关于复杂纠缠态可构造性的图论见解

L. Sunil Chandran 和 Rishikesh Gajjala

印度科学研究所，班加罗尔。

arXiv:2304.06407v3 [quant-ph] 1 Jul 2024

构建一大类量子光子实验的最高效自动化方式，是通过对具有特定属性的图进行抽象表示来实现的。虽然人们利用人工智能和SAT 求解器探索了寻找这类图的新方向，但随着图的规模增大，这种做法在计算上变得不可行。因此，我们采取分析方法，在实验图上引入局部稀疏化技术。借助该技术，我们回答了实验量子光学中的一个关键开放问题，即某些复杂纠缠量子态是否能够被构建。这使我们对量子资源理论以及特定量子光子系统的局限性有了更多认识，并开启了利用图论技术设计量子物理实验的途径。

1 引言

近年来，量子光学技术取得了巨大进展 [1, 2] ，因为光子是许多量子技术的核心，也是通过实验研究有关我们宇宙局域性与实在性的基本问题的核心。由于多粒子干涉的特殊行为，设计用于在光子学中生成多体纠缠的实验装置颇具挑战性。构建此类量子光子实验中很大一类的最高效自动化方式，是通过具有某些性质的图的抽象表示 [3–5]，从而为量子技术带来新的可能性[6–8]。构建此类图一直是一个具有挑战性的数学开放问题，因为需要仔细调整边权重，以满足指数级数量的方程[9]。

近期，研究人员尝试利用人工智能和 SAT 求解器来寻找此类图，以用于设计量子光子实验 [10–12]。然而，随着搜索空间呈指数级增长，使用这些方法在大型图中寻找解在计算上难以实现。因此，有必要采用更先进的分析方法。在这项工作中，我们提出了一种针对实验对应图的局部稀疏化技术，并借此回答实验量子光学中的一个重要悬而未决的问题：某些复杂纠缠量子态能否构造出来。我们的方法有两个核心思想：

1) 开发一种边剪枝算法，以尽可能少的资源构建量子光学实验。

L. Sunil Chandran：获 SERB 核心研究资助项目 CRG/2022/006770 资助：“以图论和理论计算机科学架起量子物理的桥梁” Rishikesh Gajjala：rishikeshg@iisc.ac.in

已被 Quantum 于 2024-06-26 接收，点击标题进行验证。依据 CC-BY 4.0 协议发布。

2) 在剪枝图中检测一个特殊的稀疏子图，该子图对应于量子光学实验，其边数为某些多粒子纠缠量子态的维数提供上界。

我们的想法具有普适性，或许有助于理解如何设计实验，以构造其他几种量子态，例如 NOON态、簇态、W态和 Dickes态。随着我们对用于产生高维多粒子纠缠的图有了更多结构性认识，我们相信这些技术可用于解决 Cervera-Lierta、Krenn 和 Aspuru-Guzik 关于某些复杂纠缠量子态可构造性的猜想 [12]。这将使我们对量子资源理论以及特定量子光子系统的局限性有更深入的认识。

2 量子光学实验的图表示

量子纠缠理论表明，即使相隔很远，两个粒子也能相互影响。1964年，贝尔证明量子力学与我们对世界的经典理解相矛盾 [13]。后来，在1989年，Greenberger、Horne 和蔡林格（简称 GHZ）研究了两个以上粒子发生纠缠时可能出现的情况 [14]。这类由三个粒子纠缠而成的状态（$|GHZ_{3,\ 2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$）被观测到，并由此否定了局域实在论 [15, 16]。

尽管对此类态的研究最初纯粹出于基础层面的好奇 [17–19]，如今它们已应用于量子信息论中的诸多领域，例如量子计算 [20]。它们对于量子网络中的量子计算任务 [21],和量子密码学的早期测试也至关重要[22]。增加粒子数量和 GHZ态的维数，对于基础研究和实际应用都至关重要。受此启发，世界各地的多个实验团队正投入巨大努力，以扩大 GHZ态的规模。光子技术是实现这一目标的关键技术之一 [21, 23]。

2017年，Krenn、Gu和蔡林格 [4] 发现（并在之后进行了扩展 [3, 5]）了实验量子光学与图论之间的桥梁。他们观察到，大类的量子光学实验（包括含有概率性光子对源、确定性光子源和线性光学元件的实验）都可以表示为边染色、边加权图。此外，每个边染色边加权图都可以转换为一个具体的实验装置。这项技术促成了新量子干涉效应及其与量子计算之间联系的发现 [3]。此外，它还被用作新量子实验的高效基于人工智能的设计方法的表示 [10, 11]。由这一框架形成的态也得到了实验验证 [7, 24]。这种基于图的表示还被用于展示后选择态之外的许多其他系统（如NOON态和预示态）[11]。这种表示以及另一种密切相关的基于图的表示也被用于量子电路表示和计算 [10, 25]。迄今为止展示的最大集成光子芯片实验（具有多种应用） [8]也遵循基于图的表示！

然而，尽管进行了多次尝试，仍未能找到一种方法，在不借助额外资源 [9] 的情况下，以完美质量和有限计数率生成维数为 $d > 2$、光子数超过 $n = 4$ 的 GHZ态。这使得 Krenn 和 Gu 猜想，在物理上无法实现这一目标。他们还将这个问题完全用图论术语表述，并广泛向图论学者征求解决方案 [26]。现在，我们将用图论术语正式陈述这一问题，并解释它与量子光子学表述的等价性。关于这两个问题为何等价的详细说明，

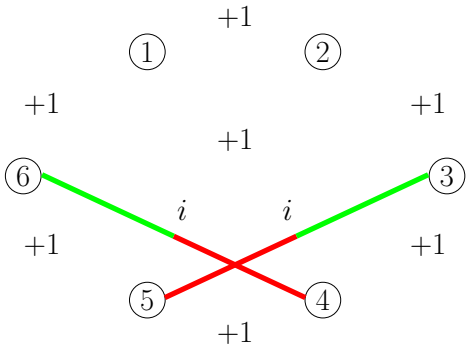
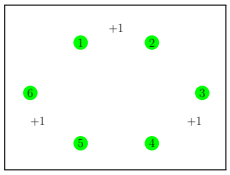
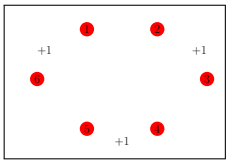


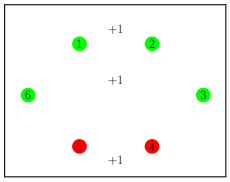
图 1：边染色边加权图。边{1, 2},{3, 4},{5, 6},{3, 6}为绿色（模式编号 1），而{1,6}, {2,3}, {4, 5} 为红色（模式编号 0）。边{4, 6} 和{3, 5} 为双色边，其中从顶点 4, 5 开始的半边为红色，其余半边为绿色。



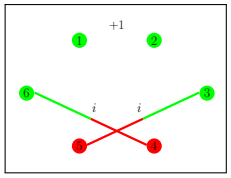
(a) 顶点着色为 |111111⟩。



(b) 顶点着色为 |000000⟩。



(c) 顶点着色着色为 |111001⟩。



(d) 顶点的颜色——着色为 |111001⟩。

请读者参阅 [9]。

2.1 实验的数学表述

我们首先定义一些常用的图论术语。对于图 G，令 $V(G)$ $E(G)$分别表示顶点集和边集。对于 $S \subseteq V(G)$， $G[S]$ 表示图 G 在 S上的诱导子图。 $\mathbb{N}$、$\mathbb{C}$ 分别表示自然数集和复数集。集合 S 的基数记为 |S|。对于正整数 r， $[r]$ 表示集合 {1, 2 . . . , r}。 K_n 表示具有 n 个顶点的完全图。如果图中的每个顶点至多与 M 中的一条边关联，我们就称边集的子集 M 为匹配。如果匹配 M 中的每个顶点都恰好与 M 中的一条边关联，我们就称该匹配为完美匹配。例如，图 1 中的四个完美匹配均列于第 2.1 节。

