略微推广了[DGS21，引理 5.2]:

引理 4.1. 对于 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^1$，我们有 $J\{u_t\} = \sup_X \dot{u}_0 = \tau_u^+ = \sup_l^X u_l$，对任意 $l > 0$ 均成立，其中 $\dot{u}_0 := \lim_{t \to 0} \frac{u_t}{t}$。

证明。我们有 $J(u_t) = \frac{1}{V} \int_X u_t \omega^n - I(u_t) = \frac{1}{V} \int_X u_t \omega^n$。根据 [Da19，引理 3.45]，我们得到 that

$$J\{u_t\} = \lim_{t \to \infty} \frac{J(u_t)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{\sup_X u_t}{t}.$$

根据引理 2.3 $t \to \sup_X u_t$是线性的，因此 $J\{u_t\} = \sup_l^X u_l = \tau_u^+$对于任意 $l > 0$。

最后，我们论证 $J\{u_t\} = \sup_X \dot{u}_0$。为此，我们必须论证，对于任意 $l > 0$，$\sup_X \dot{u}_0 = \sup_l^X u_l$。我们运用定理 2.5。首先注意到，将 u_t 替换为 $u_t - \tau_u^+ t$ 后，我们可以假设 $0 = \tau_u^+ = \sup_X \frac{u_l}{l}$, $l > 0$。

由于 $u_t := \sup_{\tau \le 0}(\hat{u}_\tau + t\tau)$ $t \ge 0$，我们得到，对于任意 $t \ge 0$， $u_t \ge \hat{u}_0$。由 $\tau_u^+ = 0$ 我们还得到 $u_t \le 0$。由于 $\{\hat{u}_\tau\}_\tau$ 是极大的，我们得到 $P[\hat{u}_0] = \hat{u}_0$，特别是 $\sup_X \hat{u}_0 = 0$。此外，由于 $\hat{u}_0$ 是上半连续的，存在 $x \in X$ 使得 $\sup_X \hat{u}_0 = u_0(x)$。由于 $\hat{u}_0 \le u_t \le 0$，对于所有 $t > 0$，我们得到 $u_t(x) = 0$。根据 t-凸性，我们有 $\dot{u}_0 \le 0$。但由于 $\dot{u}_0(x) = 0$，我们得出，对于任意 $l > 0$，$\sup_X \dot{u}_0 = 0 = \sup_l^X u_l$，证明至此完成。 □

引理 4.2. 对于 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^1$，我们有 $d_1(0, u_1) = \int_X |\dot{u}_0| \omega^n$，并且 $0 = I(u_1) = \int_X \dot{u}_0 \omega^n$。

证明. $d_1(0, u_1) = \int_X |\dot{u}_0| \omega^n$ 由 [BDL2，引理 3.4]可得。此外，可以看出，[BDL2，引理 3.4] 的论证蕴含了 $I(u_1) = \int_X \dot{u}_0 \omega^n$。 □

给定 $v \in$拟次调和函数(X, θ)，如果 $v = P[v]$，则称 v为模型势函数，其中 $P[v]$ 在（17）中定义。关于模型势函数的更多内容，请参阅 [DDL18a]。

引理 4.3. 对任意 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^1$ 和 $b \le a < \tau_u^+$，我们有

$$\int_{\{\dot{u}_0 \ge b\}} \omega^n \le \frac{(\tau_u^+ - b)^n}{(\tau_u^+ - a)^n} \int_{\{\dot{u}_0 \ge a\}} \omega^n.$$

此外 $[-\infty, \tau_u^+) \ni s \to \left(\int_{\{\dot{u}_0 \ge s\}} \omega^n \right)^{1/n}$是凹函数。

证明。由定理 2.5 可知，$\hat{u}_\tau \in$ 拟次调和函数(X, ω) 是一个模型势。因此，根据 [DT20，定理 1]（参见[DDL18a，定理 3.8]），我们有 $\int_X \omega_{\hat{u}_\tau}^n = \int_{\{\hat{u}_\tau = 0\}} \omega^n$。此外，由于勒让德变换的基本性质 $\{\dot{u}_0 \ge \tau\} = \{\hat{u}_\tau = 0\}$，特别是，

$$\int_X \omega_{\hat{u}_\tau}^n = \int_{\{\dot{u}_0 \ge \tau\}} \omega^n. \tag{36}$$

