arXiv:2304.06324v1 [math.RA] 13 Apr 2023

后李-山口代数、非零权的相对 Rota-Baxter 算子及其变形

JIA ZHAO、SENRONG XU 和 YU QIAO*

摘要。本文引入李-山口代数上的权 1 相对 Rota-Baxter 算子以及后李-山口代数的概念，后者是权 1 相对 Rota-Baxter 算子所依托的代数结构。我们给出了这两种代数结构之间的关系。此外，我们基于山口上同调建立了权 1 相对 Rota-Baxter 算子的上同调理论。进而，我们利用这一上同调刻画李-山口代数上权 1 相对 Rota-Baxter 算子的线性变形。我们证明，若一个权 1 相对 Rota-Baxter 算子的两个线性变形等价，则它们的无穷小在第一上同调群中属于同一个上同调类。此外，一个权 1 相对 Rota-Baxter 算子的 n 阶变形能够扩张为 n+1 阶变形，当且仅当其在第二上同调群中的障碍类是平凡的。

目录

1. 引言 1
1.1. 李-山口代数 2
1.2. 变形 2
1.3. 研究动机 3
1.4. 论文概要 3
2. 预备知识：李-山口代数、表示与上同调 4
3. 李-山口代数上的非零权相对 Rota-Baxter 算子 7
4. 后李-山口代数 10
5. 李-山口代数上的非零权相对 Rota-Baxter 算子的上同调与变形 14
5.1. 李-山口代数上的非零权相对 Rota-Baxter 算子的上同调 14
5.2. 李-山口代数上的非零权相对 Rota-Baxter 算子的变形 20
参考文献 23

1. 引言

G. Baxter 在研究涨落理论时，提出了结合代数上的 Rota-Baxter 算子的概念 [4]。后来，Kupershmidt 在研究经典 Yang-Baxter$O$方程时，提出了李代数上的相对 Rota-Baxter 算子（也称为O-算子或 Kupershmidt 算子）

日期：2023年4月14日。关键词：权1的相对 Rota-Baxter 算子，后李-山口代数，上同调，变形。
数学主题分类（2020年）：主要分类 17B38；次要分类 17B60，17A99。

方程 [22]。Rota-Baxter 算子在数理物理中有诸多应用，例如可积系统和量子力学 [1]。此后，Rota-Baxter 代数在许多领域都成为热门课题，例如，关于 Rota-Baxter 代数的首项研究近期才出现[16]。此外，文献 [35, 36, 37, 44]研究了李代数及其他类型代数上的若干相对 Rota-Baxter 算子。Sheng 和第一作者提出了李-山口代数上的相对 Rota-Baxter 算子的概念，并给出了它与李-山口代数上辛结构的关系 [33]。因此，第一作者和通讯作者研究了李-山口代数上相对 Rota-Baxter 算子的上同调与变形，见[45]。

一般而言，李代数上的权重为1的相对 Rota-Baxter 算子对应于修正经典 Yang-Baxter方程的解，并且在广义Lax对和仿射结构中发挥着重要作用 [2]。Bai 及其合作者通过引入扩展相对Rota-Baxter算子的概念，将非零权的相对 Rota-Baxter 算子与修正经典Yang-Baxter方程联系起来，并给出了其在李双代数中的一些应用[2]。权重为1的相对 Rota-Baxter 算子可导出一个后李代数，而后李代数是微分几何中的一个关键对象。后李代数可视为一种非交换前李代数。近期，文献[18], 引入了3-李代数上的非零权相对 Rota-Baxter 算子和3-post-Lie 代数，作者并利用控制代数研究了其上同调。此外，Zhou 及其合作者在文献 [38], 中考察了非零权 Rota-Baxter 代数的上同调与同伦理论；文献[26]则研究了非零权微分代数的上同调、变形和扩张。

1.1. 李-山口代数。李-山口代数可追溯至 Nomizu 在20世纪50年代关于齐性空间上的仿射不变联络的研究 [30]。后来，在20世纪60年代，Yamaguti 引入了一种代数结构，并称之为一般李三元系或李三元代数[39, 40, 41], ，因为它可以看作李代数和 Lie 三系的推广。21世纪初，Kinyon 和 Weinstein 在研究 Courant 代数丛时，首次将这一对象称为李-山口代数 [20]。李-山口代数完全源自微分几何，且是数理物理中的一种关键高阶结构，因此近年来受到广泛关注和研究。例如，Benito 及其合作者深入探讨了不可约李-山口代数及其与正交李代数的关系 [5, 6,7, 8]。文献 [23, 28, 42, 43] 研究了李-山口代数的变形与扩张。Sheng、第一作者和 Zhou 在文献 [33] 中借助 Nijenhuis 算子分析了李-山口代数上的乘积结构和复结构。Takahashi 在文献[34]中利用李-山口代数的表示研究拟群上的模。

1.2. 变形。数理物理包含数学中的许多分支，并可应用于李理论和表示论 [19, 24]。变形理论在数学和数理物理中发挥着重要作用。粗略地说，数学对象的变形是指在参数扰动后仍保留其原有结构。在物理学中，变形理论源于经典力学量子化，这一思想推动了数学中关于量子群的一些研究[9, 17]。近年来，在数理物理领域，变形量子化产生了许多优美的成果。基于 Kodaira 和 Spencer 在复分析方面的工作 [21], ，变形理论被推广到代数中[17]。代数的变形研究可追溯到 Gerstenhaber 关于结合代数的工作 [11, 12, 13, 14, 15]。后来，Nijenhuis 和 Richadson 研究了李代数的变形 [29]。Balavoine 将变形理论推广到了运算子 [3]。

在代数领域，变形与上同调密切相关。例如，适当的上同调可用于刻画变形。特别地，李代数的线性变形由第二上同调群控制；一个阶n 变形能够延拓为阶$n+1$ 变形，当且仅当其障碍类是平凡的；平凡变形会产生一个 Nijenhuis 算子[10], ，它在变形理论中发挥着重要作用，并应用于构造双哈密顿系统的可积性研究 [10]。Sheng 及其合作者围绕（3-）李代数的变形理论开展了一系列研究。例如，他们研究了 3-李代数和偶数阶n-李代数的变形[25] ，并利用 Nijenhuis 算子考察了 3-李代数上的乘积和复结构[32]。此外，他们构造了一个控制代数，分别刻画李代数、3-李代数和 Leibniz 代数上相对 Rota-Baxter 算子的变形 [35, 36, 37]。近年来，Pei 及其同事通过相同的方法在李代数上建立了交叉同态，并利用双函子推广了多种李代数的构造[31]。此外，第一作者和通讯作者研究了李YRep 对的上同调与线性变形，并探讨了李YRep 对上相对 Rota-Baxter-Nijenhuis 结构的若干性质 [44], ，以及李-山口代数上相对 Rota-Baxter 算子的上同调与变形[45]。

1.3. 研究动机。考虑李-山口代数上的权重为1的相对罗塔-巴克斯特算子是很自然的。本文的首要目的是探讨权重为1的相对罗塔-巴克斯特算子与相关代数结构之间的关系。为此，我们引入后李-山口代数的概念，它可视为权重为1的相对罗塔-巴克斯特算子的底层代数结构。我们还证明，后李-山口代数会导出一种李-山口代数结构，以及该李-山口代数在自身上的作用。因此，恒等映射是这个导出的李-山口代数上的权重为1的相对罗塔-巴克斯特算子。

第二个目的是探究权重为1的相对 Rota-Baxter 算子的上同调与变形。为此，我们需要构造由权重为1的相对 Rota-Baxter 算子诱导的子相邻李-山口代数的一个新表示，并构造一个 0-上链，这是本文的主要任务之一。建立上同调后，我们便能够考察权重为1的相对 Rota-Baxter 算子的变形。我们计划研究两类变形：线性变形和高阶变形。

1.4. 论文结构。本文结构如下。第 2 节回顾一些基本概念，如李-山口代数、表示和上同调。第 3 节引入李-山口代数上权重为 1 的相对 Rota-Baxter 算子的概念，并研究其若干性质。第 4 节引入后李-山口代数的概念，它是权重为 1 的相对 Rota-Baxter 算子所对应的底层代数结构。我们给出后李-山口代数与李-山口代数之间的关系。第 5 节建立李-山口代数上权重为 1 的相对 Rota-Baxter 算子的上同调，并考察该上同调理论的函子性。此外，我们利用这类上同调研究两种变形，并证明线性变形的无穷小可由上同调控制，而高阶变形的延拓则由一个特殊的上同调类刻画，该类称为障碍类。

本文中，所有向量空间均假设定义在特征零域 $\mathbb{K}$ 上且维数有限。

2. 预备知识：李-山口代数、表示与上同调

本节中，我们回顾一些基本概念，例如李-山口代数、表示及其上同调理论。李-山口代数的概念由 Yamaguti 于[39]提出。

定义 2.1. [20] 李-山口代数是一个向量空间 g，配备一个双线性括号$[\cdot,\cdot]: \wedge^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 和一个三线性括号 $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]: \wedge^2\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，并满足以下条件：对所有 $x,y,z,w,t \in \mathfrak{g}$,

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]+[\![x,y,z]\!]+[\![y,z,x]\!]+[\![z,x,y]\!]=0, \tag{1}$$

$$[\![[x,y],z,w]\!]+[\![[y,z],x,w]\!]+[\![[z,x],y,w]\!]=0, \tag{2}$$

$$[\![x,y,[z,w]]\!]=[[\![x,y,z]\!],w]+[z,[\![x,y,w]\!]], \tag{3}$$

$$[\![x,y,[\![z,w,t]\!]]\!]=[\![[\![x,y,z]\!],w,t]\!]+[\![z,[\![x,y,w]\!],t]\!]+[\![z,w,[\![x,y,t]\!]]\!]. \tag{4}$$

下文中，我们将李-山口代数记为 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$。

例 2.2. 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数。定义一个三线性括号

$$[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]: \wedge^2\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

by

$$[\![x,y,z]\!] := [[x,y],z], \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}.$$

于是，经过直接计算可知，$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 构成一个李-山口代数。

下面的例子更加有趣。

例 2.3. 设 M 是一个带有仿射联络的闭流形，并记 X(M) 为 M 上向量场的集合。对于所有 x、y、$z \in X(M)$，令

$$\begin{aligned} [x,y] &:= -T(x,y), \\ [\![x,y,z]\!] &:= -R(x,y)z, \end{aligned}$$

其中，T 和 R 分别为挠率张量和曲率张量。事实上，三元组 $(X(M), [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 构成一个李-山口代数。更多细节请参见 [30] 。

接下来，我们回顾李-山口代数的表示概念。

定义 2.4. [40] 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 是一个李-山口代数。g 的一个表示是指一个向量空间 V，并配备一个线性映射 $\rho: \mathfrak{g} \to gl(V)$ 以及一个双线性映射 $\mu: \otimes^2\mathfrak{g} \to gl(V)$，它们满足以下条件：对所有 x、y、z、$w \in \mathfrak{g}$,

$$\mu([x,y],z)-\mu(x,z)\rho(y)+\mu(y,z)\rho(x)=0, \tag{5}$$

$$\mu(x,[y,z])-\rho(y)\mu(x,z)+\rho(z)\mu(x,y)=0, \tag{6}$$

$$\rho([\![x,y,z]\!])=[D_{\rho,\mu}(x,y),\rho(z)], \tag{7}$$

$$\mu(z,w)\mu(x,y)-\mu(y,w)\mu(x,z)-\mu(x,[\![y,z,w]\!])+D_{\rho,\mu}(y,z)\mu(x,w)=0, \tag{8}$$

$$\mu([\![x,y,z]\!],w)+\mu(z,[\![x,y,w]\!])=[D_{\rho,\mu}(x,y),\mu(z,w)], \tag{9}$$

其中，双线性映射 $D_{\rho,\mu}: \otimes^2\mathfrak{g} \to gl(V)$ 定义为

$$D_{\rho,\mu}(x,y) := \mu(y,x)-\mu(x,y)+[\rho(x),\rho(y)]-\rho([x,y]), \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}. \tag{10}$$

显然，$D_{\rho,\mu}$ 是斜对称的，且下文中我们记D 以避免歧义。我们将 g 的一个表示记为 $(V; \rho,\mu)$。

注 2.5.设$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 是一个李-山口代数，且 $(V;\rho,\mu)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示。如果 $\rho = 0$ 且李-山口代数 $\mathfrak{g}$退化为一个Lie 三系 $(\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$，那么该表示退化为 Lie三系 $(\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$的表示：$(V;\mu)$。如果$\mu = 0$，$D = 0$ 且李-山口代数$\mathfrak{g}$ 退化为一个李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$，那么该表示退化为李代数$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$的表示：$(V;\rho)$。因此，李-山口代数的表示是李代数或 Lie 三系的表示的一种自然推广。

通过直接计算，我们得到以下引理。

引理 2.6. 假设$(V;\rho,\mu)$ 是李-山口代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 的表示。则满足以下等式：

$$\begin{aligned}
&D([x,y],z) + D([y,z],x) + D([z,x],y) = 0;\\
&D([\![x,y,z]\!],w) + D(z,[\![x,y,w]\!]) = [D(x,y), D_{\rho,\mu}(z,w)];\\
&\mu([\![x,y,z]\!],w) = \mu(x,w)\mu(z,y) - \mu(y,w)\mu(z,x) - \mu(z,w)D(x,y).
\end{aligned}$$

