arXiv:2304.06416v1 [math.AC] 13 Apr 2023

二项式边理想的 v-数

SIDDHI BALU AMBHORE、KAMALESH SAHA 和 INDRANATH SENGUPTA

摘要。v-数这一不变量最近才在 Reed-Muller 型码的研究中被引入。Jaramillo 和 Villarreal（J Combin. Theory Ser. A 177:105310, 2021）开创了边理想 v-数的研究。受他们工作的启发，本文开创了二项式边理想 v-数的研究。我们讨论二项式边理想 v-数的一些性质和界。我们明确求出了与割集 $\emptyset$ 对应的伴随素理想处二项式边理想的 v-数。我们证明，Knutson 二项式边理想的 v-数小于或等于其初始理想的 v-数。此外，我们对所有 v-数为 1 的二项式边理想进行了分类。我们还尝试将 v-数与二项式边理想的 Castelnuvo-Mumford 正则性联系起来，并就此提出一个猜想。

1. 引言

设 $R = K[x_1 \ldots, x_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$ 表示域 K 上带标准分次的 n 元多项式环。对于 R 的分次理想 I， I 的关联素理想集合记作 Ass(I) 或 Ass(R/I)，它由 R 中形如 $(I : f)$ 的素理想组成，其中 $f \in R_d$。2020 年，Cooper 等人在研究 Reed-Muller 型码 [7] 时，为 R 的分次理想引入了一个称为 v-数的新不变量。

定义 1.1（[7, 定义 4.1]）。设 I 是 R 的真分次理想。I 的 v-数记作 v(I)，定义为

$$\mathrm{v}(I) := \min\{d \geq 0 \mid \exists\, f \in R_d \text{ and } \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(I) \text{ with } (I : f) = \mathfrak{p}\}.$$

对于每个 $\mathfrak{p} \in$ Ass(I)，我们可以局部地定义 v-数如下：

$$\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(I) := \min\{d \geq 0 \mid \exists\, f \in R_d \text{ with } (I : f) = \mathfrak{p}\}.$$

于是，v(I) $= \min\{\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(I) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(I)\}$。

I 的这个不变量有助于我们理解射影 Reed-Muller 型码的最小距离函数 δ_I 的渐近行为（见 [7]）。迄今为止，关于 v-数的研究还很少， [3], [11], [16], [32] 是这一研究方向上仅有的论文。Jaramillo 和 Villarreal 撰写的第一篇专门研究 v-数的论文 [16], 探讨了边理想的 v-数。受他们在 [16], 中的工作的启发，我们开始研究二项式边理想的 v-数。

2020 年数学主题分类。主要分类：13F20、13F65、05E40、05C25。关键词与短语：v-数、二项式边理想、Castelnuovo-Mumford 正则性、初始理想、完备化集。第三作者为通讯作者。

定义 1.2。设 G 是顶点集 $V(G) = [n] = \{1, \ldots, n\}$ 上的一个简单图，其边集为 $E(G)$。考虑域 K 上的多项式环 $S = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$。那么， G 的二项式边理想记为 J_G，是 S 中定义为

$$J_G = \big\langle f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i \mid \{i, j\} \in E(G) \text{ with } i < j \big\rangle.$$

二项式边理想的研究于 2010 年由文章 [13] 和 [29]独立发起。自那以后，这已成为组合交换代数中的一个热门研究课题。二项式边理想具有自然的行列式结构，因为它可以被看作是由一组 2×2阶子式生成的理想，这些子式来自一个由不定元构成的 $2 \times n$ 矩阵 X。研究这些理想的主要动机之一是它们与代数统计学的联系，尤其是它们在条件独立性陈述研究中的出现，见 [13, 第 4] 节。此外， [5] 中证明了二项式边理想属于 Cartwright-Sturmfels 理想这一类；该类由 [6] 受 Cartwright和Sturmfels [2] 的工作启发而引入，并且具有许多良好性质。

通常，人们通过研究底层图的组合学来考察二项式边理想的代数性质和不变量。迄今为止，已有大量研究从多个方面探讨二项式边理想（参见综述论文 [31] 及其中的参考文献）。本文通过研究二项式边理想的 v-数，为其研究开辟了一个新方向。我们讨论二项式边理想及其初始理想的 v-数的一些性质。已有许多论文（[9], [19], [18], [23], [21]）研究二项式边理想的（Castelnuovo-Mumford）正则性的上界，但关于二项式边理想正则性的一般下界，仅由 Matsuda 和 Murai [27]给出。我们尝试利用 v-数建立二项式边理想正则性的新下界，并提出一个关于 v-数与二项式边理想正则性之间关系的猜想。本文结构如下：第 2 节讨论必要的预备知识。第 3 节研究二项式边理想的 v-数的一些性质。对于图 G的顶点 v，我们用 G_v表示如下的图：

$$V(G_v) = V(G) \text{ and } E(G_v) = E(G) \cup \{\{i, j\} \mid i, j \in \mathcal{N}_G(v), i \neq j\}.$$

对于图 G 的顶点 v，我们有以下正合列（参见定理 1.1] 的 [8,证明）：

$$0 \longrightarrow S/J_G \longrightarrow S/J_{G_v} \oplus S/\big\langle J_{G\setminus\{v\}}, x_v, y_v \big\rangle \longrightarrow S/\big\langle J_{G_v\setminus\{v\}}, x_v, y_v \big\rangle \longrightarrow 0.$$

图 $G \setminus \{v\}$、G_v、$G_v \setminus \{v\}$ 在二项式边理想的研究中发挥着重要作用。这些图以及上述正合列有助于通过归纳法研究 J_G 的不变量（如正则性、深度等）和性质（如无混合、Cohen-Macaulay 等）。在命题 3.3 中，我们展示了 v(J_G) 与 v(J_{G_v}) 和 v($J_{G\setminus\{v\}}$) 的关系。接着，我们定义 G 的完备化集（定义 3.4），并定义 G 的最小和最大完备化数（分别记为 min-comp(G) 和 max-comp(G)），以求得 v(J_G) 的一些界。我们明确求出了 v$_\emptyset$(G), 即 J_G 在 $P_\emptyset(G)$ 处的 v-数，并在下述定理中得到了 v(J_G) 的组合上界：

定理 3.6. 设 G 是一个简单图。那么 v$_\emptyset$(J_G) = 最小分支数(G)。特别地，我们有 v(J_G) $\leq$ 最小分支数 (G)。

作为定理 3.6 的推论，我们在推论 3.9 中得到 $\gamma(G) \leq \mathrm{v}_\emptyset(G)$，其中 G 是一个连通的非完全图，$\gamma(G)$ 表示 G 的支配数。在定理 3.11 中，我们证明了某些根理想的 v-数具有可加性；作为定理 3.11 的应用，我们得到二项式边理想的 v-数具有如下可加性：

推论 3.12. 设 $G = G_1 \sqcup G_2$ 是一个图。那么 $\mathrm{v}(J_G) = \mathrm{v}(J_{G_1}) + \mathrm{v}(J_{G_2})$。

接下来，我们尝试建立二项式边理想的 v-数与其初始理想之间的关系。我们在定理 3.15 中证明，在某些情况下，$\mathrm{v}(J_G) \leq \mathrm{v}(\mathrm{in}_<(J_G))$；作为应用，我们在推论 3.17 中得到，对于 Knutson 二项式边理想，$\mathrm{v}(J_G) \leq \mathrm{v}(\mathrm{in}_<(J_G))$。在例 3.18 中，我们证明二项式边理想的初始理想的 v-数取决于顶点标号。最后，我们通过如下分类所有 v-数为 1 的二项式边理想，结束本节：

定理 3.20. 设 G 是一个简单连通图。那么，$\mathrm{v}(J_G) = 1$ 当且仅当 $G = \mathrm{cone}(v, H)$，其中某个非完全图为 H。

本文的第 4节致力于研究二项式边理想的正则性与 v-数之间的关系。在 [4, 推论2.7], Conca 和Varbaro证明，对于多项式环 R 中的一个分次理想 I，若其关于某个项序<的初始理想$\mathrm{in}_<(I)$是平方自由的，则我们有 正则性(R/I) = 正则性$(R/\mathrm{in}_<(I))$。利用这一事实并考察初始理想，我们试图给出二项式边理想的 v-数与正则性之间的关系。本节的主要结果之一如下：

定理 4.5。设 G 是一个弦图。那么 $\text{max-comp}(G) \leq \mathrm{reg}(S/J_G)$。特别地，我们有 $\mathrm{v}(J_G) \leq \mathrm{v}_\emptyset(J_G) \leq \text{max-comp}(G) \leq \mathrm{reg}(S/J_G)$。

此外，我们在定理 4.6 中证明，对于某些类别的图（包括胡须图；见推论 4.8），$\mathrm{v}_\emptyset(J_G) \leq$ 正则性(S/J_G)。在例 4.9 中，我们证明，$\mathrm{v}_\emptyset(J_G)$ 可能比 Matsuda 和 Murai 给出的下界更适合作为正则性(S/J_G) 的下界。在例 4.10 中，我们还通过给出一个满足 $\mathrm{v}(J_G) = \mathrm{v}_\emptyset(J_G) =$ 正则性(S/J_G) 的图 G，证明这个下界是紧的。最后，我们证明，对于给定的 $n \in \mathbb{N}$，存在一个满足正则性$(S/J_G) - \mathrm{v}(J_G) = n$ 的图 G（见定理 4.11）；也就是说，J_G 的 v-数与正则性之差可以任意大。

在最后一节（第 5 节）中，我们提出了一些公开问题，为二项式边理想的 v-数研究提供未来方向。此外，根据定理4.5、定理 4.6 以及我们计算所得的一些证据，我们提出如下猜想：

猜想 5.3. 设 G 是一个简单图。则 $\mathrm{v}_\emptyset(J_G) \leq \mathrm{reg}(S/J_G)$。特别地，我们有 $\mathrm{v}(J_G) \leq \mathrm{reg}(S/J_G)$】【。

作者看到了最近发布在 arXiv 上的预印本 [17]，其中有一些结果与我们的结果相同，但研究方法不同，且彼此独立完成。

2. 预备知识

设 $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ 是域 K上的一个多项式环，带有标准分次。若理想 I 属于 R，且 I 由一组单项式生成，则称其为单项式理想；I 的唯一极小生成集记为 $G(I)$。若单项式理想 I 的 $G(I)$仅由平方自由单项式组成，则称其为平方自由的。