除非另有说明，本文始终假设所有图均为简单图。通常，在边染色中，每条边都与一个自然数相关联。然而，在此类边染色中，边被假设为单色的。但在与实验相对应的图中，我们允许存在双色边，即一半边以某种颜色着色，另一半边则以不同的颜色着色。例如，在图1所示的图中，顶点 4 与 6 之间的边就是一条双色边。下面我们将引入一些新符号来描述双色边。

图中的每条边都可以看作由两条半边构成，即，边$e = \{u, v\}$ 由从顶点 u 到边 e中点的半边（下文称为 u-半边，属于 e）以及从顶点 v到边 e 中点的半边（下文称为 v-半边，属于 e）构成。因此，图的边集E 产生半边集合 H，其中 $|H| = 2|E|$。若 $e = \{u, v\}$，我们可以将 e 的 v-半边记为 e_v 并将 e 的 u-半边记为 e_u。考虑边 e，其连接着

顶点 4 和 6 在图 1中。其 4-半边 e （e_4）的颜色为 0 （红色），而 6-半边（e_6）的颜色为 1（绿色）。

本文所考虑的边染色类型更恰当地称为半边染色。这是一个从 H 到 N 的函数，记作 $c : H \to \mathrm{N}$。（注意，我们使用正整数来命名颜色。）换句话说，每条半边都获得一种颜色。如果一条边的两条半边获得相同的颜色，则称该边为单色边（此时我们可以用 $c(e)$ 表示这种颜色）；否则，称其为双色边。顶点 v 关于颜色 i 的颜色度 $deg(v, i)$，是指与 v 相 incident 且颜色为 i 的半边数量。例如，考虑图 1 中连接顶点 4 和 6 的边 e。容易看出，$c(e_4) = 0$，而 $c(e_6) = 1$。再考虑连接顶点 1 和 6 的边 e'。由于 $c(e'_1) = c(e'_6) = 0$，e' 是单色的，而且 $c(e') = 0$。顶点 3 关于颜色 1 的颜色度为 $deg(3, 1) = 3$。

权重赋值 w 为每条边 e 赋予一个权重 $w(e) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$。请注意，由于零权边等同于不存在该边，因此我们无需考虑零权边。

定义1。 半边着色的边加权图称为实验图。

定义2。 完美匹配 P、$w(P)$ 的权重是其所有边的权重之积，即 $\prod w(e)_{e\in P}$

顶点着色 vc 将一种颜色 i 与图中的每个顶点相关联，对于某个 $i \in \mathbb{N}$。我们使用 $vc(v)$ 表示顶点 v 在顶点着色 vc中的颜色。考虑一个完美匹配 P。如果对于每个顶点 v，$vc(v)$ 都等于 $c(e_v)$（即，v的半边的颜色为 e），其中 e 是与 v相 incident 的 P 中的唯一边，则称每个完美匹配 P 诱导出一个顶点着色 vc。请注意，通过这种方式，我们恰好为每个顶点赋予一种颜色。因此，它确实是一个顶点着色。我们称该顶点着色 vc 由 P 诱导。请注意，不同的完美匹配可以诱导出相同的顶点着色。例如，图 2c 和图 2d 诱导出相同的顶点着色（|111001），其中顶点1、2、3、6被着成绿色，顶点4、5被着成红色。如果存在至少一个完美匹配 P诱导出 vc，则称顶点着色 vc 是可行的。

定义 3. 顶点着色 vc, $w(vc)$ 的权重是所有诱导出 vc 的完美匹配 P 的权重之和。

不可行的顶点着色，其权重默认为零。

定义 4. 如果一个实验图满足以下条件，则称其为 *GHZ* 实验图：

1. 所有可行单色顶点着色的权重均为1。

2. 所有非单色顶点着色的权重均为0。

例如，考虑图 1所示的实验图。

1. 令 vc_1 表示所有顶点均着色为1的顶点着色，如图2a所示；令 vc_2 表示所有顶点均着色为0的顶点着色，如图2b所示。

$$w(vc_1) = 1 \ \ \& \ \ w(vc_2) = 1$$

2. 令 vc_3 表示如下顶点着色：顶点{1,2,3,6} 着成1 ，而顶点{4,5} 着成1，如图2c 和图2d所示。

$$w(vc_3) = 1 - 1 = 0$$

注意，所有可行单色顶点着色，即 vc_1 和 vc_2，其权重均为1。所有非单色顶点着色，即 vc_3、vc_4 以及其他若干不可行的非单色顶点着色，其权重均为0。因此，图1 所示的实验图是一个 GHZ 实验图。

定义5. *GHZ* 实验图 G，$\mu(G)$ 的维数，是权重为1的可行单色顶点着色的数量。

2.2 与量子光子实验的对应关系

在表1中，我们列出了不同图论术语在量子光子实验中对应的含义。从总体上看，每个实验图（半边着色的边加权图）都对应一个量子光子实验。若要使该量子光子实验产生GHZ态，实验设计者应谨慎调整边权重和边颜色。如果边权重（光子对振幅）和边颜色（相应光子对的模式编号）的调整方式能够形成 GHZ 实验图 G （即满足定义4中的条件），那么相应的量子光子实验就会产生 n粒子 d维 GHZ态（$|GHZ_{n,d}\rangle$），其中 $n = V(G)$ 和 $d = \mu(G)$。请注意，通过以不同方式调整权重，使其满足另一组条件（类似于定义4），也可以生成 NOON态、簇态、W态和 Dickes态等量子态。

图 1中所示实验图对应的实验会产生振幅（权重）为 1 的项（顶点着色） $|000000\rangle$ 和 $|111111\rangle$ 。所有其余项（顶点着色）的振幅（权重）均为 0。因此，实验中观测到的量子态（对各项进行归一化后）为$|GHZ_{6,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000000\rangle + |111111\rangle)$（一个维数为 2 的 6 顶点 GHZ 实验图）。有关此设置的量子物理含义的详细说明，请参阅 [9]。

2.3 问题研究进展

Krenn 和 Gu猜想，从物理上讲，在没有额外资源 [9]的情况下，不可能以完美质量和有限计数率生成一个维数为 $d > 2$ 、包含超过 $n = 4$ 个光子的 GHZ态。在图论术语中，他们的猜想表明

猜想6 (Krenn-Gu猜想)。 对于一个不与 K_4 同构的图 G ,$\mu(G) \leq 2$。

证明这一猜想将立即为量子光学中的资源理论带来新的见解，而找到一个反例则会揭示多光子量子系统中新的奇特量子干涉效应。

然而，当允许多重边和双色边时，即使对于仅有 4 个顶点的 GHZ 实验图，要通过解析方法证明维数是否有界也出奇地困难。直到最近，Mantey 才借助大量计算证明了这一点 [28]。因此，实验图顶点数与维数之间的一般界仍难以确定。这促使研究人员通过限制双色边和多重边的存在来研究这个问题。最先进的结果和猜想列于表2。

不存在相消干涉。 用量子物理术语来说，这相当于每个生成的 n-光子振幅都能在探测器中被观测到，也就是说，不存在两个模式相同、振幅相反且相互抵消的多光子项。这种特殊情况不允许真正的量子资源，并将问题简化为关于无权彩色图的一个简单组合问题。