现在令 $b \le a \le \tau_u^+$。我们回顾一下，$\tau \to \hat{u}_\tau$是凹函数，而拟次调和函数(X, ω) $\ni v \to \left(\int_X \omega_v^n \right)^{\frac{1}{n}}$也是凹函数（[DDL21，定理 B]。因此，利用 [WN17，定理 1.2]，我们得出 $s \to \left(\int_X \omega_{\hat{u}_s}^n \right)^{1/n}$ 是凹函数。结合 (36)，这就证明了引理的最后一个结论。利用凹性，我们可以写成

$$\frac{(\tau_u^+ - a)}{(\tau_u^+ - b)} \left(\int_X \omega_{\hat{u}_b}^n \right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{(\tau_u^+ - a)}{(\tau_u^+ - b)} \left(\int_X \omega_{\hat{u}_b}^n \right)^{\frac{1}{n}} + \frac{(a - b)}{(\tau_u^+ - b)} \left(\int_X \omega_{\hat{u}_{\tau_u^+}}^n \right)^{\frac{1}{n}} \tag{37}$$

$$\le \left(\int_X \omega^n_{\frac{(\tau_u^+ - a)}{(\tau_u^+ - b)} \hat{u}_b + \frac{(a-b)}{(\tau_u^+ - b)} \hat{u}_{\tau_u^+}} \right)^{\frac{1}{n}} \tag{38}$$

$$\le \left(\int_X \omega_{\hat{u}_a}^n \right)^{\frac{1}{n}}. \tag{39}$$

与 (36) 比较，即得结果。 □

在继续之前，让我们回顾一下与任意 $v \in \mathrm{PSH}(X,\omega)$ 和 $a,b \in \mathbb{R}$（满足 $a<b$）相关的特殊类型测地射线的构造：[Da17],。

考虑到 (22) 和定理 2.5，定义 $\hat{r}(a,b,v)_\tau \in$ 拟次调和函数(X,ω)如下：

$$\hat{r}(a,b,v)_\tau := \begin{cases} 0, & \tau \le a; \\ P[\frac{\tau-a}{b-a}v], & a<\tau<b; \\ \lim_{\tau \nearrow b} P[\frac{\tau-a}{b-a}v], & \tau = b; \\ -\infty, & \tau > b. \end{cases} \tag{40}$$

根据 [DDL18a, 定理 3.12]，我们有 $P[r(a,b,v)_\tau] = r(a,b,v)_\tau$，$\tau \in \mathbb{R}$。因此，由定理 2.5(iii) 可得，$\{\hat{r}(a,b,v)_\tau\}_\tau$ 是一条有界极大测试曲线，它诱导出测地射线 $\{r(a,b,v)_t\}_t \in \mathcal{R}^\infty$；若 $v \in$拟次调和函数(X,ω) 是多重拟处处支撑的，那么这条射线将在下文发挥关键作用。事实上，对于 v 多重拟处处支撑的情形，可以计算 $\{r(a,b,v)_t\}_t$ 的径向 Monge–Amp`ere 能量和 J 能量：

命题 4.4. 对任意多重拟处处支撑的 $v \in$拟次调和函数(X,ω)，有 $I\{r(-1/n,1,v)_t\} = 0$，此外

$$\frac{2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n J\{r(-1/n,1,v)_t\} = d_1(0, r(-1/n,1,v)_1).$$

证明。我们首先计算 $I\{r(-1/n,1,v)_t\}$。注意，$\tau_r^+ = 1$和 $\tau_r^- = -1/n$。

我们将多次使用：$\int_X \omega^n_{P[w]} = \int_X \omega^n_w$对所有 $w \in$拟次调和函数(X,ω)（[DDL18a，定理 1.3，定理 2.3]）。此外，由于 v 是多重拟处处支撑的，我们有 $\int_X \omega_v^k \wedge \omega^{n-k} = 0$对所有 $k \in \{1,\dots,n\}$。

U利用上述内容，公式 (23) 可以进行以下计算 ：

$$\begin{aligned} I\{r(-1/n,1,v)_t\} &= \frac{1}{V}\int_{-\frac{1}{n}}^1 \left(\int_X \omega^n_{P[\frac{n\tau+1}{n+1}v]} - \int_X \omega^n\right) \mathrm{d}\tau + 1 \\ &= \frac{1}{V}\int_{-\frac{1}{n}}^1 \left(\int_X \omega^n_{\frac{n\tau+1}{n+1}v} - \int_X \omega^n\right) \mathrm{d}\tau + 1 \\ &= \frac{1}{V}\int_{-\frac{1}{n}}^1 \left(\left(\frac{n-n\tau}{n+1}\right)^n \int_X \omega^n - \int_X \omega^n\right) \mathrm{d}\tau + 1 \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n}\int_{-\frac{1}{n}}^1 (1-\tau)^n d\tau - \frac{1}{n} = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