例 2.7. 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 是一个李-山口代数。我们定义线性映射 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 和 $R : \otimes^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$，分别由 $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ 和 $(x, y) \mapsto R_{x,y}$ 给出，其中 $\mathrm{ad}_x z = [x, z]$，且 $R_{x,y} z = [\![z, x, y]\!]$，对所有 $z \in \mathfrak{g}$ 均成立。那么 (ad, R) 构成 $\mathfrak{g}$ 在其自身上的一个表示，其中 $L := D_{\mathrm{ad},\Re}$由下式给出。

$$\mathfrak{Q}_{x,y} = \Re_{y,x} - \Re_{x,y} + [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] - \mathrm{ad}_{[x,y]}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

根据(1)，我们有

$$\mathfrak{Q}_{x,y} z = [\![x, y, z]\!], \quad \forall z \in \mathfrak{g}.$$

在这种情况下，$(\mathfrak{g}; \mathrm{ad}, R)$ 被称为 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示。

让我们回顾一下 [40] 中给出的李-山口代数上的上同调理论。设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 是一个李-山口代数，且 $(V; \rho, \mu)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示。我们将 p-余链的集合记为 $C^p{}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V)$（$p \geqslant 1$），其中

$$C^{n+1}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V) \triangleq \begin{cases} \mathrm{Hom}(\underbrace{\wedge^2\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \wedge^2\mathfrak{g}}_{n}, V) \times \mathrm{Hom}(\underbrace{\wedge^2\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \wedge^2\mathfrak{g}}_{n} \otimes \mathfrak{g}, V), & \forall n \geqslant 1, \\ \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V), & n = 0. \end{cases}$$

下文中，我们回顾 p-余链的余边界映射：

- 若 $n \geqslant 1$，对于任意 $(f, g) \in C_{n+1\ \mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V)$，余边界映射定义为

$$\begin{aligned}
\delta = (\delta_{\mathrm{I}}, \delta_{\mathrm{II}}) : C^{n+1}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V) &\to C^{n+2}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V),\\
(f, g) &\mapsto (\delta_{\mathrm{I}}(f, g), \delta_{\mathrm{II}}(f, g))
\end{aligned}$$

其中，$\delta_{\mathrm{I}}(f, g)$ 和 $\delta_{\mathrm{II}}(f, g)$ 分别定义为

$$\begin{aligned}
&\big(\delta_{\mathrm{I}}(f, g)\big)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{n+1})\\
&= (-1)^n\Big(\rho(x_{n+1})g(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n, y_{n+1}) - \rho(y_{n+1})g(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n, x_{n+1})\\
&\qquad -g(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n, [x_{n+1}, y_{n+1}])\Big)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}D(\mathfrak{x}_k)f(\mathfrak{x}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{x}_k}, \cdots, \mathfrak{x}_{n+1})
\end{aligned} \tag{11}$$

$$+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^k f(\mathfrak{x}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{x}_k},\cdots,\mathfrak{x}_k\circ\mathfrak{x}_l,\cdots,\mathfrak{x}_{n+1}),$$

and

$$\begin{aligned}&\Big(\delta_{\mathrm{II}}(f,g)\Big)(\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_{n+1},z)\\ =\;&(-1)^n\Big(\mu(y_{n+1},z)g(\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_n,x_{n+1})-\mu(x_{n+1},z)g(\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_n,y_{n+1})\Big)\\ &+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}D(\mathfrak{x}_k)g(\mathfrak{x}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{x}_k},\cdots,\mathfrak{x}_{n+1},z)\\ &+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^k g(\mathfrak{x}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{x}_k},\cdots,\mathfrak{x}_k\circ\mathfrak{x}_l,\cdots,\mathfrak{x}_{n+1},z)\\ &+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k g(\mathfrak{x}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{x}_k},\cdots,\mathfrak{x}_{n+1},[\![x_k,y_k,z]\!]),\end{aligned}\tag{12}$$

分别。这里 $\mathrm{X}_i=\mathrm{x}_i\wedge\mathrm{y}_i\in\wedge^2\mathfrak{g}$ $(\mathrm{i}=1,\cdots,\mathrm{n}+1)$, $\mathrm{z}\in\mathfrak{g}$ 和 $\mathrm{X}_k\circ\mathrm{X}_l:=[\![\mathrm{x}_k,\mathrm{y}_k,\mathrm{x}_l]\!]\wedge\mathrm{y}_l+\mathrm{x}_l\wedge[\![\mathrm{x}_k,\mathrm{y}_k,\mathrm{y}_l]\!]$。

若 $\mathrm{n}=0$，对于任意 $\mathrm{f}\in\mathrm{C}^1{}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},\mathrm{V})$，余边界映射由下式给出

$$\begin{aligned}\delta: C^1_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},V)&\to C^2_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},V),\\ f&\mapsto(\delta_{\mathrm{I}}(f),\delta_{\mathrm{II}}(f))\end{aligned}$$

其中

$$\Big(\delta_{\mathrm{I}}(f)\Big)(x,y)=\rho(x)f(y)-\rho(y)f(x)-f([x,y]),\tag{13}$$

$$\Big(\delta_{\mathrm{II}}(f)\Big)(x,y,z)=D(x,y)f(z)+\mu(y,z)f(x)-\mu(x,z)f(y)-f([\![x,y,z]\!]),\quad\forall x,y,z\in\mathfrak{g}.\tag{14}$$

Yamaguti 证明了以下基本事实。

命题 2.8。 [40] 在上述记号下，对于任意 $\mathrm{f}\in\mathrm{C}^1{}_{\text{李-亚马古提}}(\mathfrak{g},\mathrm{V})$，我们有 e

$$\delta_{\mathrm{I}}\Big(\delta_{\mathrm{I}}(f)\Big),\delta_{\mathrm{II}}(f)\Big)=0\quad\text{and}\quad\delta_{\mathrm{II}}\Big(\delta_{\mathrm{I}}(f)\Big),\delta_{\mathrm{II}}(f)\Big)=0.$$

此外，对于所有 $(\mathrm{f},\mathrm{g})\in\mathrm{C}^p{}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},\mathrm{V})$, $(\mathrm{p}\geqslant 2)$，我们有

$$\delta_{\mathrm{I}}\Big(\delta_{\mathrm{I}}(f,g)\Big),\delta_{\mathrm{II}}(f,g)\Big)=0\quad\text{and}\quad\delta_{\mathrm{II}}\Big(\delta_{\mathrm{I}}(f,g)\Big),\delta_{\mathrm{II}}(f,g)\Big)=0.$$

∞因此，余链复形 $(\mathrm{C}^\bullet{}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},\mathrm{V})=\mathrm{L}\,\mathrm{C}^p{}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},\mathrm{V}),\delta)$ 是良定义的。为方便起见，本文将这种上同调称为 Yamaguti 上同调。=1

定义 2.9. 使用上述记号，设 $(\mathrm{f},\mathrm{g})\in\mathrm{C}^p{}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},\mathrm{V}))$（当 $\mathrm{p}=1$ 时，分别设 $\mathrm{f}\in\mathrm{C}^1{}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},\mathrm{V})$）为一个 p-余链。若其满足 $\delta(\mathrm{f},\mathrm{g})=0$（分别满足 $\delta(\mathrm{f})=0$），则称其为 p-余循环。若存在 $(\mathrm{h},\mathrm{s})\in\mathrm{C}^{p-1}{}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},\mathrm{V})$（当 $\mathrm{p}=2$ 时，分别存在 $\mathrm{t}\in\mathrm{C}^1(\mathfrak{g},\mathrm{V})$），使得 $(\mathrm{f},\mathrm{g})=\delta(\mathrm{h},\mathrm{s})$（分别使得 $(\mathrm{f},\mathrm{g})=\delta(\mathrm{t})$），则称其为 p-余边界（$\mathrm{p}\geqslant 2$）。p-余循环集合和 p-余边界集合分别记为 $\mathrm{Z}^p{}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},\mathrm{V})$ 和 $\mathrm{B}^p{}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},\mathrm{V})$。所得的 p-上同调群定义为商空间。

$$H^p_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},V)=Z^p_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},V)/B^p_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g},V)\quad(p\geqslant 2).$$

3. 李-山口代数上的非零权相对 Rota-Baxter 算子 s

在本小节中，我们介绍李-山口代数上权重为1的相对Rota-Baxter算子的概念。在此之前，我们回顾李-山口代数的中心的概念，并介绍李-山口代数的导出代数的概念。

设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 是一个李-山口代数。回顾一下，在 [46] 中，g 的中心 记作

$$C(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} | [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\} \cap \Big(\{x \in \mathfrak{g} | [\![x, y, z]\!] = 0, \forall y, z \in \mathfrak{g}\} \cup \{x \in \mathfrak{g} | [\![y, z, x]\!] = 0, \forall y, z \in \mathfrak{g}\}\Big).$$

子代数 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap [\![\mathfrak{g}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\!]$ of g 称为 g 的导代数，记作 $\mathfrak{g}^1$。

以下定义也取自 [46]。

定义 3.1. 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 和 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 是两个李-山口代数。设 $(\mathfrak{h}; \rho, \mu)$ 是 g 在向量空间 h 上的一个表示，即线性映射 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$、$\mu : \otimes^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$ 和 $D : \wedge^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 由式 (5)-(10) 给出。若对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$，$u, v, w \in \mathfrak{h}$，以下条件均成立

$$\rho(x)u, \mu(x, y)u \in C(\mathfrak{h}), \tag{15}$$

$$\rho(x)[u, v]_\mathfrak{h} = \mu(x, y)[u, v]_\mathfrak{h} = 0, \tag{16}$$

$$\rho(x)[\![u, v, w]\!]_\mathfrak{h} = \mu(x, y)[\![u, v, w]\!]_\mathfrak{h} = 0. \tag{17}$$

则称 (ρ, μ) 是 g 在 h 上的一个作用。

设 (ρ, μ) 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{h}$上的一个作用。由 (10)，可推得

$$D(x, y)u \in C(\mathfrak{g}),\ D(x, y)[u, v]_\mathfrak{h} = D(x, y)[\![u, v, w]\!]_\mathfrak{h} = 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, u, v, w \in \mathfrak{h}.$$

以下定义是标准的。

定义 3.2. [33, 34] 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 和 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 是两个李-山口代数。从 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 到 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 的同态是一个线性映射 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$，它保持李-山口代数结构，即对所有 $x, y, z \in \mathfrak{g}$，

$$\phi([x, y]_\mathfrak{g}) = [\phi(x), \phi(y)]_\mathfrak{h}, \tag{18}$$

$$\phi([\![x, y, z]\!]_\mathfrak{g}) = [\![\phi(x), \phi(y), \phi(z)]\!]_\mathfrak{h}. \tag{19}$$

此外，如果 ϕ 是双射，则称其为同构。

现在我们准备介绍李-山口代数上非零权的相对 Rota-Baxter 算子的概念。

定义 3.3. 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 和 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 是两个李-山口代数。设 (ρ, μ) 是 g 在 h 上的一个作用。若线性映射 $T : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 满足对所有 $u, v, w \in \mathfrak{h}$，均有以下性质，则称 T 是关于作用 (ρ, μ) 的、从 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 到 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 的权 1 相对罗塔-巴克斯特算子，

$$[Tu, Tv]_\mathfrak{g} = T\Big(\rho(Tu)v - \rho(Tv)u + [u, v]_\mathfrak{h}\Big), \tag{20}$$

$$[\![Tu, Tv, Tw]\!]_\mathfrak{g} = T\Big(D(Tu, Tv)w + \mu(Tv, Tw)u - \mu(Tu, Tw)v + [\![u, v, w]\!]_\mathfrak{h}\Big). \tag{21}$$

接下来，我们引入非零权相对 Rota-Baxter 算子的同态这一概念。

定义 3.4. 设 T 和 T′ 是从一个李-山口代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 到另一个李-山口代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 的权重为1的相对Rota-Baxter算子，其对应的作用为 (ρ, μ)。从 T′ 到 T 的同态是一个有序对 $(\psi_\mathfrak{g}, \psi_\mathfrak{h})$，其中 $\psi_\mathfrak{g} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 和 $\psi_\mathfrak{h} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是两个李-山口代数同态，并且满足

$$\psi_\mathfrak{g} \circ T' = T \circ \psi_\mathfrak{h}, \tag{22}$$

$$\psi_\mathfrak{h}\big(\rho(x)u\big) = \rho\big(\psi_\mathfrak{g}(x)\big)\psi_\mathfrak{h}(u), \tag{23}$$

$$\psi_\mathfrak{h}\big(\mu(x,y)u\big) = \mu\big(\psi_\mathfrak{g}(x), \psi_\mathfrak{g}(y)\big)\psi_\mathfrak{h}(u), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, u \in \mathfrak{h}. \tag{24}$$

特别地，如果 $\psi_\mathfrak{g}$ 和 $\psi_\mathfrak{h}$ 均可逆，那么同态 $(\psi_\mathfrak{g}, \psi_h)$ 将成为从 T′ 到 T 的同构。

由式（23）和（24），通过直接计算，我们得到以下命题。

命题 3.5. 设 T 和 T′ 是从一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 的两个权 1 相对罗塔-巴克斯特算子，它们关于作用 (ρ, μ) 定义。假设 $(\psi_\mathfrak{g}, \psi_\mathfrak{h})$ 是从 T′ 到 T 的同态，则有

$$\psi_\mathfrak{h}\big(D(x,y)u\big) = D\big(\psi_\mathfrak{g}(x), \psi_\mathfrak{g}(y)\big)\psi_\mathfrak{h}(u), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, u \in \mathfrak{h}. \tag{25}$$