众所周知，平方自由单项式理想是根理想，且其相关素理想由一组变量生成。设 R上的单项式序为 $<$。对于分次理想 $I \subseteq R$，我们用 $\mathrm{in}_<(I)$ 表示 I 关于 $<$ 的初始理想。对于单项式 $m \in R$，其支撑记为 $\mathrm{supp}(m)$，定义为 $\mathrm{supp}(m) := \{x_i \mid x_i$ 整除 $m\}$。本文中，所有理想均假设为分次理想。

本文假设所有图都是简单图，并且在适用时也都是连通图。对于 $T \subseteq V(G)$，我们用 $G \setminus T$ 表示 G 在顶点集 $V(G) \setminus T$ 上的诱导子图。同样，$G[T]$ 表示 G 在顶点集 T 上的诱导子图。对于顶点 $v \in V(G)$，我们称 $\mathcal{N}_G(v) = \{u \in V(G) \mid \{u, v\} \in E(G)\}$ 为 G 中 v 的邻居集。我们记 $\mathcal{N}_G[v] := \mathcal{N}_G(v) \cup \{v\}$。在 G 中，从 u 到 v、长度为 n 的路径是一个顶点序列 $u = v_0, \ldots, v_n = v \in V(G)$，满足对每个 $1 \le i \le n$，都有 $\{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$；并且当 $i \neq j$ 时，$v_i \neq v_j$。

定义 2.1. 以 n 个顶点构成的路径图记为 P_n，它是一个顶点集可排列为 $v_1, \ldots, v_n$ 的图，使得 $E(P_n) = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \le i \le n-1\}$。$P_n$ 的长度是 P_n 中边的数量，即 $n-1$。图 G 的诱导路径是 G 的一个诱导子图，且该子图是路径图。我们用 $\ell(G)$ 表示 G 中诱导路径的最大长度。

定义 2.2. 长度为 n 的圈记为 C_n，它是一个含有 n 个顶点 $v_1, \ldots, v_n$ 的图，使得 $E(G) = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \le i \le n-1\} \cup \{\{v_1, v_n\}\}$。如果一个图不含长度为 $n \ge 4$ 的诱导圈 C_n，则称它为弦图。

定义 2.3. 如果每一对顶点之间都有一条边，则称该图为完全图。我们用 K_n 表示以 n 个顶点构成的完全图。

注2.4. 顶点 $v \in V(G)$ 被称为 G 的自由顶点，如果 $\mathcal{N}_G(v)$ 是完全图。由 [30, 命题2.1], 可知，v 是 G 的自由顶点，当且仅当对于所有 $T \in \mathscr{C}(G)$，$v \notin T$。此外，由 [8, 证明定理 1.1] 可观察到，$T \in \mathscr{C}(G_v)$ 当且仅当 $v \notin T$ 且 $T \in \mathscr{C}(G)$。

定义2.5.设 G 是一个具有 $V(G) = [n]$ 的图。路径 π： $i = i_0$、i_1、…、$i_r = j$ 从i 到 j，且 $i < j$ 在 G 中，若满足以下条件，则称为一条可容许路径:

(1) 对于 $i_k \neq i_l$， $k \neq l$; (2) 对每个 $k \in \{1, \ldots, r-1\}$，我们都有 $i_k < i$ 或者 $i_k > j$; (3) G 在顶点集 $\{i_0, \ldots, i_r\}$ 上的诱导子图不含诱导圈。

注2.6.对于一个可容许路径 π： $i = i_0$， i_1， ....., $i_r = j$，从 i 到 j 且 $i < j$ 在 G 中，我们关联单项式

$$u_\pi = \Big(\prod_{i_k > j} x_{i_k}\Big)\Big(\prod_{i_l < i} y_{i_l}\Big).$$

那么，$\mathcal{G} = \{u_\pi f_{ij} \mid \pi$ 是从 i 到 j 的一条可容许路径，且 $i < j\}$ 是关于 $<$ 的 J_G 的约化 Gr¨obner 基，据 [13, 定理 2.1]。因此，我们有

$$G(\mathrm{in}_<(J_G)) = \{u_\pi x_i y_j \mid \pi \text{ is an admissible path from } i \text{ to } j \text{ with } i < j\}.$$

二项式边理想的主分解。如果从 G 中移除顶点 $v \in V$（G）后，连通分支的数量增加，则称该顶点为 G的割点。设G 是一个顶点集为 V（G）$= [n]$的图。如果集合 $T \subseteq [n]$ 中的每个 $t \in T$ 都是 $G \setminus$（$T \setminus \{t\}$）的割点，则称 $T \subseteq [n]$ 为 G 的割集。我们用 $\mathscr{C}$（G）表示 G的所有割集组成的集合。对于 $T \subseteq [n]$，我们用 c_G（T）表示图 $G \setminus T$的连通分支数（有时，如果上下文中图的含义明确，也记作 c（T））。设 $G \setminus T$的连通分支为G_1、.....、$G_{c(T)}$。对于每个 G_i，我们用 G_i表示顶点集为 V（G_i）的完全图。令

$$P_T(G) = \left\langle \bigcup_{i \in T} \{x_i, y_i\}, J_{\tilde{G}_1}, \ldots, J_{\tilde{G}_{c(T)}} \right\rangle.$$

那么 P_T(G) 是一个素理想。由 [13, 推论 2.2]， J_G 是一个根理想；根据 [13,推论 3. 9], ， J_G 的最小主分解为

$$J_G = \bigcap_{T \in \mathscr{C}(G)} P_T(G).$$

注：我们将 J_G 在伴随素理想 P_T(G) 处的 v-数记为 $\mathrm{v}_T(J_G)$，而不写作 $\mathrm{v}_{P_T(G)}(J_G)$。

注 2.7. 对于 R 中的素理想 $\mathfrak{p}$，有 $(\mathfrak{p} : 1) = \mathfrak{p}$，因此 v($\mathfrak{p}$) $= 0$。注意，对于图 G, $P_\emptyset$(G) 是完全图的二项式边理想的不交并。因此，v(J_{K_n}) $= 0$；若 G 是完全图的不交并，则也有 v(J_G) $= 0$。

注 2.8. 设 I 是一个根理想，其主分解为 $I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k$。那么根据 [1, 习题 1.12 和引理 4.4]，当且仅当 $f \notin \mathfrak{p}_i$ 且对所有 $j \neq i$ 都有 $f \in \mathfrak{p}_j$ 时，(I : f) $= \mathfrak{p}_i$。我们将在证明中经常使用这一事实。

3. 二项式边理想的v-数的性质

本节研究二项式边理想的 v-数的一些性质。我们明确求出 $\mathrm{v}_\emptyset(J_G)$，并给出 v($J_G$) 的一个组合上界。我们尝试建立 v($J_G$) 与 v(in$_<$($J_G$)) 之间的关系。最后，我们对所有 v-数为 1 的二项式边理想进行分类。

命题 3.1. 设 G 是顶点集为 $[n]$ 的简单图。那么对于任意顶点 $i \in [n]$，我们有 (J_G : x_i) $= J_{G_i}$ 且 (J_G : y_i) $= J_{G i}$。

证明。我们首先证明 $J_{G_i} \subseteq$ (J_G : x_i)。注意到 $J_{G_i} = J_G + \langle f_{pq} \mid p, q \in N_G(i)\ p <q, \{p, q\} \notin E(G)\rangle$。由于 $J_G \subseteq$ (J_G : x_i)，只需证明对于 $p, q \in \mathcal{N}_G(i)$ 且满足 $p < q$ and $\{p, q\} \notin E(G)$ 的情形，有 $f_{pq} \in$ (J_G : x_i)。现在我们可以写成

$$\begin{aligned} x_i f_{pq} &= x_i(x_p y_q - x_q y_p) \\ &= x_i x_p y_q - x_p x_q y_i + x_p x_q y_i - x_i x_q y_p \\ &= x_p f_{iq} + x_q f_{pi}. \end{aligned}$$

由于 $\{p,i\},\{i,q\} \in E(G)$，我们得到 $x_i f_{pq} \in J_G$。因此，$J_{G_i} \subseteq (J_G : x_i)$。

现在，我们将证明 $(J_G : x_i) \subseteq J_{G_i}$。令 $f \in (J_G : x_i)$。这意味着 $fx_i \in J_G$。我们知道，对于所有 $T \in \mathscr{C}(G_i)$，$J_G \subseteq J_{G_i} \subseteq P_T(G_i)$。因此，对于所有 $T \in \mathscr{C}(G_i)$，我们得到 $fx_i \in P_T(G_i)$。根据注 2.4，$\mathscr{C}(G_i) = \{T \in \mathscr{C}(G) \mid i \notin T\}$。因此，对于所有 $T \in \mathscr{C}(G_i)$，$x_i \notin P_T(G_i)$。所以，对于所有 $T \in \mathscr{C}(G_i)$，我们得到 $f \in P_T(G_i)$，这意味着$f \in \bigcap_{T\in\mathscr{C}(G_i)} P_T(G_i) = J_{G_i}$。因此，$(J_G : x_i) \subseteq J_{G_i}$。

类似地，可以证明 $(J_G : y_i) = J_{G_i}$。证明与上述相同，其中证明的第一部分可得 $f_{pq}y_i = y_q(f_{pi}) + y_p(f_{iq})$。□

命题 3.2. 设 G 是顶点集为 $[n]$ 的简单图。那么对于 i，$j \in [n]$，我们得到 $(G_i)_j = (G_j)_i$。

证明. 只需证明 $J_{(G_i)_j} = J_{(G_j)_i}$.根据命题 3.1，我们可以写成$J_{(G_i)_j}$ =$(J_{G_i} : x_j)$ =$((J_G : x_i) : x_j)$ =$(J_G : x_i x_j)$ =$(J_G : x_j x_i)$ =$((J_G : x_j) : x_i)$ =$(J_{G_j} : x_i) = J_{(G_j)_i}$. □

命题 3.3. 设 G 是一个简单图。则以下结论成立：

(a) 对任意 $v \in V(G)$，有 $\mathrm{v}(J_G) \leq \mathrm{v}(J_{G_v}) + 1$。(b) 对于 G 的一个顶点 v，若存在 G 的一个割集 T，使得 $v \notin T$ 且 $\mathrm{v}(J_G) = \mathrm{v}_T(J_G)$，则 $\mathrm{v}(J_{G_v}) \leq \mathrm{v}(J_G)$。

(c) 对于 G 的一个顶点 v，若存在 G 的一个割集 T，使得 $v \in T$ 且 $\mathrm{v}(J_G) = \mathrm{v}_T(J_G)$，则 $\mathrm{v}(J_{G\setminus\{v\}}) \leq \mathrm{v}(J_G)$。