由于 $J\{r(-1/n,1,v)_t\} = \tau_r^+{}_{(-1/n,1,v)} - I\{r(-1/n,1,v)_t\}$（引理 4.1），且 $\tau_r^+{}_{(-1/n,1,v)} = 1$，我们得到 $J\{r(-1/n,1,v)_t\} = 1$。

最后，我们计算 $d_1(0, r(-1/n, 1, v)_1) = \frac{1}{V}\int_X |\dot{r}(-1/n, 1, v)_0|\omega^n$。

$$\begin{aligned} d_1(0, r(-1/n, 1, v)_1) &= \frac{1}{V}\int_X |\dot{r}(-1/n, 1, v)_0|\omega^n \\ &= \frac{2}{V}\int_{\{\dot{r}(-1/n,1,v)_0 \geq 0\}} \dot{r}(-1/n, 1, v)_0 \omega^n \\ &= \frac{2}{V}\int_0^1 \omega^n(\{\dot{r}(-1/n, 1, v)_0 \geq s\})ds \\ &= \frac{2}{V}\int_0^1 \omega^n_{\hat{r}_s} ds = \frac{2}{V}\int_0^1 \omega^n_{\frac{ns+1}{n+1}v} ds \\ &= \frac{2}{V}\int_0^1 \left(\frac{n-ns}{n+1}\right)^n \int_X \omega^n \, \mathrm{d}s \\ &= 2\int_0^1 \left(\frac{n-ns}{n+1}\right)^n \mathrm{d}\tau = \frac{2n^n}{(n+1)^{n+1}}, \end{aligned}$$

其中，第二行用到了引理 4.2，第四行用到了 (36)，第五行用到了 v 是多重拟处处支撑这一事实。 □

有了上述结果，我们现在可以刻画命题 4.3 中等号成立的情形：

引理 4.5. 设 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^\infty$。则

$$\int_{\{\dot{u}_0 \geq b\}} \omega^n = \frac{(\tau_u^+ - b)^n}{(\tau_u^+ - a)^n}\int_{\{\dot{u}_0 \geq a\}} \omega^n$$

对所有 $\tau_u^- \leq b \leq a < \tau_u^+$都成立，当且仅当存在 $v \in$拟次调和函数(X, ω)，且其为多重拟处处支撑，使得$u_t = r(\tau_u^-, \tau_u^+, v))_t$, $t \geq 0$。

证明。我们只证明正向推论，因为我们只会用到这一方向。反向推论的简单证明留给读者。

Let $v = \hat{u}_{\tau_u^+}$。我们证明 v是多重拟处处支撑的，且 $u_t = r(\tau_u^-, \tau_u^+, v))_t$, $t \geq 0$.

首先注意到，不等式 (37)、(38) 和 (39) 均为等式。取 $b = \tau_u^-$ 和 $a \in$（τ_u^-、τ_u^+），可得：

$$\begin{aligned} \frac{(\tau_u^+ - a)}{(\tau_u^+ - \tau_u^-)}\left(\int_X \omega^n\right)^{\frac{1}{n}} &= \frac{(\tau_u^+ - a)}{(\tau_u^+ - \tau_u^-)}\left(\int_X \omega^n\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{(a - \tau_u^-)}{(\tau_u^+ - \tau_u^-)}\left(\int_X \omega_v^n\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (42) \\ &= \left(\int_X \omega^n_{\frac{(a-\tau_u^-)}{(\tau_u^+ - \tau_u^-)}v}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (43) \\ &= \left(\int_X \omega^n_{\hat{u}_a}\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (44) \end{aligned}$$

等式 (44) 以及 $\hat{u}_a$ 是模型（定理 2.5）这一事实意味着，$\hat{u}_a = P\left[\frac{(a-\tau_u^-)}{\tau_u^+ - \tau_u^-}v\right] = \hat{r}(\tau_u^-, \tau_u^+, v))_a$ 对于 $a \in (\tau_u^-, \tau_u^+)$ 成立。

由 (43) 可知

$$\frac{(\tau_u^+ - a)^n}{(\tau_u^+ - \tau_u^-)^n}\int_X \omega^n = \int_X \omega^n_{\frac{(a-\tau_u^-)}{(\tau_u^+-\tau_u^-)}v}, \quad a \in [\tau_u^-, \tau_u^+].$$