以下命题表明，作用可以通过半直积李-山口代数来刻画。

命题 3.6. 设 (ρ, μ) 是李-山口代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 在另一个李-山口代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 上的作用。那么，直和 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ 上存在一个李-山口代数结构 $([\cdot,\cdot]_\ltimes, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\ltimes)$，其定义如下，其中对所有 $x, y, z \in \mathfrak{g}, u, v, w \in \mathfrak{h}$,

$$\begin{aligned} [x+u, y+v]_\ltimes &= [x,y]_\mathfrak{g} + \rho(x)v - \rho(y)u + [u,v]_\mathfrak{h}, \\ [\![x+u, y+v, z+w]\!]_\ltimes &= [\![x,y,z]\!]_\mathfrak{g} + D(x,y)w + \mu(y,z)u - \mu(x,z)v + [\![u,v,w]\!]_\mathfrak{h}. \end{aligned}$$

这个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\ltimes, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\ltimes)$ 称为关于作用 (ρ, μ) 的半直积李-山口代数，记作 $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho,\mu} \mathfrak{h}$。

证明。它只涉及计算，我们省略细节。 □

定理 3.7. 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 和 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 是两个李-山口代数，且 (ρ, μ) 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的作用。那么，线性映射 $T : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 关于 (ρ, μ) 是权 1 的相对罗塔-巴克斯特算子，当且仅当 T 的图

$$Gr(T) := \{Tu + u : u \in \mathfrak{h}\}$$

是半直积李-山口代数 $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho,\ \mu} \mathfrak{h}$ 的子代数。

证明。设 $T : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 是一个线性映射。那么对于所有 $u、v、w \in \mathfrak{h}$，我们有

$$\begin{aligned} &[Tu+u, Tv+v]_\ltimes \\ =\ &[Tu, Tv]_\mathfrak{g} + \rho(Tu)v - \rho(Tv)u + [u,v]_\mathfrak{h}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &[\![Tu+u, Tv+v, Tw+w]\!]_\ltimes \\ =\ &[\![Tu, Tv, Tw]\!]_\mathfrak{g} + D(Tu, Tv)w + \mu(Tv, Tw)u - \mu(Tu, Tw)v + [\![u,v,w]\!]_\mathfrak{h}. \end{aligned}$$

因此，T 的图是 $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{h}$ 的子代数，当且仅当

$$[Tu, Tv]_\mathfrak{g} = T\big(\rho(Tu)v - \rho(Tv)u + [u,v]_\mathfrak{h}\big),$$

$$[\![Tu,Tv,Tw]\!]_{\mathfrak{g}} = \Big(D(Tu,Tv)w+\mu(Tv,Tw)u-\mu(Tu,Tw)v+[\![u,v,w]\!]_{\mathfrak{h}}\Big),$$

这意味着 T : h ⟶ g 是一个权 1 的相对罗塔-巴克斯特算子。证明完毕。

□

接下来，我们给出权 1 的相对 Rota-Baxter 算子与 Nijenhuis 算子之间的关系。回顾一下，在 [33], Sheng 和第一作者等人提出了李-山口代数上的 Nijenhuis 算子的概念。设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 是一个李-山口代数。线性映射$N:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ 称为Nijenhuis 算子，若满足以下等式

$$\begin{aligned}
[Nx,Ny]_{\mathfrak{g}} &= N\Big([Nx,y]_{\mathfrak{g}}+[x,Ny]_{\mathfrak{g}}-N[x,y]_{\mathfrak{g}}\Big),\\
[\![Nx,Ny,Nz]\!]_{\mathfrak{g}} &= N\Big([\![Nx,Ny,z]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![Nx,y,Nz]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![x,Ny,Nz]\!]_{\mathfrak{g}}\\
&\quad -N[\![Nx,y,z]\!]_{\mathfrak{g}}-N[\![x,Ny,z]\!]_{\mathfrak{g}}-N[\![x,y,Nz]\!]_{\mathfrak{g}}\\
&\quad +N^2[\![x,y,z]\!]_{\mathfrak{g}}\Big),\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

命题3.8. 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 和 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$ 是两个李-山口代数，(ρ,μ) 是 g 在 h 上的一个作用。那么，线性映射 T : h ⟶ g 是关于 (ρ,μ) 的权 1 相对 Rota-Baxter 算子，当且仅当

$$\overline{T}=\begin{pmatrix}\mathrm{Id} & T\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

是半直积李-山口代数 $\mathfrak{g}\ltimes_{\rho,\mu}\mathfrak{h}$ 上的 Nijenhuis 算子。

证明。对于所有 x、y、z ∈ g，u、v、w ∈ h，一方面，我们有

$$\begin{aligned}
&[\overline{T}(x+u),\overline{T}(y+v)]_{\ltimes}=[x+Tu,y+Tv]_{\mathfrak{g}}\\
=\;&[x,y]_{\mathfrak{g}}+[x,Tv]_{\mathfrak{g}}+[Tu,y]_{\mathfrak{g}}+[Tu,Tv]_{\mathfrak{g}},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&[\![\overline{T}(x+u),\overline{T}(y+v),\overline{T}(z+w)]\!]_{\ltimes}=[\![x+Tu,y+Tv,z+Tw]\!]_{\mathfrak{g}}\\
=\;&[\![x,y,z]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![Tu,Tv,z]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![Tu,y,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![x,Tv,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}\\
&+[\![Tu,y,z]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![x,Tv,z]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![x,y,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![Tu,Tv,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}.
\end{aligned}$$

另一方面，由于 $\mathrm{T}^2=\mathrm{T}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\overline{T}\Big([\overline{T}(x+u),y+v]_{\ltimes}+[x+u,\overline{T}(y+v)]_{\ltimes}-\overline{T}[x+u,y+v]_{\ltimes}\Big)\\
=\;&[x,y]_{\mathfrak{g}}+[x,Tv]_{\mathfrak{g}}+[Tu,y]_{\mathfrak{g}}+T\Big(\rho(Tu)v-\rho(Tv)u+[u,v]_{\mathfrak{h}}\Big),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\overline{T}\Big([\![\overline{T}(x+u),\overline{T}(y+v),z+w]\!]_{\ltimes}+[\![\overline{T}(x+u),y+v,\overline{T}(z+w)]\!]_{\ltimes}+[\![x+u,\overline{T}(y+v),\overline{T}(z+w)]\!]_{\ltimes}\Big)\\
&-\overline{T}^2\Big([\![\overline{T}(x+u),y+v,z+w]\!]_{\ltimes}+[\![x+u,\overline{T}(y+v),z+w]\!]_{\ltimes}+[\![x+u,y+v,\overline{T}(z+w)]\!]_{\ltimes}\Big)\\
&+\overline{T}^3[\![x+u,y+v,z+w]\!]_{\ltimes}\\
=\;&[\![x,y,z]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![Tu,Tv,z]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![Tu,y,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![x,Tv,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![Tu,y,z]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![x,Tv,z]\!]_{\mathfrak{g}}+[\![x,y,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}\\
&+T\Big(D(Tu,Tv)w+\mu(Tv,Tw)u-\mu(Tu,Tw)v+[\![u,v,w]\!]_{\mathfrak{h}}\Big).
\end{aligned}$$

因此，$\bar{T}$ 是半直积李-山口代数 $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{h}$ 上的 Nijenhuis 算子，当且仅当 T 是从 h 到 g 的权 1 相对罗塔-巴克斯特算子。证明至此完成。□

命题 3.9. 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 是一个李-山口代数，且其伴随表示 (g; ad, R) 是李-山口代数 g 在自身上的一个作用。设 h 是 g 的一个阿贝尔子代数，使得 $\mathfrak{g}^1 \cap \mathfrak{h} = 0$。假设 t 是 h 的一个补空间，即作为向量空间，$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{h}$。那么，从 g 到 g 的投影 $P : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$（值域为子空间 h）是关于作用 (ad, R) 的权 1 相对罗塔-巴克斯特算子。

证明. 对任意 $x, y, z \in \mathfrak{g}$，记 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 为 x, y, z 在投影 P 下的像。由于 h 是阿贝尔子代数且 $\mathfrak{g}^1 \cap \mathfrak{h} = 0$，我们有

$$\begin{aligned} & [Px, Py]_{\mathfrak{g}} - P\Big([Px, y]_{\mathfrak{g}} - [x, Py]_{\mathfrak{g}} - [x, y]_{\mathfrak{g}}\Big) \\ = \ & [\bar{x}, \bar{y}]_{\mathfrak{g}} - P\Big([\bar{x}, y]_{\mathfrak{g}} - [x, \bar{y}]_{\mathfrak{g}} - [x, y]_{\mathfrak{g}}\Big) \\ = \ & 0. \end{aligned}$$

同样，我们也有

$$\begin{aligned} & [\![Px, Py, Pz]\!]_{\mathfrak{g}} - P\Big([\![Px, Py, z]\!]_{\mathfrak{g}} + [\![x, Py, Pz]\!]_{\mathfrak{g}} - [\![y, Px, Pz]\!]_{\mathfrak{g}} + [\![x, y, z]\!]_{\mathfrak{g}} \Big) \\ & [\![\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]\!]_{\mathfrak{g}} - P\Big([\![\bar{x}, \bar{y}, z]\!]_{\mathfrak{g}} + [\![x, \bar{y}, \bar{z}]\!]_{\mathfrak{g}} - [\![y, \bar{x}, \bar{z}]\!]_{\mathfrak{g}} + [\![x, y, z]\!]_{\mathfrak{g}} \Big) \\ = \ & 0. \end{aligned}$$

因此，P 是从 g 到 g、关于作用 (ad,R) 的权 1 相对罗塔-巴克斯特算子。□

本节最后，我们给出一个李-山口代数上的权 1 相对罗塔-巴克斯特算子的例子。

例 3.10。设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 是一个 4 维 Lie-Yamaguti 代数，且 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是一组基。非零括号如下:

$$[e_1, e_2] = 2e_4, \qquad [\![e_1, e_2, e_1]\!] = e_4.$$

显然，g 的中心由 $\{e_3, e_4\}$ 张成，且伴随表示 (g; ad, R) 是 g 在自身上的一个作用。设 h 是由 $\{e_1, e_2\}$ 张成的阿贝尔子代数。那么根据命题，定义投影 $P : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 为

$$\begin{cases} P(e_1) = e_1, \\ P(e_2) = e_2, \\ P(e_3) = 0, \\ P(e_4) = 0, \end{cases}$$

是一种相对的 e 权 1 的 Rota-Baxter 算子从 g 到 g，关于作用 (ad, R).

4. 后李-山口代数

本节中，我们引入后李-山口代数的概念，它是非零权相对 Rota-Baxter 算子的基础代数结构。此外，我们证明后李-山口代数上存在一种李-山口代数结构，并且还可以通过给定的后李-山口代数得到一个作用。

定义 4.1. 后李-山口代数是一个向量空间 A，配备两个二元运算 $\cdot\colon \wedge^2 A \longrightarrow A$、 $*\colon \otimes^2 A \longrightarrow A$ 和两个三元运算 $\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle\colon \wedge^2 A\otimes A \longrightarrow A$、 $\{\cdot,\cdot,\cdot\}:\otimes^3 A \longrightarrow A$，使得 $(A,\cdot,\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个李-山口代数，且对所有 $x, y, z, w, t \in A$，以下等式成立：

$$
\begin{aligned}
(26)\quad \{z,[x,y]_C,w\} &= \{y*z,x,w\}-\{x*z,y,w\},\\
(27)\quad \{x,y,[z,w]_c\} &= z*\{x,y,w\}-w*\{x,y,z\},\\
(28)\quad [\![x,y,z]\!]_C*w &= \{x,y,z*w\}_D-z*\{x,y,w\}_D,\\
(29)\quad \{x,y,[\![z,w,t]\!]_C\} &= \{\{x,w,z\},w,t\}-\{\{x,y,w\},z,t\}+\{z,w,\{x,y,t\}_D\},\\
(30)\quad \{x,y,\{z,w,t\}_D\} &= \{\{x,y,z\}_D,w,t\}+\{z,[\![x,y,w]\!]_C,t\}+\{z,w,[\![x,y,t]\!]_C\},\\
(31)\quad (x*y)\cdot z &= \langle x*y,z,w\rangle=\langle z,w,x*y\rangle=0,\\
(32)\quad x*(yz) &= \{xy,z,w\}=0,\\
(33)\quad x*\langle z,w,t\rangle &= \{\langle z,w,t\rangle,x,y\}=0,
\end{aligned}
$$

其中，运算 $[\cdot,\cdot]_C$、 $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_C$ 和 $\{\cdot,\cdot,\cdot\}_D$ 定义为

$$
\begin{aligned}
(34)\quad [x,y]_C &= x*y-y*x+xy,\\
(35)\quad [\![x,y,z]\!]_C &= \{x,y,z\}_D+\{x,y,z\}-\{y,x,z\}+\langle x,y,z\rangle,\\
(36)\quad \{x,y,z\}_D &= \{z,y,x\}-\{z,x,y\}+(y,x,z)-(x,y,z)-(xy)*z,\quad \forall x,y,z\in A.
\end{aligned}
$$

这里，记号（$\cdot$，$\cdot$，$\cdot$）表示关于运算 $*$ 的结合子，即对所有 x、y、z $\in$ A，

$$(x,y,z)=(x*y)*z-x*(y*z).$$

注 4.2. 设 $(A,\cdot,*,\{\cdot,\cdot,\cdot\},\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个后李-山口代数。如果对于所有 x、y、z $\in$ A，都有 xy $=\langle$ x, y, z$\rangle = 0$，那么 $(A,*,\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 成为一个前李 - 山口代数，它是零权相对 Rota-Baxter 算子的底层代数结构。更多细节参见 [33] 。

