arXiv:2304.06435v2 [math.AT] 3 Jul 2023

扩张幂与自由无限循环空间的上同调环

LORENZO GUERRA、PAOLO SALVATORE 和 DEV SINHA

摘要。我们计算了扩张幂的模-p上同调，以及它们的群完备化（即自由无限循环空间）的模-p上同调。我们将一个空间的所有扩张幂的上同调放在一起考察，并识别出一种带有除幂的 Hopf 环结构；在这种结构中，杯积结构比单独考察时更容易计算。我们的工作建立在此前对对称群上同调的计算之上；对称群的上同调就是点的扩张幂的上同调。我们还利用了广为人知的同调计算结果，以及关于系数取符号表示的对称群上同调的新结果。随后，我们运用这一框架来理解相关空间的上同调环，例如无限扩张幂和自由无限循环空间。

1. 引言

相对于迭代积上的对称群作用的同伦轨道空间，称为扩张幂，在代数拓扑中发挥着许多关键作用。Steenrod 将其引入，作为研究上同调运算的核心角色 [Ste53]。谱的扩张幂在 Nishida 证明其幂零定理时发挥着至关重要的作用 [Nis75]。根据 Barratt-Priddy-Quillen 定理 [BP72]，经过群完备化后，无限扩张幂函子为自由无限循环空间函子提供了一个模型 Q。May 及其合作者证明，扩张幂的稳定版本不仅对于定义结构化环谱至关重要，也为人们打开了通往广泛现象的大门，而这些现象此前都只能以临时方式处理 [BMMS86]。除了必然在导出代数中发挥作用外，扩张幂和自由无限循环空间的现代应用范围也十分广泛，例如涵盖函子演算 [AM99] 以及映射类群的稳定上同调 [Gal04]。

我们重点研究这些空间的上同调环，因为这种环结构是最基本的非稳定同伦结构。这些环长期以来一直通过同调和余乘积计算得到隐含的理解 [CLM76]。但这类计算需要应用 Kudo-Araki-Dyer-Lashof 运算的 Adem 关系，因此难以处理。与我们关于对称群和交错群的研究一样 [Gue17，GSS12，GS17]，我们发现，将上同调环结构与转移（或归纳法）乘积结合起来时，最容易理解；这种乘积最初由 Strickland 和 Turner 定义 [ST97]。例如，我们在这一背景下采用的技术推动了 Curtis-Wellington 谱序列的进一步发展 [Hun]。

因此，我们的工作既与成熟的同调计算并行，也在其基础上进一步发展。在[CLM76], 中，扩张幂的同调整体构成一个 Dyer-Lashof 代数上的代数，其行为与 Steenrod 代数上的空间上同调环类似，事实上二者还可以建立联系 [May70]。我们的呈示也将上同调环结构纳入一种更大的结构中，最终将上同调呈示为“带有加法除幂的泛分量超 Hopf 环”，而其关系集很小，甚至为空。在阐明这类 Hopf 环结构之前，对对称群分类空间（即一点的扩张幂）的模 2 上同调环的计算描述十分繁复 [AM04、Fes02], ，而奇素数情形则完全没有相关计算。

我们在第 2 节阐述这些所需的代数概念，并建议读者先阅读首要结果的陈述，即定理 2.34 至 2.38 ，以便在详细研读该节之前了解代数工作的目标。这些陈述极其简洁，

2020 数学主题分类。 20J06, 20B30。前两位作者感谢 MIUR 卓越系项目，该项目授予罗马第二大学数学系，CUP E83C18000100006。

鉴于例如各个分量环的复杂性，这一点颇为难得。在奇素数情形下，如果不同时使用平凡系数和扭曲系数，就无法做到如此简洁。接下来，我们在相应的代数框架中构造加法基。在将关于同调的众所周知的结果扩展到扭曲系数情形之后，为了得到最简洁的陈述，我们证明关于基环的定理，即定理 2.34 和 2.35，见第 3 节。然后，我们利用这些结果证明首要定理，即定理 2.37 和 2.38，见第 4 节。我们的策略是利用两个乘积和除幂结构，在上同调中构造一组类，使其与同调中的标准基形成完美配对。这一完美配对既确立了这组上同调类作为一个基，也验证了支配这些类的代数表示。

在处理带有不交基点的扩张幂的上同调之后，我们在第 DX节中计算了 $D_\infty X$、 CX （定义如下）以及 QX 的上同调。5对于 CX 和 QX ，这些结果重现了 Dung 对 QX 在 $p=2$ 时的上同调环的描述，并为奇素数给出了新结果。

尽管我们着力寻找恰当的代数结构，并依赖代数拓扑和群上同调中的标准技巧以及先前的同调计算，但几何学一直启发并引导着我们。我们研究 $C(X)$，即以 X 为底的自由 E_∞-空间。我们取 $E\mathcal{S}_n$ 为 $\mathbb{R}^\infty$ 中由 n 个点组成的（有序）构形空间

$$E\mathcal{S}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^\infty)^n : x_i \neq x_j \forall i \neq j\},$$

其上 $\mathcal{S}_n$ 通过置换坐标发挥作用。

定义 1.1。设 X 是一个带基点拓扑空间。令 $\phi_{i,\ n}$: $E\mathcal{S}_n \to E\mathcal{S}_{n-1}$ 为忘掉构形中第 i^{th} 个点的映射。令 $s_{i,\ n}$: $X^{n-1} \to X^n$ 为将基点添加为第 i^{th} 个坐标的映射。定义 CX 为标签取自 X、位于 $\mathbb{R}^\infty$ **中的构形空间，其定义为** $\bigsqcup_{n\geq 0} E\mathcal{S}_n \times_{\mathcal{S}_n} X^n/\sim$，其中 $\sim$ 是由下列关系生成的等价关系：对所有 $a \in E\mathcal{S}_n$ 和 $b \in X^{n-1}$，$(\phi_{i,\ n}a,\ b) \sim (a, s_{i,\ n}b)$。

我们考虑这一模型的有限维版本，其中某些 $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^\infty$中的点数有限；此时，如果 X 是流形，那么这个商空间也是流形。在这种情形下，我们可以使用几何链和上链[FMS22]。通过 Kudo-Araki-Dyer-Lashof 运算，同调方面的情况已广为人知，这些运算显然具有几何意义。如果 f：$P \to X$ 表示一个模二几何同调类 y ，那么我们可以将 $S^i \times_{C_2} (P \times P)$映射到 CX，方法是将 $v \times p_1 \times p_2$ 映到这样一个构形：其中两个点分别位于 v、 $-v$，标签为 $f(p_1)$和 $f(p_2)$。所得的几何同调类表示运算 $q_i(y)$。在上同调方面，与之类似的几何上链将是 CX 的一个子流形，其中底层构形中的两个点共享第一个坐标，且它们的标签都属于某个几何上链$W \to X$。这种几何直觉引导我们构建主要结构：杯积通常对应于交，传递积对应于一种“并集”，而除幂则对应于“重复”。

我们看到，基于这项工作还有许多值得开展的研究。正如注释2.39所述，全面理解上同调上的除幂运算会很有意思，也可能揭示更深层的结构，因为我们只在有限的一些类上使用了这些运算。同调与上同调之间的配对并非克罗内克配对，但很可能会派上用场，因为这两种情形中最容易表达的结构有所不同。我们在计算 Steenrod 运算方面取得了部分进展，这是一项值得考虑的自然“自利式”计算。像本文这样更自然地计算杯积，有助于将这些计算推广到广义上同调理论；甚至可以先探究转移积是否存在除幂运算，这是一个很有意思的问题。我们猜测并不存在，因为转移积类似于埃伦伯格–麦克莱恩空间同调上的庞特里亚金积，而后者具有除幂结构 [Car55，HHP+]；不过，其他无限循环空间的同调则具有 Dyer-Lashof 运算。与此相关，或许还能通过转移积的高阶代数增强，进一步将这些结构联系起来；若果真如此，这些精妙复杂的结构很可能都能追溯到 $\mathbb{R}P^1$ 和 $\mathbb{C}P^1$的同调。

目录

1. 引言 2. 具有加法除幂结构的 DX 上的上同调 Hopf 环2.1. 预备知识 2.2. 具有加法除幂的分量霍普夫环 1 3 3 4

2.3. 代数扩张幂函子 62.4. 带乘积级数系数的对称群上同调上的除幂 102.5. 首要结果的陈述 132.6. （相对）泛的带除幂的分支霍普夫环的显式构造 153. 带扭曲系数的对称群的同调与上同调 173.1. 用 KADL 运算表示扩张幂的同调 173.2. 以符号表示为系数的对称群上同调，模p 194. 带基点的扩张幂的上同调环 244.1. 的上同调的加法基 4.2. 配对分析 275. 进一步的上同调环计算 295.1. 一般扩张幂 295.2. 无限扩张幂 305.3. 自由 E_∞ 空间 345.4. 自由无限循环空间 35参考文献 36

2. DX上同调的加法除幂结构 Hopf 环

本节介绍具有加法除幂结构的分量 Hopf 环的代数结构。我们将在推论2.31 中证明，这一结构适用于扩张幂的上同调，随后在定理 2.35中给出该上同调的一个显式呈示。

2.1. **预备知识**。扩张幂是我们首先研究的主要对象。以下始终假设X 是豪斯多夫且紧生成的，并且任意基点都有一个邻域变形收缩。

定义 2.1。若空间 E 和 Y 都是 $\mathcal{S}_n$-空间，且其作用保持 Y的基点不变，则$E \rtimes_{\mathcal{S}_n} Y$定义为商空间 $((E)_+ \wedge Y)/\mathcal{S}_n$，其中 $(E)_+$ 是添上一个不交基点后的 E，而 $\mathcal{S}_n$ 以对角方式作用。

定义 n^{th} **扩张幂** X 为 $D_nX = E\mathcal{S}_n \rtimes_{\mathcal{S}_n} X^{\wedge^n}$。令 $DX = \bigvee_n (D_nX)$。回想一下，若X 是一个 G-空间，我们令 X_{hG} 表示同伦商 $EG \times_G X$，因此 $X^n{}_{h\mathcal{S}_n} = D_n(X_+)$。我们还将考虑 D_n的这个非基点版本，并用符号 D 来区分二者。因此$D(X) = X_{h\mathcal{S}_n}$。

对于 $p = 2$，令 $H_{EP}{}^*(X) := \bigoplus_{n\geq 0} H^*(D_nX; \mathbb{F}_2)$。

对于奇素数，令 $H_{EP}{}^*(X) := \mathbb{F}_p \oplus \bigoplus_{n\geq 1} H^*(D_nX; \mathbb{F}_p \oplus sgn)$，其中 $\mathbb{F}_p$ 表示平凡表示， sgn 是符号表示。这些对象按分支和次数双重分次；在奇素数情形下，还带有由 $\mathbb{F}_p \oplus sgn$上的显然分次所诱导的模二分次。

˜观察 $D（X）\cong D（X_+）\cong C（X_+）$。

我们同时采用扩张幂拓扑构造的代数和几何变体，使用代数为我们的论证提供主要框架。几乎根据定义， D_nX的上同调是 n重张量积 X的上链的等变上同调。但下面的基本计算表明，我们只需考虑 X 的上同调（例如参见[May70], 引理 1.1）。

命题 2.2。存在自然同构 $H^*(D_nX; \mathbb{F}_p) \cong H^*(\mathcal{S}_n; \widetilde{H}^*(X; \mathbb{F}_p))^{\otimes n})$，同调中也同样如此，并且与标准配对相容。

我们的主要结果给出了以下三个相关空间的上同调环，其系数为 $\mathbb{F}_p$，它们分别是 DX，拓扑空间 X 的扩张幂， CX， E_∞ 上的自由 X-空间，以及 QX， X 上的自由无限环路空间。由于这些空间作为余代数的同调已为人所知，且只取决于 X [CLM76], 的同调，我们的第一步是构造代数函子，以 X 的上同调环为输入，并生成这些空间的上同调环。

2.2. **具有加法除幂的分量霍普夫环**。 我们主要在严格意义上的双分次情形下工作，也就是说，第一分次不同的元素之间的乘积为零。

定义 2.3。 设 $(H,\Delta,\cdot)$ 是 R 上的一个双代数。若 H 是一个**双分次分量双代数**，则称之为$H=\bigoplus_{n、d\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} H_{n、d}$，其中

- 乘积将 $H_{m、i}\otimes H_{m、j}$ 映射到 $H_{m、i+j}$
- 当 $x\in H_{m、i}$、 $y\in H_{n、j}$ 且 $n\neq m$ 时， x 与 y 的乘积为零
- 余乘积按标准方式进行双分次，将 $H_{p、k}$ 映射到 $\bigoplus_{n+m=p、k=i+j} H_{n、i}\otimes H_{m、j}$。

元素的第一个分次称为其**分支**，而第二个分次称为其**维数**。对于这样的 H，令 $\overline{H}$ 表示 $H_{n、d}$ （其中 $n>0$，以及所有 $d\geq 0$）的直和。我们要求满足连通性条件 $A=\mathrm{im}(\eta)\bigoplus\overline{A}$，其中 η: $R\to A$ 是单位元映射的像。

类似地，**超分量双代数**是一个以 $\mathbb{N}\times\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ 为分次、满足这些相同公理的双代数。

回顾一下，幺半环（不含负数的环）满足除加法逆元存在性之外的所有环公理。

定义 2.4。 **Hopf 环** H 是余代数范畴中的一个幺半环对象，因此有两个乘积：“乘法乘积” $\cdot$ 和“加法乘积” $\odot$，二者都与同一个余乘积 Δ 一起构成双代数，并满足分配公理： $a\cdot(b\odot c)=\sum_{\Delta a=\sum a'\otimes a''}(a'\cdot b)\odot(a''\cdot c$。

双分次分量霍普夫幺半环（分别地，**超分量霍普夫环架**）是指 $(H,\cdot,\Delta)$ 构成双分次分量双代数（分别地，超分量双代数），且 $\odot$ 保持两种分次。在此情形下，我们通过引入一个系数 $(-1)^{|a''||b|}$ 来修改上述分配公理，该系数对应于通常的 Koszul 符号。

我们要求结构态射关于维数是分次（余）交换的。当不一定满足这一交换性条件时，我们称之为**非交换双分次分量霍普夫幺半环**。

我们研究的霍普夫幺半环都具有反元，因此也是霍普夫环。不过我们不需要反元结构，只会顺带提及。霍普夫环最早出现于拓扑学中，用于研究表示具有乘积结构的上同调的无限循环空间的同调[Mil70、RW80、Wil00]。不过，遵循 Strickland 和 Turner 的做法 [ST97], ，我们发现它们对于描述对称群的上同调至关重要。霍普夫环的一个有趣相关情形，是在对称多项式环上引入归纳乘积或对称化乘积。想了解具体例子的读者，可以参见 [GSS12]的第二节。

我们将证明， DX 的上同调不仅是一个霍普夫幺半环，还带有除幂运算。

定义 2.5。 **除幂代数** 是一个三元组 (A,I,γ)，其中 A 是一个代数， $I\trianglelefteq A$ 是一个真理想，而 $\gamma=\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是从 I 到 I的一族函数，也记作 $x^{[n]}:=\gamma_n(x)$，满足以下关系，其中 x、 $y\in I$ 和 $\lambda\in A$:

(1) $x^{[0]}=1$，$x^{[1]}=x$ (**对乘法的分配律**)(4) $x^{[n]}x^{[m]}=\binom{n+m}{n}x^{[n+m]}$ (**指数法则**)

(2) $(x+y)^{[n]}=\sum_{i=0}^{n}x^{[i]}y^{[n-i]}$

(3) $(\lambda x)^{[n]}=\lambda^n x^{[n]}$. (**复合**)

(5) $(x^{[m]})^{[n]}=(nm)!\,(m!)^n n!x^{[nm]}$.