非多重拟处处积的多重线性性现在意味着，对于所有$k \in \{1, \dots, n\}$，$\int_X \omega_v^k \wedge \omega^{n-k} = 0$，因此 v 是多重拟处处支撑的。 □

在刻画极值射线之前，我们先回顾[DGS21], 中定理 1.3 的证明，其论证与定理 3.1 的论证有着显著的相似之处：

定理 4.6. *[DGS21]* 设（X, ω）是紧致 K¨ahler 流形，且 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^1$。则以下不等式成立：

$$\frac{2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n J\{u_t\} \leq d_1(0, u_1) \leq 2J\{u_t\}. \tag{45}$$

证明。由引理 4.1 和引理 4.2，只需证明以下估计：

$$\frac{2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sup_X \dot{u}_0 \leq \frac{1}{V}\int_X |\dot{u}_0|\omega^n \leq 2 \sup_X \dot{u}_0.$$

通过对时间重新缩放，我们还可以假设 $\sup_X \dot{u}_0 = 1$，因此只需证明

$$\frac{2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{V}\int_X |\dot{u}_0|\omega^n \leq 2. \tag{46}$$

我们先证明较简单的第二个估计。令 $X_- := \{\dot{u}_0 < 0\}$ 且 $X_+ := \{\dot{u}_0 \geq 0\}$。由于$I(u_1) = \int_X \dot{u}_0 \omega^n$，我们有

$$\frac{1}{V}\int_X |\dot{u}_0|\omega^n = \frac{2}{V}\int_{X_+} \dot{u}_0\omega^n \leq 2 \sup_X \dot{u}_0.$$

To 处理第一个估计时，我们先进行如下预备计算 ：

$$\begin{aligned}\int_X |\dot{u}_0|\omega^n &= 2\int_{X^+} \dot{u}_0\omega^n = 2\int_0^1 \int_{\{\dot{u}_0 \geq x\}} \omega^n dx \geq 2\int_0^1 (1-x)^n \int_{\{\dot{u}_0 \geq 0\}} \omega^n dx \\ &= \frac{2}{n+1}\int_{\{\dot{u}_0 \geq 0\}} \omega^n,\end{aligned} \tag{47}$$

其中我们利用了：对于任意非负的 μ-可测 f，$\int f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu\{f \geq t\}dt$，以及引理 4.3 中的参数 $0 \leq x \leq \sup_X \dot{u}_0 = 1$。

为了估计 $\int_{X_-} |\dot{u}_0|\omega^n$，我们可以使用与上述类似的技巧：

$$\begin{aligned}\int_{X_-} |\dot{u}_0|\omega^n &\geq \int_0^{\frac{1}{n}} \int_{X\setminus\{\dot{u}_0 \geq -x\}} \omega^n dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \left(V - \int_{\{\dot{u}_0 \geq -x\}} \omega^n\right) dx \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{n}} \left(V - (1+x)^n \int_{\{\dot{u}_0 \geq 0\}} \omega^n\right) dx \\ &= \frac{V}{n} - \frac{(\frac{1}{n}+1)^{n+1}}{n+1}\int_{\{\dot{u}_0 \geq 0\}} \omega^n + \frac{1}{n+1}\int_{\{\dot{u}_0 \geq 0\}} \omega^n,\end{aligned} \tag{48}$$

其中在第二行，我们再次对参数 $-x \le 0 \le \sup_X \dot{u}_0 = 1$ 使用了引理 4.3。

现在令 $A > 0$ 满足 $\frac{1}{2}\int_X |\dot{u}_0|\omega^n = \int_{X_+} |\dot{u}_0|\omega^n = -\int_{X_-} \dot{u}_0\omega^n = A\int_{\{\dot{u}_0 \ge 0\}} \omega^n$。于是得到

$$A\int_{\{\dot{u}_0\ge 0\}} \omega^n \ge \frac{1}{n}V - \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \int_{\{\dot{u}_0\ge 0\}} \omega^n + \frac{1}{n+1}\int_{\{\dot{u}_0\ge 0\}} \omega^n,$$

这意味着

$$\int_X |\dot{u}_0|\omega^n = 2A\int_{\{\dot{u}_0\ge 0\}} \omega^n \ge \frac{2A}{nA + \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \frac{n}{n+1}}V.$$