定义 4.3. 设 $(A,\cdot_A,*_A,\{\cdot,\cdot,\cdot\}_A,\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_A)$ 和 $(A',\cdot_{A'},*_{A'},\{\cdot,\cdot,\cdot\}_{A'},\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_{A'})$ 是两个后李-山口代数。从 A 到 A′ 的同态是一个线性映射 $\psi: A \longrightarrow A'$，满足 $\psi: (A,\cdot_A,\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_A) \longrightarrow (A,\cdot_{A'},\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_{A'})$ 是一个李-山口代数同态，并且以下等式成立

$$
\begin{aligned}
\psi(x*_A y) &= \psi(x)*_{A'}\psi(y),\\
\psi(\{x,y,z\}_A) &= \{\psi(x),\psi(y),\psi(z)\}_{A'},\quad \forall x,y,z\in A.
\end{aligned}
$$

以下定理揭示了这样一个事实：后李-山口代数在其原有空间上诱导出李-山口代数结构。

定理4.4。设 $(A,\cdot,*,\{\cdot,\cdot,\cdot\},\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个后李-山口代数。那么

(i) 三元组 $(A,[\cdot,\cdot]_C,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_C)$ 是一个李-山口代数，称为 $(A,\cdot,*,\{\cdot,\cdot,\cdot\},\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)$ 的伴随 Lie-Yamaguti 代数，记为 A^c，其中 $[\cdot,\cdot]_C$ and$[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_C$ 分别由 (34) 和 (35) 给出；

(ii) 数对 $(L,\mathcal{R})$ 是伴随 Lie-Yamaguti 代数 $(A,[\cdot,\cdot]_C,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_C)$ 在李-山口代数 $(A,\cdot,\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)$ 上的一个作用，其中线性映射 $L: A \longrightarrow gl(A)$, $x \mapsto L(x)$ 和 $\mathcal{R}\colon \otimes^2 A \longrightarrow A$, $(x,y) \mapsto \mathcal{R}(x,y)$ 定义为

$$L(x)z=x*z,\quad \mathcal{R}(x,y)z=\{z,x,y\},\quad \forall z\in A$$

分别；

(iii) 恒等映射 $\mathrm{Id}: A \longrightarrow A$ 是从 $(A, \cdot, \langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)$ 到 $(A, [\cdot,\cdot]_C, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_C)$ 的权 1 相对罗塔-巴克斯特算子。

证明。显然，运算 $[\cdot,\cdot]_C$ 是斜对称的，并且 $[\![\cdot,\ \cdot,\ \cdot]\!]_C$ 关于前两个变量是斜对称的。对于所有 $x,\ y,\ z,\ w \in A$，由式（36），可得

$$\begin{aligned} & [[x,y]_C,z]_C + [\![x,y,z]\!]_C + c.p. \\ = \ & [x,y]_C * z - z*(x*y) + z*(y*x) + \{x,y,z\}_D + \{x,y,z\} - \{y,x,z\} + (xy)z + \langle x,y,z\rangle + c.p. \\ = \ & 0, \end{aligned}$$

并由（26），我们得到

$$\begin{aligned} & [\![[x,y]_C,z,w]\!]_C + c.p.(x,y,z) \\ = \ & \{[x,y]_C,z,w\}_D + \{[x,y]_C,z,w\} - \{z,[x,y]_C,w\} + \langle xy,z,w\rangle + c.p.(x,y,z) \\ = \ & 0. \end{aligned}$$

因此，关于1）和（2）的方程相对于$[\cdot,\cdot]_C$、$[\![\cdot、\ \cdot、\ \cdot]\!]_C$）成立。同样，关于（3）和（4）的方程相对于（$[\cdot,\cdot]_C$、$[\![\cdot、\ \cdot、\ \cdot]\!]_C$）也成立。因此（$A$、$[\cdot,\cdot]_C$、$[\![\cdot、\ \cdot、\ \cdot]\!]_C$）是一个李-山口代数。这就得到了（i）。

对于所有 x、y、z ∈A，我们有

$$\begin{aligned} D_{L,\mathcal{R}}(x,y)z &= \mathcal{R}(y,x)z - \mathcal{R}(x,y)z + [L(x),L(y)]z - L([x,y]_C)z \\ &= \{z,y,x\} - \{z,x,y\} + (y,x,z) - (x,y,z) - (x,y)*z \\ &= \{x,y,z\}_D. \end{aligned}$$

在下文中，我们用 $\mathcal{L} := D_{L,\mathcal{R}}$ 表示，因此 $\mathcal{L}(x, y)z = \{x, y, z\}_D$。此外，对于所有 x, y, z, w ∈A，我们还有】【。

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}([x,y]_C,z)w - \mathcal{R}(x,z)L(y)w + \mathcal{R}(y,z)L(x)z \\ = \ & \{w,[x,y]_C,z\} - \{y*w,x,z\} + \{x*w,y,z\} \\ \overset{(26)}{=} \ & 0, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & L([\![x,y,z]\!]_C)w - [\mathcal{L}(x,y),L(z)]w \\ = \ & [\![x,y,z]\!]_C * w - \{x,y,z*w\}_D + z*\{x,y,w\}_D \\ \overset{(28)}{=} \ & 0. \end{aligned}$$

左侧的等式也可类似地得到。因此，$(L, \mathcal{R})$ 是 $(A, [\cdot,\cdot]_C, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_C)$ 在 $(A, \cdot, \langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)$ 上的作用。由此得到(ii)。

(iii) 由 $[\cdot,\cdot]_C$、$[\![\cdot、\ \cdot、\ \cdot]\!]_C$ 的表达式可得。证明完毕。 □

推论 4.5. 设 $\psi: A \longrightarrow A'$ 是从后李-山口代数 $(A, \cdot_A, *_A, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_A, \langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_A)$ 到另一个后李-山口代数 $(A', \cdot_{A'}, *_{A'}, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_{A'}, \langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_{A'})$ 的同态。那么，ψ 也是从 A^c 到 A'^c 的伴随 Lie-Yamaguti 代数之间的李-山口代数同态。

以下定理表明，后李-山口代数结构是非零权相对 Rota-Baxter 算子的基础代数结构。

定理4.6. 设 $T:\mathfrak{h}\longrightarrow\mathfrak{g}$ 是一个权 1 的相对罗塔-巴克斯特算子，它从一个 Lie- Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$ 映到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$，且相对于一个作用 (ρ,μ)。则 $(\mathfrak{h},\cdot,*,\{\cdot,\cdot,\cdot\},\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个后李 - 山口代数，其中运算 $\cdot,*,\{\cdot,\cdot,\cdot\}$ 和 $\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle$ 定义为对所有 $u,v,w\in\mathfrak{h}$,

$$uv=[u,v]_{\mathfrak{h}},\quad u*v=\rho(Tu)v,\quad \{u,v,w\}=\mu(Tv,Tw)u,\quad \langle u,v,w\rangle=[\![u,v,w]\!]_{\mathfrak{h}}.$$

证明。对于所有 $u,v,w\in\mathfrak{h}$，我们有

$$\begin{aligned}D(Tu,Tv)w&=\mu(Tv,Tu)w-\mu(Tu,Tv)w+[\rho(Tu),\rho(Tv)]w-\rho([Tu,Tv])w\\&=\{w,v,u\}-\{w,u,v\}+(v,u,w)-(u,v,w)-(uv)*w\\&=\{u,v,w\}_D.\end{aligned}$$

此外，对于所有 $u,v,w,s,t\in\mathfrak{h}$，我们还有

$$\begin{aligned}&\mu([Tu,Tv],Tt)w-\mu(Tu,Tt)\rho(Tv)w+\mu(Tv,Tt)\rho(Tu)w\\=\;&\{w,[u,v]_C,t\}-\{v*w,u,t\}+\{u*w,v,t\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mu(Tv,[Tw,Tt])u-\rho(Tw)\mu(Tv,Tt)u+\rho(Tt)\mu(Tv,Tw)u\\=\;&\{u,v,[w,t]_C\}-w*\{u,v,t\}+t*\{u,v,w\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\rho([\![Tu,Tv,Tw]\!])t-[D(Tu,Tv),\rho(Tw)]t\\=\;&[\![u,v,w]\!]_C*t-\{u,v,w*t\}+w*\{u,v,t\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mu(Tt,Ts)\mu(Tv,Tw)u-\mu(Tw,Ts)\mu(Tv,Tt)u-\mu(Tv,[\![Tw,Tt,Ts]\!])u\\&+D(Tw,Tt)\mu(Tv,Ts)u\\=\;&\{\{u,v,w\},t,s\}-\{\{u,v,t\},w,s\}+\{w,t\{u,v,s\}\}_D-\{u,v,[\![w,t,s]\!]_C\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[D(Tu,Tv),\mu(Tt,Ts)]w-\mu([\![Tu,Tv,Tt]\!],Ts)w-\mu(Tt,[\![Tu,Tv,Ts]\!])w\\=\;&\{u,v,\{w,t,s\}\}_D-\{\{u,v,w\}_D,t,s\}-\{w,[\![u,v,t]\!]_C,s\}-\{w,t,[\![u,v,s]\!]_C\}.\end{aligned}$$

由于 (ρ,μ) 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的一个表示，关于 $(\cdot,*,\{\cdot,\cdot,\cdot\},\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)$ 的等式 (26)-(30) 成立。此外，由于 (ρ,μ) 也是一个作用，容易看出关于 $(\cdot,*,\{\cdot,\cdot,\cdot\},\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)$ 的等式 (31)-(33) 成立。另外，三元组 $(\mathfrak{h},\cdot,\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)$ 显然是一个李 - 山口代数。因此，$(\mathfrak{h},\cdot,*,\{\cdot,\cdot,\cdot\},\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个后李 - 山口代数。证明完毕。□

结合定理 4.4 和定理 4.6，我们直接得到以下推论。

推论 4.7. 设 $T:\mathfrak{h}\longrightarrow\mathfrak{g}$ 是一个权 1 相对罗塔-巴克斯特算子，它从李-山口代数 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$ 映到另一个李-山口代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$，并且对应于作用 (ρ,μ)。那么 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_T,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_T)$ 是一个李-山口代数，称为下降李-山口代数，其中 $([\cdot,\cdot]_T,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_T)$ 定义为

$$\begin{aligned}[u,v]_T&=\rho(Tu)v-\rho(Tv)u+[u,v]_{\mathfrak{h}},\\[\![u,v,w]\!]_T&=D(Tu,Tv)w+\mu(Tv,Tw)u-\mu(Tu,Tw)v+[\![u,v,w]\!]_{\mathfrak{h}},\quad\forall u,v,w\in\mathfrak{h}.\end{aligned}$$

因此，T 是从下降李-山口代数 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_T,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_T)$ 到李-山口代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 的李-山口代数同态。

命题 4.8. 设 T 和 T′ 是从李-山口代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 到另一个李-山口代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 的两个权 1 相对 Rota-Bater 算子，且关于某个作用 (ρ, μ)。设 $(\mathfrak{h}, \cdot_T, *_T, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_T, \langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_T)$ 和 $(\mathfrak{h}, \cdot_{T'}, *_{T'}, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_{T'}, \langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_{T'})$ 是诱导的后李-山口代数，且 $(\psi_\mathfrak{g}, \psi_\mathfrak{h})$ 是从 T′到 T 的一个同态。那么， $\psi_\mathfrak{h}$是从后李-山口代数 $(\mathfrak{h}, \cdot_{T'}, *_{T'}, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_{T'}, \langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_{T'})$ 到后李-山口代数 $(\mathfrak{h}, \cdot_T, *_T, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_T, \langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_T)$ 的同态。

证明。对于所有 $u, v, w \in \mathfrak{h}$，我们有

$$\begin{aligned}\psi_\mathfrak{h}(\{u,v,w\}_{T'}) &= \psi_\mathfrak{h}\Big(\mu(T'v,T'w)u\Big)\\ &= \mu\Big(\psi_\mathfrak{g}(T'v),\psi_\mathfrak{g}(T'w)\Big)\Big(\psi_\mathfrak{h}(w)\Big)\\ &= \mu\Big(T\psi_\mathfrak{h}(v),T\psi_\mathfrak{h}(w)\Big)\Big(\psi_\mathfrak{h}(w)\Big)\\ &= \{\psi_\mathfrak{h}(u),\psi_\mathfrak{h}(v),\psi_\mathfrak{h}(w)\}_T,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\psi_\mathfrak{h}\Big(u *_{T'} v\Big) &= \psi_\mathfrak{h}\Big(\rho(T'u)v\Big)\\ &= \rho(\psi_\mathfrak{g}(T'u))\Big(\psi_\mathfrak{h}(v)\Big)\\ &= \rho(T\psi_\mathfrak{h}(u))\Big(\psi_\mathfrak{h}(v)\Big)\\ &= \psi_\mathfrak{h}(u) *_T \psi_\mathfrak{h}(v)\end{aligned}$$

此外，由于 $\psi_\mathfrak{h}$ 是从 $\mathfrak{h}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的同态，因此对于所有 $u, v \in \mathfrak{h}$，我们还有 $\psi_\mathfrak{h}(u \cdot_{T'} v) = \psi_\mathfrak{h}(u) \cdot_T \psi_\mathfrak{h}(v)$以及 $\psi_\mathfrak{h}(\langle u, v, w\rangle_{T'}) = \langle\psi_\mathfrak{h}(u), \psi_\mathfrak{h}(v), \psi_\mathfrak{h}(w)\rangle_T$。证明至此完成。□