我们也将这样的三元组称为**除幂结构**，定义在代数 A上。它们由[Car55],引入，此后已在各种语境中得到广泛研究和应用，例如见 [Rob65], ，我们沿用其中的记号，以及 [Ber74、Haz78]。在代数拓扑中，埃伦伯格–麦克莱恩空间的同调是除幂代数 [EML54、Tho57]。

这些关系意味着形式幂级数 $f(t)=\sum_{i=0}^{\infty}x^{[i]}t^i\in A[[t]]$ 满足 $f(0)=1$ 并且 $f(t+s)=f(t)f(s)$。满足这些条件的 $f\in A[[t]]$ 的集合Exp(A)构成一个 R-模。将Exp 视为从 R-代数到 R-模的函子时，其左伴随是自由除幂函子 DP，其明确定义如下。

定义 2.6. 对于一个 R-模 M，令 $DP(M)$为 **由** M生成的自由除幂代数，其作为代数由集合 $\{x^{[n]}\}$生成，其中 $x \in M$，并施加定义 2.5中的关系 (1)-(5)。理想 I 由满足 $x^{[n]}$ 的 $n \geq 1$ 组成，除幂映射则通过定义 2.5中的二项式、标量乘法和复合关系来定义。

若 M是分次的，则 $DP(M)$ 和泛映射自然也具有分次结构。在域上，若 M是有限维的，则 $DP(M)$ 有一个标准的加法基；给定 M 的一组基 $\{x_1, \ldots, x_r\}$，我们可以将该加法基与之对应，即 $\left\{\prod_{i=1}^{r} x_{i[n_i]}\right\}_{n_i \in \mathbb{N}^\circ}$

定义 2.7。 对于除幂代数 (A, I, γ)，**张量积** $A \otimes A$ 具有自然的除幂结构 $(A \otimes A, A \otimes I + I \otimes A, \gamma_\otimes)$，其定义为：对 $x \in I$ 和 $y \in A$，有 $(x \otimes y)^{[n]} = x^{[n]} \otimes y^n$ 和 $(y \otimes x)^{[n]} = y^n \otimes x^{[n]}$。

A **除幂双代数**是双代数 H 上的除幂结构 $(H, \overline{H}, \gamma)$，其中 $\overline{H}$是余单位的核，并且余乘积 $\Delta\colon H \to H \otimes H$ 是除幂结构态射。

在分次情形下，我们要求除幂运算与次数相容，即 $\deg(x^{[k]}) = k\deg(x)$。在特征不等于二的情况下，奇数次元素的平方为零，因而更高次幂也为零，所以在这种情形下，$x^{[k]} = 0$ 当 $\deg(x)$ 为奇数且 $k \geq 2$。对于超双分次分量情形中的奇数次类，情况也一样。根据 Milnor 和 Moore 的经典定理，分次意义下双交换的分次霍普夫代数 H 总能分解为偶部分和奇部分，其中奇因子是由奇数次本原元生成的外代数。因此，H 上的分次除幂结构等价于偶部分上标准意义下的除幂结构；而在奇部分上，指数大于一的除幂均为零。

具有除幂结构是对霍普夫代数的一项非常严格的限制。这类代数作为自由本原生成的霍普夫代数的对偶霍普夫代数出现；更一般地，它们也可作为李代数包络代数的对偶出现[Sch67, And71]。

给定一个带余单位的 R-余代数 C，令 $\varepsilon\colon C \to R$为余单位，$\overline{C} = \ker(\varepsilon)$。余乘积 $\Delta\colon C \to C \otimes C$唯一地延拓为 $DP(\overline{C}) \to DP(\overline{C}) \otimes DP(\overline{C})$；记号滥用之下，我们仍将其记为 Δ。这是一个余结合且余交换的余乘积，并在 $DP(\overline{C})$ 上定义了双代数结构。

定义 2.8。 将 DP_{HA} 记为从 R-余代数到带有除幂的 R 上霍普夫代数的**自由除幂霍普夫代数**函子，其中 $DP_{HA}(C) = DP(\overline{C})$ 作为代数，余乘积由 C 的余乘积诱导，并通过泛性质延拓至态射。

那么，$DP_{HA}(C)$ 是从除幂双代数到
我们所使用的主要结构包含上述两种详细说明的结构。 余代数。

定义 2.9. 一个**除幂双分次分量霍普夫环**是一个七元组$(A, \odot, \cdot, \Delta, \eta, \varepsilon, \{\gamma_n\})$，满足

- $(A, \odot, \Delta, \{\gamma_n\})$ 是一个除幂双分次分量霍普夫代数
- $(A, \odot, \cdot, \Delta)$ 是一个双分次分量霍普夫环

我们还要求每个分支代数（$A_n, \cdot$）都有单位元，并且 A_n 的单位元是 A_1 的单位元的 n^{th} 除幂。

一个 **分量超霍普夫环，带有加法除幂**是如上所述的七元组，其中 A 具有额外的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次 $A = A_{even} \oplus A_{odd}$，由 Δ 和 $\cdot$保持，并且 $A_{even} \odot A_{odd} = 0$，满足以下条件：

- $(A, \odot, \Delta, \{\gamma_n\})$ 是一个除幂霍普夫代数
- $(A, \cdot, \Delta)$ 是分量超代数
- 霍普夫环分配公理在 A中成立

我们将在下文证明，我们所关注的 Hopf 环具有关于加法乘积的除幂运算，满足定义 2.9。然而，它们与乘法乘积并不以一种简单的方式相容，正如我们在注记 $\cdot$ 中所展示的2.39。

2.3. **代数扩张幂函子。** 回想一下，我们的第一个主要目标是描述这样一个代数函子：它将空间的上同调环 X 映射为其扩张幂的上同调。根据命题 2.2，这可以从群上同调的角度来理解。为获得最佳结果，在奇素数下，我们取的上同调系数包含符号表示。

定义 2.10。 设 V 是域上的 $\mathcal{S}_n$ 表示。定义空间的**扩张幂的上同调 X 取系数于 V**，记作 $H^*(D_nX;V)$，为群上同调$H^*(\mathcal{S}_n;\widetilde{H}^*(X)^{\otimes n}\otimes V)$。

在我们的应用中 V 当 $p=2$ 时取平凡表示；对于奇素数，则包含符号表示。显然，根据命题 2.2，在平凡系数的情形下，记号是一致的。

定义 2.11。 为方便起见，对于任意奇素数 p 和任意 n，令 ρ 为由$\rho=\mathbb{F}_p\oplus sgn$给出的 $\mathcal{S}_n$ 表示，其中 $\mathbb{F}_p$ 表示平凡表示，sgn 表示符号表示。

我们将 ρ 分次，其中平凡表示处于零次（偶数），符号表示处于一次（奇数）。我们利用典范同构 $\mathbb{F}_p\otimes V\cong V$和 $sgn\otimes sgn\cong\mathbb{F}_p$，在 ρ上定义分次代数结构。

在我们的设定中，所使用的系数具有乘法结构，这一结构随后反映在上同调中。

定义 2.12. 域 k 上的**乘积代数级数**是一个集合 $\{A_n\}$，其中带有 A_n $k[\mathcal{S}_n]$-代数，以及 $k[\mathcal{S}_i\times\mathcal{S}_j]$-代数的同构 $\chi_{i,j}\colon A_{i+j}\to A_i\otimes_k A_j$，这些同构相容，即满足以下两个条件：

(1) 对所有 $i,j,k>0$，以下图表在 $k[\mathcal{S}_i\times\mathcal{S}_j\times\mathcal{S}_k]$-模范畴中交换 s:

$$\begin{array}{ccc} A_{i+j+k} & \xrightarrow{\chi_{i,j+k}} & A_i\otimes A_{j+k} \\ \downarrow{\scriptstyle \chi_{i+j,k}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\chi_{j,k}} \\ A_{i+j}\otimes A_k & \xrightarrow{\chi_{i,j}\otimes\mathrm{id}} & A_i\otimes A_j\otimes A_k \end{array}$$

(2) 对所有 $n,m>0$，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} A_{n+m} & \xrightarrow{\sigma_{n,m}} & A_{n+m} \\ \downarrow{\scriptstyle \chi_{n,m}} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{m,n}} \\ A_n\otimes A_m & \xrightarrow{\tau} & A_m\otimes A_n, \end{array}$$

其中 τ 交换两个因子，而 $\sigma_{n,m}\in\Sigma_{n+m}$ 是由下式给出的置换

$$\sigma_{n,m}(i)=\begin{cases} m+i & \text{if } 1\le i\le n \\ i-n & \text{if } n+1\le i\le n+m \end{cases}.$$

超乘积代数级数是一个集合 $\{A_n\}$，其中带有 A_n $k[\mathcal{S}_n]$-模及以下附加结构：

- 每个 A_n 关于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的分次$A_n=A_{n,\,0}\oplus A_{n,\,1}$
- 一个乘积 $A_n\otimes A_n\to A_n$ 使每个 A_n 成为一个 $k[\mathcal{S}_n]$-超代数，
- 以及 $k[\mathcal{S}_i\times\mathcal{S}_j]$-模同构$\chi_{i,\,j,\,e}\colon A_{i+j,\,e}\to A_{i,\,e}\otimes_k A_{j,\,e}$对所有的 i、$j\in\mathbb{N}$和 $e\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，这些结构是相容的，即满足上述两个条件，并且使得$\chi_{i,\,j,\,0}\oplus\chi_{i,\,j,\,1}\colon A_{i,\,j}\to A_i\otimes_k A_j$ 是超代数态射。

我们注意到，乘积代数级数可以视为集中在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-次数0上的超乘积代数级数。

我们所用的乘积级数由单个代数构造而成，而这个代数最终是某个空间的上同调环。

定义 2.13. 设 A 是一个代数。定义 TA 为带有 $TA_n=A^{\otimes n}$的乘积代数级数，其典范限制为。对于奇素数，定义 $T_\rho A$ 为一个模序列，其中 $T_\rho A_n=\rho\otimes A^{\otimes n}$，其结构映射由 ρ 上的恒等映射与典范限制张量积给出。

定义 2.14. 设 $\{A_n\}$ 是一个乘积代数级数。设 $f \in H^*(\mathcal{S}_n; A_n)$ 和 $g \in H^*(\mathcal{S}_m; A_m)$，则$f$ 由一个同态表示，该同态从 $k[\mathcal{S}_n]$ 上的 k 的分解 $W_*^{\mathcal{S}_n}$映到 A_n的一个悬挂。定义系数取自 $\{A_n\}$ 的对称群上同调的初步乘法结构如下。

- 一个余乘积 $\tilde{\Delta}\colon H^*(\mathcal{S}_i + j;\ A_{i+j}) \to H^*(\mathcal{S}_i;\ A_i) \otimes H^*(\mathcal{S}_j;\ A_j)$ 由复合诱导。

$$\hom_{\mathcal{S}_{i+j}}(W_*^{\mathcal{S}_{i+j}}; A_{i+j}) \xrightarrow{\quad\rho\quad} \hom_{\mathcal{S}_i\times\mathcal{S}_j}(W_*^{\mathcal{S}_i}\otimes W_*^{\mathcal{S}_j}; A_{i+j}) \xrightarrow{\quad\chi_{i,j}\quad}$$

$$\hom_{\mathcal{S}_i\times\mathcal{S}_j}(W_*^{\mathcal{S}_i}\otimes W_*^{\mathcal{S}_j}; A_i\otimes A_j) \xrightarrow{\cong} \hom_{\mathcal{S}_i}(W_*^{\mathcal{S}_i}; A_i)\otimes\hom_{\mathcal{S}_j}(W_*^{\mathcal{S}_j}; A_j),$$

  其中 ρ 是对子群分解的限制；
- 一个传递积 $\tilde{\odot}\colon H^*(\mathcal{S}_n;\ A_n) \otimes H^*(\mathcal{S}_m;\ A_m) \to H^*(\mathcal{S}_{n+m};\ A_{n+m})$ 由

$$\hom_{\mathcal{S}_n}(W_*^{\mathcal{S}_n}; A_n)\otimes\hom_{\mathcal{S}_m}(W_*^{\mathcal{S}_m}; A_m) \xrightarrow{\cong} \hom_{\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_m}(W_*^{\mathcal{S}_n}\otimes W_*^{\mathcal{S}_m}; A_n\otimes A_m) \xrightarrow{\chi_{n,m}^{-1}}$$

$$\hom_{\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_m}(W_*^{\mathcal{S}_n}\otimes W_*^{\mathcal{S}_m}; A_{n+m}) \xrightarrow{\quad\mathrm{tr}\quad} \hom_{\mathcal{S}_{n+m}}(W_*^{\mathcal{S}_{n+m}}; A_{n+m}),$$

  其中 tr 表示通常的转移映射；
- 杯积 $\cdot$ 按标准方式定义在每个分支上：在 k over $k[\mathcal{S}_n]$ 的一个分解上沿对角线作限制，并取 A_n上的乘积

$$\hom_{\mathcal{S}_n}(W_*^{\mathcal{S}_n}; A_n)\otimes\hom_{\mathcal{S}_n}(W_*^{\mathcal{S}_n}; A_n) \xrightarrow{\cong} \hom_{\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_n}(W_*^{\mathcal{S}_n}\otimes W_*^{\mathcal{S}_n}; A_n\otimes A_n) \longrightarrow$$

$$\hom_{\mathcal{S}_n}(W_*^{\mathcal{S}_n}; A_n\otimes A_n) \longrightarrow \hom_{\mathcal{S}_n}(W_*^{\mathcal{S}_n}; A_n),$$

  不同分支之间的乘积为零；

更一般地，若从一个超乘积代数级数 $\{A_n\}$ 开始，其中有 $A_n = \bigoplus_{e\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} A_{n,e}$，我们类似地定义：

- 一个余乘积 $\tilde{\Delta}$，即与加项乘积级数 $A_{*,e}$相关联的余乘法的直和；
- 一个传递积，它在每个加项 $A_{*,e}$上限制为上文定义的传递积，并且满足：若 $f \in H^*(\mathcal{S}_n; A_{n,e})$ 和 $g \in H^*(\mathcal{S}_m; A_{m,e'})$，且 $e \neq e'$，则 $f\tilde{\odot}g$ 为零；
- 若每个 A_n 都是代数，则有如上所述的杯积 $\cdot$。

由于存在一些额外的符号（将在下文加入），这些结构目前只是初步的。

定义 2.15。 若 $\{A_n\}$ 是乘积代数级数或超乘积代数级数，则定义$H^*(\mathcal{S}_\bullet;\ A_\bullet)$为直和 $\mathbb{F}_p \oplus \bigoplus_{n\geq 1} H^*(\mathcal{S}_n;\ A_n)$。它由 $\bigoplus_{n\geq 0} H^*(\mathcal{S}_n; A_n)$ 得到：将分支 0 中的表示 $\bigoplus_{e\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} A_{0,e} \cong \bigoplus_e \mathbb{F}_p$ 经由满态射 $\sum_e$: $\bigoplus_e \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$替换为余乘积 $\tilde{\Delta}$ 和乘积 $\tilde{\odot}$

定理 2.16。 $H^*(\mathcal{S}_\bullet; A_\bullet)$ 构成一个非交换霍普夫代数，其结构定义见定义 2.14。此外，$\left(H^*(\mathcal{S}_\bullet; A_\bullet)\ \tilde{\Delta},\ \cdot\right)$ 是一个双分次分量双代数。

证明。 该定理的实质性证明已由 Strickland 和 Turner [ST97] 针对广义上同调理论给出，尤其适用于系数取平凡表示的上同调。他们的证明可以如 Giusti–Salvatore–Sinha[GSS12]所述，在群论框架下重新诠释为图示证明。在我们的情形中，对零分支所作的修改仅仅是为了确保单位元与余乘积和余单位都能正确配合。除这一点外，这些图示也证明了系数取一般超乘积代数级数时的结论，但不包括那些涉及对称群元素共轭、用于证明 $\tilde{\odot}$ 的交换性以及 $\tilde{\Delta}$的余交换性的图示。