右端是关于 A 的增函数，并且由 (47) 可知 $A \ge \frac{1}{n+1}$。这意味着右端在 $A = \frac{1}{n+1}$处取最小值，因此

$$\int_X |\dot{u}_0|\omega^n \ge \frac{\frac{2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}V = \frac{2}{(n+1)}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n V, \tag{49}$$

从而完成了 (46) 的证明。 □

定理 4.7。设 (X,ω) 是一个紧致 K¨ahler 流形，且 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^1$ 满足 $\tau_u^+ = 1$ 以及

$$\frac{2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n J\{u_t\} = d_1(0,u_1). \tag{50}$$

那么存在一个多重拟处处支撑的 $v \in$拟次调和函数(X,ω)，使得 $u_t = r(-\frac{1}{n}, 1, v)_t$，$t \ge 0$。反过来，对于任意多重拟处处支撑的 $w \in$拟次调和函数(X,ω)，射线 $\{r(-\frac{1}{n}, 1, w)_t\}_t$满足 (50)。

我们注意到，条件 $\tau_u^+ = 1$ 只是一个简单的归一化，任何射线 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^1$都可以通过对时间重新缩放来满足该条件 (50)。虽然这里没有用到环面对称性，但这一论证与命题 3.3 的证明有相似之处。

证明。取 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^1$，使得 (50) 成立。

考察定理 4.6 的证明，由于所有 x-被积函数都是连续的（引理 4.3），我们得出，对于我们的 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^1$，(47) 与 (49) 之间的所有不等式实际上都是等式。特别是，(48) 的第一行表明，在 X 上几乎处处有 $\dot{u}_0 \ge -\frac{1}{n}$。由 t-凸性可知，这意味着在 X 上几乎处处有 $u_t \ge -\frac{t}{n}$。由于 $u_t \in$ 是 PSH(X,ω)，我们得到 $u_t \ge -\frac{t}{n}$ 在全局成立，因此 $\{u_t\}_t \in \mathcal{R}^\infty$。

由 (48) 和 (47) 第二行中的等式可得，对于任意$x \in [-\frac{1}{n}, 1)$，$\int_{\{\dot{u}_0\ge x\}} \omega^n = (1-x)^n \int_{\{\dot{u}_0\ge 0\}} \omega^n$。取 $x = a$，并令 $x = b$ 对于 $-\frac{1}{n} = \tau_u^- \le b \le a < \tau_u^+ = 1$，我们得到

$$\int_{\{\dot{u}_0\ge b\}} \omega^n = \frac{(1-b)^n}{(1-a)^n}\int_{\{\dot{u}_0\ge a\}} \omega^n.$$

引理 4.5 现在推出，存在一个 $v \in$ 拟次调和函数(X,ω)，其为多重拟处处支撑，使得 $u_t = r(\tau_u^-, \tau_u^+, v))_t$，$t \ge 0$。

反过来，令 $u_t := r(-1/n, 1, w)_t$，$t \ge 0$对于 $w \in$拟次调和函数(X,ω) 具有多重次调和支撑。于是命题 4.4 表明 (50) 成立。 □