5. 李-山口代数上非零权相对 Rota-Baxter 算子的上同调与变形

5.1.非零权的李-山口代数上的相对Rota-Baxter算子的上同调。在本小节中，我们构造权 1 的李-山口代数上的相对 Rota-Baxter 算子的上同调，并证明我们构造的上同调具有一些函子性质。

5.1.1. 非零权相对 Rota-Baxter 算子上同调的构造。设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 和 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 是两个李-山口代数，且 $T : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 是关于作用 (ρ, μ) 的权 1 相对 Rota-Baxter 算子。定义 $\rho_T : \mathfrak{h} \longrightarrow gl(\mathfrak{g})$ 和 $\mu_T : \otimes^2\mathfrak{h} \longrightarrow gl(\mathfrak{g})$ 分别为

$$\rho_T(u)(x) := [Tu,x]_\mathfrak{g} + T\Big(\rho(x)u\Big), \tag{37}$$

$$\mu_T(u,v)(x) := [\![x,Tu,Tv]\!]_\mathfrak{g} - T\Big(D(x,Tu)v - \mu(x,Tv)u\Big), \quad \forall u,v \in \mathfrak{h},\ x \in \mathfrak{g}. \tag{38}$$

分别。

引理 5.1. 在上述假设下，定义 $D_T : \wedge^2\mathfrak{h} \longrightarrow gl(\mathfrak{g})$ 为

$$D_T(u,v)(x) := [\![Tu,Tv,x]\!]_\mathfrak{g} - T\Big(\mu(Tv,x)u - \mu(Tu,x)v\Big), \quad \forall u,v \in \mathfrak{h},\ x \in \mathfrak{g}. \tag{39}$$

然后我们有 $D_T = D_{\rho_T,\ \mu_T}$。

证明。对于所有 u, v ∈ h, x ∈ g，我们有

$$
\begin{aligned}
D_{\rho_T,\mu_T}(u,v)(x) &\overset{(10)}{=} \mu_T(v,u)(x)-\mu_T(u,v)(x)+[\rho_T(u),\rho_T(v)](x)-\rho_T([u,v]_T)(x)\\
&\overset{(37),(38)}{=} [\![x,Tv,Tu]\!]_{\mathfrak{g}}-T\Big(D(x,Tv)u-\mu(x,Tu)v\Big)\\
&\quad-[\![x,Tu,Tv]\!]_{\mathfrak{g}}+T\Big(D(x,Tu)v-\mu(x,Tv)u\Big)\\
&\quad+[Tu,[Tv,x]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}+T\Big(\rho([Tv,x]_{\mathfrak{g}})u\Big)\\
&\quad+[Tu,T\Big(\rho(x)v\Big)]_{\mathfrak{g}}+T\Big(\rho(T(\rho(x)v))u\Big)\\
&\quad-[Tv,[Tu,x]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}-T\Big(\rho([Tu,x]_{\mathfrak{g}})v\Big)\\
&\quad-[Tv,T\Big(\rho(x)u\Big)]_{\mathfrak{g}}-T\Big(\rho(T(\rho(x)u))v\Big)\\
&\quad-[T[u,v]_T,x]_{\mathfrak{g}}-T\Big(\rho(x)[u,v]_T\Big)\\
&\overset{(20)}{=} [\![x,Tv,Tu]\!]_{\mathfrak{g}}-T\Big(D(x,Tv)u-\mu(x,Tu)v\Big)\\
&\quad-[\![x,Tu,Tv]\!]_{\mathfrak{g}}+T\Big(D(x,Tu)v-\mu(x,Tv)u\Big)\\
&\quad+[Tu,[Tv,x]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}+T\Big(\rho([Tv,x]_{\mathfrak{g}})u\Big)\\
&\quad+T\Big(\rho(Tu)\rho(x)v-\rho(T(\rho(x)v)u)+[u,\rho(x)v]_{\mathfrak{h}}\Big)+T\Big(\rho(T(\rho(x)v))u\Big)\\
&\quad-[Tv,[Tu,x]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}-T\Big(\rho([Tu,x]_{\mathfrak{g}})v\Big)\\
&\quad-T\Big(\rho(Tv)\rho(x)u-\rho(T(\rho(x)u)v)+[v,\rho(x)u]_{\mathfrak{h}}\Big)-T\Big(\rho(T(\rho(x)u))v\Big)\\
&\quad-[[Tu,Tv]_{\mathfrak{g}},x]_{\mathfrak{g}}-T\Big(\rho(x)(\rho(Tu)v-\rho(Tv)u+[u,v]_{\mathfrak{h}})\Big)\\
&\overset{(1),(15)}{=} [\![Tu,Tv,x]\!]_{\mathfrak{g}}-T\Big(\mu(Tv,x)u-\mu(Tu,x)v\Big)\\
&= D_T(u,v)(x).
\end{aligned}
$$

这就完成了证明。 □

命题 5.2. 在上述假设下，$(\mathfrak{g};\ \rho_T,\ \mu_T)$ 是$(\mathfrak{h},\ [\cdot,\cdot]_T,\ [\![\cdot,\ \cdot,\ \cdot]\!]_T)$的一个表示，其中 ρ_T，μ_T和 D_T分别由(37)-(39)给出。

证明。对于所有 u、v、w ∈ h、x ∈ g，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mu_T([u,v]_T,w)x-\mu_T(u,w)\rho_T(v)x+\mu_T(v,w)\rho_T(u)x\\
\overset{(37),(38)}{=}\ &[\![x,T[u,v]_T,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}-T\Big(D(x,T[u,v]_T)w-\mu(x,Tw)[u,v]_T\Big)\\
&-[\![[Tv,x]_{\mathfrak{g}},Tu,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}+T\Big(D([Tv,x]_{\mathfrak{g}},Tu)w-\mu([Tv,x]_{\mathfrak{g}},Tw)u\Big)\\
&-\Big[\!\Big[T\Big(\rho(x)v\Big),Tu,Tw\Big]\!\Big]_{\mathfrak{g}}+T\Big(D(T(\rho(x)v),Tu)w-\mu(T(\rho(x)v),Tw)u\Big)\\
&+[\![[Tu,x]_{\mathfrak{g}},Tv,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}-T\Big(D([Tu,x]_{\mathfrak{g}},Tv)w-\mu([Tu,x]_{\mathfrak{g}},Tw)v\Big)\\
&+\Big[\!\Big[T\Big(\rho(x)u\Big),Tv,Tw\Big]\!\Big]_{\mathfrak{g}}-T\Big(D(T(\rho(x)u),Tv)w-\mu(T(\rho(x)u),Tw)v\Big)\\
\overset{(20)}{=}\ &[\![x,[Tu,Tv]_{\mathfrak{g}},Tw]\!]_{\mathfrak{g}}-T\Big(D(x,[Tu,Tv]_{\mathfrak{g}})w-\mu(x,Tw)(\rho(Tu)v-\rho(Tv)u+[u,v]_{\mathfrak{h}})\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-[\![[Tv,x]_{\mathfrak{g}},Tu,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}+T\Big(D([Tv,x]_{\mathfrak{g}},Tu)w-\mu([Tv,x]_{\mathfrak{g}},Tw)u\Big)\\
&-T\Big(D(T(\rho(x)v),Tu)w+\mu(Tu,Tw)\rho(x)v-\mu(T(\rho(x)v),Tw)u+[\![\rho(x)v,u,w]\!]_{\mathfrak{h}}\Big)\\
&+T\Big(D(T(\rho(x)v),Tu)w-\mu(T(\rho(x)v),Tw)u\Big)\\
&+[\![[Tu,x]_{\mathfrak{g}},Tv,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}-T\Big(D([Tu,x]_{\mathfrak{g}},Tv)w-\mu([Tu,x]_{\mathfrak{g}},Tw)v\Big)\\
&+T\Big(D(T(\rho(x)u),Tv)w+\mu(Tv,Tw)\rho(x)u-\mu(T(\rho(x)u),Tw)v+[\![\rho(x)u,v,w]\!]_{\mathfrak{h}}\Big)\\
&-T\Big(D(T(\rho(x)u),Tv)w-\mu(T(\rho(x)u),Tw)v\Big)\\
\overset{(5),(15),(16)}{=}\ &0,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\rho_T([\![u,v,w]\!]_T)(x)-[D_T(u,v),\rho_T(w)](x)\\
\overset{(37),(39)}{=}\ &[T\,[\![u,v,w]\!]_T\,,x]_{\mathfrak{g}}+T\Big(\rho(x)\,[\![u,v,w]\!]_T\,\Big)\\
&-[\![Tu,Tv,[Tw,x]_{\mathfrak{g}}]\!]_{\mathfrak{g}}+T\Big(\mu(Tv,[Tw,x]_{\mathfrak{g}})u-\mu(Tu,[Tw,x]_{\mathfrak{g}})v\Big)\\
&-[\![Tu,Tv,T(\rho(x)w)]\!]_{\mathfrak{g}}+T\Big(\mu(Tv,T(\rho(x)w))u-\mu(Tu,T(\rho(x)w))v\Big)\\
&+[Tw,[\![Tu,Tv,x]\!]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}+T\Big(\rho([\![Tu,Tv,x]\!]_{\mathfrak{g}})w\Big)\\
&-[Tw,T(\mu(Tv,x)u)]_{\mathfrak{g}}-T\Big(\rho(T(\mu(Tv,x)u))w\Big)\\
&+[Tw,T(\mu(Tu,x)v)]_{\mathfrak{g}}+T\Big(\rho(T(\mu(Tu,x)v))w\Big)\\
\overset{(21)}{=}\ &[[\![Tu,Tv,Tw]\!]_{\mathfrak{g}}\,,x]_{\mathfrak{g}}+T\Big(\rho(x)(D(Tu,Tv)w+\mu(Tv,Tw)u-\mu(Tu,Tw)v+[\![u,v,w]\!]_{\mathfrak{h}}\,)\Big)\\
&-[\![Tu,Tv,[Tw,x]_{\mathfrak{g}}]\!]_{\mathfrak{g}}+T\Big(\mu(Tv,[Tw,x]_{\mathfrak{g}})u-\mu(Tu,[Tw,x]_{\mathfrak{g}})v\Big)\\
&-T\Big(D(Tu,Tv)\rho(x)w+\mu(Tv,T(\rho(x)w))u-\mu(Tu,T(\rho(x)w))v+[\![u,v,\rho(x)w]\!]_{\mathfrak{h}}\Big)\\
&+T\Big(\mu(Tv,T(\rho(x)w))u-\mu(Tu,T(\rho(x)w))v\Big)\\
&-T\Big(\rho(Tw)(\mu(Tv,x)u)-\rho(T(\mu(Tv,x)u))w+[w,\mu(Tv,x)u]_{\mathfrak{h}}\Big)-T\Big(\rho(T(\mu(Tv,x)u))w\Big)\\
&+T\Big(\rho(Tw)(\mu(Tu,x)v)-\rho(T(\mu(Tu,x)v))w+[w,\mu(Tu,x)v]_{\mathfrak{h}}\Big)+T\Big(\rho(T(\mu(Tu,x)v))w\Big)\\
\overset{(7),(15),(17)}{=}\ &0.
\end{aligned}
$$

其他等式可类似地得到。细节从略。 □

注 5.3. 设 $T:\mathfrak{h}\longrightarrow\mathfrak{g}$ 是关于作用 (ρ,μ) 的权 1 相对 Rota-Baxter 算子，则由推论 4.7，T 诱导出一个伴随 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_T,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_T)$。因此，由命题 5.2，我们得到这个伴随 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_T,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_T)$ 关于表示 $(\mathfrak{g};\rho_T,\mu_T)$ 的上同调：

$$\Big(\bigoplus_{p=1}^{\infty}C^p_{LieY}(\mathfrak{h},\mathfrak{g}),\delta^T\Big),$$

其中余边界映射 δ^T 是由式（11）-（14）给出的相应余边界映射，其系数取自表示（$\mathfrak{g}$；ρ_T，μ_T）。

设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 和 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 是两个李-山口代数。设 (ρ, μ) 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的一个作用。定义 $\delta: \wedge^2\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{h},\mathfrak{g})$ 为

$$\big(\delta(x,y)\big)v := T\Big(D(x,y)v\Big) - [\![x,y,Tv]\!]_\mathfrak{g}, \quad \forall x,y\in\mathfrak{g},\ v\in\mathfrak{h}. \tag{40}$$

命题 5.4. 采用上述记号，$\delta(x, y)$ 由(40) 定义，是子相邻李-山口代数 1-余循环，其系数取自表示 $(\mathfrak{g};\ \rho_T,\ \mu_T)$。