表1：图与量子光学实验之间的映射

图论	**量子光子学**
顶点 v	输出端的单光子探测器 $det(v)$ 某条光子路径
边，$e = \{u, v\}$	一对关联光子 $\{p(e_u)\ p(e_v)\}$ 光子 $p(e_u)$ 和 $p(e_v)$ 位于通往光子 探测器 $det(u)$ 和 $det(v)$ 的路径上。
$e = \{u, v\}$ 的边权重	光子对的振幅 $\{p(e_u)\ p(e_v)\}$
双色边 $e = \{u, v\}$	光子的模式数 $p(e_u)$ 和 $p(e_v)$ 是不同的
单色边$e = \{u, v\}$	光子的模式数 $p(e_u)$ 和 $p(e_v)$ 相同
完美匹配 $P = \{{}_1e, {}_2e \cdots\}$，其中边 ${}_ie = \{u_i, v_i\}$	A 其中的多光子事件 其中光子—— 子 $p({}_1e_{u_1})\ p({}_1e_{v_1})\ p({}_2e_{u_2})\ p({}_2e_{v_2}) \cdots$ 被探 测到。
完美匹配的权重 P	乘积 of 振幅 of 光子 对 $\{p({}_1e_{u_1})\ p({}_1e_{v_1})\}, \{p({}_2e_{u_2})\ p({}_2e_{v_2})\} \cdots$
顶点着色 vc	一个多光子项。 这是将每个光子探测器映射到 其探测到的光子的模式编号。
由一个 完美匹配诱导的顶点着色 P	每个 多光子事件导致一个 多光子 光子项。此类项由映射每个光子探测器 将每个光子探测器 $det(v)$连接到该模式 光子数量 $p(e_v)$，其中 e 是 the 是中与相接的唯一边。 可能存在多个多光子事件 它们会产生相同的多光子项。
顶点着色的权重 vc	多光子项的振幅相关- 对应于 vc。 这是以下各项权重之和。 所有导致多光子项的事件在- 导致 vc。
单色顶点颜色- ing	其中所有光子探测均发生的多光子项- tors 被映射到相同的模式编号。
di- 的 GHZ 实验图 维数 d	d维 GHZ 态（最大纠缠 态） 存在 d 个振幅为 1 的多光子项，其中所有光子探测器都映射到 相同的模式编号。所有其他多光子 这些术语的权重为零。

表 2：当前最先进的结果和猜想

参考文献	多重边	双色边	维数	状态
[27]	允许	允许	$n > 4,\ d \leq 2$	猜想 6
[12]	允许	不允许	$n = 6,\ d < 3$ $n = 8,\ d < 4$	证明如下 SAT 求解器
[12]	允许	不允许	$n > 4,\ d < \frac{n}{2}$	猜想7
[28]	允许	允许	$n = 4,\ d \leq 3$	已证明，使用 格罗布纳基
本研究	不允许	允许	$n > 4,\ d < \frac{n}{\sqrt{2}}$	证明于 定理 8

Bogdanov [29] 证明，4 个顶点的实验图维数至多为 3，而一个 $n \geq 6$ 顶点图的维数至多为 2。Chandran 和 Gajjala [30] 对维数为 2 的实验图进行了结构分类。他们还证明，如果一个图在不存在相消干涉时可达到的最大维数不为 1，那么即使允许相消干涉，可达到的最大维数也保持不变。Vardi 和 Zhang [31, 32] 提出了受这些实验启发的新着色问题，并研究了其计算复杂性。

不存在多重边。从量子物理术语来看，这等价于说，构成实验结果的双光子关联在其计算基中只能呈现一种特定的模式组合。例如，它们可以是$|0,\ 0\rangle\ |0,\ 1\rangle\ |1,\ 0\rangle$ 或 $|1,\ 1\rangle$，但不能是 $|0,\ D\rangle$ 与 $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

Chandran 和 Gajjala [30] 证明，即使简单图中存在双色边，n 顶点实验图的维数也至多为 $n-3$。他们的方法可以推广到存在多重边但不存在双色边的情形，并得到相同的上界。

不存在双色边。用量子物理术语来说，这相当于说，构成实验结果的双光子关联在计算基中只能具有相同的模式。例如，它们可以是 $|0,\ 0\rangle\ |1,\ 1\rangle$，或 $|0,\ 0\rangle + |1,\ 1\rangle$，但不能是 $|0,\ 1\rangle$ 或 $|1,\ 0\rangle$。

Ravsky [33]提出了一个将该问题与彩虹匹配联系起来的猜想；彩虹匹配即每条边颜色各不相同的匹配。利用 Kostochka 和 Yancey 的一项结果 [34], ，他证明 n 顶点实验图的维数至多为$n-2$。Neugebauer [35] 运用这些思路进行了计算实验。对于顶点数较少的 GHZ 实验图，Cervera-Lierta、Krenn 和 Aspuru-Guzik [12] 将这一问题转化为一个布尔方程组，并使用 SAT 求解器发现该方程组无解。特别是，他们证明，对于含有单色边的图，$n = 6$、$d \geq 3$ 和 $n = 8$、$d \geq 4$ 的 GHZ态不可能存在。作者进一步猜想了以下更一般的结论

猜想 7 (Cervera-Lierta 等人的猜想)。无法生成维数为 $d \geq \frac{n}{2}$ 的 $n > 4$顶点实验图。

请注意，猜想7 远弱于猜想6。人们可能会疑惑，既然猜想7 的正确性可由猜想 6 得到证明后推出，为何还要提出猜想6？然而，根据目前已有的证据，猜想 6 似乎相当有力。

具体而言，形成猜想 6 的直觉主要源于使用 PyTheus 进行的计算实验未能 [11]生成具有所需性质的小图。然而，众所周知，基于小规模图上的实验所提出的许多猜想都可能是错误的。这是因为，图的许多复杂结构特征只有在大图中才会显现。我们认为，维数相当高（为某个常数 ≥ 3）的实验图可能存在，尽管这类图很可能具有极其规整的结构，因此很难找到。

2.4 我们的结果

在一个具有 个顶点的简单 GHZ 实验图中，由于每个顶点至多有 n 个邻点，且每种颜色都至少有一条与每个顶点关联的单色边（已在观察结果 10 中得到形式化证明），因此颜色数（也就是维数）显然有一个上界 $n-1$。即使允许多重边但不存在双色边，我们也能通过更仔细的论证得到同样的上界 [35]。迄今文献中的所有结果，要么只在这个显然的上界上改进一个加法项，要么仅适用于顶点数至多为 8 的图。在本研究中，我们运用针对实验图的局部稀疏化 技术，突破了这一限制，证明如下：

定理 8. 不可能生成维数为 $d \geq \frac{n}{\sqrt{2}}$ 的简单 $n > 4$ 顶点 *GHZ* 实验图。

用图论术语来说，定理 8 等价于指出 $\mu(G) \leq \frac{|V(G)|}{\sqrt{2}}$。这意味着，若不使用额外的量子资源（例如辅助光子），就不可能通过这种图方法制备由 n 个粒子构成、具有 $\geq \frac{n}{\sqrt{2}}$ 维数的 GHZ 态。请注意，即使允许双色边，我们的上界对简单图仍然成立。

3 边删减

我们引入边最小 GHZ 实验图的概念。若不存在其他图 G' 满足 $|V(G')| = |V(G)|$, $\mu(G) = \mu(G')$ 且 $|E(G')| < |E(G)|$，则称 GHZ 实验图 G 为边最小。这类图对应于使用最少资源、以给定数量的粒子和给定维数制备 GHZ态的实验，因此受到实验物理学家的关注。请注意，并非所有 GHZ 实验图都是边极小的。例如，图 1 是一个 GHZ 实验图，但它不是边最小的。这是因为图 3 也是一个具有 6 个顶点、维数为 2 的 GHZ 实验图，而且其边数少于图 1 中的图。另一方面，图 3 是一个边最小 GHZ 实验图。这是因为在任何具有 6 个顶点、维数为 2 的 GHZ 实验图中，至少必须有两个颜色不同的完美匹配，因此至少有 6 条边。读者可能会注意到，对边最小 GHZ 实验图证明定理 8，意味着定理 8 对所有 GHZ 实验图都成立。