使用以下有限覆盖的交换图来证明 $\tilde{\Delta}$ 和 $\tilde{\odot}$ 的结合律：

$$\begin{array}{ccc} B(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_l) & \longrightarrow & B(\mathcal{S}_{n+m} \times \mathcal{S}_l) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_{m+l}) & \longrightarrow & B(\mathcal{S}_{n+m+l}) \end{array}$$

当取系数为乘积级数的上同调时，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
H^*(\mathcal{S}_{n+m+l}; A_{n+m+l}) & \xrightarrow{\rho} & H^*(\mathcal{S}_{n+m} \times \mathcal{S}_l; A_{n+m+l}) & \xrightarrow{\chi_{n+m,l}} & H^*(\mathcal{S}_{n+m} \times \mathcal{S}_l; A_{n+m} \otimes A_l) & \xrightarrow{\cong} & H^*(\mathcal{S}_{n+m}; A_{n+m}) \otimes H^*(\mathcal{S}_l; A_l) \\
\downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho \otimes \mathrm{id}} \\
H^*(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_{m+l}; A_{n+m+l}) & \xrightarrow{\rho} & H^*(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_l; A_{n+m+l}) & \xrightarrow{\chi_{n+m,l}} & H^*(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_l; A_{n+m} \otimes A_l) & \xrightarrow{\cong} & H^*(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m; A_{n+m}) \otimes H^*(\mathcal{S}_l; A_l) \\
\downarrow{\scriptstyle \chi_{n,m+l}} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{n,m+l}} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{n,m} \otimes \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{n,m} \otimes \mathrm{id}} \\
H^*(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_{m+l}; A_n \otimes A_{m+l}) & \xrightarrow{\rho} & H^*(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_l; A_n \otimes A_{m+l}) & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \chi_{m,l}} & H^*(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_l; A_n \otimes A_m \otimes A_l) & \xrightarrow{\cong} & H^*(\mathcal{S}_n \otimes \mathcal{S}_m; A_n \otimes A_m) \otimes H^*(\mathcal{S}_l; A_l) \\
\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\
H^*(\mathcal{S}_n; A_n) \otimes H^*(\mathcal{S}_{m+l}; A_{m+l}) & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \rho} & H^*(\mathcal{S}_n; A_n) \otimes H^*(\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_l; A_m \otimes A_l) & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \chi_{m,l}} & H^*(\mathcal{S}_n; A_n) \otimes H^*(\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_l; A_m \otimes A_l) & \xrightarrow{\cong} & H^*(\mathcal{S}_n; A_n) \otimes H^*(\mathcal{S}_m; A_m) \otimes H^*(\mathcal{S}_l; A_l).
\end{array}$$

在上图中， ρ 表示限制映射，中央方块根据对称表示的乘积级数定义中的相干条件 **1** 可交换。外侧方块如下所示，并编码了 Δ 的余交换性。

$$\begin{array}{ccc}
H^*(\mathcal{S}_n; A_n) \otimes H^*(\mathcal{S}_m; A_m) \otimes H^*(\mathcal{S}_l; A_l) & \xleftarrow[\tilde{\Delta} \otimes 1]{} & H^*(\mathcal{S}_{n+m} \times \mathcal{S}_l; A_{n+m}) \cong H^*(\mathcal{S}_{n+m}; A_{n+m}) \otimes H^*(\mathcal{S}_l; A_l) \\
{\scriptstyle 1 \otimes \tilde{\Delta}} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \tilde{\Delta}} \\
H^*(\mathcal{S}_n; A_n) \otimes H^*(\mathcal{S}_{m+l}; A_{m+l}) & \xleftarrow[\tilde{\Delta}]{} & H^*(\mathcal{S}_{n+m+l}; A_{n+m+l}).
\end{array}$$

此外，底部图中所考虑的表示都与 $\mathcal{S}_{n+m+l}$-表示 A_{n+m+l} 的限制自然地同一。因此，还存在一个诱导的转移映射图，它是通过将上述交换图中的限制替换为转移映射而得到的：

$$\begin{array}{ccc}
H^*(\mathcal{S}_n; A_n) \otimes H^*(\mathcal{S}_m; A_m) \otimes H^*(\mathcal{S}_l; A_l)) & \xrightarrow{\tilde{\odot} \otimes 1} & H^*(\mathcal{S}_{n+m} \times \mathcal{S}_l; A_{n+m}) \cong H^*(\mathcal{S}_{n+m}; A_{n+m}) \otimes H^*(\mathcal{S}_l; A_l) \\
\downarrow {\scriptstyle 1 \otimes \tilde{\odot}} & & \downarrow {\scriptstyle \tilde{\odot}} \\
H^*(\mathcal{S}_n; A_n) \otimes H^*(\mathcal{S}_{m+l}; A_{m+l}) & \xrightarrow{\tilde{\odot}} & H^*(\mathcal{S}_{n+m+l}; A_{n+m+l}).
\end{array}$$

对于所有 n、$m \in \mathbb{N}$，利用以下交换图可以用类似的方法证明， $\tilde{\odot}$ 和 $\cdot$ 都是关于初步余乘积的余代数态射；其中 i 表示标准嵌入， $\tau\colon \mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_c \to \mathcal{S}_c \times \mathcal{S}_b$ 表示交换映射，而 d 表示对角映射：

$$\begin{array}{ccc}
\bigsqcup B(\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_c \times \mathcal{S}_d) & \xrightarrow{\bigsqcup B(i_{a,b} \times i_{c,d})} & B(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m) \\
\downarrow {\scriptstyle \bigsqcup B(i_{a,c} \times i_{b,d}) \circ B(1 \times \tau \times 1)} & & \downarrow {\scriptstyle B(i_{n,m})} \\
\bigsqcup B(\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q) & \xrightarrow{\bigsqcup B(i_{p,q})} & B(\mathcal{S}_{n+m})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
B(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m) & \xrightarrow{B(1 \times \tau \times 1) \circ B(d_{\mathcal{S}_n} \times d_{\mathcal{S}_m})} & B((\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m)^2) \\
\downarrow {\scriptstyle i_{n,m}} & & \downarrow {\scriptstyle i_{n,m} \times i_{n,m}} \\
B(\mathcal{S}_{n+m}) & \xrightarrow{d_{\mathcal{S}_{n+m}}} & B(\mathcal{S}_{n+m}^2)
\end{array}$$

其中，第一个并集遍历所有 $p + q = n + m$，第二个并集遍历所有 $a + b = n$、$c + d = m$、$a + c = p$、$b + d = q$。

一般来说，众所周知， $\cdot$ 是结合的。由于在我们的假设下，余乘积定义中涉及的所有态射~都是关于杯积的代数映射，因此 Δ也是如此。□

在我们感兴趣的情形下，定理2.16 的结论可以进一步加强，从而证明余乘积的一个扭曲版本与乘积之间的交换性，以及 Hopf 环分配律。

定义 2.17。给定一个分次交换代数 A，其底域为 $\mathbb{F}_p$，将 **代数扩张幂函子** 定义为 $EP(A) = \mathbb{F}_p \oplus \bigoplus_{n,\ d\geq 0} H^d(\mathcal{S}_n;\ T_\rho A_n)$，其中 $T_\rho A_n$ 为奇素数。将 $T_\rho A$ 替换为 TA，即可得到˜在 $p = 2$ 时的定义。给定一个带基点拓扑空间 X，定义 $H_{EP}{}^*(X) = EP(H(X))$。

我们注意到 $EP(A)$ 上有三种不同的分次。前两种分别是之前定义的上同调分次 d和分支 n。我们还利用分解 $T_\rho A_n \cong A^{\otimes n} \oplus (sgn \otimes A^{\otimes n})$ 在 $EP(A)$ 上诱导出一个分解。

定义 2.18. 在 $\mathbb{F}_p$ 上，当 p 为奇数时，考虑分解

$$EP(A) \cong \bigoplus_{n,d\geq 0} H^d(\mathcal{S}_n; A^{\otimes n}) \oplus \bigoplus_{n,d\geq 0} H^d(\mathcal{S}_n; sgn \otimes A^{\otimes n}).$$

我们将元素的**符号次数** e 定义为：如果它属于该分解的第一直和项，则为零或偶数；如果它属于第二直和项，则为一或奇数。等价地，当 $e = 0$ 时，我们将 $EP(A)^{d,n,e}$ 定义为直和项 $H^d(\mathcal{S}_n; A^{\otimes n})$；当 $e = 1$时，定义为直和项 $H^d(\mathcal{S}_n; sgn \otimes A^{\otimes n})$。我们将**总次数**定义为 $t = ne + d$。与符号次数一样，总次数也只在模 2 的意义下定义。

按照约定 ，若 $p = 2$，则符号次数总是偶数/零。为了最终处理
符号，我们需要 如下内容。

定义 2.19。三分次分量超 Hopf 环是一个超 Hopf 环，它带有分量分次 n、由“超”结构产生的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次 e，以及在 $\mathbb{N}$ 上的额外分次 d；其中 Δ 保持所有三个分次，$\odot$ 保持 n 和 d，$\cdot$ 在每个分支中保持 d 和 e，并且超 Hopf 环的公理在关于总次数 $t = ne + d$ 的分次意义下考虑。

定义 2.20。令 $EP(A)$ 为如上所述的代数的扩张幂。令 $\tilde{\Delta}$ 和 $\tilde{\odot}$ 为定义 2.14中构造的映射。我们定义：

- 对于所有满足以下条件的 x，使用 Sweedler 记号，˜ $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$，其中 $x_{(1)}$、$x_{(2)}$ 均为三齐次，修正余乘由下式给出
$$\Delta(x) = \sum (-1)^{d(x_{(2)})n(x_{(1)})e(x_{(1)})} x_{(1)} \otimes x_{(2)}.$$
- 对于所有三齐次的 x、y，修正传递积 $x \odot y = (-1)^{d(y)n(x)e(x)} x \tilde{\odot} y$。

现在终于可以陈述本节的主要结果了

定理 2.21。设 A 是 $\mathbb{F}_p$ 上的有限型分次交换代数。那么，$EP(A)$配备余乘积 Δ 以及乘积 $\odot$ 和 $\cdot$后，是一个按分支 n 和总次数 t双分次的超分量 *Hopf* 环架。若 $p = 2$，则它是一个按分支 n 和上同调维数 d 双分次的分量霍普夫环。

证明。定理 2.16 保证 $EP(A)$ 是一个带有未修正余乘积和传递积的非交换霍普夫代数 $\tilde{\Delta}$ 以及 $\tilde{\odot}$。显然，附加的符号不会破坏传递积 $\odot$ 和余乘积 Δ的（余）结合律，它们仍然构成一个霍普夫代数，并且 Δ 和 $\cdot$ 仍然构成一个分量双代数。对于对应于平凡表示的直和项，其余的霍普夫环架公理可按照 [GS17，定理 2。4]中的图示方式得到证明。对于对应于符号表示的直和项，可以通过额外追踪系数来调整他们的证明。然而，$\tilde{\Delta}$的余交换性、$\tilde{\odot}$ 的交换性以及霍普夫环分配公理均不成立，因为与常系数相反，内自同构在取非平凡表示系数的上同调上并不诱导恒等映射。例如，表示 $\tilde{\odot}$ 的交换性和 $\tilde{\Delta}$ 的余交换性的图如下：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}_{n+m} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{S}_{n+m}, \end{array}$$

其中 τ 是显然的交换同构，而 γ 是由置换$\sigma_{n,m} \in \mathcal{S}_{n+m}$对 n 和 m的共轭。在具有平凡系数的上同调中，这样的共轭映射诱导恒等-性，但在系数为符号表示的上同调中，它们诱导乘以$(-1)^{nm}$。因此$x\tilde{\odot}y = (-1)^{n(x)n(y)e(x)e(y)+d(x)d(y)}y\tilde{\odot}x$。修改后的转-移乘积所引入的附加符号保证了 $x \odot y = (-1)^{t(x)t(y)}y \odot x$。同样的论证表明， Δ 是余交换的。通过分析相应的图，可以类似地证明 $(EP(A)\ \Delta, \odot, \cdot)$ 满足关于总次数的分次的 Hopf 环分配律。□

注释 2.22. 加法上， $H^*(\mathcal{S}_n; \mathrm{sgn} \otimes A^{\otimes n})$ 同构于 $H^*(\mathcal{S}_n, \Sigma(A)^{\otimes n})$，其中 Σ 是分次向量空间上的悬挂函子。因此，当 p 为奇数时，作为向量空间， $DP(A) \cong \bigoplus_{n\geq 0} H^*(\mathcal{S}_n;\ A^{\otimes n}) \oplus H^*(\mathcal{S}_n;\ \Sigma(A)^{\otimes n})$。 $EP(A)$ 上的总次数定义为使这个同构成为保次数线性映射。由此来看，修正余乘和传递积中出现的修正符号就不那么神秘了，它们源自 $Hom(W_*^{\mathcal{S}_n};\ \Sigma(A))$ 上的 Koszul 符号约定。

对于 $p = 2, H_{EP}{}^*(X)$，与 DX 的上同调仅相差一个无关紧要的完备化。在奇素数情形下，如果我们只取 $H^*(D_nX; \mathbb{F}_p)$ 直和项，也会看到类似的现象。接下来，我们将研究代数扩张幂函子如何成为映到带有加法除幂结构的 Hopf 环范畴的自由函子，并在下文展开这一内容。

注2.23. 正如我们在第一节中所述，如果 X 是一个流形，那么 CX 的有限维近似的上链可以通过子流形来定义。粗略地说，我们将其视为对构形底层各点或其在 X 中标签的“条件”。

杯积通常通过相交来定义；或者在这种情况下，要求两组条件都成立。传递积通过要求某个条件在 $n + m$ 个点的某个子集中成立，而另一个条件在 m 个点上成立，从而定义关于 $n + m$ 个点的一个条件。一个类与其自身的传递积可被 2 整除，因为无论将某些 n 个点还是其补集视为“第一部分”，该条件都成立。除幂运算将关于 n 个点的一个条件重复 k 次，以定义关于 nk个点的一个条件。

参见 [GSS12]，其中我们讨论了将 Hopf 环生成元表示为由 2^n 共享一个坐标的点定义的子簇，以及 [GS14]，该文通过胞腔模型对构形空间的一点紧化给出了详细论述。同时还给出了传递积的链级模型，该模型同样适用于除幂运算。（注意，在[GS14] 中声称但未证明的杯积结果并不正确。）

2.4.以乘积级数为系数的对称群上同调上的除幂。我们现在将为 $H_{EP}{}^*(X)$ 建立除幂结构，这是以乘积代数级数为系数的对称群上同调上的除幂结构的一个特例。为了定义它，我们需要由分拆定义的对称群子群的限制映射和转移映射。

定义 2.24。集合 S 的**标记多重分拆** π 是指用 S 的元素标记一棵有根树的叶子，也可以额外标记内部顶点。考虑某个固定内部顶点之上的所有叶子标签所定义的子集，称为该标记多重分拆的**块** 。一个块的**深度** 是其对应的内部顶点与根顶点之间的边数。

给定 $\{1, \ldots, n\}$ 的带标签多重分拆 π，将其 **自同构群** $\mathcal{S}_\pi$ 定义为保持内部顶点的任何附加标签的树的自同构。我们通过其在叶子上的作用，将 $\mathcal{S}_\pi$ 与 $\mathcal{S}_n$ 的一个子群自然地对应起来。

一个带标记的多重分拆由其块决定，但允许附加标记。内部顶点的附加标记有时用于使此类结构更加刚性，从而排除块之间的自同构。由于我们只以这种方式使用这些标记，因此不明确给出附加标记，也不为标记集命名；我们只说明标记是共享的还是不同的。

其中有 s ome basic constructions which give rise to the 多重分拆 and thus automorphism sub
- 我们所考虑的群
侧。

定义 2.25。若 π_1、……、π_k 是 S_1、……、S_k 的带标号多重分拆，则将 **并** $\pi_1 \cup \cdots \cup \pi_k$ 定义为 $\bigsqcup S_i$ 的多重分拆：其中，定义 π_i 的树被嫁接到一个带有 k 条边的新根上，并且与原根对应的内部顶点被赋予不同的标签。

若 π 是 S 的一个标记多重分拆，则定义其**多重** $m\cdot\pi$ 为 $\bigsqcup_{i=1}^{m} S$ 的标记多重分拆：将定义 π 的树的 m 个副本嫁接到同一个根上，并赋予相同的标记。

令 $\underline{n}$ 表示 由一棵没有内部顶点的有根树定义的 $\{1,\dots,n\}$ 的平凡标记分拆 .