证明。我们需要证明 $\delta^T{}_{\mathrm{I}}(\delta(x, y))(u, v) = 0$ 以及 $\delta^T{}_{\mathrm{II}}(\delta(x, y))(u, v, w) = 0$ 对所有 $u,v,w \in \mathfrak{h}$ 都成立。事实上，对于所有 $u, v \in \mathfrak{h}$，我们计算得到

$$\begin{aligned}
&\delta^T_{\mathrm{I}}(\delta(x,y))(u,v)\\
\overset{(13)}{=}\ &\rho_T(u)\delta(x,y)(v) - \rho_T(v)\delta(x,y)(u) - \delta(x,y)[u,v]_T\\
\overset{(37)}{=}\ &[Tu, T(D(x,y)v)]_\mathfrak{g} - [Tu, [\![x,y,Tv]\!]_\mathfrak{g}]_\mathfrak{g}\\
&+T\Big(\rho(T(D(x,y)v))u\Big) - T\Big(\rho([\![x,y,Tv]\!]_\mathfrak{g})u\Big)\\
&-[Tv, T(D(x,y)u)]_\mathfrak{g} + [Tv, [\![x,y,Tu]\!]_\mathfrak{g}]_\mathfrak{g}\\
&-T\Big(\rho(T(D(x,y)u))v\Big) + T\Big(\rho([\![x,y,Tu]\!]_\mathfrak{g})v\Big)\\
&-T\Big(D(x,y)([u,v]_T)\Big) + [\![x,y,T[u,v]_T]\!]_\mathfrak{g}\\
\overset{(20)}{=}\ &T\Big(\rho(Tu)D(x,y)v - \rho(T(D(x,y)v))u + [u, D(x,y)v]_\mathfrak{h}\Big) - [Tu, [\![x,y,Tv]\!]_\mathfrak{g}]_\mathfrak{g}\\
&+T\Big(\rho(T(D(x,y)v))u\Big) - T\Big(\rho([\![x,y,Tv]\!]_\mathfrak{g})u\Big)\\
&-T\Big(\rho(Tv)D(x,y)u - \rho(T(D(x,y)u))v + [v, D(x,y)u]_\mathfrak{h}\Big) + [Tv, [\![x,y,Tu]\!]_\mathfrak{g}]_\mathfrak{g}\\
&-T\Big(\rho(T(D(x,y)u))v\Big) + T\Big(\rho([\![x,y,Tu]\!]_\mathfrak{g})v\Big)\\
&-T\Big(D(x,y)(\rho(Tu)v - \rho(Tv)u + [u,v]_\mathfrak{h})\Big) + [\![x,y,[Tu,Tv]_\mathfrak{g}]\!]_\mathfrak{g}\\
\overset{(3),(7),(15)}{=}\ &0.
\end{aligned}$$

类似地，我们可以证明，对于所有 $u, v, w \in \mathfrak{h}$，$\delta^T{}_{\mathrm{II}}(\delta(x, y))(u, v, w) = 0 \in$。 □

至此，我们建立如下李-山口代数上非零权相对 Rota-Baxter 算子的上同调。设 $T: \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 是一个权 1 的相对罗塔-巴克斯特算子，它从李-山口代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 映到另一个李-山口代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$，并且相对于一个作用 (ρ, μ)。定义 n-余链集为

$$\mathfrak{C}^p_T(\mathfrak{h},\mathfrak{g}) = \begin{cases} C^p_{LieY}(\mathfrak{h},\mathfrak{g}), & p\geq 1,\\ \wedge^2\mathfrak{g}, & p=0. \end{cases}$$

定义余边界映射 $\partial: C^p{}_T(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) \longrightarrow C^{p+1}{}_T(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ 为

$$\partial = \begin{cases} \delta^T, & p\geq 1,\\ \delta, & p=0, \end{cases}$$

然后结合注 5.3 与命题 5.4，我们得到 $\Big(\mathrm{L}_{\infty\, n=0} C^n{}_T(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}),\ \partial\Big)$ 是一个复形。将 n-余链的集合记为 $\mathcal{Z}^n{}_T(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$，并将n-余边界的集合记为 $\mathcal{B}^n{}_T(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$。该

由此得到的第 n 个上同调群为

$$\mathcal{H}^n_T(\mathfrak{h},\mathfrak{g}) := \mathcal{Z}^n_T(\mathfrak{h},\mathfrak{g})/\mathcal{B}^n_T(\mathfrak{h},\mathfrak{g}), n \geq 1.$$

定义 5.5。余链复形 $\left(\mathrm{L}_{\infty\, n=0}\, \mathrm{C}^n_T(\mathrm{h},\, \mathrm{g})\right.$ 的上同调称为权 1 相对 Rota-Baxter 算子 T 的上同调。

5.1.2. 非零权相对 Rota-Baxter 算子上同调的函子性质。本小节中，我们将说明非零权相对 Rota-Baxter 算子的上同调理论具有一些函子性质。

命题 5.6。设 T 和 T′ 是从一个李-山口代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 到另一个李-山口代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 的两个权 1 相对 Rota-Baxter 算子，其对应的作用为 (ρ, μ)。设 $(\psi_\mathfrak{g}, \psi_\mathfrak{h})$ 是从 T′ 到 T 的一个同态。那么

(i) $\psi_\mathfrak{h}$ 是从 T ′的下降李-山口代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{T'}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{T'})$ 到另一个 T 的下降李-山口代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_T, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_T)$ 的李-山口代数；(ii) 下降李-山口代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{T'}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{T'})$ 的诱导表示 $(\mathfrak{g};\, \rho_{T'}, \mu_{T'})$ 与下降李-山口代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_T, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_T)$ 的诱导表示 $(\mathfrak{g};\, \rho_T, \mu_T)$ 满足

$$\begin{aligned} \psi_\mathfrak{g} \circ \rho_{T'}(u) &= \rho_T(\psi_\mathfrak{h}(u)) \circ \psi_\mathfrak{g}, \\ \psi_\mathfrak{g} \circ \mu_{T'}(u,v) &= \rho_T(\psi_\mathfrak{h}(u), \psi_\mathfrak{h}(v)) \circ \psi_\mathfrak{g}, \quad \forall u, v \in \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

也就是说，以下两个图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\psi_\mathfrak{g}} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle \rho_{T'}(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_T(\psi_\mathfrak{h}(u))} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[\psi_\mathfrak{g}]{} & \mathfrak{g}, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\psi_\mathfrak{g}} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle \mu_{T'}(u,v)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_T(\psi_\mathfrak{h}(u),\psi_\mathfrak{h}(v))} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[\psi_\mathfrak{g}]{} & \mathfrak{g}. \end{array}$$

证明。 (i) 可由推论 4.5 和命题4.8得出。

(ii) 对于所有 u、v ∈ h 和 x ∈ g，我们计算得到

$$\begin{aligned} \psi_\mathfrak{g}\big(\rho_{T'}(u)x\big) &\overset{(37)}{=} \psi_\mathfrak{g}\big([T'u, x]_\mathfrak{g} + T'(\rho(x)u)\big) \\ &\overset{(18),(22)}{=} [\psi_\mathfrak{g}(T'u), \psi_\mathfrak{g}(x)]_\mathfrak{g} + T\big(\psi_\mathfrak{h}(\rho(x)u)\big) \\ &\overset{(24),(25)}{=} [\psi_\mathfrak{g}(T'u), \psi_\mathfrak{g}(x)]_\mathfrak{g} + T\big(\rho(\psi_\mathfrak{g}(x))(\psi_\mathfrak{h}(u))\big) \\ &\overset{(22)}{=} [T\psi_\mathfrak{h}(u), \psi_\mathfrak{g}(x)]_\mathfrak{g} + T\big(\rho(\psi_\mathfrak{g}(x))(\psi_\mathfrak{h}(u))\big) \\ &\overset{(37)}{=} \rho_T(\psi_\mathfrak{h}(u))(\psi_\mathfrak{g}(x)), \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} &\psi_\mathfrak{g}\big(\mu_{T'}(u,v)x\big) \\ \overset{(38)}{=}\ &\psi_\mathfrak{g}\big([\![x, T'u, T'v]\!]_\mathfrak{g} - T'(D(x,T'u)v - \mu(x,T'v)u)\big) \\ \overset{(19),(22)}{=}\ &[\![\psi_\mathfrak{g}(x), \psi_\mathfrak{g}(T'u), \psi_\mathfrak{g}(T'v)]\!]_\mathfrak{g} - T\psi_\mathfrak{h}\big(D(x,T'u)v - \mu(x,T'v)u\big) \\ \overset{(24),(25)}{=}\ &[\![\psi_\mathfrak{g}(x), T\psi_\mathfrak{h}(u), T\psi_\mathfrak{h}(v)]\!]_\mathfrak{g} - T\big(D(\psi_\mathfrak{g}(x), \psi_\mathfrak{g}(T'u))(\psi_\mathfrak{h}(v)) - \mu(\psi_\mathfrak{g}(x), \psi_\mathfrak{g}(T'v))(\psi_\mathfrak{h}(u))\big) \end{aligned}$$

$$\overset{(22)}{=} [\![\psi_{\mathfrak{g}}(x), T\psi_{\mathfrak{h}}(u), T\psi_{\mathfrak{h}}(v)]\!]_{\mathfrak{g}} - T\Big(D(\psi_{\mathfrak{g}}(x), T\psi_{\mathfrak{h}}(u))(\psi_{\mathfrak{h}}(v)) - \mu(\psi_{\mathfrak{g}}(x), T\psi_{\mathfrak{h}}(v))(\psi_{\mathfrak{h}}(u))\Big)$$

$$\overset{(38)}{=} \mu_T(\psi_{\mathfrak{h}}(u), \psi_{\mathfrak{h}}(v))(\psi_{\mathfrak{g}}(x)).$$

证明至此完成。 □

设 T 和T′ 是从一个李-山口代数$(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$到另一个李-山口代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$、关于一个作用 (ρ, μ) 的两个权1 相对罗塔-巴克斯特算子。设$(\psi_{\mathfrak{g}}, \psi_{\mathfrak{h}})$ 是从 T′到 T 的一个同态，使得 $\psi_{\mathfrak{h}}$ 可逆。对于 $n \geqslant 2$，定义一个线性映射 $p : C^n_{T'}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) \longrightarrow C^n_T(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$，使其为

$$p(f, g) = \Big(p_{\mathrm{I}}(f), p_{\mathrm{II}}(g)\Big), \quad \forall (f, g) \in \mathfrak{C}^n_{T'}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$$

其中，$p_{\mathrm{I}}(f)$ 和 $p_{\mathrm{II}}(g)$ 定义为

$$p_{\mathrm{I}}(f)(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_n) = \psi_{\mathfrak{g}}\Big(f(\psi^{-1}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{U}_1), \cdots, \psi^{-1}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{U}_n))\Big), \tag{41}$$

$$p_{\mathrm{II}}(g)(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_n, v) = \psi_{\mathfrak{g}}\Big(g(\psi^{-1}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{U}_1), \cdots, \psi^{-1}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{U}_n), \psi^{-1}_{\mathfrak{h}}(v))\Big), \tag{42}$$

分别地。这里 $\mathrm{U}_k = \mathrm{u}_k \wedge \mathrm{v}_k \in \wedge^2\mathfrak{h}, \mathrm{k} = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}, \mathrm{v} \in \mathfrak{h}$，并且我们使用记号 $\psi^{-1}_{\mathfrak{h}}(\mathrm{U}_k) = \psi^{-1}{}_{\mathfrak{h}}(\mathrm{u}_k) \wedge \psi^{-1}{}_{\mathfrak{h}}(\mathrm{v}_k), \mathrm{k} = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}$。特别地，对于 $\mathrm{n} = 1$，$\mathrm{p} : C^1_{T'}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) \longrightarrow C^1_T(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ 定义为

$$p(f)(v) = \psi_{\mathfrak{g}}\Big(f(\psi^{-1}_{\mathfrak{h}}(v))\Big), \quad \forall v \in \mathfrak{h},\ f \in \mathfrak{C}^1_{T'}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}).$$

定理 5.7. 采用上述记号，p 是从余链 $(\oplus_{p=1}^{\infty} C^p{}_{T'}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}),\ \delta^{T'})$ 到 $(\oplus_{p=1}^{\infty} C^p{}_T(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}),\ \delta^T)$ 的余链映射。因此，p 诱导出上同调群之间的同态 $\mathrm{p}_* : \mathcal{H}_{nT'}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{H}_{nT}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$。

证明。对于所有 $(\mathrm{f}, \mathrm{g}) \in C^n_{H'}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\ (\mathrm{n} \geq 2)$，以及所有 $\mathrm{U}_k = \mathrm{u}_k \wedge \mathrm{v}_k \in \wedge^2\mathfrak{h}, \mathrm{k} = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}, \mathrm{v} \in \mathfrak{h}$，一方面，我们有

$$\begin{aligned}
&\delta^T_{\mathrm{I}}\Big(p_{\mathrm{I}}(f), p_{\mathrm{II}}(g)\Big)(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_n)\\
\overset{(11)}{=}\ &(-1)^{n-1}\Big(\rho_T(u_n)p_{\mathrm{II}}(g)(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, v_n)\\
&\quad -\rho_T(v_n)p_{\mathrm{II}}(g)(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, u_n)\\
&\quad -p_{\mathrm{II}}(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, [u_n, v_n]_T)\Big)\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}D_T(\mathfrak{U}_k)p_{\mathrm{I}}(f)(\mathfrak{U}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{U}_k} \cdots, \mathfrak{U}_n)\\
&+\sum_{1\leq k<l\leq n}(-1)^k p_{\mathrm{I}}(f)(\mathfrak{U}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{U}_k} \cdots, \mathfrak{U}_k \circ \mathfrak{U}_l, \cdots, \mathfrak{U}_n)\\
\overset{(37)}{=}\ &(-1)^{n-1}\Big([Tu_n, p_{\mathrm{II}}(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, v_n)]_{\mathfrak{g}} + T(\rho(p_{\mathrm{II}}(g)(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, v_n))u_n)\\
&-[Tv_n, p_{\mathrm{II}}(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, u_n)]_{\mathfrak{g}} - T(\rho(p_{\mathrm{II}}(g)(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, u_n))v_n)\\
&-p_{\mathrm{II}}(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, [u_n, v_n]_T)\Big)\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}D_T(\mathfrak{U}_k)p_{\mathrm{I}}(f)(\mathfrak{U}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{U}_k} \cdots, \mathfrak{U}_n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{1\leq k<l\leq n}(-1)^k p_{\mathrm{I}}(f)(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_k}\cdots,\mathfrak{U}_k\circ\mathfrak{U}_l,\cdots,\mathfrak{U}_n)\\
\overset{(41),(42)}{=}\;&(-1)^{n-1}\Big([Tu_n,\psi_{\mathfrak{g}}(g(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_{n-1}),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(v_n)))]_{\mathfrak{g}}\\
&+T\Big(\rho(\psi_{\mathfrak{g}}(g(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_{n-1}),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(v_n)))u_n\Big)\\
&-[Tv_n,\psi_{\mathfrak{g}}(g(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_{n-1}),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(u_n)))]_{\mathfrak{g}}\\
&-T\Big(\rho(\psi_{\mathfrak{g}}(g(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_{n-1}),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(u_n)))v_n\Big)\\
&-\psi_{\mathfrak{g}}(g(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_{n-1}),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}([u_n,v_n]_T)))\Big)\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}D_T(\mathfrak{U}_k)\psi_{\mathfrak{g}}\Big(f((\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\widehat{\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_k)}\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_n))\Big)\\
&+\sum_{1\leq k<l\leq n}(-1)^k\psi_{\mathfrak{g}}\Big(f(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\widehat{\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_k)}\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_k)\circ\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_l),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_n))\Big),
\end{aligned}
$$