如果实验图 G 中至少有一条颜色为 c 的半边属于 G，我们就称颜色 c 为参与的。我们声称，在任意边最小 GHZ 实验图中，参与颜色的所有单色顶点着色都是可行的。为导出矛盾，假设存在一条边极小 GHZ 实验图中的边

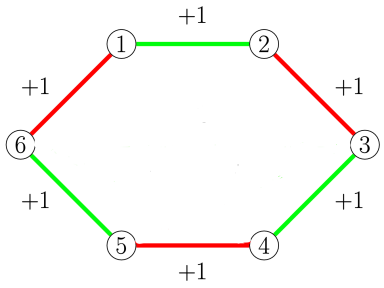


图 3：一个边最小 GHZ 实验图

图 G，其中对于某个 i，存在一种在 $V(G)$ 上、颜色为 i 的单色顶点着色，但它不可行。我们可以通过从 G 中删去所有含有颜色为 i 的半边的双色边，以及所有颜色为 i 的单色边，得到子图 G'。注意，G' 仍然是维数相同的 GHZ 实验图。这与 G 的边极小性矛盾。因此，在边最小 GHZ 实验图中，参与颜色的所有单色顶点着色都是可行的

如果一个图的每条边都至少属于一个完美匹配，那么该图称为匹配覆盖图。如果一条边 e 不属于任何完美匹配 M，那么我们称边 e 是冗余的。从给定图中移除所有冗余边后 G，便得到其唯一的最大匹配覆盖子图。例如，图 4a 的匹配覆盖图是图4b。

观察 9. 边最小 *GHZ* 实验图都是匹配覆盖图。

证明。 假设存在一个边最小 GHZ 实验图 G，它不是匹配覆盖图。考虑它的匹配覆盖子图 H。根据定义，G 的每个完美匹配都包含于 H中。因此，对于任意顶点着色 vc，在 G 和 H 中诱导出该着色的完美匹配集合相同，因此，vc 在 H 和 G 中的顶点着色权重相等；所以，H 也是一个 GHZ 实验图，并且$\mu(G) = \mu(H)$。由于 G 不是匹配覆盖图，我们知道 H 是G 的真子图，因此 $|E(H)| < |E(G)|$。这与 G的边极小性矛盾。

□

尽管具有匹配覆盖性是 GHZ 实验图的必要条件，但并非充分条件。例如，图 1 是一个具有匹配覆盖性的 GHZ 实验图，但它不是边最小的，正如我们前面所讨论的那样。

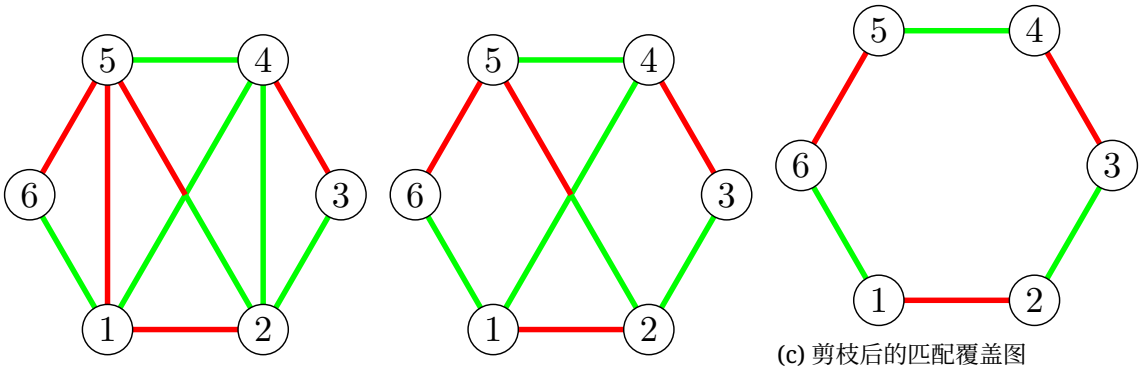
观察 10。 在边最小 *GHZ* 实验图 G 中，对于任意顶点 $v \in V(G)$ 和颜色 $i \in [\mu(G)]$，，至少存在一条单色边，例如 e，它与 v 相 *incident*，使得 $c(e) = i$。

证明。 根据定义，颜色为 i 的单色顶点着色的权重非零。因此，必定存在一个单色完美匹配 P，其中所有边的颜色均为 i。根据完美匹配的定义，对于每个顶点 v，存在一条边$e \in P$与 v incident。该边 e 的颜色必须为 i，因为 $e \in P$。

□

定义11。 如果一条边 $e = \{u, v\}$ 是单色的，并且 $deg(u, c(e)) = deg(v, c(e)) = 1$，则称其为颜色孤立的。

换言之，如果 $e = \{u, v\}$ 是颜色孤立的，则它必须是单色的，即颜色为i，并且除了 e_u 之外，不可能有任何 u-半边以及任何其他 v-半边



(a) 图 G (b) G的匹配覆盖图 (c) 剪枝后的匹配覆盖图 of G

图 4：边 {1, 5} 和 {2, 4} 不属于任何完美匹配，因此被剪枝。由此得到图 4b 中 G 的匹配覆盖图。注意，$deg(6, 1) = 1$。因此，我们剪去边 {1, 4}。类似地，由于 $deg(6, 0) = 1$，边 {2, 5} 也被剪枝。这便得到图 4c 中的剪枝图（G'）。

比 e_v 其颜色为 i。例如，在图 1 中，边 {1,6}、{1,2} 和 {2,3}是颜色孤立的。

引理 12. 设 G 是一个边最小 *GHZ* 实验图。对于关联于 $u \in V(G)$ 且满足 $c(e_u) = i$ 的边 $e = \{u, v\} \in E(G)$，如果 $deg(u, i) = 1$，那么 e 是单色的，且 e 是颜色孤立边。换言之，$deg(v, i) = 1$。

证明。令 $e = \{u, v\}$。由于 $deg(u, i) = 1$，与 u 相接且颜色为 i 的半边恰有一条，即 e 的 u- 半边。但根据观察 10，我们知道至少有一条颜色为 i 的单色边与 u 相接。这意味着 $e = \{u, v\}$ 必须是一条单色边，且 $c(e) = i$。由此可得 $deg(v, i) \geq 1$。为导出矛盾，假设 e 不是颜色孤立边。因此，$deg(v, i) \geq 2$。

现在我们通过剪除 $e' \neq e$每条边来构造 G'，它是 G的一个子图。这些边与 v 相接，且满足 $c(e'_v) = c(e) = i$，也就是说，剪除除 e 以外的边，并将它们的 v-半边着为 i。我们在图4中演示剪除过程。

请注意，边权重在剪除过程中不起任何作用。被剪除的边可能属于多个完美匹配，而且这些边也可能对多个顶点着色的权重有贡献。移除这些边后，所得图可能会成为一个实验图，但并非 GHZ 实验图。我们将证明情况并非如此，也就是说，我们将证明 G' 确实是一个 GHZ 实验图！我们将通过证明任意可行顶点着色 vc 在 G' 中的权重等于 vc 在 G 中的权重来证明这一点，见观察13。