证明。(a)：由注 2.4 可知 $\mathscr{C}(G_v) = \{T \in \mathscr{C}(G) \mid v \notin T\}$。设 f 是一个齐次多项式，且 $T \in \mathscr{C}(G_v)$ 满足 $(J_{G_v} : f) = P_T(G_v)$ 且 $\deg(f) = \mathrm{v}(J_{G_v})$。注意到 $T \in \mathscr{C}(G)$ 且 $P_T(G) = P_T(G_v)$，因为 $v \notin T$。由命题 3.1，$(J_{G_v} : f) = P_T(G_v)$ 蕴含 $(J_G : x_v f) = P_T(G)$。因此，$\mathrm{v}(J_G) \leq \mathrm{v}(J_{G_v}) + 1$。

(b)：设 f 是一个齐次多项式，使得 $(J_G : f) = P_T(G)$，且 $\mathrm{v}(J_G) = \deg(f)$。由于 $v \notin T$，由注 2.4 可得 $T \in \mathscr{C}(G_v)$。现在，$(J_G : f) = P_T(G)$ 意味着对于所有满足 $T' \neq T$ 且 $f \notin P_T(G)$ 的 $T' \in \mathscr{C}(G)$，都有 $f \in P_{T'}(G)$。注意，对于每个 $T' \in \mathscr{C}(G_v)$，都有 $P_{T'}(G_v) = P_{T'}(G)$。因此，对于所有满足 $T' \neq T$ 且 $f \notin P_T(G_v)$ 的 $T' \in \mathscr{C}(G_v)$，都有 $f \in P_{T'}(G_v)$。于是，$(J_{G_v} : f) = P_T(G_v)$，因此 $\mathrm{v}(J_{G_v}) \leq \mathrm{v}(J_G)$。

(c)：T是 G 的割集，这意味着每个 $t \in T$都是 $G \setminus (T \setminus \{t\})$的割点。于是，每个 $t \in T \setminus \{v\}$ 都是 $G \setminus (T \setminus \{t\}) = (G \setminus \{v\}) \setminus ((T \setminus \{v\}) \setminus \{t\})$的割点，从而得到$T \setminus \{v\} \in \mathscr{C}(G \setminus \{v\})$。由于 $v \in T$，我们有 $P_T(G) = \langle x_v, y_v \rangle + P_{T\setminus\{v\}}(G \setminus \{v\})$。由于 $x_v, y_v \in P_T(G)$，我们可以选取齐次多项式 $f \in K[\{x_i, y_i \mid i \in V(G \setminus \{v\})\}]$，使得$(J_G : f) = P_T(G)$且$\mathrm{v}(J_G) = \deg(f)$。现在，$fP_T(G) \subseteq J_G$ 意味着 $fP_{T\setminus\{v\}}(G\setminus\{v\}) \subseteq J_{G\setminus\{v\}}$，因为 $f \in K[\{x_i, y_i \mid i \in V(G\setminus\{v\})\}]$。因此，$P_{T\setminus\{v\}}(G\setminus\{v\}) \subseteq (J_{G\setminus\{v\}} : f)$。令 $g \in (J_{G\setminus\{v\}} : f)$。那么 $fg \in J_{G\setminus\{v\}} \subseteq P_{T\setminus\{v\}}(G \setminus \{v\})$。由于$(J_G : f) = P_T(G)$，我们有 $f \notin P_T(G)$，因此 $f \notin P_{T\setminus\{v\}}(G \setminus \{v\})$。于是，$g \in P_{T\setminus\{v\}}(G \setminus \{v\})$。因此，我们得到$(J_{G\setminus\{v\}} : f) = P_{T\setminus\{v\}}(G \setminus \{v\})$。故，$\mathrm{v}(J_{G\setminus\{v\}}) \leq \mathrm{v}(J_G)$。□

定义 3.4（完备化集）。设 G 是一个简单图。对于集合 $V = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$，记 $G_V = G_{v_1 v_2 \cdots v_k} := (\ldots((G_{v_1})_{v_2})\ldots)_{v_k}$。由命题 3.2 可知，$G_V$ 不依赖于 V 中元素的排列顺序，因此，G_V 的定义是

良定义的。若集合 $W \subseteq V(G)$ 满足 G_W 是完全图的不交并，则称其为 G 的完备化集。若对于每个 $U \subsetneq W$， G_U 都不是完全图的不交并，则称完备化集 W 是 G 的极小补全集。G 的所有极小补全集中基数的最小值（分别地，最大值）记为 min-comp(G)（分别地，max-comp(G)），并称其为 G 的最小完备化数（分别地，最大完备化数）。

引理 3.5. 设 G 是一个图。设 T_1、…、$T_k \in \mathscr{C}(G)\setminus\{\emptyset\}$ 是 G 的一些割集。对每个 $1 \le j \le k$，记 $I_j = \langle x_i 、\ y_i \mid i \in T_j\rangle$。那么

$$(I_1 + P_\emptyset(G)) \cap \cdots \cap (I_k + P_\emptyset(G)) = (I_1 \cap \cdots \cap I_k) + P_\emptyset(G).$$

证明. 只需考虑 G 是连通的情形。显然，$(I_1 \cap \cdots \cap I_k) + P_\emptyset(G) \subseteq (I_1 + P_\emptyset(G)) \cap \cdots \cap (I_k + P_\emptyset(G))$成立。我们对 k 使用归纳法来证明反向包含。若 $k = 1$，则无需证明。假设 $(I_1 + P_\emptyset(G)) \cap \cdots \cap (I_{k-1} + P_\emptyset(G)) = (I_1 \cap \cdots \cap I_{k-1}) + P_\emptyset(G)$成立。设 $f \in (I_1 + P_\emptyset(G)) \cap \cdots \cap (I_k + P_\emptyset(G)) = ((I_1 \cap \cdots \cap I_{k-1}) + P_\emptyset(G)) \cap (I_k + P_\emptyset(G))$. 由于 $P_\emptyset(G) \subseteq I_k + P_\emptyset(G)$，我们有

$$((I_1 \cap \cdots \cap I_{k-1}) + P_\emptyset(G)) \cap (I_k + P_\emptyset(G)) = (I_1 \cap \cdots \cap I_{k-1}) \cap (I_k + P_\emptyset(G)) + P_\emptyset(G).$$

那么，我们可以写成 $f = g + h$，其中 $g \in (I_1 \cap \cdots \cap I_{k-1}) \cap (I_k + P_\emptyset(G))$，且 $h \in P_\emptyset(G)$。注意，$\{x_i, y_i \mid i \in T_k\} \cup \{f_{pq} \mid p < q \text{ and } p, q \in V(G) \setminus T_k\}$ 是 $I_k + P_\emptyset(G)$ 的一个约化 Gr¨obner 基。因此，我们可以将 $g = g' + h'$ 写成约化形式，使得 $g' \in I_k$ 且 $h' \in P_\emptyset(G)$。现在，$g \in I_1 \cap \cdots \cap I_{k-1}$ 意味着 g' and h' 的每个单项式项都属于 $I_1 \cap \cdots \cap I_{k-1}$，因为 $I_1 \cap \cdots \cap I_{k-1}$ 是一个单项式理想。因此，$g' \in I_1 \cap \cdots \cap I_k$，进而 $f = g' + h' + h \in (I_1 \cap \cdots \cap I_k) + P_\emptyset(G)$。□

定理 3.6. 设 G 是一个简单图。那么 $\mathrm{v}_\emptyset(J_G) =$ min-comp(G)。特别地，我们有 $\mathrm{v}(J_G) \le$ min-comp(G)。

证明。令min-comp(G) $= k$ 和 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ 为 G的一个极小补全集。那么J_G : $x_{v_1} \cdots x_{v_k} = P_\emptyset(G)$，根据命题 3.1。因此，$\mathrm{v}_\emptyset(J_G) \le$ min-comp(G)。对于反向不等式，令 f 为一个齐次多项式，使得 $(J_G :\ f) = P_\emptyset(G)$且 $\mathrm{v}_\emptyset(J_G) =$ deg(f)。那么$f \in \bigcap_{T\in\mathscr{C}(G)\setminus\{\emptyset\}} P_T(G)$且 $f \notin P_\emptyset(G)$。对于每个$T \in \mathscr{C}(G)$，我们可以写成 $P_T(G) = \langle x_i, y_i \mid i \in T\rangle + I_T$，其中 I_T是由若干完全图的不交并构成的二项式边理想，使得 $I_T \subseteq P_\emptyset(G)$。由于 $f \notin P_\emptyset(G)$，利用引理3.5，我们可以写成 $f = g + h$，使得$(0 \neq) g \in I$ 且 $h \in P_\emptyset(G)$，其中 I是由下式给出的平方自由单项式理想

$$I = \bigcap_{T\in\mathscr{C}(G)\setminus\{\emptyset\}} \langle x_i, y_i \mid i \in T\rangle.$$

因此，deg(f) $\ge$ min{deg(m) $\mid m \in G(I)$}。对于每个 $m \in G(I)$，我们有

$$m \in \bigcap_{T\in\mathscr{C}(G)\setminus\{\emptyset\}} P_T(G) \text{ and } m \notin P_\emptyset(G).$$

因此，对于每个 $m \in G(I)$，$(J_G :\ m) = P_\emptyset(G)$。因此，我们可以选择 f 使得 $f \in G(I)$。假设 $f = x_{i_1} \cdots x_{i_r} y_{j_1} \cdots y_{j_s}$。那么根据命题 3.1，我们得到$\{i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s\}$ 是 G的完备化集。因此，deg(f) $= \mathrm{v}_\emptyset(J_G) \ge$最小分支数($G$)。所以，$\mathrm{v}_\emptyset(J_G) =$ 最小分支数(G)，且 $\mathrm{v}(J_G) \le \mathrm{v}_\emptyset(J_G) =$ 最小分支数(G)。□

注 3.7. 设 G 是一个具有连通分支 G_1、.....、G_k 的图。从定义 3.4 很容易看出，最小分支数(G) = 最小分支数(G_1) + ⋯ + 最小分支数(G_k)。于是根据定理 3.6，我们得到 $\mathrm{v}_\emptyset(J_G)$ = $\mathrm{v}_\emptyset(J_{G_1})$ + ⋯ + $\mathrm{v}_\emptyset(J_{G_k})$。

定义 3.8。图 G 的支配集是集合 $D \subseteq V(G)$，使得不在 D 中的每个顶点在 D 中都有一个邻点。G 的支配数记为 $\gamma(G)$，其值为具有最少顶点数的支配集的基数。