另一方面，我们也有

$$
\begin{aligned}
&p_{\mathrm{I}}\Big(\delta_{\mathrm{I}}^{T'}(f,g)\Big)(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_n)\\
\overset{(41)}{=}\;&\psi_{\mathfrak{g}}\Big(\delta_{\mathrm{I}}^{T'}(f,g)(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_n))\Big)\\
\overset{(11)}{=}\;&(-1)^{n-1}\Big(\psi_{\mathfrak{g}}([T'\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(u_n),g(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_{n-1}),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(v_n))]_{\mathfrak{g}})\\
&+\psi_{\mathfrak{g}}(T'(\rho(g(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_{n-1}),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(v_n)))\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(u_n)))\\
&-\psi_{\mathfrak{g}}([T'\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(v_n),g(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_{n-1}),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(u_n))]_{\mathfrak{g}})\\
&-\psi_{\mathfrak{g}}(T'(\rho(g(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_{n-1}),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(u_n)))\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(v_n)))\\
&-g(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_{n-1}),[\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(u_n),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(v_{n-1})]_{T'})\Big)\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\psi_{\mathfrak{g}}\Big(D_{T'}(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_k))f(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\widehat{\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_k)}\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_n))\Big)\\
&+\sum_{1\leq k<l\leq n}(-1)^k\psi_{\mathfrak{g}}\Big(f(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_1),\cdots,\widehat{\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_k)}\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_k)\circ\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_l),\cdots,\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}(\mathfrak{U}_n))\Big).
\end{aligned}
$$

根据二元组 $(\psi_{\mathfrak{g}},\psi_{\mathfrak{h}})$是从T′到 T 的同态以及命题 5.6，我们可得 $\delta^{T}{}_{\mathrm{I}}\left(\mathrm{p_I(f),p_{II}(g)}\right)=\mathrm{p^I}\Big(\delta^{T'}{}_{\mathrm{I}}(\mathrm{f},\mathrm{g})\Big)$。类似地，对于所有$(\mathrm{f},\mathrm{g})\in\mathrm{C}^{n}_{T'}(\mathrm{h},\mathrm{g})\ (\mathrm{n}\geq 2)$，我们还有 $\delta^{T}{}_{\mathrm{II}}\Big(\mathrm{p_{II}(f),p_{II}(g)}\Big)=\mathrm{p^{II}}\Big(\delta^{T'}{}_{\mathrm{II}}(\mathrm{f,g})\Big)$。此外，$\mathrm{n}=1$ 的情形也成立。细节从略。□

5.2. 李-山口代数上非零权相对 Rota-Baxter算子的变形。本小节中，我们通过前一节建立的上同调理论，研究李-山口代数上权 1 相对 Rota-Baxter 算子的两类变形。

5.2.1. 李-山口代数上非零权相对 Rota-Baxter 算子的线性变形。本小节中，我们使用前一节构造的上同调来刻画李-山口代数上权重为1的相对 Rota-Baxter 算子的线性变形。

定义 5.8. 设 $T : h \longrightarrow g$ 是从李-山口代数 $(h, [\cdot,\cdot]_h, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_h)$ 到另一李-山口代数 $(g, [\cdot,\cdot]_g, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_g)$ 的权重为1的相对 Rota-Baxter 算子，且相对于作用 $(h; \rho, \mu)$。设 $T : h \longrightarrow g$ 是一个线性映射。若对所有 t，$T_t := T + tT$ 仍是权重为1的相对 Rota-Baxter 算子，则称 T 生成了相对 Rota-Baxter 算子 T 的线性变形。

直接推导可知，T 生成了权 1 的相对 Rota-Baxter 算子 T 的线性变形，因此 T 是 T 的一个 2-上循环。

定义 5.9. 设 $T : h \longrightarrow g$ 是一个权 1 的相对罗塔-巴克斯特算子，它从李-山口代数 $(h, [\cdot,\cdot]_h, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_h)$ 映射到另一个李-山口代数 $(g, [\cdot,\cdot]_g, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_g)$，并且对应于一个作用 (ρ, μ)。

(i) 若存在元素 $X \in \wedge^2 g$，使得 $(Id_g + tL(X), Id_h + tD(X))$ 是从 T_t^2 到 T_t^1 的同态，则称两个线性变形 $T_t^1 = T + tT_1$ 和 $T_t^2 = T + tT_2$ 等价。(ii) 若权 1 的相对 Rota-Baxter 算子 T 的线性变形 $T_t = T + tT$ 与 T 等价，则称其为平凡的。

若两个线性变形 T_t^2 和 T_t^1 等价，则由式（22）可得，对所有 $v \in h$，

$$\big(\mathrm{Id}_g + t\Omega(\mathfrak{x})\big)\big(T + t\mathfrak{T}_2\big)v = \big(T + t\mathfrak{T}_1\big)\big(\mathrm{Id}_h + tD(\mathfrak{x})\big)v,$$

这意味着

$$\mathfrak{T}_2 v - \mathfrak{T}_1 v = T\big(D(\mathfrak{x})v\big) - [\![\mathfrak{x}, Tv]\!]_g = \partial(\mathfrak{x})v. \tag{43}$$

因此，由（43），可得以下定理。

定理5.10. 设 $T : h \longrightarrow g$ 是权 1 的相对 Rota-Baxter 算子，它从李-山口代数 $(h, [\cdot,\cdot]_h, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_h)$ 映到另一个李 - 山口代数 $(g, [\cdot,\cdot]_g, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_g)$，并且对应于一个作用 (ρ, μ)。若两个线性变形 $T_t^1 = T + tT_1$ 和 $T_t^2 = T + tT_2$ 等价，则 T_1 和 T_2 在 $\mathcal{H}_T^2(h, g)$ 中属于同一个上同调类。

5.2.2. 李-山口代数上非零权相对 Rota-Baxter 算子的高阶变形。本小节中，我们引入与权 1 相对 Rota-Baxter 算子的一个 n 阶变形相关的特殊上同调类，并证明当且仅当第二上同调群中的这一上同调类平凡时，权 1 相对 Rota-Baxter 算子的 n 阶变形才能延拓。因此，这种特殊上同调类称为 n 阶变形可延拓的障碍类。

定义 5.11.设 $T:h \longrightarrow g$是一个关于作用 (ρ,μ) 从李-山口代数$(h, [\cdot,\cdot]_h, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_h)$到另一个李-山口代数 $(g, [\cdot,\cdot]_g, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_g)$ 的权 1 相对罗塔-巴克斯特算子。如果 $T_t = P_{n\,i=0} T_i t^i$ with $T_0 = T$,$T_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(h, g)$, $i = 1, 2, \cdots, n$,定义了一个从$h[t]/(t^{n+1})$ 到李-山口代数$g[t]/(t^{n+1})$ 的 $a\mathbb{K}[t]/(t^{n+1})$-模，满足

$$[T_t u, T_t v]_g = T_t\big(\rho(T_t u)v - \rho(T_t v)u + [u, v]_h\big), \tag{44}$$

$$[\![T_t u, T_t v, T_t w]\!]_g = T_t\big(D(T_t u, T_t v)w + \mu(T_t v, T_t w)u - \mu(T_t u, T_t w)v + [\![u, v, w]\!]_h\big), \tag{45}$$

对于所有 u、v、w ∈ h，我们称 T_t 是 T 的 n 阶变形。

注 5.12. 等式（44）和（45）的左端在李-山口代数$g[t]/(t^{n+1})$中成立，而等式（44）和（45）的右端是有意义的，因为T_t 是一个 $\mathbb{K}[t]/(t^{n+1})$ -模映射。

定义 5.13. 设 $T : h \longrightarrow g$ 是从李-山口代数 $(h, [\cdot,\cdot]_h, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_h)$ 到另一个李-山口代数 $(g, [\cdot,\cdot]_g, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_g)$ 的一个权 1 相对罗塔-巴克斯特算子，关于作用 (ρ, μ)。设 $T_t = \sum_{i=0}^{n} T_i t^i$ 是 T 的一个 n 阶变形。如果存在一个 1-上链 $T_{n+1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(h, g)$，使得 $eT_t = T_t + T_{n+1}t^{n+1}$ 是 T 的一个 n 阶变形，则称 T_t 是可延拓的。

以下定理是本节的关键结论。

定理 5.14. 设 $T : h \longrightarrow g$ 是一个权 1 的相对罗塔-巴克斯特算子，它从关于作用 (ρ, μ) 的李-山口代数 $(h, [\cdot,\cdot]_h, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_h)$ 映射到另一个李-山口代数 $(g, [\cdot,\cdot]_g, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_g)$。设 $T_t = \sum_{i=0}^{n} T_i t^i$ 是 T 的 n 阶变形。那么，T_t 可扩张当且仅当上同调类 $[Ob^T] \in \mathcal{H}^2_T(h, g)$ 是平凡的，其中 $Ob^T = (Ob^T_{\mathrm{I}}, Ob^T_{\mathrm{II}}) \in C^2_T(h, g)$ 定义如下：

$$\begin{aligned} Ob^T_{\mathrm{I}}(v_1, v_2) &= \sum_{\substack{i+j=n+1,\\ i,j\geqslant 1}} \Big([\mathfrak{T}_i v_1, \mathfrak{T}_j v_2]_g - \mathfrak{T}_i(\rho(\mathfrak{T}_j v_1)v_2 - \rho(\mathfrak{T}_j v_2)v_1) \Big), \\ Ob^T_{\mathrm{II}}(v_1, v_2, v_3) &= \sum_{\substack{i+j+k=n+1,\\ i,j,k\geqslant 1}} \Big([\![\mathfrak{T}_i v_1, \mathfrak{T}_j v_2, \mathfrak{T}_k v_3]\!]_g - \mathfrak{T}_i(D(\mathfrak{T}_j v_1, \mathfrak{T}_k v_2)v_3 \\ &\quad + \mu(\mathfrak{T}_j v_2, \mathfrak{T}_k v_3)v_1 - \mu(\mathfrak{T}_j v_1, \mathfrak{T}_k v_3)v_2) \Big), \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in h. \end{aligned}$$

证明。设 $eT_t = \sum_{i=0}^{n+1} T_i t^i$ 是 T_t 的延拓，则对所有 u、v、w ∈ h，

$$[\widetilde{T}_t u, \widetilde{T}_t v] = \widetilde{T}_t\Big(\rho(\widetilde{T}_t u)v - \rho(\widetilde{T}_t v)u + [u, v]_h\Big), \tag{46}$$

$$[\![\widetilde{T}_t u, \widetilde{T}_t v, \widetilde{T}_t w]\!] = \widetilde{T}_t\Big(D(\widetilde{T}_t u, \widetilde{T}_t v)w + \mu(\widetilde{T}_t v, \widetilde{T}_t w)u - \mu(\widetilde{T}_t u, \widetilde{T}_t w)v + [\![u, v, w]\!]_h\Big). \tag{47}$$

展开方程（46），比较 ffi中 t^n 的系数可得

$$\sum_{\substack{i+j=n+1,\\ i,j\geqslant 0}} \Big([\mathfrak{T}_i u, \mathfrak{T}_j v] - \mathfrak{T}_i(\rho(\mathfrak{T}_j u)v - \rho(\mathfrak{T}_j v)u) - \mathfrak{T}_{n+1}([u, v]_h) \Big) = 0,$$

这等价于

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i+j=n+1,\\ i,j\geqslant 1}} \Big([\mathfrak{T}_i u, \mathfrak{T}_j v] - \mathfrak{T}_i(\rho(\mathfrak{T}_j u)v - \rho(\mathfrak{T}_j v)u) \Big) \\ &\quad + [\mathfrak{T}_{n+1}u, Tv] + [Tu, \mathfrak{T}_{n+1}v] - T\Big(\rho(\mathfrak{T}_{n+1}u)v - \rho(\mathfrak{T}_{n+1}v)u\Big) - \mathfrak{T}_{n+1}([u, v]_T) = 0, \end{aligned}$$