观察 13。 G'（通过修剪形成的 G 子图）是一个 *GHZ* 实验图。

证明。设 vc 是 G' 的一个可行顶点着色。首先注意，在 G' 中可导出 vc 的每个完美匹配 P，也都存在于 G 中，因为 G' 是 G 的一个子图。因此，P 也会计入 G 中 vc 的权重。若完美匹配 P' 存在于 G 中但不存在于 G' 中，我们称其为独占的。我们唯一担心的是可能存在一个独占的完美匹配 P'，它会导出 vc。我们将证明这是不可能的。具体来说，我们将证明，G 的任意独占完美匹配 P' 总会导出一种在 G' 中不可行的顶点着色。形式化地，考虑一个独占完美匹配 P。设 vc 是 P 在 G 中导出的顶点着色。现在我们断言，vc 在 G' 中不可行。

我们首先证明 $vc(v) = c(e) = i$ 和 $vc(u) \neq c(e) = i$。由于 P 不包含在 G' 中，必定存在一条边 $e' \in P$，使得 $e' \in G$ 和 $e' \notin G'$。根据构造，这样的 $e' \neq e$ 必须与 v 关联，且有 $c(e'_v) = i$。因此， P 在 v 上导出颜色 $c(e) = i$，从而 $vc(v) = c(e) = i$。由于 e' 已与 v 关联，因此必有 $e \notin P$；这是因为 P 是一个完美匹配，且根据完美匹配的定义，与同一顶点关联的两条不同边不能同时属于 P。但是， P 也应有一条边，例如 $e'' \neq e$，同样与 u 关联。由于 $deg(u, i) = 1$ 且 $e \neq e''$， e'' 的 u-半边的颜色必须与 i 不同。因此， $vc(u) = c(e''_u) \neq c(e)$。

现在我们断言，在 G' 中，任何带有 $vc(u) \neq c(e)$ 和 $vc(v) = c(e)$ 的顶点着色 vc 都不可行。为导出矛盾，假设这样的 vc 可行。由此可知，必定存在一个完美匹配 P'，它诱导出顶点着色 vc。根据构造， e 是 G' 中与 v 相接且颜色为 $c(e)$ 的唯一一条边。因此， $e \in P'$。由于 e 也与 u 相接， P' 在 u 上诱导出颜色 $c(e)$。此外，由此可知 $vc(u) = c(e)$。这与假设 $vc(u) \neq c(e)$ 矛盾。因此，在 G' 中，带有 $vc(u) \neq c(e)$ 和$vc(v) = c(e)$ 的顶点着色 vc 不可行。

因此，如果顶点着色 vc 在 G' 中可行，那么 vc 在 G 和 G' 中均由同一组完美匹配诱导。由此可知， G' 中任何可行顶点着色 vc 的权重都等于 G 中 vc 的权重；因此， G' 是一个 GHZ 实验图。

□

我们已经证明，对于每个包含被剪枝边e'的完美匹配 P，由 P 诱导的顶点着色 vc 具有如下性质： $vc(v) = c(e) = i$且 $vc(u) \neq c(e) = i$。因此，任意这样的 vc 都不是单色的。因此， G' 中颜色为 i 的单色顶点着色，其权重等于 G中颜色为 i 的单色顶点着色的权重；对于所有 $i \in [\mu]$，该权重均为 1。由此可得$\mu(G) = \mu(G')$。

现在我们将完成引理 12的证明。由于 $deg(v, i) \geq 2$，至少存在一条边 $e' \neq e$，其 v-半边被染成 i。根据构造，这样的 e' 将被剪除。因此， G' 将比 G至少少一条边。但这与 G 的边极小性相矛盾，因为 G' 是一个具有 n 个顶点的 GHZ 实验图， $\mu(G) = \mu(G')$，且边数少于 G。

□

4 界定维数

4.1 证明概要

如果 $\mu(G) \leq n/2$，我们的定理显然成立，因为 $n/2 \leq n/\sqrt{2}$。因此，我们可以专注于 $\mu(G) > n/2$ 的情形。换句话说，严格来说，我们将证明：如果 $\mu(G) > n/2$，则 $\mu(G) \leq n/\sqrt{2}$，由此显然可推出对任意 G，$\mu(G) \leq n/\sqrt{2}$ 都成立这一更强的结论。我们将分两步完成证明。

步骤 1： 我们将证明存在一种颜色 $i \in [\mu(G)]$，，使得存在一个匹配（称为特殊匹配） M，且 $|M| \geq n - \frac{n^2}{2\mu}$，满足 M的所有边均为颜色孤立边，且颜色为 i。详情将在第 4.2 节介绍。**步骤 2：** 在第 4.3 节中，我们将证明，如果 M是一个特殊匹配，那么 $\mu \leq n - |M|$。

结合步骤 1 和步骤 2，我们可以立即推断出

$$\mu \leq n - |M| \leq n - (n - \frac{n^2}{2\mu}) \leq \frac{n^2}{2\mu}$$

因此，所需结果 $\mu \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$ 即可得出。

现在我们继续证明步骤 1 和步骤 2 中的断言。

4.2 大型特殊匹配的存在性

令 $k(v)$ 表示使 v 关于该颜色的颜色度恰好为 1 的颜色数量。用符号表示为 $k(v) = |\{i \in [\mu] : deg(v, i) = 1\}|$。

观察 14。对于所有 $v \in V(G)$，$k(v) \geq 2\mu - n + 1$。

证明。假设观察 14 不成立。那么存在一个 $v \in V(G)$，使得 $k(v) < 2\mu - n + 1$。由于 $k(v)$ 是整数，$k(v) \leq 2\mu - n$。现在可以假设，对于某个 $i \in [0, 2\mu - n]$，$k(v) = 2\mu - n - i$。注意，当 $i = 0$ 时，$k(v)$ 为 $2\mu - n$；当 $i = 2\mu - n$ 时，$k(v)$ 为 0。$2\mu - n - i$ 种颜色在 v 上的颜色度恰好为 1；因此，其余 $n - \mu + i$ 种颜色在 v 上的颜色度至少为 2。对第一类颜色各计一个半边，对第二类颜色各至少计两个半边，可得 $2\mu - n - i + 2(n - \mu + i) = n + i \geq n$ 个邻点与 v 相邻（因为 $i \geq 0$）。但由于 G 是简单图，v 至多有 $n - 1$ 个邻点。矛盾。由于我们是从假设 $k(v) < 2\mu - n + 1$ 出发的，反向命题应当成立。□

观察 15。G 至少有 $(2\mu - n + 1)\frac{n}{2}$ 条颜色孤立边。

证明。根据引理 12，我们知道，对于每种颜色 i 满足 $deg(u, i) = 1$，都存在一条颜色为 i 且与 u 相接的颜色孤立边。结合观察 14，可知每个顶点至少有 $2\mu - n + 1$ 条与之相接的颜色孤立边。由于共有 n 个顶点，且每条颜色孤立边恰好与两个顶点相接，因此 $(2\mu - n + 1)\frac{n}{2}$ 中至少有 G 条颜色孤立边。□

定理 16。对于某个 $i \in [\mu]$，至少存在 $(2\mu - n)_{2\mu}^{n}$ i 条颜色为该颜色的孤立边。

证明。根据观察 15，我们知道至少有 $(2\mu - n + 1)\frac{n}{2}$ 条颜色孤立边。由于共有 μ 种颜色，通过简单的平均论证可知，存在某种颜色 $i \in [\mu]$，使得至少有 $(2\mu - n)_{2\mu}^{n}$ i 条颜色为该颜色的孤立边。□