推论 3.9。设 G 是一个连通非完全图。则 $\gamma(G) \leq \mathrm{v}_\emptyset(G)$。

证明。根据定理 3.6，有 $\mathrm{v}_\emptyset(G)$ = min-comp(G)。因此，只需证明 G 的任意极小补全集都是 G 的支配集。设 $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ 是 G 的一个极小补全集。注意到 V 非空，因为 G 是非完全图。假设存在一个顶点 $u \in V(G) \setminus V$，使得对于每个 $1 \leq i \leq k$ 都有 $u \notin \mathcal{N}_G(v_i)$。那么 $u \notin \mathcal{N}_{G_V}(v_k)$，这与 G_V 是完全图相矛盾。因此，V 是 G 的支配集，从而 $\gamma(G) \leq \mathrm{v}_\emptyset(G)$。□

引理 3.10. 设 $I_1 \subseteq R_1 = K[x_1, \ldots, x_n]$ 和 $I_2 \subseteq R_2 = K[y_1, \ldots, y_m]$ 是两个根理想。假设 $P_1 \in \mathrm{Ass}(I_1)$ 且 $I_1 + I_2 := I_1R + I_2R$，其中 $R = R_1 \otimes_K R_2$是一个根理想，且 Ass($I_1 + I_2$) = $\{Q_1 + Q_2 \mid Q_1 \in \mathrm{Ass}(I_1)\ Q_2 \in \mathrm{Ass}(I_2)\}$。那么 $((I_1 + I_2) : P_1) = (I_1 : P_1) + I_2$。

证明。记 $J = I_1 + I_2$。设 $f \in (I_1 : P_1) + I_2$。那么，对某个 $g \in$，有 $f = g + h$ $(I_1 : P_1)$，且 $h \in I_2$。由于 $gP_1 \subseteq I_1$ 且 $h \in I_2$，我们有 $fP_1 = gP_1 + hP_1 \subseteq I_1 + I_2 = J$。因此，$f \in (J : P_1)$ 且 $(I_1 : P_1) + I_2 \subseteq (J : P_1)$。设 $f' \in (J : P_1)$。那么 $f'P_1 \subseteq J$。由于 $G(P_1) \subseteq R_1$ 且 I_1 是根式，我们对每个 $Q_1 \in \mathrm{Ass}(I_1) \setminus \{P_1\}$以及 $Q_2 \in \mathrm{Ass}(I_2)$，都有 $P_1 \not\subseteq Q_1 + Q_2$。因此，$f' \in I_1' + I_2$，其中 $I_1' = \bigcap_{Q_1 \in \mathrm{Ass}(I_1) \setminus \{P_1\}} Q_1$。于是我们可以写成 $f' = g' + h'$，使得 $g' \in I_1'$ 且 $h' \in I_2$。若 $g' \in P_1$，则 $g \in I_1$，因此，$f' \in J \subseteq ((I_1 : P_1) + I_2)$。若 $g' \notin P_1$，则 $I_1 : g' = P_1$，因为 $g' \in I'$。此时，我们得到$f' = g' + h' \in (I_1 : P_1) + I_2$，因此，$(J : P_1) = (I_1 : P_1) + I_2$。□

定理 3.11（v-数具有可加性）。设 $I_1 \subseteq R_1 = K[x_1, \ldots, x_n]$ 和 $I_2 \subseteq R_2 = K[y_1, \ldots, y_m]$ 是两个根理想。假设 $I_1 + I_2 := I_1R + I_2R$，其中 $R = R_1 \otimes_K R_2$ 是一个根理想，且 Ass($I_1 + I_2$) = $\{P_1 + P_2 \mid P_1 \in \mathrm{Ass}(I_1)\ P_2 \in \mathrm{Ass}(I_2)\}$。那么

$$\mathrm{v}(I_1 + I_2) = \mathrm{v}(I_1) + \mathrm{v}(I_2).$$

证明。令 $f_i \in R_i$ 为一个齐次多项式，且令 $P_i \in \mathrm{Ass}(I_i)$，使得 $I_i : f_i = P_i$以及 $\mathrm{v}(I_i) = \deg(f_i)$，其中 $i \in \{1, 2\}$。那么对于所有 $P \in \mathrm{Ass}(I_i) \setminus \{P_i\}$ 以及对于 $i = 1$，2，都有 $f_i \in P$。容易观察到，对于所有 $Q \in \mathrm{Ass}(I_1 + I_2) \setminus \{P_1 + P_2\}$ 以及 $f_1f_2 \notin P_1 + P_2$，都有 $f_1f_2 \in Q$。因此，$((I_1 + I_2) : f_1f_2) = P_1 + P_2$，从而 $\mathrm{v}(I_1 + I_2) \leq \mathrm{v}(I_1) + \mathrm{v}(I_2)$。对于反向不等式，我们将使用 [11, 定理 10]。令 $\mathrm{v}(I_1 + I_2) = \mathrm{v}^{P_1+P_2}(I_1 + I_2)$，其中 $P_1 \in \mathrm{Ass}(I_1)$ 且 $P_2 \in \mathrm{Ass}(I_2)$。令 $J = I_1 + I_2$，$(I_1 : P_1)/I_1 = \langle g_1 + I_1, \ldots, g_r + I_1 \rangle$ 以及$(I_2 : P_2)/I_2 = \langle h_1 + I_2, \ldots, h_s + I_2 \rangle$。考虑$\phi : R \mapsto R/J$，并且我们记作 $\phi(x) = \overline{x}$，其中任意 $x \in R$。于是我们有

$$\begin{aligned} &\big((I_1 + I_2) : (P_1 + P_2)\big)/J \\ =&((I_1 + I_2) : P_1) \cap ((I_1 + I_2) : P_2)/J \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=((I_1:P_1)+I_2)\cap((I_2:P_2)+I_1)/J \quad \text{(by Lemma 3.10)}\\
&=((I_1:P_1)+I_2)/J\cap((I_2:P_2)+I_1)/J \quad \text{(by [15, Lemma 3.2])}\\
&=((I_1:P_1)+J)/J\cap((I_2:P_2)+J)/J\\
&=((I_1:P_1)\cap(I_2:P_2)+J)/J \quad \text{(by [15, Lemma 3.2])}\\
&=((I_1:P_1)(I_2:P_2)+J)/J \quad \text{(by [12, Lemma 3.1])}\\
&=(((I_1:P_1)+J)/J)(((I_1:P_1)+J)/J)\\
&=\langle\overline{g_1},\ldots,\overline{g_r}\rangle\langle\overline{h_1},\ldots,\overline{h_s}\rangle\\
&=\langle\overline{g_ih_j}\mid 1\le i\le r,1\le j\le s\rangle
\end{aligned}
$$

根据 [11,定理 3.2], 我们有

$$\mathrm{v}_{P_1+P_2}(J)=\min\{\deg(g_ih_j)\mid 1\le i\le r,1\le j\le s \text{ and } (J:g_ih_j)=P_1+P_2\}.$$

假设 $\mathrm{v}_{P_1+P_2}(J)=\deg(g_ih_j)=\deg(g_i)+\deg(h_j)$, 其中 g_i和 h_j。由于 J、I_1、I_2是根式, $J:g_ih_j=P_1+P_2$ 蕴含 $I_1:g_j=P_1$ 和 $I_2:h_j=P_2$。因此,

$$\mathrm{v}(I_1)+\mathrm{v}(I_2)\le \mathrm{v}_{P_1}(I_1)+\mathrm{v}_{P_2}(I_2)\le \deg(g_i)+\deg(h_j)=\mathrm{v}_{P_1+P_2}(I_1+I_2).$$

由于$\mathrm{v}(I_1+I_2)=\mathrm{v}_{P_1+P_2}(I_1+I_2)$, 我们有$\mathrm{v}(I_1+I_2)=\mathrm{v}(I_1)+\mathrm{v}(I_2)$。 □

推论 3.12. 设 $G=G_1\sqcup G_2$ 是一个图。则 $\mathrm{v}(J_G)=\mathrm{v}(J_{G_1})+\mathrm{v}(J_{G_2})$】【。

证明。由于二项式边理想是根理想, 且 $\mathrm{Ass}(J_G)=\{P_{T_1}(G_1)+P_{T_2}(G_2)\mid T_1\in\mathscr{C}(G_1)$ $T_2\in\mathscr{C}(G_2)\}$, 根据定理 3.11, 我们有 $\mathrm{v}(J_G)=\mathrm{v}(J_{G_1})+\mathrm{v}(J_{G_2})$。□

现在, 我们将建立某类图的 $\mathrm{v}(J_G)$ 与 $\mathrm{v}(\mathrm{in}_<(J_G))$ 之间的关系。为此, 我们先讨论 $\mathrm{v}(\mathrm{in}_<(J_G))$ 的主分解。

设 G 是一个简单图。设 $T\in\mathscr{C}(G)$ 和 $G_1,\ldots,G_{c(T)}$ 是 $G\setminus T$ 的连通分支。对于 $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_{c(T)})\in V(G_1)\times\cdots\times V(G_{c(T)})$, 我们考虑以下素理想:

$$P_T(\mathbf{v})=\big\langle x_i,y_i\mid i\in T\big\rangle+\sum_{k=1}^{c(T)}\big\langle\{x_i,y_j\mid i,j\in V(G_k),i<v_k,j>v_k\}\big\rangle.$$

由 [24,引理 1], , 可得

$$\mathrm{in}_<(P_T(G))=\bigcap_{\mathbf{v}\in V(G_1)\times\cdots\times V(G_{c(T)})}P_T(\mathbf{v}).$$

由于 $\mathrm{in}_<(J_G)$ 是根式, 由 [5, 推论 1.12], , 可得

$$\mathrm{in}_<(J_G)=\bigcap_{T\in\mathscr{C}(G)}\mathrm{in}_<(P_T(G)).$$

命题 3.13（[33, 命题 3.4]）。设 G 为一个简单图。那么我们有

$$\mathrm{Ass}(\mathrm{in}_<(J_G))=\{P_T(\mathbf{v})\mid T\in\mathscr{C}(G)\ \textit{and}\ \mathbf{v}\in V(G_1)\times\cdots\times V(G_{c(T)})\}.$$

引理 3.14. 设 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ 是 R 的分次素理想。若 in$_<$($\bigcap_{i=1}^k \mathfrak{p}_i$) 是平方自由单项式理想，则

$$\mathrm{in}_<\left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i\right) = \bigcap_{i=1}^{k} \big(\mathrm{in}_<(\mathfrak{p}_i)\big).$$