即，

$$Ob^T_{\mathrm{I}} + \delta^T_{\mathrm{I}}(\mathfrak{T}_{n+1}) = 0. \tag{48}$$

类似地，展开方程（47），比较 ffi中 t^n 的系数可得 t

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i+j+k=n+1,\\ \mathrm{i,j,k}\geqslant 1}} \Big([\![\mathfrak{T}_i u, \mathfrak{T}_j v, \mathfrak{T}_k w]\!]_g - \mathfrak{T}_i(D(\mathfrak{T}_j u, \mathfrak{T}_k v)w + \mu(\mathfrak{T}_j v, \mathfrak{T}_k w)u - \mu(\mathfrak{T}_j u, \mathfrak{T}_k w)v) \Big) \\ &+ [\![\mathrm{T}_{n+1}\mathrm{u}, \mathrm{T}\,\mathrm{v}, \mathrm{T}\,\mathrm{w}]\!] + [\![\mathrm{Tu}, \mathrm{T}_{n+1}\mathrm{v}, \mathrm{T}\,\mathrm{w}]\!] + [\![\mathrm{Tu}, \mathrm{Tv}, \mathrm{T}_{n+1}\mathrm{w}]\!] - \mathrm{T}\Big(\mathrm{D}(\mathrm{T}_{n+1}\mathrm{u}, \mathrm{T}\,\mathrm{v})\mathrm{w} + \mathrm{D}(\mathrm{T}\,\mathrm{u}, \mathrm{T}_{n+1}\mathrm{v})\mathrm{w} \\ &+ \mu(\mathfrak{T}_{n+1}v, Tw)u + \mu(Tv, \mathfrak{T}_{n+1}w)u - \mu(\mathfrak{T}_{n+1}u, Tw)v - \mu(Tu, \mathfrak{T}_{n+1}w)v\Big) - \mathfrak{T}_{n+1}([\![u, v, w]\!]_T) = 0, \end{aligned}$$

这意味着

$$Ob^T_{\mathrm{II}} + \delta^T_{\mathrm{II}}(\mathfrak{T}_{n+1}) = 0. \tag{49}$$

由（48）和（49），我们得到

$$\mathrm{Ob}^T = -\delta^T(\mathfrak{T}_{n+1}).$$

因此，上同调类 $[\mathrm{Ob}^T]$ 是平凡的。

反之，假设上同调类 $[\mathrm{Ob}^T]$ 是平凡的，则存在 $\mathrm{T}_{n+1} \in C^1_T(\mathrm{V},\mathrm{g})$，使得$\mathrm{Ob}^T = -\delta^T(\mathrm{T}_{n+1})$。令 $\mathrm{eT}_t = \mathrm{T}_t + \mathrm{T}_{n+1}\mathrm{t}^{n+1}$。那么对于所有 0 6 s 6 n + 1，$\mathrm{eT}_t$ 满足

$$\sum_{i+j+k=s} \Big([\mathfrak{T}_i u, \mathfrak{T}_j v] - \mathfrak{T}_i(\rho(\mathfrak{T}_j u)v - \rho(\mathfrak{T}_j v)u) - \mathfrak{T}_s([u,v]_\mathfrak{h})\Big) = 0,$$

$$\mathrm{X}\Big(\big[\!\big[\mathrm{T}_i u, \mathrm{T}\,j v, \mathrm{T}_k w\big]\!\big] - \mathrm{T}_i\big(\mathrm{D}(\mathrm{T}\,j u, \mathrm{T}_k v)w + \mu(\mathrm{T}\,j v, \mathrm{T}_k w)u - \mu(\mathrm{T}\,j u, \mathrm{T}_k w)v\big) - \mathrm{T}s([\![u, v, w]\!]_\mathfrak{h})\Big) = 0. \quad \mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}=\mathrm{s}$$

哪个　　这意味着 T_t 是 T 的一个阶数为 n 的 + 1 变形。因此它是.....的一个延拓。T_t. □

定义5.15。设 $\mathrm{T}: \mathrm{h} \longrightarrow \mathrm{g}$是一个从李-山口代数$(\mathrm{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$到另一个李-山口代数 $(\mathrm{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$的、关于作用 (ρ,μ)的权1 相对罗塔-巴克斯特算子，并且 $\mathrm{T}_t = \mathrm{P}_n \mathrm{i}_{=0} \mathrm{T}_i \mathrm{t}^i$ 是T 的 n阶变形。那么，定理5.14 中定义的上同调类 $[\mathrm{Ob}^T] \in \mathcal{H}^2_T(\mathrm{h}, \mathrm{g})$ 被称为 T_t可延拓的障碍类。

推论 5.16.设 $\mathrm{T}: \mathrm{h} \longrightarrow \mathrm{g}$ 是从一个李-Yamaguti代数 $(\mathrm{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 到另一个李-Yamaguti 代数 $(\mathrm{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$的关于作用 (ρ, μ) 的权 1相对罗塔-巴克斯特算子。如果 $\mathcal{H}^2_T(\mathrm{h},\mathrm{g}) = 0$，那么 $\mathcal{Z}^1_T(\mathrm{h}, \mathrm{g})$ 中的每个 1-余循环都是 T 的某个形式变形的无穷小。

致谢。Xu部分获得国家自然科学基金项目（12201253）和江苏省自然科学基金项目（BK20220510）的资助。Qiao部分获得国家自然科学基金项目（11971282）的资助。

参考文献

[1] C. Bai、O. Bellier、L. Guo 和 X. Ni，《运算的分解、Manin 乘积与 Rota-Baxter 算子》，《国际数学研究通知》IMRN (2013)，第 3 期，485-524。2[2] C. Bai、L. Guo 和 X. Ni，《非阿贝尔广义 Lax 对、经典 Yang-Baxter 方程与后李代数》，《数学物理通讯》297(2010)，553-596。2[3] D. Balavoine，《二次算子作上的代数的变形》，《算子：复兴会议论文集》（康涅狄格州哈特福德/卢米尼，1995），《当代数学》，美国数学会，普罗维登斯，第202卷，(1997) 207-234。2[4] G. Baxter，《一个其解可由简单代数恒等式导出的分析问题》，《太平洋数学杂志》10 (1960年)，731-742。1[5] P. Benito、M. Bremner 和 S. Madariaga，《对称矩阵、正交李代数与李-山口代数》，《线性与多重线性代数》63 (2015年) 1257-1287。2[6] P. Benito、C. Draper 和 A. Elduque，《与 g 相关的李-山口代数》，$_2$，《纯粹与应用代数杂志》202 (2005年) 22-54。2[7] P. Benito、A. Elduque 和 F. Mart´in-Herce，《不可约李-山口代数》，《纯粹与应用代数杂志》213 (2009年) 795-808。2[8] P. Benito、A. Elduque 和 F. Martin-Herce，《一般型不可约李-山口代数》，《纯粹与应用代数杂志》215 (2011年) 108-130。2[9] V. Chari 和 A. Pressley，《量子群指南》，剑桥大学出版社，1994。2[10] I. Dorfman，《Dirac 结构与非线性演化方程的可积性》，Wiley Chichester，1993。3[11] M. Gerstenhaber，《结合环的上同调结构》，《数学年刊》78 (1963) 267-288。2[12] M. Gerstenhaber，《环与代数的变形》，《数学年刊》(2) 79 (1964) 59-103。2

[13] M. Gerstenhaber, 《环与代数的变形 II》, 《数学年刊》84 (1966年) 1-19。2[14] M. Gerstenhaber, 《环与代数的变形 III》, 《数学年刊》88 (1968年) 1-34。2[15] M. Gerstenhaber, 《环与代数的变形 IV》, 《数学年刊》99 (1974年) 257-276。2[16] L. Guo, 《Rota-Baxter 代数导论》, 《现代数学综述》第4卷, International Press, 美国马萨诸塞州萨默维尔; 高等教育出版社, 北京, 2012年。xii+226 页。2[17] R. Hartshore, 《变形理论》, 《数学研究生教材》第257卷 (2010), 施普林格, 柏林。2[18] S. Hou、Y. Sheng 和 Y. Zhou, 《3-李代数上的非零权相对 Rota-Baxter 算子与 3-post-Lie 代数》, 《代数杂志》615 (2023年) 103-129。2[19] K. Iohara、Y. Koga, 《Virasoro 代数表示论》, 《施普林格数学专著》, 施普林格伦敦有限公司, 伦敦 (2011)。2[20] M. K. Kinyon 和 A. Weinstein, 《Leibniz 代数、Courant 代数丛与约化齐性空间上的乘法》, 《美国数学杂志》123 (2001年) 525-550。2, 4[21] K. Kodaira 和 D. Spencer, 《复解析结构的变形 I 和 II》, 《数学年刊》67 (1958年) 328-466。2[22] B. A. Kupershmidt, 《经典 r-矩阵究竟是什么》, 《非线性数学物理杂志》6 (1999年) 第4期, 448-488。2[23] J. Lin、L. Chen 和 Y. Ma, 《李-山口代数的变形》, 《数学学报（英文版）》31 (2015年) 938-946。2[24] D. Liu、Y. Pei 和 L. Xia, 《Ovisenko-Roger 代数的受限模范畴》, 《代数与表示论》25 (2022年), 第3期, 777-791。2[25] J. Liu、Y. Sheng、Y. Zhou 和 C. Bai, 《n-李代数上的 Nijenhuis 算子》, 《理论物理通讯》（北京）65(2016年) 第6期, 659-670。3[26] L. Gou、Y. Li、Y. Sheng 和 G. Zhou, 《任意权微分代数的上同调、扩张与变形》, 《范畴论及其应用》38 (2022年), 论文第37号, 1409C1433。2[27] A. Lue, 《李代数的交叉同态》, 《剑桥哲学学会会刊》62(1966年), 577-581。[28] Y. Ma、L. Chen 和 J. Lin, 《Hom-Lie-Yamaguti 代数的一参数形式变形》, 《数学物理学杂志》56 (2015年) 011701, 12页。2[29] A. Nijenhuis 和 R. Richardson, 《分次 Lie 代数的上同调与变形》, 《美国数学会通报》72 (1966年) 1-29。2[30] K. Nomizu, 《齐性空间上的不变仿射联络》, 《美国数学杂志》76 (1954年) 33-65。2, 4[31] Y. Pei、Y. Sheng、R. Tang 和 K. Zhao, 《幺半范畴的作用与 Cartan 型 Lie 代数的表示》, 《朱西厄数学研究所杂志》(2022年), DOI:10.1017/S147474802200007X。3[32] Y. Sheng 和 R. Tang, 《3-李代数上的辛结构、乘积结构与复结构》, 《代数杂志》508 (2018年) 256-300。3[33] Y. Sheng、J. Zhao 和 Y. Zhou, 《李-山口代数上的 Nijnhuis 算子、乘积结构与复结构》, 《代数与应用杂志》第20卷, 第8期 (2021年) 2150146, 22页。2, 7, 9, 11[34] N. Takahashi, 《二次空间上的模与李-山口代数的表示》, 《Lie 理论杂志》31 (2021年) 第4期, 897-932。2, 7[35] R. Tang、C. Bai、L. Guo 和 Y. Sheng, 《O-算子的变形及其控制上同调》, 《数学物理通讯》368 (2019年) 655-700。2, 3[36] R. Tang、S. Hou 和 Y. Sheng, 《Lie 3-代数与3-李代数上相对 Rota-Baxter 算子的变形》, 《代数杂志》567 (2021年) 37-62。2, 3[37] R. Tang、Y. Sheng 和 Y. Zhou, 《 Leibniz 代数上相对 Rota-Baxter 算子的变形》, 《现代物理几何方法国际杂志》第 17 卷, 第12期 (2020年), 21页。2, 3[38] K. Wang 和 G. Zhou, 《任意权 Rota-Baxter 代数的变形与同伦理论》, arXiv: 2108. 06744。2[39] K. Yamaguti, 《Lie 三系及其推广》, 《广岛大学科学杂志》A辑21 (1957/1958年) 155-160。2, 4[40] K. Yamaguti, 《一般李三元系的上同调群》, 《熊本科学杂志》A辑 8 (1967/1969年) 135-146。2, 4, 5, 6[41] K. Yamaguti, 《Lie 三系的上同调空间》, 《熊本科学杂志》A辑5(1) (1960年) 44-52。2[42] T. Zhang 和 J. Li, 《李-山口代数的变形与扩张》, 《线性与多重线性代数》63 (2015年) 2212-2231。2[43] T. Zhang 和 J. Li, 《李-山口代数的表示与上同调及其应用》, 《数学讨论》148 (2017年) 131-155。2

[44] J. Zhao 和 Y. Qiao。LieYRep 对上的上同调与相对 Rota-Baxter-Nijenhuis 结构，《几何与物理杂志》186 (2023年) 第 104749 号，24 页。2, 3[45] J. Zhao 和 Y. Qiao。李-山口代数上的相对 Rota-Baxter 算子的上同调与变形，arXiv:2204.04872。2, 3[46] J. Zhao、Y. Qiao 和 S. Xu，李-山口代数间交叉同态的上同调与变形，arXiv: 2303.15744。7 Jia Zhao，南通大学理学院，江苏省南通市，邮编 226019。电子邮箱：zhaojia@ntu.edu.cn Senrong Xu，江苏大学数学科学学院，江苏省镇江市，邮编 212013。电子邮箱：senrongxu@ujs.edu.cn Yu Qiao（通讯作者），陕西师范大学数学与统计学院，陕西省西安市，邮编 710119。电子邮箱：yqiao@snnu.edu.cn