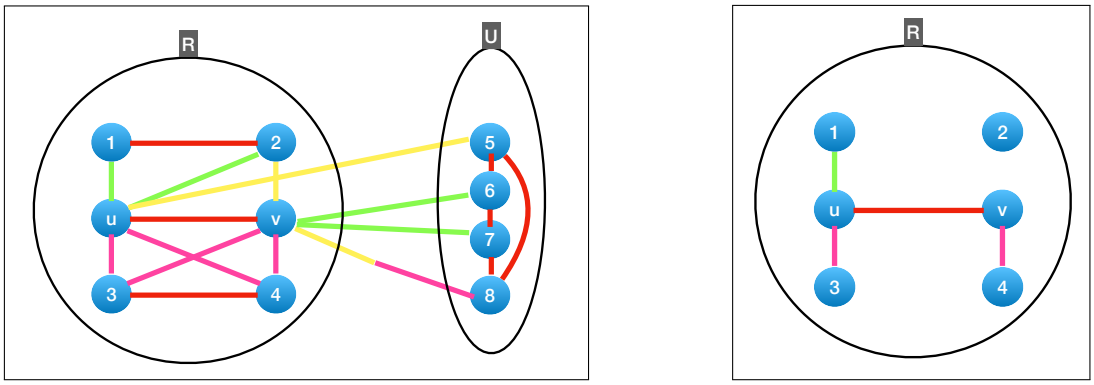
4.3 检测稀疏子图

不失一般性，在本节余下部分中，我们假设定理 16中所展示的大匹配具有颜色 1 。令 R 表示相对于颜色 1 的颜色度为一的顶点集合。令 U 表示相对于颜色 1 的颜色度至少为二的顶点集合。显然，$R \cup U = V(G)$。

观察 17. $|R| \geq (2\mu - n)_{\mu}^{n}$ 以及 $|U| \leq \frac{n^2}{\mu} - n$。

证明。由引理12可知，每个顶点 $v \in R$ 恰好有一条与其关联的1-着色孤立边，且每条1-着色孤立边都与 R中的两个顶点关联。因此，恰有 $\frac{|R|}{2}$ 1条着色孤立边在诱导子图 $G[R]$ 中构成完美匹配。结合定理16，这意味着 $|R| \geq (2\mu - n)_{\mu}^{n}$。由于$|R| + |U| = n$，我们推知 $|U| \leq \frac{n^2}{\mu} - n$。

□



(a) 有色图 H，其中红色是颜色 1　　(b) 代表稀疏图 $\chi(H)$

图 5：构造代表稀疏图：$E(\chi_u) = \{\{u,1\},\{u,3\},\{u,v\}\}$ 以及 $E(\chi_v) = \{\{v,4\},\{u,v\}\}$

注意，由于 $n \geq 6$，我们有 $|R| \geq (2\mu - n) \quad n = (2 - \frac{n}{\mu})n \geq (2-\sqrt{2})n \geq 3.5$。由于$|R|$ 必须是整数，$|R| \geq 4$。因此，至少存在两条1-着色孤立边。

现在我们选取任意一条 1-颜色的孤立边 $\{u,v\}$。对于本节余下部分，我们基于与顶点 u,v 关联的边进行分析。现在，我们利用与 u,v 关联的部分边，在 R 个顶点上构造一个特殊子图（它是诱导子图 $G[R]$ 的一个子图），称为代表稀疏图 χ。

我们首先按以下方式在 R上构造图 χ_u：对于每种颜色 $i \in [\mu]$，如果不存在顶点 $w \in U$ 使得边$\{u,w\}$ 的 u-半边具有颜色 i（即，$c(\{u,w\}\ u) = i$），则向 $E(\chi_u)$ 添加一条颜色为 i 的任意单色边（其存在性由观察 10 保证）。注意，这也包含边 $\{u,v\}$。

类似地，我们按以下方式在 χ_v 上构造图 R：对于每种颜色$i \in [\mu]$，若不存在顶点 $w \in U$ 使得边 v的 $\{v,w\}$ 半边的颜色为 i（即 $c(\{v,w\}\ v) = i$），则向 i（其存在性由观察 10 保证）中添加一条任意的颜色为 10 $E(\chi_v)$的单色边。

我们定义图 χ 在 R 上的边集为 $E(\chi) = E(\chi_u) \cup E(\chi_v)$。图 5 展示了一个示例图及其代表稀疏图。

引理 18. $2\mu \leq 2|U| + |E(\chi)| + 1$

证明。对于任意颜色 $i \in [\mu]$，要么存在顶点 $w \in U$ 使得 $c(e_u) = i$，其中$e = \{u,w\}$，要么在 χ_u 中存在一条颜色为 i 的单色边。因此，

$$\mu \leq |U| + |E(\chi_u)|$$

同样，

$$\mu \leq |U| + |E(\chi_v)|$$

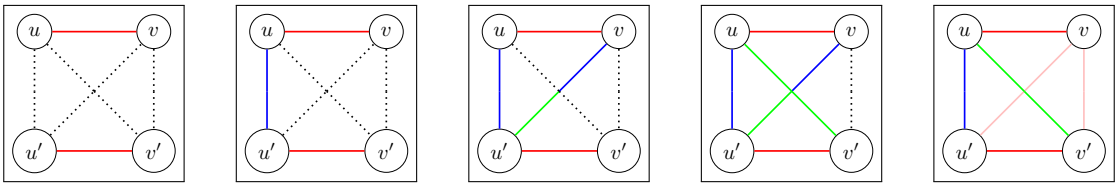
由上述两个方程可得

$$2\mu \leq 2|U| + |E(\chi_u)| + |E(\chi_v)|$$

容易看出，$E(\chi_u) \cap E(\chi_v) = \{\{u,\ v\}\}$，因此 $|E(\chi)| = |E(\chi_u)| + |E(\chi_v)| - 1$。由此可得。

$$2\mu \leq 2|U| + |E(\chi_u)| + |E(\chi_v)| = 2|U| + |E(\chi)| + 1$$

□



(a) 可能的 (b) 可能的 (c) 可能的 (d) 不可能 (e) 不可能

图6：引理的示例 19。点线表示边不存在

由于 χ_u 中的每条边都与 u 关联，并且终止于 $R\backslash\{u\}$，我们可以推断出 $|E(\chi_u)| \leq |R|-1$。同样，由于 χ_v 中的每条边都与 v 关联，并且终止于 $R\backslash\{v\}$，我们可以推断出 $|E(\chi_v)| \leq |R|-1$。由于 $E(\chi_u) \cap E(\chi_v) = \{\{u,v\}\}$，因此可得 $|E(\chi)| \leq 2|R|-3$。但是，通过使用下面的结构性观察，可以进一步加强 $|E(\chi)|$ 的这个上界。非正式地说，我们证明了类似图6a至6c的构型是可能的，而类似图6d和6e的构型是不可能的。

引理 19。 如果 $\{u',v'\}$ 是 $G[R]$ 中一个不同于 $\{u,v\}$ 的 1-着色孤立边，则

$$|\{\{u,u'\},\{u,v'\},\{v,u'\},\{v,v'\}\} \bigcap E(\chi)| \leq 2$$

证明。假设 $|\{\{u,u'\},\{u,v'\},\{v,u'\},\{v,v'\}\} \bigcap \chi| \geq 3$。不失一般性，设边 $\{u,u'\}$、$\{u,v'\}$、$\{v,v'\}$ 存在于 $E(\chi)$ 中（因为全部 4 条边的位置具有对称性）。回顾构造可知，$E(\chi)$ 中的所有边都是单色的。因此，设边 $\{u,u'\}$、$\{u,v'\}$、$\{v,v'\}$ 的颜色分别为 i、j、k。由于 $E(\chi_u)$ 和 $E(\chi_v)$ 至多包含任意一种颜色的一条边，我们知道 $i \neq j$ 以及 i、j、k 不等于 1。注意，k 可能等于 i 或 j。