证明。我们有 in$_<$($\bigcap_{i=1}^k \mathfrak{p}_i$) $\subseteq \bigcap_{i=1}^k$(in$_<$($\mathfrak{p}_i$))。令 $m \in \bigcap_{i=1}^k$(in$_<$($\mathfrak{p}_i$)) 为一个单项式。则存在 $f_i \in \mathfrak{p}_i$，使得对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，都有 in$_<$(f_i) $= m$。考虑多项式 $f = f_1 \cdots f_k$。注意到 $f \in \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{p}_i$，因此 in$_<$($f$) $= m^k \in$in$_<$($\bigcap_{i=1}^k \mathfrak{p}_i$)。已知 in$_<$($\bigcap_{i=1}^k \mathfrak{p}_i$) 是平方自由的，即为一个根理想。因此，$m \in$ in$_<$($\bigcap_{i=1}^k \mathfrak{p}_i$)，等式即得证。□

定理 3.15. 设 G 是一个图。若存在 $T' \in \mathscr{C}(G)$，使得对于某个 $P_{T'}$(v′)，v(in$_<$(J_G)) 取到最大值，且 in$_<$($\bigcap_{T \in \mathscr{C}(G)\setminus\{T'\}} P_T(G)$) 是根理想，则

$$\mathrm{v}(J_G) \leq \mathrm{v}(\mathrm{in}_<(J_G)).$$

证明。设 $G'_1, \ldots, G'_{c(T')}$ 是 $G \setminus T'$ 的连通分支。由给定假设，存在一个平方自由单项式 m，使得 (in$_<$(J_G) : m) $= P_{T'}$(v′)，其中某个 v′ $\in V(G'_1) \times \cdots \times V(G'_{c(T')})$，且 v(in$_<$($J_G$)) $=$ deg(m)。于是

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{in}_<(J_G) : m\big) = P_{T'}(\mathbf{v}') \\
\Longrightarrow &\left(\bigcap_{T \in \mathcal{C}(G)} \mathrm{in}_<(P_T(G)) : m\right) = P_{T'}(\mathbf{v}') \\
\Longrightarrow &\bigcap_{T \in \mathcal{C}(G)} \big(\mathrm{in}_<(P_T(G)) : m\big) = P_{T'}(\mathbf{v}') \\
\Longrightarrow &\bigcap_{T \in \mathcal{C}(G)} \left(\Big(\bigcap_{\mathbf{v} \in V(G_1)\times\cdots\times V(G_{\mathcal{C}(T)})} P_T(\mathbf{v})\Big) : m\right) = P_{T'}(\mathbf{v}') \\
\Longrightarrow &\bigcap_{\substack{T \in \mathcal{C}(G) \\ \mathbf{v} \in V(G_1)\times\cdots\times V(G_{\mathcal{C}(T)})}} (P_T(\mathbf{v}) : m) = P_{T'}(\mathbf{v}').
\end{aligned}$$

因此，由命题 3.13 可得，对所有 P_T(v) $\in$ Ass(in$_<$(J_G)) $\setminus\{P_{T'}$(v′)$\}$ 和 $m \notin P_{T'}$(v′)，都有 $m \in P_T$(v)。这说明 $m \in \bigcap_{T \in \mathcal{A}}in_<$($P_T(G)$)，其中 $\mathcal{A} = \mathscr{C}(G) \setminus \{T'\}$。由于 in$_<$($\bigcap_{T \in \mathcal{A}} P_T(G)$) 是根式，由引理 3.14 可知

$$\bigcap_{T \in \mathcal{A}} \mathrm{in}_<(P_T(G)) = \mathrm{in}_<\left(\bigcap_{T \in \mathcal{A}} P_T(G)\right).$$

因此，我们有 $m \in$in$_<$($\bigcap_{T \in \mathcal{A}} P_T(G)$)，于是存在 $f \in \bigcap_{T \in \mathcal{A}} P_T(G)$ 使得 in$_<$(f) $= m$。假设 $f \in P_{T'}(G)$。那么 in$_<$(f) $= m \in$in$_<$($P_{T'}(G)$)，这意味着 $m \in P_{T'}$(v′)，而这与 $m \notin P_{T'}$(v′) 矛盾。因此，$f \notin P_{T'}(G)$，并且我们得到 J_G : $f = P_{T'}$(G)。于是 v(J_G) $\leq$ v(in$_<$(J_G))。□

Conca 和 Varbaro 在 [4] 引入了 Knutson 理想这一概念，其灵感来自 Allen Knutson [22] 关于相容分裂理想和退化的研究。

定义 3.16（Knutson 理想）。设 $f \in R = K[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个多项式，其在 $<$（f）中的首项在某个项序 $<$下是一个平方自由单项式。定义 C_f 为满足以下条件的最小理想集合：

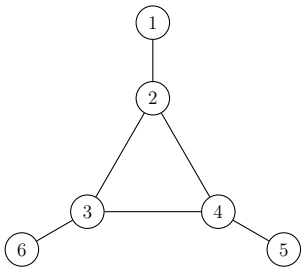
（1） $\langle f \rangle \in C_f$；（2）若 $I \in C_f$，则对每个理想 $J \subseteq R$，有 $I:\ J \in C_f$；（3）若 I和 J属于 C_f，则 $I + J$和 $I \cap J$也必须属于 C_f。

若 I是 C_f中的一个理想，我们称 I为与 f相关联的 Knutson 理想。更一般地，若对于某个 f有 $I \in C_f$，则称 I 为 Knutson 理想。

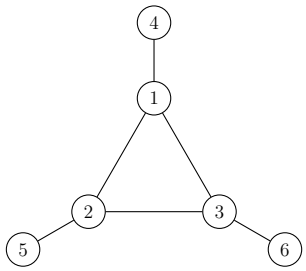
Matsuda 引入了弱闭图的概念 [26, 定义 2.1]，将其作为闭图的推广，并研究了弱闭图的二项式边理想的 F-纯性。随后，Seccia [25, 定理 4.1] 证明，图 G 是弱闭图，当且仅当 J_G 是 Knutson 理想。作为定理 3.15 的一个应用，我们给出以下关于弱闭图的二项式边理想的 v-数的推论。

推论 3.17. 设 G 是一个弱闭图。那么 v(J_G) $\leq$ v(in$_<$(J_G))。

证明. 由于 G 是弱闭的， J_G 是一个Knutson理想。根据Knutson理想的定义可知， J_G的任意伴随素理想都是Knutson理想。设 v(J_G) $=$v$_{T'}$(J_G)，其中 $T' \in \mathscr{C}(G)$。根据定义 3.16 的条件 (3)，$\bigcap_{T \in \mathscr{C}(G) \setminus \{T'\}} P_T(G)$ 是一个Knutson理想。文献 [22] 已证明，任意Knutson理想的初始理想都是根式。因此，G 满足定理 3.15 的假设，故 v(J_G) $\leq$ v(in$_<$(J_G))。□



(a) 图 G with v(in$_<$(J_G)) $= 4$



(b) 图 G，其 v(J_G 中的 $<$) 为 $= 3$

图1. 具有不同标记和不同 v(in$_<$(J_G)) 的图 G

例 3.18. 考虑图 G 中图1所示的图，其标记如 (a) 所示。然后，利用注2.6中讨论的 J_G 的约化 Gr¨oner 基，我们得到

$$\mathrm{in}_<(J_G) = \langle x_4y_5, x_3y_6, x_3y_4, x_2y_4, x_2y_3, x_1y_2, x_4y_3y_6, x_5y_3y_4y_6 \rangle.$$

通过 [11, 过程 A1] 和 Macaulay2 [10], ，我们得到 v(J_G) $= 3$，且 v(in$_<$(J_G)) $= 4$。因此，在这种情况下，我们有 v(J_G) $<$ v(in$_<$(J_G)).

同样，考虑图 G（在图1中），其标记采用(b)中给出的标记，我们得到v(in$_<$(J_G)) $= 3$。因此，在这种情况下，v(J_G) $=$ v(in$_<$(J_G))。

由于 J_G 的主分解不依赖于 V（G）的标记，对于给定的图，任何标记方式下的v（J_G）都保持不变。但是，v（in$_<$（J_G））在对 V（G）采用不同标记方式时可能会有所不同。

现在我们将对二项式边理想的 v-数为 1 的图进行分类。

定义 3.19. 设 G 是一个图，$v \notin V(G)$ 是一个顶点。v 在 G 上的锥，记作 cone(v, G)，是顶点集为 $V(G) \cup \{v\}$、边集为 $E(G) \cup \{\{u, v\} \mid u \in V(G)\}$ 的图。

定理 3.20. 设 G 是一个简单连通图。当且仅当对于某个非完全图 H，$G =$ cone(v, H) 时，v$(J_G) = 1$ 。

证明. 假设 v$(J_G) = 1$。那么存在一个齐次线性多项式 f，使得 $(J_G : f) = P_T(G)$，其中某个 $T \in \mathscr{C}(G)$。假设 $T \neq \emptyset$。那么存在 $i \in T$，因此，$x_i, y_i \in P_T(G)$。于是，$fx_i \in J_G \subseteq P_\emptyset(G)$。但是，$P_\emptyset(G)$ 不可能包含任何线性多项式，这就导致矛盾。因此，唯一的可能是 $T = \emptyset$，即 $J_G : f = P_\emptyset(G)$。由于 $J_G = \cap_{T \in \mathscr{C}(G)} P_T(G)$，对于所有满足 $T \neq \emptyset$ 且 $f \notin P_\emptyset(G)$ 的 $T \in \mathscr{C}(G)$，我们有 $f \in P_T(G)$。现在，每个 $P_T(G)$ 都可以写成 $P_T(G) = \langle x_i, y_i \mid i \in T \rangle + I_T$，其中 I_T 是由二次齐次二项式生成的理想。由于 f 是线性的，而 I_T 是二次齐次二项式理想，我们有

$$f \in \bigcap_{T \in \mathscr{C}(G) \setminus \{\emptyset\}} \langle x_i, y_i \mid i \in T \rangle.$$