为方便起见，所有标记均使用标准有限集 $\{1,\dots,n\}$；此时，我们通过标准的“页面上的顺序”，将抽象不交并 $\{1,\dots,n_1\}\sqcup\cdots\sqcup\{1,\dots,n_k\}$ 与集合 $\{1,\dots,\sum n_i\}$ 等同起来。我们也类似地等同 $\bigsqcup_m\{1,\dots,n\}\cong\{1,\dots,mn\}$。

带标签的多重分拆的并集具有互不相同的标签，而多重分拆的标签则会重复，这一事实是一个关键区别，从某种意义上说，它产生了我们的除幂运算。特别地，$\mathcal{S}_{\underline{n}\cup\underline{m}}$ 同构于 $\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_m$，包括在 $n=m$时，而 $\mathcal{S}_{2\cdot\underline{n}}$ 同构于 $\mathcal{S}_n\wr\mathcal{S}_2$。

我们将标准集合分拆视为带标号的多重分拆，它们由内部顶点深度全为一且标签相同的树给出。回想一下，一个集合的分拆在细化关系下构成偏序集，并且该偏序集具有交与并运算，分别记为 $\wedge$ 和 $\vee$，从而赋予它格结构。$\mathcal{S}_\pi$ 的以下性质显而易见。

引理 2.26. 设 $\pi=\{S_i\}$ 和 π' 是 $\{1,\dots,n\}$ 的分拆。

(1) $\mathcal{S}_{m\cdot\underline{k}}$ 与花环积 $\mathcal{S}_k\wr\mathcal{S}_m$同构。更一般地，如果 $m_\pi(i)$ 是 π 中基数为 i的部分的数量，那么 $\mathcal{S}_\pi$ 在 $\mathcal{S}_n$中共轭于$\bigtimes_{i=0}^{n}\mathcal{S}_i\wr\mathcal{S}_{m_\pi(i)}$。(2) 对于任意 $\sigma\in\mathcal{S}_n$，共轭 $\sigma\mathcal{S}_\pi\sigma^{-1}$ 与 $\mathcal{S}_{\sigma\pi}$相同。(3) 映射 $[\sigma]\mapsto\sigma\pi$ 是陪集 $\mathcal{S}_n/\mathcal{S}_\pi$ 与由 π的置换构成的分划集合之间的双射。

分拆子群在定义除幂时发挥着关键作用。

定义 2.27。设 $\{A_n\}$ 是一列乘积代数。对于 $x\in H^*(\mathcal{S}_n;A_n)$，我们将 $x^{[k]}\in H^*(\mathcal{S}_{kn};A_{kn})$ 定义为

$$x^{[k]}:=tr^{\mathcal{S}_{kn}}_{\mathcal{S}_n\wr\mathcal{S}_k}(x^{\otimes k}),$$

其中我们通过结构同构将 A_{kn} 与 $A_n^{\otimes k}$ 视为相同。

命题 2.28。如果 $\{A_n\}$ 是一列乘积代数，那么 $\bigoplus_n H^*(\mathcal{S}_n;\ A_n)$ 配备定义 *2.14*中的杯积和传递积、定义 *2.20* 中的余乘积以及定义 *2.27*中的除幂，满足除幂结构的公理。

在证明这一点之前，我们先提出群上同调中的一个基本事实，之后会反复使用它。该事实源于以下标准结论：从一个子群出发，先限制再转移，等于乘以该子群的指数。

引理 2.29。如果 $K\subset H\subset G$ 是群的有限指数包含，那么

$$tr^G_K\circ res^H_K=[K:H]tr^G_H$$

命题 *2.28* 的证明。设 $x\in H^*(\mathcal{S}_n;A_n)$ 由一个同态表示 f，该同态从一个分解映射$\mathcal{S}_n$ 到 A_n，类似地 $y\in H^*(\mathcal{S}_m;A_m)$ 由 g 表示。

定义 2.5 的 1-情形公理 2.5 是显然的。对于二项式公理，我们计算 $(x+y)^{[r]}$，方法是对 $(f+g)^{\otimes r}$施加转移（归纳），它是对 i 中关于 $f^{\otimes i}$ 和 $g^{\otimes(r-i)}$的洗牌置换求和。但对这类洗牌置换的转移恰好是 $x^{[i]}\odot y^{[r-i]}$。

验证指数公理，$x^{[m]}\odot x^{[r]}$ 和 $x^{[m+r]}$ 都是对 $f^{\otimes m+r}$施加转移所得的像，但前者是从子群 $(\mathcal{S}_{m\cdot\underline{n}})\times(\mathcal{S}_{r\cdot\underline{n}})$诱导上来的，而后者是从 $\mathcal{S}_{(m+r)\cdot\underline{n}}$诱导上来的。由引理 2.29，前者可由后者乘以这些子群的指数之商得到，即 $\binom{m+r}{m}$。

接下来我们验证分配公理。在 Hopf 环的语境中，该公理表示 $(x\odot y)^{[k]}=x^{\odot^k}\odot y^{[k]}$。根据定义，$(x\odot y)^{\otimes^k}$ 是将 $(f\otimes g)^{\otimes^k}$ 从 $\mathcal{S}_{k\cdot(\underline{n}\cup\underline{m})}$ 最终归纳到 $\mathcal{S}_{k(n+m)}$ 的归纳映射复合。类似地，$x^{\odot^k}\odot y^{[k]}$ 是通过将 $f^{\otimes^k}\otimes g^{\otimes^k}$ 从 $\mathcal{S}_{\cup_k\underline{n}\cup k\cdot\underline{m}}$ 归纳得到的。在进行共轭使得 $(f\otimes g)^{\otimes^k}$

变为 $f^{\otimes^k}\otimes g^{\otimes^k}$后，两个子群便都是 $\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}\cup k\cdot\underline{m}}$ 的子群，而 $f^{\otimes^k}\otimes g^{\otimes^k}$ 在其中保持不变。引理 2.29 在两种情况下均适用，因此每个结果都是从 $\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}\cup k\cdot\underline{m}}$ 归纳得到的，并乘以相应子群的指数。由于这两个指数相同，分配公理得证。

我们也类似地验证复合公理 $(x^{[k]})^{[h]} = (hk)!\,/\,(k!)^h h!\, x^{[hk]}$。根据定义，$x^{[hk]}$ 是将 $f^{\otimes^{hk}}$ 从 $\mathcal{S}_{hk\cdot\underline{n}}$ 归纳到 $\mathcal{S}_{nhk}$得到的，而 $(x^{[k]})^{[h]}$ 则是从 $\mathcal{S}_{h\cdot(k\cdot\underline{n})}$归纳同一个余链得到的。由于$\mathcal{S}_{h\cdot(k\cdot\underline{n})}\subset\mathcal{S}_{hk\cdot\underline{n}}$，引理2.29 适用，因此可知两者相差一个乘法系数，该系数等于此包含的指数，也就是 $(hk)!\,/\,(k!)^h h!$。□

接下来我们讨论除幂与余乘积的相容性。由于我们的除幂结构是通过转移定义的，而余乘积是通过限制定义的，因此 Cartan-Eilenberg 双陪集公式将派上用场。回顾一下，若 H 和 K 是有限群 G 的子群，且 $\mathcal{R}$ 是 G 中双陪集集合 $H\backslash G/K$的一组代表元，那么对于取值于给定G-表示的系数上同调，

$$\rho^G_H\circ\mathrm{tr}^G_K=\sum_{r\in\mathcal{R}}\mathrm{tr}^H_{H\cap c_rK}\circ\rho^{c_rK}_{H\cap c_rK}\circ {c_r}^*$$

其中 c_r 是 K 与 rKr^{-1} 及 ρ 之间的同构，tr 分别表示限制映射和转移映射。这一点已得到证明，例如，参见 [AM04]

命题 2.30。若 $\{A_n\}$ 是代数乘积级数，则在 $\bigoplus_n H^*(\mathcal{S}_n;A_n)$ 上，定义 *2.27* 中的除幂与定义 *2.27* 中的余乘积相交换 *2.20*。

证明。我们先给出余乘积的除幂的一个更明确的表达式。若 $x\in H^*(\mathcal{S}_n;A_n)$，令$\Delta x=\sum x_{(i,n-i)}$，其中 $x_{(i,n-i)}\in H^*(\mathcal{S}_i;A_i)\otimes H^*(\mathcal{S}_{n-i};A_{n-i})$。根据刚在命题 2.28中证明的二项式公理，

$$(\Delta x)^{[k]}=\sum_{j_0+\cdots+j_n=k}\bigodot_{i=0}^{n}\left(x_{(i,n-i)}\right)^{[j_i]}.$$

若 $a+b=n$ 其中的 (a,b) 分支由含有 $\sum j_i\cdot i=a$ 的项组成。我们证明 $\left(\Delta(x^{[k]})\right)_{(a,\ b)}$ 与此一致。

设 $x\in H^*(\mathcal{S}_n;A_n)$ 由一个同态 f 表示，该同态从 $\mathcal{S}_n$ 的一个分解映到 A_n。根据定义，$(x^{[k]})_{(a,b)}$ 将由 $\rho^{\mathcal{S}_{nk}}_{\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}}\circ\mathrm{tr}^{\mathcal{S}_{nk}}_{\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}}}(f^{\otimes k})$ 表示。应用 Cartan-Eilenberg 双陪集公式，这与

$$\sum_{r\in\mathcal{R}}\mathrm{tr}^{\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}}_{\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}\cap c_r\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}}}\circ\rho^{c_r\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}}}_{\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}\cap c_r\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}}}\circ c_r^{\#}(f^{\otimes^k}),$$

其中 $\mathcal{R}$ 是集合 $(\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}})\backslash\mathcal{S}_{nk}/(\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}})$ 的双陪集代表元系。

为了理解这个双陪集空间，回想一下，对称群模自同构群 $\mathcal{S}_\pi$ 的陪集对应于形状与 π 相同的分拆。因此，$\mathcal{S}_{nk}/\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}}$ 对应于 $\{1,\dots,nk\}$ 的分拆，其中有 k 个基数为 n 的部分；而 $\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}\backslash\mathcal{S}_{nk}$ 对应于分成两个集合的分拆，其基数分别为 a 和 b，也就是说，对应于双色标记。因此，$\mathcal{R}$ 对应于 $\{1,\dots,nk\}$ 的双色分拆，其中有 k 个基数为 n 的部分。等价地，$\mathcal{R}$ 由由一棵树所支配的多重分拆给出：树的根上连有 k 条边，而这些边各自至多再连出两条标记为 a 和/或 b 的边，且它们总共连有 n 条叶边。多重分拆中的所有标记都相同。交 $\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}\cap c_r\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}}$ 是此类多重分拆的自同构群。它们与 $\mathcal{S}_{\cup_i m_i\cdot(\underline{i}\cup n-i)}$ 共轭，其中 m_i 是在一个 k-块中，标记为 a 的组里含有 i 个叶子的情形出现的次数。——

然后，我们将限制 $\rho^{c_r\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}}}_{\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}\cap c_r\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}}}\circ c_r^{\#}(f^{\otimes^k})$ 识别为 $\bigotimes_{i=0}^n {f_{(i,n-i)}}^{\otimes^{m_i}}$，其中 $f_{(i,n-i)}$ 表示$x_{(i,n-i)}$。为计算作用于此类的 $\mathrm{tr}^{\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}}_{\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}\cap c_r\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}}}$，我们将 $\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}\cap c_r\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}}$ 在 $\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}$ 中的包含分解。由于 $\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}\cap c_r\mathcal{S}_{k\cdot\underline{n}}$ 与 $\mathcal{S}_{\cup_i m_i\cdot(\underline{i}\cup n-i)}$ 共轭，它包含于 $\mathcal{S}_{\cup_i(\underline{im_i}\cup(n-i)m_i)}$ 的某个共轭子群中。到该子群的转移映射是定义除幂的转移映射的乘积，因此 $\bigotimes_{i=0}^n {f_{(i,n-i)}}^{\otimes^{m_i}}$ 被映射为 $\bigotimes_{i=0}^n (f_{(i,n-i)})^{[m_i]}$。从 $\mathcal{S}_{\cup_i(\underline{im_i}\cup(n-i)m_i)}$ 到 $\mathcal{S}_{\underline{a}\cup\underline{b}}$ 的转移映射，是上同调与其自身的张量积上的传递积，因此 $\bigotimes_{i=0}^n (f_{(i,n-i)})^{[m_i]}$ 被映射为 $\bigodot_{i=0}^n (f_{(i,n-i)})^{[m_i]}$，这与我们上面对 $\left((\Delta x)^{[k]}\right)_{(a,b)}$ 的确定一致。□

推论 2.31。 $H_{EP}{}^*(X)$ 是一个带有加法除幂的双分次分量霍普夫环。

2.5. **首要结果的陈述**。 我们在此陈述首要结构定理，并将在余下各节中证明它。

在陈述首要定理之前，我们还需要两个定义。

定义 2.32。 若 p 为奇数，或 $p=2$ 为任意次数，则除幂代数中的一个元素称为**标准非幂零**，如果所有 $x^{[m]}$ 均非零，且满足 $\Delta x^{[m]} = \sum_{i+j=m} x^{[i]} \otimes x^{[j]}$ 和 $x^{[i]} \odot x^{[j]} = \binom{i+j}{i} x^{[i+j]}$。

定义 2.33。 设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴， S 为一个子范畴，且 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为一个函子。若某个对象 $x \in S$ 在关于 F 的意义下，对 S 中的对象具有泛性，则称之为泛对象；也就是说，它在 F 下的像是由 $F(\mathcal{C})$ 生成的全子范畴中的初始对象。

我们首先利用除幂结构，对 Giusti–Salvatore–Sinha 的计算作一个直接的改述。

定理 2.34 (见 [GSS12])。 扩张幂 S^0的模 *2* 上同调，即 $H^*_{EP}(S^0) \cong \bigoplus H^*(B\mathcal{S}_n)$，是一个带有加法除幂的分支 *Hopf* 环，其中包含标准非幂零类 $\gamma_i \in H^{2^i-1}(B\mathcal{S}_{2^i})$。对于遗忘除幂的函子而言，它在这类对象中具有泛性。

换言之，要将 $H^*_{EP}(S^0)$ 理解为 Hopf 环，除了分支 Hopf 环带有加法除幂的公理外，不需要其他关系。因此，这就确定了上同调环结构。特别地，由 $\gamma_i^{[2^j]}$ （其中 $i+j=n$ ）生成的子环，是 $B\mathcal{S}_n$上同调中的多项式子环。但涉及传递积的类之间存在许多关系。目前，我们尚未完全理解除幂结构——见下文注 2.39 ——因此，尽管我们利用除幂来生成类，但为获得唯一的刻画，会将除幂结构遗忘。