考虑顶点着色 vc，其中 u,u' 取颜色 i，v,v' 取颜色 k，而 $V(G)\setminus\{u,u',v,v'\}$ 中的顶点均着色为 1。注意，$V(G)\setminus\{u,u',v,v'\}$ 非空，因为 $|V(G)|>4$。令 vc' 为这样一种顶点着色：$V(G)$中的每个顶点都取颜色 1。

观察 20。$w(vc)\ w(vc') = {}^{w}(\{u,u'\})w(\{v,v'\})\ w(\{u,v\})w(\{u',v'\})$

证明。令 M 为所有 1-着色孤立边的集合。由于 R 中的每个顶点恰有一条与其关联的 1-着色边（且没有与其关联的 1-着色半边），每个诱导出 vc' 的完美匹配 P，都必须包含 M中的所有边。令 W表示 $G[U]$上颜色为 1 的单色顶点着色的权重。由于在每个完美匹配 P' 中，U 中的顶点都与自身匹配（因为不存在连接 U和 R的 1-着色边），容易看出

$$w(vc') = W \times \prod_{e\in M} w(e)$$

由于 $R\setminus\{u,v,u',v'\}$ 中的每个顶点都恰有一条与其关联的 1-着色边，因此每个诱导出 vc 的完美匹配 P 都必须包含 $M\setminus\{\{u,v\},\{u',v'\}\}$ 中的所有边。根据代表稀疏图的定义，顶点 u 只能通过满足 $w \in R$ 的边 $\{u,w\}$ 获得颜色 i。但顶点 $R\setminus\{u,v,u',v'\}$ 已经匹配，且 $c(\{u,v\}u) = c(\{u,v\}) = 1 \neq i$，以及 $c(\{u,v'\}u) = c(\{u,v'\}) = j \neq i$。因此，每个诱导出 vc 的完美匹配 P 都必须包含边 $\{u,u'\}$。同样，根据代表稀疏图的定义，顶点 v 只能通过满足 $w \in R$ 的边 $\{v,w\}$ 获得颜色k。但 $R\setminus\{v,v'\}$ 中的所有顶点都已经匹配。因此，每个完美匹配 P 都必须包含边 $\{v,v'\}$。

U 中剩余的顶点在每个诱导出 vc 的完美匹配 P中都应彼此匹配。现在很容易看出，顶点着色 vc 的权重为

$$w(vc) = W \times w(\{u, u'\}) \times w(\{v, v'\}) \times \prod_{e \in M \setminus \{\{u,v\},\{u',v'\}\}} w(e)$$

$$= \frac{w(\{u, u'\})w(\{v, v'\})}{w(\{u, v\})w(\{u', v'\})} \times W \times \prod_{e \in M} w(e)$$

由此可得

$$\frac{w(vc)}{w(vc')} = \frac{w(\{u, u'\})w(\{v, v'\})}{w(\{u, v\})w(\{u', v'\})}$$

□

由于 vc' 是单色顶点着色， w（vc'）$= 1$。回想一下，根据定义，所有边权重均非零。因此， w（vc）非零。但这与定义矛盾，因为 vc 是非单色顶点着色，其权重应为 0。

□

引理 21. $|E(\chi)| \leq |R| - 1$

证明。 由引理 19，我们知道 χ 在 {u、 v}与任何其他 1-着色的孤立边之间至多包含两条边。因此， χ 中的边数为

$$E(\chi) \leq 2(\frac{|R| - 2}{2}) + 1 = |R| - 1$$

□

定理 22. $\mu \leq \sqrt[n]{2}$ —=

证明。 由引理 18，我们有

$$2\mu \leq 2|U| + |E(\chi)| + 1$$

利用引理21，我们得到

$$2\mu \leq 2|U| + |R|$$

根据定义， $|U| + |R| = n$

$$2\mu \leq 2n - |R|$$

由定理16 可知 $|R|$ 至少为 $(2\mu - n)$ μ n，因此

$$2\mu \leq 2n - \frac{(2\mu - n)n}{\mu} = \frac{n^2}{\mu}$$

因此， $\mu \leq \sqrt[n]{2}$ —= □

5 结论

能否在量子光子学实验中制备更高维的 GHZ态，是一个重要的开放性问题。尽管人们已开展了多项研究，但进展甚微。利用这一问题的图论表述，我们给出了关于能够制备的GHZ态维数的首个非平凡上界。特别地，我们证明，使用一大类实验无法制备具有大维数（即具有$d > \sqrt[n]{2}$）的 n 粒子 d维态。

我们的证明采用了一种框架，即寻找最小反例中相互矛盾的性质。这一框架相当通用（在图论中也很常见），并且可以推广到任意量子态。然而，难点在于理解对于其他量子态应当寻找哪些相互矛盾的性质。有些性质相当通用，例如最小反例是一个匹配覆盖图，这类性质也适用于对应任意量子态的实验图！此外，还可以设计其他剪枝策略，以适应所关注的量子态，进而寻找相互矛盾的性质。颜色孤立边的概念可能有助于找到此类相互矛盾的性质。

例如，考虑一个 W态 $|W_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}\left(|0\rangle^{\otimes(n-1)}|1\rangle\right)$ 其中 n 是粒子数^，而 S 是对所有不同的粒子排列求和的对称算符 n 。利用我们的剪枝思路，可以得出最小实验图的一些有用性质，该图能够生成 $|W_n\rangle$。例如，每个顶点 v都恰好有一条与其关联、颜色为 1 的半边，其余半边的颜色必须为0。这与 [3]中描述的 W态构造一致。我们的方法无法直接推广到后选择态以外的系统。不过，已知基于图的表示能够用于许多后选择态以外的系统（例如 NOON态和预示态） [11]。将我们的方法推广到此类态，是一个重要的开放问题，我们将留待今后研究。

参考文献

[1]Christoph Schaeff、Robert Polster、Marcus Huber、Sven Ramelow 和 Anton Zeilinger。利用集成光学实验研究高维纠缠量子系统。*Optica*，2(6):523，2015年。DOI: 10.1364/optica.2.000523。[2]Ravitej Uppu、Leonardo Midolo、Xiaoyan Zhou、Jacques Carolan 和 Peter Lodahl。基于量子点的确定性光子—发射体接口，助力可扩展光子量子技术。《自然·纳米技术》，16，2021年。DOI: 10.1038/s41565-021-00965-6。[3] Xuemei Gu、Lijun Chen、Anton Zeilinger 和 Mario Krenn。量子实验与图 III：高维纠缠与多粒子纠缠。《物理评论*A*》，99，2019年。DOI: 10.1103/PhysRevA.99.032338。[4] Mario Krenn、Xuemei Gu 和 Anton Zeilinger。量子实验与图：作为完美匹配相干叠加的多方态。*Phys. Rev. Lett.*，119:240403，2017年。DOI:10.1103/PhysRevLett.119.240403。[5] Xuemei Gu、Manuel Erhard、Anton Zeilinger 和 Mario Krenn。量子实验与图 II：量子干涉、计算与态生成。美国国家科学院院刊，116(10):4147–4155，2019年。ISSN 0027- 8424。DOI:10.1073/pnas.1815884116。