References

[Ab00] M. Abreu, 《辛坐标下环面流形的 K¨ahler 几何》, arXiv:math/0004122.[BBJ] R. Berman, S. Boucksom, M. Jonsson, 《Yau-Tian-Donaldson 猜想的变分方法》。J. Amer. Math. Soc. 34 (2021), no. 3, 605–652.[BDL1] R.J. Berman, T. Darvas, C.H. Lu, 《扩展 K-能量的凸性与 Calabi 流的长期行为》, Geom. and Topol. 21 (2017), no. 5, 2945-2988.[BDL2] R.J. Berman, T. Darvas, C.H. Lu, 《K-能量弱极小值的正则性及其在适定性和 K 稳定性中的应用》, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. 53 (2020), no. 4, 267–289.[BHJ17] S. Boucksom, T. Hisamoto, M. Jonsson, 《一致K稳定性、杜斯特迈斯特-海克曼测度与偶对奇点》, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 67 (2017), no. 2, 743–841.[Bl13] Z. Blocki, 《K`ahler 几何中的复 Monge-Amp¨ère 方程》, 2011 年 7 月于意大利切特拉罗 CIME 多重势论暑期学校讲授的课程, 编者: F. Bracci, J. E. Fornaess, Lecture Notes in Mathematics 2075, pp. 95-142, Springer, 2013.[CS08] A. Cannas da Silva, 《辛几何讲义》, Lecture Notes in Mathematics 1764, Springer- Verlag, 2008.[Ch 00] X.X. Chen, 《K¨ahler 度量空间》, J. Differential Geom. 56 (2000), 189–234.[CC18] X.X. Chen, J. Cheng, 《关于常标量曲率 K¨ahler 度量及一般自同构群》, arXiv:1801.05907.[Ce98] U. Cegrell, 《多复能量》。Acta Math. 180 (1998), no. 2, 187–217.[Da15] T. Darvas, 《有限能量类的 Mabuchi 几何》, Adv. Math. 285 (2015), 182-219.[Da17] T. Darvas, 《K¨ahler 势函数空间中的弱测地射线与类 $\mathcal{E}(X,\omega)$》, J. Inst. Math. Jussieu 16 (2017), no. 4, 837–858.[Da19] T. Darvas, 《K¨ahler 流形上的几何多重势理论》, Advances in complex geometry, 1-104, Contemp. Math. 735, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2019.[DDL18a] T. Darvas, E. Di Nezza, C. H. Lu, 《非多重极点乘积的单调性及具有指定奇性的复 Monge–Amp`ère 方程》, Analysis and PDE 11 (2018), no. 8.[DDL18b] T. Darvas, E. Di Nezza, C. H. Lu, 《大上同调类的 $L^1$ 度量几何》, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 68 (2018), no. 7, 3053–3086.[DDL21] T. Darvas, E. Di Nezza, C. H. Lu, 《体积的对数凹性及具有指定奇性的复 Monge-Amp`ère 方程》, Math. Ann. 379 (2021), no. 1-2, 95–132.[DGS21] T. Darvas, E. George, K. Smith, 《关于 J 泛函相对于 d_1度量的最优渐近性质》, 即将发表于 Selecta Math. arXiv:2101.02589.[DL20] T. Darvas, C.H. Lu, 《测地稳定性、射线空间与 Mabuchi 几何中的一致凸性》, Geom. and Topol. 24 (2020), no. 4, 1907–1967.[DX20]T. Darvas, M. Xia, 《测试构形的闭包与代数奇异性类型》, arXiv:2003.04818.[DG16] E. Di Nezza, V. Guedj, 《奇异簇上 K¨ahler 度量空间的几何与拓扑》。Compos. Math. 154 (2018), no. 8, 1593–1632.[DT20] E. Di Nezza, S. Trapani, 《接触集上的 Monge–Amp`ère 测度》, arXiv:1912.12720.[Do99] S.K. Donaldson, 《对称空间、K¨ahler 几何与哈密顿动力学》, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 196, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1999, 13-33.[Gu14] V. Guedj, 《K¨ahler 度量黎曼空间的度量完备化》, arXiv:1401.7857.[GZ07] V. Guedj, A. Zeriahi, 《拟多重次调和函数的加权 Monge-Amp`ère 能量》, arXiv:math/0612630.[GZ16] V. Guedj, A. Zeriahi, 《退化复 Monge-Amp`ère 方程》, EMS Tracts in Mathematics, Vol. 26, 2016.[Ma87] T. Mabuchi, 《紧致 K¨ahler 流形上的一些辛几何 I》, Osaka J. Math. 24, 1987, 227-252. Vol. 26, 2016.

[MC21] N. McCleerey, 《紧致 K¨ahler 流形上的多重拟处处支撑流》, arXiv:2106.12017.[RWN14] J. Ross、D. Witt Nystr¨om, 《解析测试构形与测地射线》, J. Symplectic Geom. 12 (2014), 第 1 期, 125–169.[Se92] S. Semmes, 《复 Monge-Ampère 方程与辛流形》, Amer. J. Math. 114 (1992), 495–550.[SZ20] Z. Sj¨ostr¨om Dyrefelt, 《Donaldson 的 J 泛函的最优下界》, Adv. Math. 374 (2020), 107271, 37 页.[WN17] D. Witt Nystr¨om, 《非多重极点 Monge-Amp`ère 质量的单调性》, Indiana Univ. Math. J. 68 (2019), 第 2 期, 579–591.[ZZ08] B. Zhou、X. Zhu, 《环面流形上的相对 K 稳定性与修正 K 能量》, Advances in Mathematics 219 (2008), 1327–1362。

University of Texas, Austin
abenda@utexas.edu
University of Marylandsbachhub@terpmail.umd.edu,
bchristo@terpmail.umd.edu, tdarvas@umd.edu