以下是定理 2.34在奇素数情形下的对应结果，我们将在第 3 节证明。对于 $p>2$，令 $T_\rho(H^*(X;\mathbb{F}_p)) = \{T_{\rho,n}(H^*(X;\mathbb{F}_p))\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为上文定义的代数超乘积级数。我们考虑决定超结构的符号次数 e，以及由 d 的上同调维数诱导的次数 $H^*(X;\mathbb{F}_p)$。

定理 2.35。 扩张幂 S^0 的模-p 上同调，即 $H^*_{EP}(S^0) \cong \bigoplus H^*(B\mathcal{S}_n;\ \rho)$，是一个具有加法除幂的三重分次分量超 *Hopf* 环，其中包含

- 按分次 $(2(p^k-1)\ p^k,\ 0)$排列的标准非幂零类 γ_k，
- 按分次 $(p^k-1,\ p^k,\ 1)$排列的本原类 λ_k，
- 标准非幂零类 γ'_k 在分次 $(p^k-2,\ p^k,\ \mathbf{1})$，

具有杯积关系 ${\lambda_k}^2 = \gamma_k$。对于遗忘除幂的函子而言，它在此类对象中是泛的。

注记 2.36。 与偶符号次数加项对应的 $H_{EP}{}^*(S^0)$ 子霍普夫环已由 Guerra 计算 [Gue17]。其中出现的生成类 γ_k, $\alpha_{i,k}$ 和 $\beta_{i,j,k}$，分别可从我们的呈示中恢复为 γ_k, $(-1)^{\frac{p-1}{2}(k-i)}\lambda_k {\gamma'}_i^{[p^{k-i}]}$和 $(-1)^{\frac{p-1}{2}(j-i)}$ ${\gamma'}_i^{[p^{k-i}]}{\gamma'}_j^{[p^{k-i}]}$。

对于任意非空的 X， $D(X_+)$ 的上同调是 $D(S^0)$的上同调上的一个代数，这是通过投影映射实现的，该映射将 X 映到 S^0的非基点。这是单射的，而在 X 中任取一点都给出一个分裂。我们在下面两个结果中使用这一代数结构，这些结果将在第 4节证明。对于奇素数，我们计算一个系数取自 $\rho,\tilde{}$的更大的霍普夫环，但只需提取偶符号次数的齐次部分，就能轻易恢复 p 的普通模 $D(X)$ 上同调构成的霍普夫环。

定理 2.37。 X_+ 的扩张幂的模 *2* 上同调，是一个在 S^0 的扩张幂的上同调之上的泛分支超 *Hopf* 环，带有加法除幂；它将 X 的上同调类包含为标准非幂零类。其关系为

$$x^{[n]} \cdot y^{[n]} = (x\cdot y)^{[n]} \quad \textit{for}\ \ x,y \in H^*(X)\ \ \textit{and}$$

$$x^{[nm]} \cdot y^{[n]} = (x^{[m]} \cdot y)^{[n]} \quad for \quad x \in H^*(X), y \in H^*(D_m(S^0)).$$

对于遗忘除幂的函子而言，它在这类对象中具有泛性。

定理 2.38。对于 $p > 2$， X_+ 的扩张幂的模-p 上同调是一个以点的扩张幂的上同调为底、带有加法除幂结构的分量超 ***Hopf*** 环，其中包含 X上同调的两个副本，我们将它们记作 x_e 次数 $(d, 1, e)$，对应于 $e \in \{0, 1\}$。当 $d + e$ 为偶数时，这些类是标准非幂零的；当 $d + e$ 为奇数时，它们是本原元，其中

$$x_e^{[n]} \cdot y_{e'}^{[n]} = (x \cdot y)_{e+e'}^{[n]},$$

$$x_e^{[nm]} \cdot z^{[n]} = (x_e^{[m]} \cdot z)^{[n]} \ and$$

$$x_e \odot y_{e'} = 0 \ if \ e \neq e',$$

如果 x， $y \in H^*(X;\ \mathbb{F}_p)$、 $z \in H^*(D_m(S^0);\ \mathbb{F}_p)$以及 e， $e' \in \{0, 1\}$，其中总和按模二理解。对于遗忘除幂的函子，它在这类对象中具有泛性质。

注 2.39。定理 2.37 和 2.38 明确地将对称群的上同调以及 X 的上同调嵌入到 $H_{EP}{}^*(X)$中。这些关系给出了除幂与杯积之间的相容恒等式。我们可以将这一结构解释为“由 $H^*(X)$生成、以对称群的上同调为底并带有除幂的双分次分量 Hopf 环”。更一般地，可以将“带有除幂的双分次分量 Hopf 环”定义为带有加法除幂 A 的双分次分量 Hopf 环，使得对于原始元的所有$xy \in A$ 除幂，除幂与杯积之间都满足类似的相容条件。然而，这个简单的恒等式并不适用于x 这类并非源自 X上同调的类。例如，当 $p = 2$ 且 $X = \{*\}$时， $H_{EP}{}^*(X_+)$成为对称群的普通模 2 上同调，而除幂运算 $\_^{[k]}$ 与 $\mathcal{S}_k \wr \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_{nk}$对应的上同调转移映射一致。Kechagias [Kec09]描述了一种计算这些转移映射的方法。结合 Kechagias 的算法与 Giusti–Salvatore–Sinha [GSS12] 对初等阿贝尔子群的限制映射所作的计算，可以得到以下等式

$$(\gamma_1)^{[2]} \cdot (\gamma_1^2)^{[2]} = \gamma_2^2 + (\gamma_1^3)^{[2]}.$$

由于右侧并非简单的 $(\gamma_1^3)^{[2]}$, , $H_{EP}{}^*(X)$ 中除幂运算与杯积之间的关系并不像预期的那样，通常看来可能相当复杂。

注 2.40. 回顾注 2.23，所有具有加法除幂结构的 Hopf 环，在使用流形扩张幂的构形空间模型时，都有简单的几何上链模型。定理 2.34–2.38 中的许多基本类也有几何上链模型。 γ_k for $\mathbb{F}_2$由“2^k 共享一个坐标的点”表示。形式上，考虑由三元组 (x, X, Y) 构成的流形，其中 $x \in \mathbb{R}$, X 是 $x \times \mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ 中由 2^k 个互不相同的无序点构成的构形，而 Y 是 $\mathbb{R}^N$ 中 X 的补集内无序点的构形。该流形适当地映射到构形空间；一般而言，这是一个嵌入，但若 Y 中某个点包含在 $x \times \mathbb{R}^{N-1}$ 中，或 Y 中某些 2^k 点包含在一个 $x' \times \mathbb{R}^{N-1}$ 中，则该映射是有限对一的。因此它定义了一个几何上循环，如 [GSS12] 中的定理 4.9 所示，该循环表示 γ_k 。类似地，奇素数情形下的 γ_k 由“ $\mathbb{C}^N$ 中共享一个复坐标的点”所定义的几何上链表示。在第 k 个扩张幂上的杯积$\gamma_k \cdot x^{[k]}$ 由共享一个坐标、且标记为 x 的代表元的点来表示。必须指明是哪个扩张幂，因为这些类在更高扩张幂上的体现与单位元类作传递积所得的杯积，可能与此不同（因为构形中的一些点可能共享其坐标，而另一些点共享其标记）。

我们尚未为 γ_k' 和 λ_k，或如前文 [Gue17]中所考察的它们的偶符号度数乘积，发展出几何代表元。正如之前所提到的，对几何和杯积必须谨慎处理，因为人们会预期 $\gamma_1^{[2]^3}$ 由一个几何上链表示，该上链由四个点定义，这四个点由两组各含两个点的点组成，并且每组中的两个点共享三个坐标。但它实际上由该上链与另一个几何上链的并集表示，后一个上链由四个共享两个坐标的点定义。

2.6. **带除幂的（相对）泛分支 Hopf 环的显式构造**。接下来，我们将通过如下抽象，更深入地理解刚才陈述的主定理中详细阐述的结构。

定义 2.41。设 A 是一个带有加法除幂、包含 ρ 作为 A_1 的子代数的分量超霍普夫环； ρ 是其分支 1 中的 -代数；设 V 是一个连通分次代数。令 $H_{alg}(A,V)$（通常简写为 H_{alg}）为满足以下五个性质的带有加法除幂的超霍普夫环。

(1) 存在一个映射 $\pi\colon\ A\to H_{alg}$，它既是超霍普夫环映射，也是除幂结构态射，并且保持每个分支的 -单位元；(2) 存在一个 ρ-代数同态 ι，其从 $V\otimes\rho$ 映射到 H_{alg} 中分支 1 内元素所构成的子空间（即，当 $p=2$ 时， $\iota\colon\ V\to H_{alg}$ 是分支 1 中的代数态射）；(3) 对所有总次数为偶数的 x、$x'\in V\otimes\rho$， $\iota(x)^{[n]}\cdot\iota(x')^{[n]}=\iota(xx')^{[n]}$；(4) 对所有总次数为偶数的 $x\in V\otimes\rho$，以及所有满足 $n(y)=m$ 的 $y\in A$，

$$\iota(x)^{[nm]}\cdot\pi(y)^{[n]}=(\iota(x)^{[m]}\cdot\pi(y))^{[n]};$$

(5) If $p>2$, $x^{[n]}\odot x'^{[m]}=0$ if $x\in V\otimes\mathbb{F}_p\subseteq V\otimes\rho$ and $x'\in V\otimes\operatorname{sgn}\subseteq V\otimes\rho$.

我们希望用 A 和 V的加法基来描述 H_{alg}的一个基。在第 4.1 节中，我们将把它具体化到我们感兴趣的情形，此时 $A=\mathbb{F}_p\oplus\bigoplus_{n\geq1}H^*(\mathcal{S}_n;\ \rho)$ 且 $V=H^*(X;\ \mathbb{F}_p)$。

在本节余下部分，我们假设 $p>2$，因为对 $p=2$ 的处理类似且简单得多。令 V_{even} （分别为 V_{odd}）表示 $V\otimes\rho$ 中总次数为偶数（分别为奇数）的子空间。

由于 A仅配备乘积 $\odot$ 和余乘积 Δ，便是一个双交换的除幂 Hopf 代数。根据经典结果 [, 并且71] 它必定是由其本原元子空间生成的自由除幂 Hopf 代数。也就是说，$A\ \cong\ DP(P(A))$。由于 A是一个分量超 Hopf 环， $P(A)$是一个非幺分量超代数，其 继承自 A的三重分次。

我们考虑代数的张量积 $V_{even}\otimes P(A)$，并按以下规则赋予其三重分次：如果 $v\in V_{even}$ 是次数为 $d(v)$ 的齐次元，而 $y\in P(A)$ 是三次数为 $(d(y)\ n(y)\ e(y))$ 的三齐次元，那么 $v\otimes y\in V\otimes P(A)$ 是三次数为 $(d(v)n(y)+d(y)\ n(y)\ e(y)+d(v))$ 的三齐次元。直观地说，我们将纯张量 $v\otimes y\in V_{even}\otimes P(A)$ 解释为元素 $\iota(v)^{[n(y)]}\cdot\pi(y)$。这说明了我们选择这些次数的理由。回顾一下，符号次数 e 仅定义在模 2 的意义下。

由分次模 M，我们可以构造一个增广的非幺煤代数 $M^{pr}=\mathbb{F}_p\oplus M$，其中带有位于三次数 $(0,0,0)$ 的 $\mathbb{F}_p$ 加项，以及对所有 $x\in M$ 都成立的余乘积 $\Delta(x)=1\otimes x+x\otimes1$。这就是模 M 的“本原元煤代数扩张”。

接着，我们将 $V_{even}\otimes P(A)$ 分解为直和 $(V_{even}\otimes P(A))_+\oplus(V_{even}\otimes P(A))_-$，其中 $(V_{even}\otimes P(A))_+$ 是由满足 $e(v)\ =\ e(x)$ mod 2 的元素 $v\otimes x\in V_{even}\otimes P(A)$ 生成的子空间，而 $(V_{even}\otimes P(A))_-$ 由满足 $e(v)\neq e(x)$ mod 2 的此类元素构成。然后

$$(H_{alg},\odot,\Delta)\cong DP_{HA}((V_{even}\otimes P(A))_+^{pr})\oplus DP_{HA}((V_{even}\otimes P(A))_-^{pr})/\sim,$$

其中，$\sim$ 是将两个加项的单位元等同起来的等价关系。V 和 $P(A)$ 的加法基为 $DP_{HA}((V_{even}\otimes P(A))_\pm^{pr})$ 诱导出一个基，进而为 H_{alg} 诱导出一个基，该基由形如 $\bigodot_i(v_i\otimes y_i)^{[n_i]}$ 的元素组成，其中 v_i、y_i 是基元素；若 $v_i\otimes y_i$ 的总次数为奇数，则 $n_i=1$，且 $v_i\otimes y_i$ 要么全部属于 $(V\otimes P(A))_+$，要么全部属于 $(V\otimes P(A))_-$。

目前， H_{alg} 只是一个分支的除幂超 Hopf 代数。在这个同构下，接下来我们确定映射 $\pi\colon\ A\to H_{alg}$ 和 $\iota\colon\ V\otimes\rho\to H_{alg}$，以及第二个乘积 $\cdot\colon\ H_{alg}\otimes H_{alg}\to H_{alg}$，它们赋予其超 Hopf 环结构。

首先，我们定义 $\pi\colon\ A\to H_{alg}$ 为唯一的除幂超 Hopf 代数态射，它将原始元上的线性映射 $\pi\colon\ y\in P(A)\ \mapsto1_V\otimes y\in V_{even}\otimes P(A)\ \subseteq P(H_{alg})$扩张。其次，令 $\iota\colon\ V\otimes\rho\to H_{alg}$。若 $v\in V_{even}$，则令 $\iota(v)=v\otimes1_1$，其中 $1_1\in A$ 是 A的 1 分支中 -乘积的单位元。若$v\in V_{odd}$，则令 $s\in\rho$为符号表示加项的一个生成元。由于 $vs\in V_{even}$，我们可以将 $\iota(v)$定义为 $\iota(vs)\otimes s$，其中 $s\in\rho\subseteq A_1$ 被视为 A的原始元。

我们逐步构造第二个乘积 $\cdot$ 在 H_{alg} 上。像往常一样， $\cdot$ 不同分支的元素之间将为零。作为中间步骤，我们定义乘积 $\iota(v)^{[n]}\cdot x$ 对于所有 $v\in V_{even}$ 以及

$x \in H_{alg}$ 其中 $n(x) = n \geq 1$。 $n = 1$ 的情形归结为 $V \otimes \rho$上的乘积，因此我们可以假设$n \geq 2$。如果 $x = (w \otimes y)^{[m]}$ 是本原元 $w \otimes y \in V_{even} \otimes P(A)$ 的除幂，那么我们令$\iota(v)^{[n]} \cdot x = (\iota(v)(w \otimes y))^{[m]}$。然后，我们可以通过使用 Hopf 环分配律将其扩展到一般的 $x \in H_{alg}$，因为 H_{alg} 在 $\odot$ 下由其本原元的除幂生成。明确地说， H_{alg} 的每个元素都是某些 $x_i = (w_i \otimes y_i) \in V_{even} \otimes P(A)$ 和 $m_i \geq 1$的乘积 $\bigodot_{i=1}^{r} x_i^{[m_i]}$ 的线性组合。我们令

$$\iota(v)^{[\sum_i n(x_i)m_i]} \cdot \bigodot_i x_i^{[m_i]} = \bigodot_i (\iota(v)(w_i \otimes y_i))^{[m_i]}$$

并通过线性性将其扩展到所有 H_{alg}。

命题 2.42. 在 H_{alg} 上存在唯一的分量超霍普夫环结构，使得对 $\iota(v)^{[n]}$，当 $v \in V_{even}$ 时，其乘法具有上述定义的形式，并满足定义 *2.41*中的五个条件。