现在，f 属于一个平方自由单项式理想，且 f 的次数为 1，这两者共同意味着存在 $v \in V(G)$，使得对所有 $T \in \mathscr{C}(G)$，都有 $v \in T \setminus \{\emptyset\}$。假设存在 $u \in V(G)$，使得 $u \notin \mathcal{N}_G(v)$。取 $T \subseteq \mathcal{N}_G(v)$，使得在 $G \setminus T$中不存在从 u 到 v 的路径，且 T 在具有此性质的情况下是极小的。那么显然，$T \in \mathscr{C}(G)$，且 $T \neq \emptyset$，因为 G 是连通的。但是，$v \notin T$ 且 T 非空，这就产生了矛盾。因此，$\mathcal{N}_G[v] = V(G)$，即 $G =$ 是 cone(v, H)，其中 H 是 G 在 $\mathcal{N}_G(v)$上的诱导子图。假设 H 是完全的。那么 G 是完全的，在这种情况下，v$(J_G) = 0$，因为 J_G 是素理想。因此，H不是完全的，因为 v$(J_G) = 1$。

反过来，设对于某个非完全图 H，$G =$ cone(v, H)。由命题 3.1 可得 $J_G : x_v = J_{G_v}$。由于 $G =$ cone(v, H)，G_v 是完全图且 $J_{G_v} = P_\emptyset(G)$。因此，v$(J_G) \leq$ deg$(x_v) = 1$。现在，H 不是完全图，G 也不是完全图，因此 J_G不是素理想。所以 v$(J_G) \geq 1$，从而得到 v$(J_G) = 1$。□

4. v-数与 Castelnuovo-Mumford 正则性

本节中，我们尝试建立 v-数与二项式边理想的 Castelnuovo-Mumford 正则性之间的关系。对于某些图类，我们证明 v-数小于或等于二项式边理想的正则性。我们的主要方法是考察与二项式边理想的初始理想相对应的超图中的诱导匹配。

定义 4.1. 简单超图 $\mathcal{H}$ 是一个二元组 $(V(\mathcal{H})\ E(\mathcal{H}))$，其中 $V(\mathcal{H})$ 是一个有限元素集，称为 $\mathcal{H}$ 的顶点集； $E(\mathcal{H})$ 是 $V(\mathcal{H})$ 的一个子集族，其中任意两个元素都不互相包含，称为 $\mathcal{H}$的边集。 $V(\mathcal{H})$ 中的元素称为 $\mathcal{H}$ 的顶点， $E(\mathcal{H})$ 中的元素称为 $\mathcal{H}$的边。

设 $\mathcal{H}$ 是顶点集为 $V(\mathcal{H}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 的简单超图。对于 $A \subseteq V(\mathcal{C})$，我们将 $X_A := \prod_{x_i \in A} x_i$ 视为域 K 上多项式环 $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ 中的一个平方自由单项式。超图 $\mathcal{H}$ 的边理想记为 $I(\mathcal{H})$，它是 R 中由下式定义的一个理想:

$$I(\mathcal{H}) = \big\langle X_e \mid e \in E(\mathcal{H}) \big\rangle.$$

从这个意义上说，平方自由单项式理想族与简单超图族一一对应。对于 R 中的平方自由单项式理想 I，我们用 $\mathcal{H}(I)$ 表示其对应的简单超图。

定义 4.2. 简单超图 $\mathcal{H}$ 中的诱导匹配是由两两不相交的边 e_1、.....、 e_r 构成的集合，且包含在 $\bigcup_{i=1}^{r} e_i$ 中的 $\mathcal{H}$ 的边只有 e_1、.....、 e_r。

命题 4.3（[28, 推论 3.9]）。设 $\mathcal{H}$ 是一个简单图，且 $M = \{e_1, \ldots, e_r\}$ 是 $\mathcal{H}$中的一个诱导匹配。那么 $\sum_{i=1}^{r}(|e_i| - 1) = (\sum_{i=1}^{r} |e_i|) - r \leq \mathrm{reg}(R/I(\mathcal{H}))$。

引理 4.4。设 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ 是连通图 G的一个极小补全集，且对所有 $2 \leq i \leq k$，均有 $v_i \in \mathcal{N}_G(v_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G(v_{i-1})$。那么对每个 $2 \leq i \leq k$，存在 $u_i \in \mathcal{N}_G(v_i)$，使得 $u_i \notin \mathcal{N}_G(v_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G(v_{i-1})$，并且在 $G[\{v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k, u_i\}]$ 中不存在从 u_i 到 v_1 的路径。

证明。若 $\mathcal{N}_G(v_i) \subseteq \mathcal{N}_G(v_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G(v_{i-1})$，则显然 $G_{v_1 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_k}$ 是完备的，这与 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ 是 G 的极小补全集这一事实矛盾。因此， $\mathcal{N}_G(v_i) \nsubseteq \mathcal{N}_G(v_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G(v_{i-1})$。令 $\mathcal{N}_G(v_i) \setminus (\mathcal{N}_G(v_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G(v_{i-1})) = \{u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}\}$。假设对每个 $1 \leq j \leq r$，都存在一条从 u_{i_j} 到 v_1 的路径，且该路径位于 $G[\{v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k, u_{i_j}\}]$ 中。那么，对某个 $s_j \in \{i+1, \ldots, k\}$，有 $u_{i_j} \in \mathcal{N}_G(v_{s_j})$，并且存在一条从 v_{s_j} 到 v_1 的路径，且该路径位于 $G[\{v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k\}]$ 中。令 $i' =$ 为 $\max\{s_1, \ldots, s_r\}$ （s_i 不必互不相同）。那么 $\{u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}\} \subseteq \mathcal{N}_{G_{v_1 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_{i'}}}(v_{i'})$。由于在 $G[\{v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k\}]$ 中存在一条从 $v_{i'}$ 到 v_1 的路径，因此 $G_{v_1 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_k}$ 是完备的，这与 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ 的极小性矛盾。证明完毕。□

定理 4.5. 设 G 是一个弦图。那么 $\max\text{-comp}(G) \leq \mathrm{reg}(S/J_G)$。特别地，我们有 $\mathrm{v}(J_G) \leq \mathrm{v}_\emptyset(J_G) \leq \max\text{-comp}(G) \leq \mathrm{reg}(S/J_G)$。

证明。只需假设 G 是连通的。令 $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ 为 G 的一个极小补全集。由于 G 是连通的，在对 V 中的顶点进行适当标记后，我们得到一个次序 $v_1, \ldots, v_k$，使得

$$v_i \in \mathcal{N}_{G_{v_1 \cdots v_{i-1}}}(v_{i-1}) = \mathcal{N}_G(v_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G(v_{i-1}) \tag{4.1}$$

对于每个 $i = 2$、.....、 k。由 J_G 的 Gr¨obner 基可知，$\mathrm{in}_<(J_G)$ 会随着 $V(G)$ 的标记而改变。我们的目标是找到 G 的一种标记，使得在 $\mathcal{H} = \mathcal{H}$ 中（$\mathrm{in}_<(J_G)$ 中）存在一个诱导匹配 M，满足 $\sum_{e \in M}(|e| - 1) \geq k$。我们将通过一种特定的算法技术，为 $V(G)$ 找到这样的合适标记，以及 $\mathcal{H}$ 的相应诱导匹配。我们从这里开始。

步骤-1：（情形-1A）如果存在 $u_1 \in \mathcal{N}_G(v_1)$ 使得 $u_1 \notin \mathcal{N}_G[v_2] \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G[v_k]$，则标记 $v_1 = t_1 = 1$ 和 $u_1 = t_1 + 1 = 2$。在此情形下，考虑集合 $M = \{e_1\}$，其中 $e_1 = \{x_1, y_2\}$。

（情况 1B）如果 $\mathcal{N}_G(v_1) \subseteq \mathcal{N}_G[v_2] \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G[v_k]$，则取 u_1 as v_2，并标记 $v_1 = t_1 = 1$和 $u_1 = v_2 = t_2 = t_1 + 1 = 2$。在这种情况下，考虑集合 $M = \{e_1\}$，其中 $e_1 = \{x_{t_1}, y_{t_1+1}\} = \{x_1, y_2\}$。

步骤 2：根据引理 4.4，存在 $u_2 \in \mathcal{N}_G(v_2)$，使得 $u_2 \notin \mathcal{N}_G(v_1)$，并且在 $G[\{v_1, \widehat{v_2}, \ldots, v_k, u_2\}]$ 中不存在从 u_2 到 v_1 的路径。

（情况 2A）如果存在 $u_2 \in \mathcal{N}_G(v_2)$，使得 $u_2 \notin \mathcal{N}_G[v_1] \cup \widehat{\mathcal{N}_G[v_2] \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G[v_k]}$，然后我们选择这样的 u_2。在这种情况下，我们按如下方式标记顶点：如果 $v_2 \neq u_1$，则标记 $v_2 = t_2 = t_1 + 2 = 3$ 并标记 $u_2 = t_2 + 1 = 4$。在此情况下，将M更新为 $M = \{e_1, e_2\}$，其中 $e_2 = \{x_{t_2}, y_{t_2+1}\} = \{x_3, y_4\}$。如果 $v_2 = u_1$，则由前一种情况可得 $u_1 = v_2 = t_2 = t_1 + 1$ 并标记 $u_2 = t_2 + 1$。在此情况下，将 M 更新为$M = \{e_1, e_2\}$，其中 $e_2 = \{x_{t_2}, y_{t_2+1}\}$。

（情形-2B）假设 $\mathcal{N}_G(v_2) \subseteq \mathcal{N}_G[v_1] \cup \widehat{\mathcal{N}_G[v_2] \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G[v_k]}$。然后存在一个$u_2 \in \{v_3, \ldots, v_k\}$ 满足引理4.4的条件，否则 $\{v_1, \widehat{v_2}, \ldots, v_k\}$ 将是 G的极小补全集。令 $u_2 = v_{2+j}$，使得 j 最小。在这种情况下，我们将 V重新标记如下：

$$\begin{aligned} \text{Label } v_{2+j} \text{ as } v_3,\\ v_3 \text{ as } v_4,\\ \vdots\\ v_{2+j-1} \text{ as } v_{2+j}, \end{aligned}$$

其余部分保持不变。注意，V中顶点的新排序也满足性质 (4.1)。因此，我们可以继续采用这一排序。现在，标记

$$v_2 = t_2 = \begin{cases} t_1 + 1 \text{ if } u_1 = v_2 \text{ in step-1} \\ t_1 + 2 \text{ if } u_1 \neq v_2 \text{ in step-1} \end{cases}$$

以及 $u_2 = v_3 = t_3 = t_2 + 1$。在这种情况下，我们将集合 M 更新为 $M = \{e_1, e_2\}$，其中$e_2 = \{x_{t_2}, y_{t_2+1}\}$。

按照以下第 i步继续这一过程：

第 i 步：由引理 4.4，存在 $u_i \in \mathcal{N}_G(v_i)$，使得 $u_i \notin \mathcal{N}_G(v_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G(v_{i-1})$，且在 $G[\{v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k, u_i\}]$中不存在从 u_i到 v_1的路径。