[6] Kaiyi Qian、Kai Wang、Leizhen Chen、Zhaohua Hou、Mario Krenn、Shining Zhu 和 Xiao song Ma。由未探测光子控制的多光子非定域量子干涉。《自然·通讯》，14(1)，2023年。DOI: 10.1038/s41467-023- 37228-y。[7] Lan-Tian Feng、Ming Zhang、Di Liu、Yu-Jie Cheng、Guo-Ping Guo、Dao-Xin Dai、Guang-Can Guo、Mario Krenn 和 Xi-Feng Ren。芯片上多光子态不同起源之间的量子干涉。Optica，10(1):105–109，2023年。DOI: 10.1364/OPTICA.474750。[8] Jueming Bao、Zhaorong Fu、Tanumoy Pramanik、Jun Mao、Yulin Chi、Yingkang Cao、Chonghao Zhai、Yifei Mao、Tianxiang Dai、Xiaojiong Chen、Xinyu Jia、Leshi Zhao、Yun Zheng、Bo Tang、Zhihua Li、Jun Luo、Wenwu Wang、Yan Yang、Yingying Peng 和 Jianwei Wang。超大规模集成量子图光子学。《自然·光子学》，第1–9页，2023年。DOI: 10.1038/s41566-023-01187-z。[9]Mario Krenn、Xuemei Gu 和 Daniel Soltész。受量子物理启发的完美匹配结构问题。arXiv，2019 年。DOI: 10.48550/arXiv.1902.06023。[10] Mario Krenn、Jakob S. Kottmann、Nora Tischler 和 Alán Aspuru-Guzik。通过高效自动化设计量子光学实验实现概念理解。Phys. Rev. X，11:031044，2021年。DOI: 10.1103/PhysRevX.11.031044。[11] Carlos Ruiz-Gonzalez、Sören Arlt、Jan Petermann、Sharareh Sayyad、Tareq Jaouni、Ebrahim Karimi、Nora Tischler、Xuemei Gu 和 Mario Krenn。利用 PyTheus 数字化发现100种不同的量子实验。Quantum，7:1204，2023年。DOI: 10.22331/Q-2023-12-12-1204。[12] Alba Cervera-Lierta、Mario Krenn 和 Alán Aspuru-Guzik。利用逻辑人工智能设计量子光学实验。Quantum，6:836，2022年。ISSN 2521- 327X。DOI: 10.22331/q-2022-10-13-836。[13] J. S. 贝尔。论爱因斯坦-波多尔斯基-罗森悖论。Physics Physique Fizika，1: 195–200，1964年。DOI: 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195。[14] Daniel M. Greenberger、Michael A. Horne 和 Anton Zeilinger。超越贝尔定理，第69–72页。荷兰施普林格，Dordrecht，1989年。ISBN 978-94-017- 0849-4。DOI: 10.1007/978-94-017-0849-4_10.[15]Dik Bouwmeester、Jian-Wei Pan、Matthew Daniell、Harald Weinfurter 和 Anton Zeilinger。观测到三光子 Greenberger-Horne-Zeilinger 纠缠。Phys. Rev. Lett.，82:1345–1349，1999年。DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.1345。[16]Jian-Wei Pan、Dik Bouwmeester、Matthew Daniell、Harald Weinfurter 和 Anton Zeilinger。对三光子 Greenberger–Horne–Zeilinger 纠缠中量子非定域性的实验检验。《自然》，403(6769):515–519，2000年。DOI: 10.1038/35000514。[17] Junghee Ryu、Changhyoup Lee、Marek Żukowski 和 Jinhyoung Lee。针对 n 量子比特的 Greenberger-Horne-Zeilinger 定理。Phys. Rev. A，88:042101，2013年。DOI: 10.1103/PhysRevA.88.042101。[18] Jay Lawrence。任意维数的三个或更多粒子的旋转协变性与 Greenberger-Horne-Zeilinger 定理。Phys. Rev. A，89:012105，2014年。DOI: 10.1103/PhysRevA.89.012105。[19] Jay Lawrence。多量子三能级系统中完美相关性的 Mermin 不等式。Phys. Rev. A，95:042123，2017年。DOI: 10.1103/PhysRevA.95.042123。[20] Xuemei Gu 和 Mario Krenn。通过频率梳和图论紧凑生成 Greenberger-Horne-Zeilinger 态。《物理学前沿》，15(6)，2020年。DOI: 10.1007/s11467-020-1028-7。

[21] Han-Sen Zhong、Yuan Li、Wei Li、Li-Chao Peng、Zu-En Su、Yi Hu、Yu-Ming He、Xing Ding、Weijun Zhang、Hao Li、Lu Zhang、Zhen Wang、Lixing You、Xi-Lin Wang、Xiao Jiang、Li Li、Yu-Ao Chen、Nai-Le Liu、Chao-Yang Lu 和 Jian-Wei Pan。通过参量下转换产生的最优纠缠光子对实现 12 光子纠缠和可扩展的散射式玻色子采样。《物理评论快报》，121:250505，2018年。DOI：10.1103/PhysRevLett.121.250505。[22] Matej Pivoluska、Marcus Huber 和 Mehul Malik。分层量子密钥分发。《物理评论 A》，97:032312，2018年。DOI：10.1103/PhysRevA.97.032312。[23] Xi-Lin Wang、Luo-Kan Chen、W. Li、H.-L. Huang、C. Liu、C. Chen、Y.-H. Luo、Z.-E. Su、D. Wu、Z.-D. Li、H. Lu、Y. Hu、X. Jiang、C.-Z. Peng、L. Li、N.-L. Liu、Yu-Ao Chen、Chao-Yang Lu 和 Jian-Wei Pan。实验实现十光子纠缠。《物理评论快报》，117:210502，2016年。DOI：10.1103/PhysRevLett.117.210502。[24] Kaiyi Qian、Kai Wang、Leizhen Chen、Zhaohua Hou、Mario Krenn、Shining Zhu 和 Xiao-song Ma。由未探测光子控制的多光子非局域量子干涉。《自然通讯》，14(1):1480，2023年。DOI：10.1038/s41467- 023-37228-y。[25] Abhinav Anand、Lasse Kristensen、Felix Frohnert、Sukin Sim 和 Alán Aspuru-Guzik。参数化量子电路中的信息流。《量子科学与技术》，9，2022年。DOI：10.1088/2058-9565/ad3eab。[26] Dustin Mixon。一个来自量子物理学、带有奖励的图着色问题！ bit.ly/3Xk5KFm，2021年。访问日期：09-02-2023。[27] Mario Krenn。图的继承顶点着色。 bit.ly/40GJXL3，2019年。访问日期：09-02-2023。[28] Kevin。 http://tinyurl.com/4e5zjvpx，2023年。访问日期：14-02-2024。[29] Ilya Bogdanov。仅含互不相交完美匹配的图问题的解答。 bit.ly/3x8hUGQ，2017年。访问日期：09-02-2023。[30] L. Sunil Chandran 和 Rishikesh Gajjala。完美匹配与量子物理：Krenn 猜想的研究进展。arXiv，2022年。DOI：10.48550/arXiv.2202.05562。[31] Moshe Y. Vardi 和 Zhiwei Zhang。顶点颜色约束下、受量子启发的完美匹配。arXiv，abs/2209.13063，2022年。DOI：10.48550/arXiv.2209.13063。[32]Moshe Y. Vardi 和 Zhiwei Zhang。基于 Tutte 定理的混合布尔约束求解受量子启发的完美匹配问题。arXiv，2023年。DOI：10.48550/arXiv.2301.09833。[33] Alex Ravsky。边着色完全图中的一种特殊完美匹配。个人交流，2022年。[34]Alexandr V. Kostochka 和 Matthew P. Yancey。边着色图中的大型彩虹匹配。《组合概率与计算》，21(1-2):255–263，2012年。DOI：10.1017/S0963548311000605。[35] Aaron Neugebauer。颜色跨度图中的彩虹匹配。本科学士论文，维尔茨堡大学，2022年。网址： bit.ly/40CJCsV。访问日期：09-02-2023。