证明。 设 $v, w \in V_{even}$ 和 $y, z \in P(A)$ 为三次齐次元素。注意，根据上文对元素 V_{even} 的除幂乘法的定义，必有 $v \otimes y = \iota(v)^{[n(y)]} \cdot \pi(y)$，且 $w \otimes z = \iota(w)^{[n(z)]} \cdot \pi(z)$。因此，若 H_{alg} 满足第三和第四个条件，则必有

$$\begin{aligned}(v \otimes y)^{[a]} \cdot (w \otimes z)^{[b]} &= (\iota(v)^{[n(y)]} \cdot \pi(y))^{[a]} \cdot (\iota(w)^{[n(z)]} \cdot \pi(z))^{[b]} \\ &= (-1)^{t(y)d(w)n(z)ab} \iota(v)^{[n(y)a]} \cdot \iota(w)^{[n(z)b]} \pi(y)^{[a]} \pi(z)^{[b]} \\ &= (-1)^{t(y)d(w)n(z)ab} \iota(vw)^{[n(y)a]} \cdot \pi(y)^{[a]} \cdot \pi(z)^{[b]}\end{aligned}$$

对所有满足 $n(y)a = n(z)b$ 的 a, b 均成立。此外，若 π 是 Hopf 环及除幂结构的态射，则 $\pi(y)^{[a]} \cdot \pi(z)^{[b]} = \pi(y^{[a]} \cdot z^{[b]})$。综上

$$(v \otimes y)^{[a]} \cdot (w \otimes z)^{[b]} = (-1)^{t(y)d(w)n(z)ab} \iota(vw)^{[n(y)a]} \cdot \pi(y^{[a]} \cdot z^{[b]}).$$

因此，上述条件唯一确定了 $\cdot$ 在 $\odot$-不可分解元上的取值。因此，如果 $\cdot$ 的扩张存在，它必定唯一。

要证明存在性，我们只需验证上述公式给出了良定义的双线性乘积，并满足 Hopf 环分配律。这很容易。例如，可以分别固定 A 和 V的基，在由此诱导的基上按上述方式定义 $\cdot$ 乘积，再通过双线性将其扩张到所有 H_{alg}，并直接利用该基验证 Hopf 环的公理。□

现在我们证明 H_{alg} 就是我们所需的对象。

命题 2.43。 H_{alg} 在满足定义*2.41*的五个条件且带有加法除幂的超 *Hopf* 环胚中是泛的。

证明。 设 B 是一个带有加法除幂的超 Hopf 环胚，具有映射 $\pi_B \colon A \to B$, $\iota_B \colon V \otimes \rho \to B$，并满足我们所需的假设。 DP_{HA} 和 $\_^{pr}$ 分别是从除幂 Hopf 代数到余代数以及原始元 P: R-余代数 $\to$ R-模的遗忘函子的左伴随。因此，满足 $f\pi = \pi_B$和 $f\iota = \iota_V$的除幂 Hopf 代数态射 $f \colon H_{alg} \to B$ 由其在 $V_{even} \otimes P(A)$上的限制唯一确定。此外，若 f是超 Hopf 环胚态射，则

$$f(v \otimes y) = f(\iota(v)^{[n(y)]} \cdot \pi(y)) = \iota_B(v)^{[n(y)]} \cdot \pi_B(y)$$

对所有的 $v \in V_{even}$ 和 $y \in P(A)$均成立。因此，这样的态射是唯一的（如果存在的话）。

为证明其存在，令 $f \colon H_{alg} \to B$ 为线性映射 $v \otimes y \in V_{even} \otimes P(A) \mapsto \iota_B(v) \cdot \pi_B(y) \in P(B)$ 的伴随除幂超 Hopf 代数态射。我们只需验证 f 保持 $\cdot$ 乘积；根据 Hopf 环分配律，只需在 $\odot$-不可分解元上证明这一点，也就是说，只需对 $P(H_{alg}) = V_{even} \otimes P(A)$ 的元素的除幂证明。根据我们在 H_{alg} 中构造 $\cdot$ 乘积的方式，我们立即得到，对于所有 $v \in V_{even}$、 $x \in H_{alg}$ 和 $a \geq 2$， $f(\iota(v)^{[a]} \cdot x) = \iota_B(v)^{[a]} \cdot f(x)$。此外，

由于 π_B 是超 Hopf 环胚态射，我们有

$$\begin{aligned} f\left((v\otimes y)^{[a]}\cdot(w\otimes z)^{[b]}\right) &= (-1)^{t(y)d(w)n(z)ab} f\left(\iota(vw)^{[n(y)a]}\cdot\pi(y^{[a]}\cdot z^{[b]})\right) \\ &= (-1)^{t(y)d(w)n(z)ab}\iota_B(vw)^{[n(y)a]}\cdot\pi_B(y^{[a]}\cdot z^{[b]}) \\ &= \left(\iota_B(v)^{[n(y)]}\cdot\pi_B(y)\right)^{[a]}\cdot\left(\iota_B(w)^{[n(w)]}\cdot\pi_B(z)\right)^{[b]} = f(v\otimes y)\cdot f(w\otimes z). \end{aligned}$$

□

由于我们希望专门讨论 $A = {H_{EP}}^*(S^0)$ 和 $V = H^*(X;\ \mathbb{F}_p)$ 并且如注 2.39所示， ${H_{EP}}^*(S^0)$ 中杯积与除幂之间的关系很复杂，因此最好用不可分解元来重新表述上述构造。在带除幂的霍普夫代数中，不可分解元具有 $x^{[p^k]}$ 的形式，其中 x 是本原元且 $k \geq 0$。因此，仅作为分次双交换霍普夫代数， $DP_{HA}(V\otimes P(A)^{pr})$ 由以下元素生成：

$$\{(v\otimes y)^{[p^k]}\}_{v\in V, y\in P(A), k\geq 0} = V\otimes Q(A).$$

我们得到不可分解元的一个同构 $V_{even}\otimes Q(A)\cong QH_{alg}$，其由 $v\otimes y\mapsto v^{[n(y)]}\cdot y$ 给出，对所有 $v\in V$ 和 $y\in A$ 均成立；这表明，在仅考虑乘积 $\odot$ 时， H_{alg} 是由 $V_{even}\otimes Q(A)$ 生成的自由分次交换代数，再模去 Frobenius 的像以及由关系 (5) 生成的理想。由此， V 和 $Q(A)$ 的任意一对加法基都会在 H_{alg} 中诱导出一个加法基。总之，我们有如下结论。

引理 2.44. 设 e_0 （分别地， e_1）是 ρ 中常值表示（分别地，符号表示）直和项里的非零元素。设 $Q(A)$ 是 A 的 $\odot$- 不可分解元空间。设 $\mathcal{B}_V$ 和 $\mathcal{B}_A$ 分别是 V_{even} 和 $Q(A)$ 的全序加法基。将 $\mathcal{B}_V^\rho$ 定义为元素$\{v\otimes e_i\}_{v\in\mathcal{B}_V, i\in\{0,1\}}$构成的集合。以任意方式排列 $\mathcal{B}_V$ （例如按字典序）。设 $\mathcal{B}$ 是形如 $\bigodot_{i=1}^r\left(\iota(v_i)^{[n(y_i)}\right]\cdot\pi(y_i))\in H_{alg}$ 的元素构成的集合，其中 $v_1\leq\cdots\leq v_r\in\mathcal{B}_V^\rho$、 $y_1\leq\cdots\leq y_r\in\mathcal{B}_A$ 满足：

- 所有 $\odot$-因子的符号次数相同
- 每个总次数为偶数的 $\odot$ 因子的重数至多为 $p-1$,
- 且每个奇总次数的 $\odot$-因子的重数至多为1。

那么， $\mathcal{B}$ 是 H_{alg} 作为 $\mathbb{F}_p$-向量空间的一组基。

3. 带扭曲系数的对称群的同调与上同调

扩张幂和自由无限循环空间的同调是 Kudo-Araki-Dyer-Lashof 代数上的代数。该代数由同调运算构成，而这些运算是点的扩张幂的同调（即对称群的同调）的基本构件。这一结构已由 Cohen–Lada–May [CLM76]的工作充分阐明。本文的策略是证明，我们基于杯积结构建立的描述与他们的描述完全配对。但对于奇素数，要想得到最简洁的上同调描述，就需要考虑取系数于 ρ，即 $\mathbb{F}_p[\mathcal{S}_n]$-表示；该表示是平凡表示与符号表示之和，已在上一节中引入。

因此，本节分为两部分。在第一个小节中，我们将用 Kudo-Araki-Dyer-Lashof 运算来描述˜与 DX 系数 ρ的同调。我们不在此宣称原创性，因为这里只是回顾 Cohen–Lada–May [CLM76] 关于平凡直和项的经典结果，以及 Bernard 最近对符号扭曲系数所作的推广 [Ber]。在第二个小节中，我们对这些结果取对偶，从而得到 $\bigoplus_{n\geq 0}H^*(\mathcal{S}_n;\rho)$ 作为 Hopf 环的描述，并证明定理 2.35。符号次数为零的直和项已由我们先前的工作所知，即 [GSS12]和 [Gue17], ; 符号次数为一的直和项的描述则是新的。

3.1. **用 KADL 运算描述扩张幂的同调。** 由于我们在每个分次上均为有限维的情形中使用域系数，因此 DX 的同调，其局部系数由 $\mathcal{S}_n$表示 A_n 定义 2.17 给出，与$\bigoplus_{n\geq 0}H^*(D_n(X);\ A_n) = {H_{EP}}^*(X)$的双分次线性对偶同构。因此它将成为一个 Hopf 余环，带有两个余乘积 $\Delta_\odot$,

$\Delta_\cdot$，以及分别与 $\odot$、$\cdot$和 Δ 对偶的乘积 $*$，满足所有公理，构成一个所有态射方向均反转的 Hopf 环。

乘积 $*$：$H_i(D_nX)\otimes H_j(D_mX) \to H_{i+j}(D_{n+m}X)$也有群同调的解释。设$R_{\mathcal{S}_n}$ 为 $\mathbb{F}_p$ 的一个 $\mathbb{F}_p[\mathcal{S}_n]$-模分解，则由命题 2.2，$R_{\mathcal{S}_n}\otimes_{\mathcal{S}_n}\widetilde{H}_*(X)^{\otimes n}$的同调即为 D_nX的同调。乘积 $*$ 在相差一个符号的意义下，由以下映射的张量积诱导：由包含映射 $\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_m \hookrightarrow \mathcal{S}_{n+m}$ 诱导的分解映射$R_{\mathcal{S}_n}\otimes R_{\mathcal{S}_m} \to R_{\mathcal{S}_{n+m}}$，以及同构 $\widetilde{H}_*(X)^{\otimes n}\otimes\widetilde{H}_*(X)^{\otimes m} \cong \widetilde{H}_*(X)^{\otimes n+m}$。从几何上说，$D(X)$与 $C(X)$上的乘积可通过一个嵌入 $\mathbb{R}^\infty \coprod \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$来定义，借此可以取带有 X中标签的构形之并的像。由于它源自空间上的同伦交换乘法，我们也称此乘积为庞特里亚金积。

由于上同调上的余乘积和传递积构成一个双代数，因此例如，若上同调类 a_i 在同调 x_j 上的配对为克罗内克配对——也就是说，$\langle a_i, x_j\rangle = \delta_{i,\ j}$——且 a_i 是本原元，那么配对 $\langle\bigodot_i a_i, *_i x_i\rangle$ 将为 1。但如果某些类重复出现，就会引入系数，例如 $\langle\bigodot_n a, x^{*n}\rangle = n!$ 上同调中的除幂运算会在这些情况下“填补空缺”，产生对偶元；例如，$\langle a^{[n]}, x^{*n}\rangle$ 为 1，因为它由链层面和上链层面的张量积给出。

正如包含映射 $\mathcal{S}_n\times\mathcal{S}_m \hookrightarrow \mathcal{S}_{n+m}$ 产生庞特里亚金积一样，花环积的包含映射 $\mathcal{S}_n\wr\mathcal{S}_k \hookrightarrow \mathcal{S}_{nk}$ 产生代数上的 Kudo-Araki-Dyer-Lashof 运算。

定义 3.1（参见 [Ber]）。令 $R_{\mathcal{S}_n}\otimes(R_{\mathcal{S}_k})^{\otimes n}$ 作为 $\mathcal{S}_n\wr\mathcal{S}_k \hookrightarrow \mathcal{S}_{nk}$的一个分解。令 W_* 为 C_p的标准最小 $\mathbb{F}_p$ 分解，其中 C_p是阶为 p 的循环群，e_i 是 W_i的一个生成元。对于每个链 $e\in W_*$，我们关联一个运算 $q(e)^\#$：$R_{\mathcal{S}_n}\to R_{\mathcal{S}_{pn}}$，它将链 c映射为 $e\otimes c^p$在由 $C_p\wr\mathcal{S}_n \hookrightarrow \mathcal{S}_{np}$的包含所诱导的分解映射下的像。

我们考虑线性态射

$$q(e)\colon H_*(\mathcal{S}_n;\widetilde{H}_*(X)^{\otimes n}\otimes\rho)\to H_*(\mathcal{S}_{pn};\widetilde{H}_*(X)^{\otimes pn}\otimes\rho)$$

由该映射诱导的

$$c\otimes(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\mapsto q(e)^\#(c)\otimes(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)^{\otimes p}.$$

Kudo-Araki-Dyer-Lashof (KADL) 运算是线性态射。

$$q_i = q(e_i)\colon H_m(\mathcal{S}_n;\widetilde{H}_*(X)^{\otimes n}\otimes\rho)\to H_{pm+i(p-1)}(\mathcal{S}_{pn};\widetilde{H}_*(X)^{\otimes pn}\otimes\rho).$$

从几何上看，当 i 为奇数时，q_i 作用于 X 的同调类（$n=1$ 情形），在 CX 中由带标记的构形族表示，其中构形中的 p 个点位于 i-球面上，并通过 p 次单位根的作用彼此相关，且所有标记都处于 X 上的同一个循环中。

对于 $p=2$，我们考虑 r 元组 $(i_1,\cdots,i_r)$。对于奇素数，令 β 为 Bockstein同态。对于一个 $2r$ 元组 $I=(\varepsilon_1,i_1,\ldots,\varepsilon_r,i_r)$，其中 $\varepsilon_k\in\{0,1\}$ 且所有 $i_k\geq 0$，我们关联同调运算 $q_I=\beta^{\varepsilon_1}q_{i_1}\circ\cdots\circ\beta^{\varepsilon_r}q_{i_r}$。若对所有 $1\leq k<r$，都有 $i_k\leq i_{k+1}-\varepsilon_{k+1}$（当$p=2$时则为 $i_k\leq i_{k+1}$），并且在 $p>2$ 的情况下满足 $i_k\equiv i_{k+1}-\varepsilon_{k+1}$ 模 $2\forall 1\leq k<r$，就称 I 为容许的。若 I 容许且满足 $i_1>0$，就称其为强容许的。这是用下标记法改述 Bernard 在 [Ber], 第 7 节中的容许条件。

定理 3.2 (Cohen–Lada–May [CLM76])。模p 同调 CX 关于庞特里亚金积是一个自由分次交换代数，其生成元为 $q_I(x)$ 其中 x 遍历 X 的约化同调的一个分次基，且 I 遍历强容许序列，并附加要求：对于 p 奇数 i_r和 x 的同调次数具有相同的奇偶性，其中 $I=(\varepsilon_1,\ i_1,\ \ldots\ldots,\ \varepsilon_r,\ i_r)$

同样，对于 CX，当 p为奇数时，使用模 p 符号表示给出的扭曲系数同调可以利用戴尔-拉沙夫运算的扭曲版本作为代数来计算。

~定理 *3.3*（*Bernard* [*Ber*]）。对于奇数 p，$D(X)=C(X_+)$ 在系数取 *sgn*（模p 符号表示）时的同调，是关于同调积的自由分次交换代数，其生成元为 $q_I(x)$；其中 x 遍历 X 的同调的一个分次基，I 遍历满足 i_r 且 x 的同调次数奇偶性不同的强容许序列，其中 $I=(\varepsilon_1,i_1,\ldots,\varepsilon_r,i_r)$