（情形 iA）如果存在 $u_i \in \mathcal{N}_G(v_i)$，使得 $u_i \notin \mathcal{N}_G[v_1] \cup \cdots \cup \widehat{\mathcal{N}_G[v_i] \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G[v_k]}$，然后我们选择这样的 u_i。在这种情况下，我们按以下方式标记顶点：若 $v_i \neq u_{i-1}$，则标记 $v_i = t_i = t_{i-1} + 2$ 并标记 $u_i = t_i + 1$。在这种情况下，将 M更新为 $M \cup \{e_i\}$，其中 $e_i = \{x_{t_i}, y_{t_i+1}\}$。现在，若 $v_i = u_{i-1}$，则根据前一种情形，我们有 $u_{i-1} = v_i = t_i = t_{i-1} + 1$ 并标记 $u_i = t_i + 1$。在这种情况下，将 M更新为 $M \cup \{e_i\}$，其中 $e_i = \{x_{t_i}, y_{t_i+1}\}$。

(情形 iB) 假设 $\mathcal{N}_G(v_i) \subseteq \mathcal{N}_G[v_1] \cup \cdots \cup \widehat{\mathcal{N}_G[v_i] \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G[v_k]}$. 然后存在一个$u_i \in \{v_{i+1}, \ldots, v_k\}$ 满足引理 4.4 的条件，否则 $\{v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k\}$

将是 G的极小补全集。令 $u_i = v_{i+j}$ 使得 j 是最小的。在这种情况下，我们将 V重新标记如下:

$$\begin{aligned} \text{Label } v_{i+j} \text{ as } v_{i+1},\\ v_{i+1} \text{ as } v_{i+2},\\ \vdots\\ v_{i+j-1} \text{ as } v_{i+j}, \end{aligned}$$

以及其他项将保持不变。注意， V中顶点的新排序也满足性质（4.1）。因此，我们可以继续使用这一排序。现在，标记

$$v_i = t_i = \begin{cases} t_{i-1}+1 \text{ if } u_{i-1} = v_i \text{ in step-(i-1)} \\ t_{i-1}+2 \text{ if } u_{i-1} \neq v_i \text{ in step-(i-1)} \end{cases}$$

以及 $u_i = v_{i+1} = t_{i+1} = t_i + 1$。在这种情况下，我们将集合 M 更新为 $M \cup \{e_i\}$, 其中 $e_i = \{x_{t_i}, y_{t_i+1}\}$。

完成 k 步后，我们得到一个集合 M，它由 k 条边 e_1、 . . . 、 e_k 个 $\mathcal{H}$组成，其中 $e_i = \{x_{t_i}, y_{t_i+1}\}$，使得

$$\sum_{i=1}^{k} (|e_i| - 1) = k.$$

断言：集合 M 在 $\mathcal{H}$ 中构成一个诱导匹配。

断言的证明。令 $\mathcal{S} = \bigcup_{e\in M} e$。于是 $\mathcal{S} = \{x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}, y_{t_1+1}, \ldots, y_{t_k+1}\}$。根据我们的选择和顶点标号，显然 M 中任意两个元素都不相交。现在我们将证明， $\mathcal{H}$ 中包含于 $\mathcal{S}$ 的边只有属于 M 的边。假设对于某个 $i \neq j$ 和 x_{t_i}， $\{x_{t_i}, y_{t_j+1}\} \in E(\mathcal{H})$，且 $y_{t_j+1} \in \mathcal{S}$。那么 $t_j + 1 > t_i + 1$，并且 $\{t_i, t_j + 1\} \in E(G)$。我们选择 u_j 使得 $u_j \notin \mathcal{N}_G(v_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_G(v_{j-1})$, 因此 $t_j + 1 \notin \mathcal{N}_G(t_i)$，因为 $t_i < t_j$，这就产生了矛盾。因此，当 $i \neq j$ 且 x_{t_i} 时， $\{x_{t_i}, y_{t_j+1}\} \notin E(\mathcal{H})$，其中 $y_{t_j+1} \in \mathcal{S}$。所以， $\mathcal{H}$ 中基数为二且包含于 $\mathcal{S}$ 的边只有属于 M 的边。假设 $e \in E(\mathcal{H})$，使得 $e \notin M$ 且 $e \subseteq \mathcal{S}$。那么 $|e| > 2$。对于 e，在 G 中存在一条可容许路径 π： $t_i = \alpha_0, \ldots, \alpha_l$，使得 $\text{supp}(u_\pi x_{t_i} y_{\alpha_l}) \subseteq \mathcal{S}$。如果 $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ 中的某个元素（设为 α_r）满足 $t_p + 1$，且 $t_p + 1 \notin \{t_1, \ldots, t_k\}$，那么根据我们对 u_i 的选择， α_{r-1} 或 α_{r+1} 都不能属于 $\{t_1, \ldots, t_k\}$。因为，若 $t_p + 1 \notin \{t_1, \ldots, t_k\}$，则 $t_p + 1$ 在 $\{t_1, \ldots, t_k\}$ 中仅与 t_p 相邻。假设对于某个 $t_q \in \{t_1, \ldots, t_k\}$， $\alpha_{r-1} \notin \{t_1, \ldots, t_k\}$ 且 $\alpha_{r-1} = t_q + 1$。在这种情况下，我们会得到一个长度大于 3 的诱导圈，它包含顶点 $\{t_p, t_p + 1, t_q + 1, t_q\}$ 以及 $\{t_1, \ldots, t_k\}$ 中的某些顶点，这与 G 是弦图这一事实矛盾。同样，若 $\alpha_{r+1} \notin \{t_1, \ldots, t_k\}$，也会导致矛盾。因此，我们必有 $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_l\} \subseteq \{t_1, \ldots, t_k\}$。现在，对于某个 j， $\alpha_l = u_j$。那么 $v_j \notin \{\alpha_0, \ldots, \alpha_l\}$，因为根据我们的选择标记， $t_i <$ 是 $v_j <$ 的标号， u_j 是 $v_j <$ 的标号。因此，在 $G[\{v_1, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_k, u_j\}]$ 中存在一条从 u_j 到 v_1 的路径，这与引理 4.4 矛盾。所以， M 在 $\mathcal{H}$ 中构成一个诱导匹配。

根据 [4, 推论 2.7], , 我们有 reg(S/J_G) = reg(S/在<(J_G) 中)。再由命题 4.3, $k \leq$ reg(R/在<(J_G) 中), 因为 M 是 $\mathcal{H}$ 中的一个诱导匹配, 且 $\sum_{e\in M}(|e|-1) = k$。完备化集 V 是任意选取的, 因此 max-comp(G) $\leq$ reg(S/J_G)。□

定理4.6.如果一个图 G 具有一个极小补全集 $\{v_1,\ldots,v_k\}$, 使得对于每个$\frown$ $1 \leq i \leq k$ 存在 $u_i \in \mathcal{N}_G(v_i)$ 使得 $u_i \notin \mathcal{N}_G[v_1] \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{N}_G[v_i] \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{N}_G[v_k]$, 那么 $\mathrm{v}_\emptyset(J_G)$ $\leq k \leq$ 正则性 (S/J_G)。

证明。让我们将每个 $1 \leq i \leq k$ 的顶点 v_i 标记为 i , 并将顶点 u_i 标记为 $k+i$ 。其余顶点可以任意标记。令 $\mathcal{H}$ 为关于我们所选标记的 in<(J_G)所对应的超图。现在考虑集合 $M = \{e_1,\ldots,e_k\} \subseteq E(\mathcal{H})$, 其中对于每个 $i = 1$, $e_i = \{x_i, y_{k+i}\} \in E(\mathcal{H})$, ..., k。查看 J_G 的 Gr¨obner 基, 很容易看出, M 在 $\mathcal{H}$ 中构成一个诱导匹配-$\frown$, 因为 $k+i \in \mathcal{N}_G(i)$, 但 $k+i \notin \mathcal{N}_G[1] \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{N}_G[i] \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{N}_G[k]$。因此, 根据命题 4.3, 正则性($S/I(\mathcal{H})$) $\geq \sum_{i=1}^{k} |e_i| - 1$。于是, 由推论 2.7] 和定理 3.6, 我们得到 $\mathrm{v}_\emptyset(J_G) \leq k \leq$ 正则性($S/I(\mathcal{H})$) = 正则性(S/J_G)。□

定义4.7。设 G 是一个具有 $V(G) = \{v_1,\ldots,v_n\}$的图。 G的胡须图记为 W_G, 是按如下方式将 n 个新顶点 $\{u_1,\ldots,u_n\}$ 连接到 G 的图:

- $V(W_G) = \{v_1,\ldots,v_n,u_1,\ldots,u_n\}$,
- $E(W_G) = E(G) \cup \{\{v_i,u_i\} \mid i = 1,\ldots,n\}$.

推论4.8. 设 G 是一个图, 满足 $V(G) = [n]$。则 $\mathrm{v}_\emptyset(W_G) = n \leq$ 正则性(S/J_{W_G}).