注 3.4。 在 CX 上的容许但非强容许 KADL 运算，可通过恒等式 $Q_0(x) = x^{*p}$求得。KADL 运算的迭代非容许序列可借助 Adem 关系计算。在 [CLM76] 和 [Ber], 中均采用“上指标”记法，因为同调次数的性质更好，且 Adem 关系的形式也更简洁。我们采用“下指标”记法，因为这种记法使对偶模的计算论证以及 Hopf 环生成元的构造更加清晰。两种约定仅在系数和重新编号方面有所不同，本质上是等价的。关于两种记法之间的确切关系，请参阅上述两篇论文。

定义3.5。 令 p 为一个奇素数，并令 $k \geq 0$。定义 $\mathcal{R}_k^t$ 为由容许的KADL运算 q_I 张成的 $\mathbb{F}_p$-向量空间，其中 $I = (\varepsilon_1, i_1, \ldots, \varepsilon_k, i_k)$ 的长度为 $2k$。令 $\mathcal{R}^t = \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{R}_k^t$。

对于 $p = 2$，令 $\mathcal{R}_k$ 为由容许的KADL运算 q_I 张成的 $\mathbb{F}_2$-向量空间，其中$I = (i_1, \ldots, i_k)$ 的长度为 k。

鉴于我们的主要应用，我们将容许运算 q_I 视为作用于一个 0 次数类。在这种情况下，由满足 i_k 为偶数的 q_I 张成的子空间 $\mathcal{R}_k \subseteq \mathcal{R}_k^t$ 对应于经典的非扭曲 KADL 运算，而由满足 i_k 为奇数的 q_I 张成的子空间 $\mathcal{R}'_k \subseteq \mathcal{R}_k^t$ 对应于扭曲 KADL 运算。具体而言，对于$\iota \neq 0 \in \overline{H}_0(S^0)$，通过将 q_I 映射为 $q_I(\iota)$，我们将 $\mathcal{R}_k$识别为 $H_*(\mathcal{S}_{p^k}; \mathbb{F}_p) \subseteq H_*(D(S^0); \mathbb{F}_p)$的一个子空间，并将 $\mathcal{R}'_k$识别为 $H_*(\mathcal{S}_{p^k}$; 符号表示) $\subseteq H_*(D(S^0)$; 符号表示)的一个子空间。运算 $q_I \in \mathcal{R}_k^t$ 的分支为 $n(q_I) = p^k$，其同调次数为$d(q_I) = \sum_{j=0}^{k-1} p^j (i_{j+1}(p-1) - \varepsilon_{j+1})$。

根据定理 3.2， $H_*(DS^0; \mathbb{F}_p) = H_*(CS^0; \mathbb{F}_p)$ 的基由 $\mathcal{R} = \bigsqcup_k \mathcal{R}_k$ 中强容许 KADL 运算的庞特里亚金单项式给出。我们将此基记为 $\mathcal{B}$，并称其为**Nakaoka 基**。类似地，根据定理 3.3， $H_*(DS^0$; 符号表示) 的基由 $*$ 中强容许 KADL 运算的 $\mathcal{R}' = \bigsqcup_k \mathcal{R}'_k$-单项式给出，记为 $\mathcal{B}_{\text{sgn}}$。在 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}_{\text{sgn}}$中，同一个单项式里次数为奇数的运算不得出现两次。

对于 $p = 2$， $\mathcal{R} = \bigsqcup_k \mathcal{R}_k$ 嵌入为 $H_*(CS^0; \mathbb{F}_2)$ 的一个子空间，映射方式为将 q_I 映至 $q_I(\iota)$，其分支为 $n(q_I) = 2^k$，同调次数为 $d(q_I) = \sum_{j=0}^{k-1} 2^j q_{j+1}$。定理 3.2给出了如上所述的 Nakaoka 单项式基。

3.2. 具有符号表示系数的对称群上同调，模p。

为了完成奇素数情形下将 $H^*(DX; \mathbb{F}_p)$ 描述为 Hopf 环的工作，我们必须先分析模 p 的对称群符号表示系数上同调。当我们考察 $X^n_{h\mathcal{S}_n}$ 的上同调时，例如通过胞腔链模型， X 中的一个 d-胞腔会产生一个维数为 dn 的链，而置换 $\sigma \in \mathcal{S}_n$ 在此链上的作用是乘以 $(-1)^{d\,\mathrm{sgn}(\sigma)}$。例如， $H^{*+nd}(D_n(S^d); \mathbb{F}_p)$ 有一个与 $H^*(\mathcal{S}_n;\mathrm{sgn}^d)$ 同构的直和项。尽管偶数情形和奇数情形的加法结构同构，但这里的乘积结构有显著差异。

理解 Hopf 环的第一步是考察其 $\odot$-不可分解元；根据 Hopf 环的分配律，它们在 $\cdot$-乘积下构成一个环。在双分次分支的情形中，这个环是各个分支上的 $\odot$-不可分解元的余乘积。对于对称群的上同调，这些 $\odot$-不可分解元环构成了我们先前计算的基础 [GSS12、Gue17], 不过，这些环的计算可追溯至 Cohen–Lada–May 的工作 [CLM76], , 他们将其称为 $\mathcal{R}^*_k$。

因此，本节的重点是引理3.8，其中计算了$\mathcal{R} \bigoplus \mathcal{R}'$的对偶代数。虽然对扭曲运算的这一计算与非扭曲情形相似，但此前尚未进行过计算。这里的计算是对 [CLM76], 第一部分第 3 节中论证的直接推广；正如该文献所建议的，我们使用下标记号。

令 $\mathcal{R}^*_k$ 和 $\mathcal{R}'^*_k$ 分别为关于 Nakaoka 基的 $H^*(\mathcal{S}_{p^k}; \mathbb{F}_p)$ 和 $H^*(\mathcal{S}_{p^k}; \mathrm{sgn} \otimes \mathbb{F}_p)$ 中长度为 k 的运算 q_I 的线性对偶 $q_I^\vee$ 的张成空间。由于扭曲 KADL 运算的自然性，[GSS12] 中定理 4.13 的证明也表明，相对于传递积 $P(\bigoplus_{n\geq 0} H_*(\mathcal{S}_n; A_n))$ 的对偶余乘积而言，原始元构成的子空间是 $\mathcal{R}^t = \mathcal{R} \bigoplus \mathcal{R}'$。由于传递积与 $*$ 的对偶余乘积构成一个双代数，对于 I 容许的 $\{q_I^\vee\}$ 对偶类构成了我们的 Hopf 环不可分解元的一组基。此外，这个 $\odot$-不可分解元模的每个分支在杯积下都是一个分次交换环。

回顾一下，在循环群 C_p 的同调中，与杯积对偶的余乘积 $\Delta\colon H_*(C_p) \to H_*(C_p) \otimes H_*(C_p)$ 诱导出 $\mathcal{R}^t$ 上唯一的余乘积 ψ，使得 $\psi(q(e)) = (q \otimes q)(\Delta(e))$。余乘积 ψ 的形式为 $\psi(q_I) = \sum_i \eta_i q_{J_i} \otimes q_{K_i}$，它编码了 Cartan 公式 $q_I(x \otimes y) = \sum_i \eta_i q_{J_i}(x) \otimes q_{K_i}(y)$。精确的构造及相关计算参见 [CLM76] 。

虽然同构 $H^*(\mathcal{S}_n; \mathrm{sgn}) \cong H^*(D_n S^1; \mathbb{F}_p)$ 为我们指引方向，但在这项计算中，我们需要作出更细致的区分。虽然传递积和余乘积在此同构下保持不变，但杯积并非如此。让一个运算 q_I 作用于 $[S^1]$，使其位于 $H_*(DS^1; \mathbb{F}_p)$ 中，并与该同构复合，尽管如此，我们仍可将 $\mathcal{R}'_k$ 嵌入 $H_*(\mathcal{S}_{p^k}; \mathrm{sgn})$。结合我们对具有平凡系数的对称群同调的了解，我们得到一个映射 $\kappa\colon \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}' \to H_*(\mathcal{S}_n; \mathbb{F}_p \oplus \mathrm{sgn})$。通过对偶性，这给出了一个 $\mathbb{F}_p$-模映射 $\kappa^*\colon H^*(\mathcal{S}_{p^k}; \mathbb{F}_p \oplus \mathrm{sgn}) \to \mathcal{R}_k^* \oplus {\mathcal{R}'_k}^*$。我们比较这些环中的乘积。

命题3.6. 如果 $x \in H^d(\mathcal{S}_{p^k}; \text{符号表示}^{\varepsilon})$ 且 $y \in H^{d'}(\mathcal{S}_{p^k}; \text{符号表示}^{\varepsilon'})$，则

$$\psi^*(\kappa^*(x) \otimes \kappa^*(y)) = (-1)^{\varepsilon(d' + \frac{p-1}{2} k\varepsilon')} \kappa^*(x \cdot y).$$

证明。令 X 为一个空间，并令 $n = p^k$。固定 X 的同调的一组分次基 B。我们注意到下图是交换的，其中 d 表示对角映射，τ 表示显然的洗牌映射，而 q 是显然的商空间映射。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D}_n(X) & \xrightarrow{d_{D_n(X)}} & \tilde{D}_n(X)^2 \\ \downarrow{\scriptstyle d_{E(\mathcal{S}_n) \times_{\mathcal{S}_n} d_{X^n}}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ (E(\mathcal{S}_n) \times E(\mathcal{S}_n)) \times_{\mathcal{S}_n} (X^n \times X^n) & \xrightarrow{q} & (E(\mathcal{S}_n) \times E(\mathcal{S}_n)) \times_{(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n)} X^{2n} \end{array}$$

~考虑 $q_I(x) \in H_*(D_n(X))$，其中 $x \in H_*(X)$。假设 $\Delta(x) = \sum_i \lambda_i x'_i \otimes x''_i$属于 $H_*(X)$，其中$x'_i, x''_i \in B$。记 $\psi(q_I) = \sum_l \eta_l q_{J'_l} \otimes q_{J''_l}$。令 φ为同调中的余乘积，它与 $H^*(\mathcal{S}_n; \mathbb{F}_p \oplus \text{符号表示})$ 的杯积对偶。

取同调，并追踪上方路径中 $q_I(x)$ 所作用的像，我们得到

$$\begin{aligned} \tau_* \circ d_{\tilde{D}_n(X)_*}(q_I(x)) &= \tau_* \left(\sum_{i,k} \lambda_i \eta_l q_{J'_l}(x'_i) \otimes q_{J''_l}(x''_i) \right) \\ &= \sum_{i,l} (-1)^{|q_{J_{l''}}||x'_i|} \lambda_i \eta_l q_{J'_l} \otimes q_{J''_l} \otimes (x'_i)^{\otimes^n} \otimes (x''_i)^{\otimes^n}. \end{aligned}$$

类似地，对于下方路径，我们有

$$(d_{E(\mathcal{S}_n)} \times_{\mathcal{S}_n} d_{X^n})_*(q_I(x)) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \prod_{j=1}^n \lambda_{i_j} (-1)^{\sum_{1 \le j < l \le n} |x''_{i_j}||x'_{i_l}|} d_{E(\mathcal{S}_n)_*}(q_I) \otimes_{\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n} \left(\bigotimes_{j=1}^n x'_{i_j} \otimes \bigotimes_{j=1}^n x''_{i_j} \right).$$

我们可以将最后这个求和拆分为两部分：一部分是对所有 n-元组求和，其中所有 i_k 彼此相等（设为 i）；另一部分是对那些并非全都相等的 n-元组求和。第一部分可以改写为

$$\sum_i \lambda_i (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} |x'_i||x''_i|} d_{E(\mathcal{S}_n)_*}(q_I) \otimes ({x'_i}^{\otimes^n} \otimes {x''_i}^{\otimes^n}),$$

其映射到 $\sum_i \lambda_i (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} |x'_i||x''_i|} \varphi(q_I) \otimes {x'_i}^{\otimes^n} \otimes {x''_i}^{\otimes^n}$ 在 q 下。我们断言第二部分为零。回忆存在一个同构 $H_*((E(\mathcal{S}_n) \times E(\mathcal{S}_n)) \times_{\mathcal{S}_n} X^{2n}; \mathbb{F}_p) \cong H_*(\mathcal{S}_n; (H_*(X; \mathbb{F}_p)^{\otimes^n})^{\otimes^2})$。由 $(x'_{i_1} \otimes \ldots x'_{i_n}) \otimes (x''_{i_1} \otimes \cdots \otimes x''_{i_n})$（其中 i_1，...，i_n 不全相等）生成的 $(H_*(X; \mathbb{F}_p)^{\otimes^n})^{\otimes^2}$ 的 $\mathcal{S}_n$-子表示，同构于某个杨子群 $G \lneq \mathcal{S}_n$的 G-表示所诱导的 $\mathcal{S}_n$-表示。上面求和中的相应项等于 $\mathrm{tr}_G^{\mathcal{S}_n} \rho_G^{\mathcal{S}_n}(q_I)$，这就是乘以指数 $[\mathcal{S}_n : G]$，而该指数模 p 为零。

总之，

$$\sum_i \lambda_i (-1)^{|x_i'||q_{J_l''}|}\psi(q_I)\otimes (x_i')^{\otimes^n}\otimes (x_i'')^{\otimes^n} = \sum_i \lambda_i (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}|x_i'||x_i''|}\varphi(q_I)\otimes (x_i')^{\otimes^n}\otimes (x_i'')^{\otimes^n}.$$

由于 $n=p^k$, $\frac{n_{(n-1)}}{2} = \frac{p-1}{2}k$ 模2。因此，上述等式对于所有空间 X 以及对于所有类$x\in H_*(X;\mathbb{F}_p)$成立，当且仅当

$$\sum_l \eta_l \kappa(q'_{J_l})\otimes\kappa(q''_{J_l}) = \sum_l \eta_l (-1)^{\varepsilon(|q_{I_l''}|+\frac{p-1}{2}\varepsilon')}\varphi\kappa(q_I)$$

对于 ε、$\varepsilon'\in\{0,1\}$。对其取对偶，我们得到所需的公式。 □

总而言之，对偶于杯积的余乘积，在限制于 $\mathcal{R}^t$ 上时，具有如下形式

$$\varphi(q_I) = \sum_{J+K=I} (-1)^{\sum_{l=1}^n \left(\frac{p-1}{2}j_l k_l + \delta_l j_l\right)} q_J\otimes q_K,$$

其中 $J=(\varepsilon_1,j_1,\dots,j_n)$ 和 $K=(\delta_1,k_1,\dots,k_n)$。

这个公式的困难在于，求和遍历了分解序列 I的所有方式，而不仅仅是容许序列。进行计算需要Adem关系。对偶代数最终还是可处理的，不过直到今天（据我们所知），即使在平凡系数情形下，同调上的Nakaoka基与上同调上的标准基之间的配对，也尚未知晓，哪怕是通过我们下面给出的分析也如此。

为了计算与 φ 对偶的乘积在符号表示情形下的结果，我们继续沿用 [CLM76第一节中对平凡系数的处理方法。3]我们考虑首项最小的运算序列。

令 $S\subseteq\{1,\dots,k\}$，并分别定义 $I_S[k]$和 $I'_S[k]$为容许的 $2k$-元组$I=(\varepsilon_1,i_1,\dots,\varepsilon_k,i_k)$的集合，其中 i_j模 2 等于 $|S\cap\{1,\dots,k-j\}|$（分别为 $(|S\cap\{1,\dots,k-j\}|+1)$），且当且仅当 $k+1-j\in S$时 $\varepsilon_j=1$。注意，$\{q_I:I\in I_S[k]\}\subseteq\mathcal{R}_k$，且 $\{q_I:\ I\in I'_S[k]\}\subseteq\mathcal{R}'_k$。