证明。注意到 $\{1,\ldots,n\}$ 包含于每个 W_G 的完备化集中。然而, $\{1,\ldots,n\}$ 本身就是 W_G 的一个极小补全集。因此, $\{1,\ldots,n\}$ 是 W_G 唯一的极小补全集。于是, 由定理 3.6 和定理 4.6 可得所需结果。□

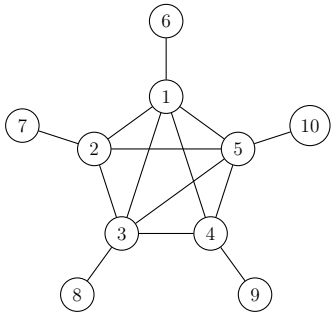


图2。图 G with $\ell(G) < \mathrm{v}_\emptyset(J_G) <$ 正则性(S/J_G)。

例 4.9。设 G 为图2所示的图, 且 $S = \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_{10},y_1,\ldots,y_{10}]$。使用 Macaulay2, 我们得到 reg($S/J_G$) = 6。此外, 我们看到 $\ell(G)$ = 是 $G = 4$ 中最长诱导路径的长度。根据推论 4.8, 我们得到 $\mathrm{v}_\emptyset(J_G) = 5$。因此, 我们有 $\ell(G) <\mathrm{v}_\emptyset(J_G) <$ reg(S/J_G)。此例表明, 与 Matsuda 和 Murai 给出的下界 [27] 相比, $\mathrm{v}_\emptyset(J_G)$ 可以为二项式边理想的正则性提供更好的下界。

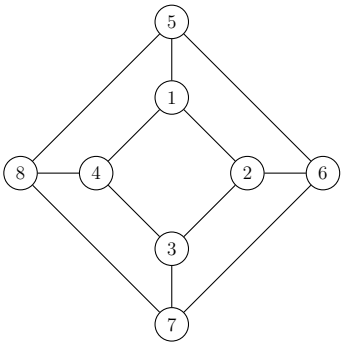


图3. 图 G 其中 v(J_G) = v$_\emptyset$(J_G) = 正则性(S/J_G)

例 4.10。设 G 为图 3 所示的图，且 $S = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_8, y_1, \ldots, y_8]$。使用 [11, 过程 A1] 和 Macaulay2，我们得到 v(J_G) = 4 且 reg(S/J_G) = 4。另一方面，$\{1, 2, 3, 4\}$ 是 G 的完备化集。因此，根据定理 3.6，v$_\phi$(J_G) = 4 。在此例中，我们得到 v(J_G) = v$_\emptyset$(J_G) = reg(S/J_G)。因此，定理 4.6 中给出的界是紧的。

定理 4.11。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个图 G 使得正则性(S/J_G)–v(J_G) = n。此外，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个图 G 使得正则性(S/J_G) – v$_\emptyset$(J_G) = n。

证明。对于 $n = 0$，结论由例 4.10 得出。令 $n \in \mathbb{N}^+$。考虑图 $H = P_{n+2}$，它是一个具有 $n + 2$ 个顶点的路径图。于是由 [14, 推论 7.35], 可得 reg(S/J_H) = $n + 1$。现在，令 G = cone(v, H)，其中 $v \notin V(H)$。于是，由定理 3.20 可得 v(J_G) =v$_\emptyset$(G) = 1 。此外，利用 [20, 定理 2.1], , 可得 reg(S/J_G) = $n + 1$。因此，得到 reg(S/J_G) − v(J_G) = ($n + 1$) − 1 = n。在此情形下，v(J_G) = v$_\emptyset$(J_G)，并且进一步的假设成立。□

5. 一些未解决问题 关于 v(J_G)

在第 3 节中，我们讨论了二项式边理想的 v-数的一些性质，并给出了一个组合界。在 [16], 中，作者成功地给出了图的边理想的 v-数的组合描述。我们提出以下关于二项式边理想的 v-数的组合方面的问题。

问题 5.1. 设 G 是一个简单图。能否仅利用图 G 的组合性质，找到某个齐次多项式 f，使得 v(J_G) = deg(f)? 等价地，是否存在某个图不变量 G ，使其等于 v(J_G)?

在定理 3.15中，我们证明了对于某些类别的二项式边理想，v(J_G) ≤ v(in$_<$(J_G))，并且作为应用，我们在推论3.17 中得到，对于弱闭图，v(J_G) ≤ v(in$_<$(J_G)) 成立。此外，我们在例3.18 中看到，v(in$_<$(J_G))取决于顶点标号，并且 v(J_G)可以严格小于 v(in$_<$(J_G))。借助这些结果和我们的计算，我们提出以下问题。

问题 5.2. 对于所有具有任意标记方式的图 G，$\mathrm{v}(J_G) \leq \mathrm{v}(\mathrm{in}_<(J_G))$ 是否成立？如果不成立，那么对于图 G，我们能否说存在一种 $V(G)$ 的标记方式，使得 $\mathrm{v}(J_G) \leq \mathrm{v}(\mathrm{in}_<(J_G))$ 成立？

在第 4 节中，我们尝试探究 v-数与二项式边理想的（Castelnuovo-Mumford）正则性之间的关系。在定理 4.5 和定理 4.6 中，我们证明，对于包括弦图和胡须图在内的若干大类图，$\mathrm{v}_\emptyset(J_G) \leq \mathrm{reg}(S/J_G)$。借助[11, Procedure A1] 和 Macaulay2 [10], ，我们考察了若干类别中的许多图，并发现对于所有这些图，$\mathrm{v}_\emptyset(J_G) \leq \mathrm{reg}(S/J_G)$ 均成立。基于强烈的直觉，我们提出以下猜想。

猜想 5.3. 设 G 为一个简单图。则 $\mathrm{v}_\emptyset(J_G) \leq \mathrm{reg}(S/J_G)$。特别地，我们有 $\mathrm{v}(J_G) \leq \mathrm{reg}(S/J_G)$。

参考文献

[1] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G.，《交换代数导论》，Addison-Wesley，Reading, Mass（1969）。[2] Cartwright, D.; Sturmfels, B.，《射影空间乘积中对角线的希尔伯特概形》，Int. Math. Res. Not. IMRN，（2010），第9期，1741–1771。[3] Civan, Y.，《图的 v-数与 Castelnuovo-Mumford 正则性》，J. Algebraic Combin. 57（2023），第1期，161–169。[4] Conca, A.; Varbaro, M.，《无平方 Gr¨obner 退化》，Invent. Math. 221（2020），第3期，713–730。[5] Conca, A.; De Negri, E.; Gorla, E.，《与图和线性空间相关的 Cartwright-Sturmfels 理想》，J. Comb. Algebra 2（2018），第3期，231–257。[6] Conca, A.; De Negri, E.; Gorla, E.，《通用 Gr¨obner 基与 Cartwright-Sturmfels 理想》，Int. Math. Res. Not. IMRN（2020），第7期，1979–1991。[7] Cooper, S.M.; Seceleanu, A.; Tohˇ aneanu, S¸. O.; Vaz Pinto, M.; Villarreal, R.H.，《广义最小距离函数与 Geramita 理想的代数不变量》，Adv. Appl. Math. 112（2020），34页。[8] Ene, V.; Herzog, J.; Hibi, T.，《Cohen-Macaulay 二项式边理想》，Nagoya Math. J. 204（2011），57–68。[9] Ene, V.; Zarojanu, A.，《关于二项式边理想的正则性》，Math. Nachr. 288（2015），第1期，19–24。[10] Grayson, D.; Stillman, M.，《Macaulay2：代数几何研究软件系统》，网址：http:// www .math .uiuc .edu /Macaulay2/。[11] Grisalde, G., Reyes, E. 和 Villarreal, R.H.，《诱导匹配与分次理想的 v-数》，Mathematics，9(22)，2860（2021）。[12] H`a, H. T.; Nguyen, H. D.; Trung, N. V.; Trung, T. N.，《理想和的符号幂》，Math. Z. 294（2020），第3–4期，1499–1520。[13] Herzog, J.; Hibi, T.; Hreinsd´ottir, F.; Kahle, T.; Rauh, J.，《二项式边理想与条件独立陈述》，Adv. in Appl. Math. 45.3（2010），第317–333页。[14] Herzog, J., Hibi, T. 和 Ohsugi, H.《二项式理想》，Springer，321页，（2018）。[15] Hochster, M.; Jeffries, J.，《素理想扩张、平坦性与交平坦性》，《交换代数——与 Roger 和 Sylvia Wiegand 共事150年》，63–81，Contemp. Math., 773，Amer. Math. Soc.，（2021）。[16] Jaramillo, D.; Villarreal, R. H.，《边理想的 v-数》，J. Combin. Theory Ser. A 177（2021），105310，35页。[17] Jaramillo-Velez, D.; Seccia, L.，《图中的连通支配与二项式边理想的 v-数》，预印本 arXiv:2304.04898（2023），第1–19页。[18] Jayanthan, A. V.; Narayanan, N.; Raghavendra Rao, B. V.，《树的二项式边理想正则性的上界》，J. Algebra Appl. 18（2019），第9期，1950170，7页。

[19] Kiani, D.; Saeedi Madani, S.，《二项式边理想的 Castelnuovo-Mumford 正则性》，J. Com- bin. Theory Ser. A 139（2016），80–86。[20] Kiani, D.; Saeedi Madani, S.，《正则性为3的二项式边理想》，J. Algebra 515（2018），157–172。[21] Kiani, D.; Rouzbahani Malayeri, M.; Saeedi Madani, S.，《关于二项式边理想正则性猜想的证明》，J. Combin. Theory Ser. A 180（2021），论文编号105432，9页。[22] Knutson, A.，《Frobenius 分裂、点计数与退化》，（2009），预印本 arXiv:0911.4941。[23] Kumar, A.，《二项式边理想及其正则性的界》，J. Algebraic Combin. 53（2021），第3期，729–742。[24] Lerda, A.; Mascia, C.; Rinaldo, G.; Romeo, F.，《（S_2）-条件与 Cohen-Macaulay 二项式边理想》，J. Algebraic Combin.（2022），DOI：https://doi.org/10.1007/s10801-022-01173-8。[25] Seccia, L.，《弱闭图的二项式边理想》，Int. Math. Res. Not. IMRN（2022），rnac346，DOI：https://doi.org/10.1093/imrn/rnac346。[26] Matsuda, K.，《弱闭图与二项式边理想的 F-纯性》，Algebra Colloq. 25（2018），第4期，567–578。[27] Matsuda, K.; Murai, S.，《二项式边理想的正则性界》，J. Commut. Algebra 5（2013），第1期，141–149。[28] Morey, S.; Villarreal, R. H.，《边理想：代数与组合性质》，《交换代数进展1》，85–126，de Gruyter，柏林，2012。[29] Ohtani, M.，《图与由某些2阶子式生成的理想》，Comm. Algebra 39.3（2011），第905–917页。[30] Rauf, A.; Rinaldo, G.，《Cohen-Macaulay 二项式边理想的构造》，Comm. Algebra 42.1（2014），第238–252页。[31] Saeedi Madani, S.，《二项式边理想：综述》，《多分次代数及其应用》，83–94，Springer Proc. Math. Stat., 238，Springer，Cham，2018。[32] Saha, K.; Sengupta, I.，《单项式理想的 v-数》，J. Algebraic Combin. 56（2022），第3期，903–927。[33] Saha, K.; Sengupta, I.，《图的围长与二项式边理想的 Cohen-Macaulay 性质》，预印本 arXiv:2212.05708（2022），第1–20页。印度古吉拉特邦甘地讷格尔 Palaj，IIT Gandhinagar 数学学科，邮编382055。电子邮箱：siddhi.ambhore@iitgn.ac.in 印度古吉拉特邦甘地讷格尔 Palaj，IIT Gandhinagar 数学学科，邮编382055。电子邮箱：kamalesh.saha@iitgn.ac.in 印度古吉拉特邦甘地讷格尔 Palaj，IIT Gandhinagar 数学学科，邮编382055。电子邮箱：indranathsg@iitgn.ac.in