对于所有的 $k\in\mathbb{N}$和 $S\subseteq\{1,\dots,k\}$，我们都可以通过逐项比较，在 $I_S[k]$上定义偏序 $\leq$。这个偏序集的所有交都存在，取每一项的最小值即可得到。特别地， $I_S[k]$ 和 $I'_S[k]$ 有一个最小元，分别记作 $L_{S,\ k}$ 和 $L'_{S,\ k}$。

虽然我们用不到，但直接写出元素 $L_{S,\ k}$ 和 $L'_{S,\ k}$ 的具体形式并不困难。例如，$L_{\{1,2\},\ 3}=(0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2)$。改用上标记法后，$(2k)$元组 $L_{S,\ k}$与[CLM76]第 I.3 节中定义的元组相同。

下面的结论是直接的组合学结果，其论证与 [CLM76]中的引理 I.3.3 和 I.3.4 相同。

引理 3.7. 对于所有满足 $1\leq j\leq k$ 的 $j,k\in\mathbb{N}$，令

$$I_{j,k} = (\underbrace{0,\dots,0}_{2(k-j)},\underbrace{0,2,\dots,0,2}_{2j})\in I_\phi[k].$$

加权和 $(n_1,\dots,n_k)\mapsto L'_{S,k}+\sum_{j=1}^k n_j I_{j,k}$ 是从 $\mathbb{N}^k\to I'_S[k]$ 到所有 $\{1,\dots,k\}$ 的子集 S 的双射。

现在我们可以计算与 $(\mathcal{R}^t,\varphi)$ 对偶的代数。

引理 3.8. 假设 p 为奇数。相对于容许序列基，我们考虑 $(\mathcal{R}^t)^\vee$ 中以下对偶类：

- $\xi_{j,\ k}=q^\vee_{I_{j^{\ k}}}$ 对于 $1\leq j\leq k$
- $\xi'_k=q^\vee_{L'_{\phi,\ k}}$ 对于 $k\geq 1$
- $\tau'_{j,\ k}=q^\vee_{L'_{\{j\},\ k}}$ 对于 $1\leq j\leq k$

A作为 $\mathbb{F}_p[\xi_{1,k},\dots,\xi_{k,k}]$-模，$(\mathcal{R}^t_k)^\vee$ 同构于 $\mathbb{F}_p[\xi_{1,k},\dots,\xi_{k,k}]\otimes(M_k\bigoplus M'_k)$，其中

- M_k 是具有基 $\{q^\vee_{L_{S,k}}\}_{S\subseteq\{1,\dots,k\}}$的 $\mathbb{F}_p$-向量空间，如 *Cohen–Lada–May* 中所述，并且
- M'_k 是以 $\{q^\vee_{L'_{S,k}}\}_{S\subseteq\{1,\dots,k\}}$ 为基的 $\mathbb{F}_p$-向量空间。

作为分次交换代数，$(\mathcal{R}^t)^\vee$ 由 $\xi_{j,\,k}$ 生成，其中有 $1 \le j \le k$、$\xi'^{\,2}_k$ 和 $\tau'_{j,\,k}$，其中有 $1 \le j \le k$，并满足以下关系

$$\xi'^{\,2}_k = \xi_{k,k}.$$

证明。定理 I.3.7（见 [CLM76]）指出 $\mathcal{R}_k^\vee$ 与 $\mathbb{F}_p[\xi_{1,k},\dots,\xi_{k,k}] \otimes M_k$ 加法同构。证明该结果所用的完全相同论证，只需将 3.7 引理替换 [CLM76], 中的引理 I.3.4，即可得到一个加法同构 $\mathcal{R}'^{\,\vee}_k \cong \mathbb{F}_p[q^\vee_{I'_{j,k}}]_{1\le j\le k} \otimes M'_k$。特别地，$\mathbb{F}_p[\xi_{1,k},\dots,\xi_{k,k}]$ 是商余代数的对偶 $\mathcal{R}_\varnothing[k]$。令 $+$ 表示 $2k$ 元组的分支逐项加法。可以验证

$$L_{S,k} = \begin{cases} \sum_{s\in S} L'_{\{s\},k} & \text{if } |S| \text{ is even} \\ \sum_{s\in S} L'_{\{s\},k} + L'_{\phi,k} & \text{if } |S| \text{ is odd} \end{cases}$$

$$L'_{S,k} = \begin{cases} \sum_{s\in S} L'_{\{s\},k} + L'_{\phi,k} & \text{if } |S| \text{ is even} \\ \sum_{s\in S} L'_{\{s\},k} & \text{if } |S| \text{ is odd} \end{cases}.$$

这成立，因为函数 $\_ + L'_{\{\ell\},k}\colon I_S[k] \to I'_{S\cup\{\ell\}}[k]$（分别地，$\_ + L'_{\{\ell\},k}\colon I'_S[k] \to I_{S\cup\{\ell\}}[k]$）对于所有偶数（分别地，奇数）基数的 $S \subseteq \{1,\dots,\ell-1\}$ 都是保序双射，因此它必定保持极小元。由于将 Adem 关系应用于序列 q_I 会产生满足 $J > I$ 的元素 q_J，且 $L_{S,k}, L'_{S,k}$ 是极小的，因此可以使用 [CLM76, I.3.7] 证明形如 $\prod_{s\in S}\tau'_{s,k}$（若 $|S|$ 为偶数）或 $\xi'_k\prod_{s\in S}\tau'_{s,k}$（若 $|S|$ 为奇数）的乘积与 $q_{L'_{S,k}}$ 之间的配对是完美的。由引理 3.7 可知，这意味着 ξ'_k 和 $\tau'_{j,k}$（其中 $1 \le j \le k$）作为 $\mathbb{F}_p[\xi_{1,k},\dots,\xi_{k,k}]$-代数生成 $(\mathcal{R}^t_k)^\vee$。我们也可以按照 [CLM76] 检验生成元之间的关系 $\xi'^{\,2}_k = \xi_{k,k}$。具体而言，由于 $I_{k,k} = L'_{\phi,k} + L'_{\phi,k}$，$\langle \xi'^{\,2}_k, q_{I_{k,k}}\rangle = 1$。追踪次数可知，$\xi'^{\,2}_k$ 唯一可能的直和项是 $q^\vee_{I_{k,k}}$，因此该关系成立。通过比较维数，我们看到这些给出了 $(\mathcal{R}^t_k)^\vee$ 作为分次交换代数的一个呈示。□

注记 3.9。我们通过以下恒等式恢复了 Cohen、Lada 和 May 的书中第 28 页定义的元素 $\tau_{j,\,k}$ 和 $\sigma_{i,\,j,\,k}$：$\tau_{j,\,k} = \pm\xi'_k\tau'_{j,\,k}$ 以及 $\sigma_{i,\,j,\,k} = \pm\tau'_{i,\,k}\tau'_{j,\,k}$。这些是 $\mathcal{R}^\vee_k$ 中的不可分解元，但不是 $(\mathcal{R}^t_k)^\vee$ 中的不可分解元。

现在我们为对称群的扭曲上同调提供一个加法基。在下面的定义中，聚合块是定理 2.35 所述泛 Hopf 环中的元素。如上所述，一组 $\gamma_{S_i}^{[p^{n_i}]}$ 的乘积只取决于 S_i 的并集，以及 n_i 的列表及其重数。

定义 3.10。令 $S = \{s_1 < s_2 \cdots < s_r\} \subset \{1,\dots,k\}$，并令 $D = \{n_i\}_{i=1}^k$ 为一个长度为 k 的非负整数有限序列。如果 $|S|$ 为奇数，则令 $m = 1$；但如果它为偶数，则令 $m \ge 1$。

Set

$$\Gamma_{S,D,m} = \prod_{i=1}^{k}\left(\gamma_{\varnothing,i}^{[p^{k-i}m]}\right)^{n_i}\prod_{j=1}^{r}(\gamma'_{s_j})^{[mp^{k-s_j}]}\lambda_k{}^{\varepsilon(r)},$$

其中，如果 r 为偶数，则 $\varepsilon(r)$ 为 0；如果 r 为奇数，则为 1

类似地，我们定义

$$\Gamma'_{S,D,m} = \prod_{i=1}^{k}\gamma_{\varnothing,i}^{[p^{k-i}m]}\prod_{j=1}^{r}(\gamma'_{s_j})^{[mp^{j-s_j}]}\lambda_k{}^{1-\varepsilon(r)},$$

对于 $S \subseteq \{1,\dots,k\}$，其中 S 和 n_i 如上所述，但现在当 $m = 1$ 时，$|S| = 1$。

我们称 $\Gamma_{S,\,D,\,m}$ 和 $\Gamma'_{S,\,D,\,m}$ **聚集块**，其在 $\bigoplus_n H^*(\mathcal{S}_n;\,\mathbb{F}_p)$ 或 $\bigoplus_n H^*(\mathcal{S}_n;\,\mathrm{sgn})$ 中的**轮廓**为 (S, D)。

我们将 $H_{EP}{}^*(S^0)$ 中首选的**霍普夫单项式**定义为由原始聚集块的除幂构成的 $\odot$ 乘积，这些聚集块的轮廓两两不同，且要么全部属于 $\bigoplus_n H^*(\mathcal{S}_n;\mathbb{F}_p)$，要么全部属于 $\bigoplus_n H^*(\mathcal{S}_n;\mathrm{sgn})$

我们观察到，$\Gamma_{S,D}$ 是本原元当且仅当 $k \in S$、$n_k > 0$ 或 r 为奇数，而 $\Gamma'_{S,D}$ 是本原元当且仅当 $k \in S$、$n_k > 0$ 或 r 为偶数。

这些聚集块将构成我们所计算的上同调的霍普夫单项式基，并可组装成“天际线图”。建议读者将其与经典模 p 对称群上同调中的聚集块概念进行比较，该概念定义见 Guerra 的论文 [Gue17] 第 964 页。

引理 3.1 $\mathbb{F}_p$-向量空间

1. 定理 2.35 的陈述所描述的泛 *Hopf* 环是由以下元素张成的：间，其生成元为 *Hopf* 单项式。

证明。 展开泛对象的定义后，我们可以直接看出，所考虑的分量超 Hopf 环中，生成元 $\gamma_k^{[n]}$ 、 $\gamma'^{[n]}_i$ 、 λ_k 之间的完备关系集如下：

- $(\lambda_k)^2 = \gamma_k$
- 该 $\odot$ 乘积 of a 类 in $H^*(\mathcal{S}_n; \mathbb{F}_p)$and a 类 in $H^*(\mathcal{S}_n;$ 符号表示) is 0.
- $\Delta(\lambda_k) = 1 \otimes \lambda_k + \lambda_k \otimes 1$
- $\Delta(\gamma_k^{[n]}) = \sum_i \gamma_k^{[i]} \otimes \gamma_k^{[n-i]}$
- $\Delta(\gamma'^{[n]}_k) = \sum_i \gamma'^{[i]}_k \otimes \gamma'^{[n-i]}_k$
- $\gamma_k^{[n]} \odot \gamma_k^{[m]} = \begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix} \gamma_k^{[m+n]}$
- $\gamma'^{[n]}_k \odot \gamma'^{[m]}_k = \begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix} \gamma'^{[m+n]}_k$
- 不同符号次数元素的 $\odot$ 乘积为 0

由于我们的 Hopf 环由上述类生成，因此两种乘积（$\cdot$ 和 $\odot$）中的单项式作为向量空间都能生成它。根据 Hopf 环分配律，我们可以将问题化简为生成元的 -- 单项式的 $\odot$- 乘积。此外，我们还可以进一步限定，只考虑完全属于同一分支的生成元的 --单项式；由于关系 $\lambda_k^2 = \gamma_k$，我们可以舍弃其中 λ_k 至少出现两次的单项式。上述所有关系都保持这类 --单项式的轮廓，并可用于将任何轮廓与某个聚合块相同的乘积等同起来。因此，Hopf 单项式作为向量空间生成我们的 Hopf 环。□

现在我们可以证明本节的主要结果。

定理的证明 2.35。 给定子集 $S \subset \{1, \dots, k\}$，定义 $\gamma'_{S,\ k} = q^{\vee}_{L'_{S},\ k}$，其中线性对偶是相对于 Nakaoka 单项式基取的。类似地，定义 $\gamma_{S,\ k} = q^{\vee}_{L_{S},\ k}$。我们还定义：

- $\lambda_k = \gamma'_{\varnothing,k}$
- $\gamma_{j,\ m} = (q^{*m}_{I_{j\ j,}})^{\vee}$
- $\gamma_k = \gamma_{k,1}$
- $\gamma'_{i,m} = (q^{*m}_{L_{\{i\},i}})^{\vee}$
- $\gamma'_k = \gamma'_{k,1}$
- $\gamma_k = \gamma_{\varnothing,k}$

由于 q_0 是 p^{th} 在系数为 ρ的 $D(S^0)$ 的模 p 同调中的幂，因此 $\gamma_{j,\ p^{k-j}} = (q_{I_{j,}\ k})^{\vee}$以及 $\gamma'_{i,\ p^{k-i}} = \gamma'_{\{i\},\ k}$。

我们利用命题3.6 和引理3.8 推导出杯积关系。 $\mathcal{R}_k^{\vee}$ 的结构由[CLM76]中的定理 I.3.7 描述。在该文献中，乘积关系涉及除以$\gamma_{\varnothing,\ k}$但它们等价于 [Gue17], 中陈述的恒等式；我们的关系（就 $\mathcal{R}_k^{\vee}$ 而言）是对这些恒等式的直接改写，所用指数较小。对于系数为符号表示的上同调，利用引理3.8 可以通过类似论证得到我们的描述。

我们首先注意到，$\gamma_{j,\ k}$、 $\gamma'_{i,\ k}$ 和 λ_k 是 $(\mathcal{R}_k^t)^{\vee}$ 的生成元 $\xi_{j,\ k}$、 $\tau'_{i,\ k}$ 和 ξ'_k 的提升。

我们首先对 $m \geq 1$ 进行归纳法证明 $\gamma'^{[m]}_k = \gamma'_{k,\ m}$。归纳法的基步（$m = 1$）显然，因此我们假设 $m > 1$。由于同调中的乘积 $*$ 是 $H_{EP}{}^*(S^0)$ 中余乘积 Δ 的线性对偶，对 i 进行归纳法的直接计算得出余乘积公式：

$$\Delta(\gamma'_{k,m}) = \sum_{i+j=m} \gamma'_{k,i} \otimes \gamma'_{k,j}$$

类似地，利用余乘积与除幂之间的相容性，我们通过归纳法推得：

$$\Delta(\gamma'^{[m]}_k) = \sum_{j=0}^{m} \gamma'^{[j]}_k \otimes \gamma'^{[m-j]}_k.$$

结合这两个余乘积恒等式和归纳假设，我们推得 $\gamma'^{[m]}_k$ 与 $\gamma'_{k,m}$ 之间的差必为本原元。若 m 不是 p的幂，则右侧分支中不存在 $\odot$-不可分解元。若 $m = p^l$，则由引理 3.8 确定这些原始元，且正确维数中不存在这样的元。在所有情况下，此差都必为零。这表明 γ'_k 是标准非幂零。类似的论证表明，$\gamma^{[m]}_k = \gamma_{k,m}$ 和 γ_k 是标准非幂零。

根据其定义，λ_k 显然是本原元。杯积关系 $(\lambda_k)^2 = \gamma_k$ 成立，因为等式两边都是本原元，因而是 $\odot$-不可分解元，而且该等式在 $(\mathcal{R}^t)^\vee$ 中成立。因此，我们的杯积关系是对 $(\mathcal{R}^t_k)^\vee$ 中关系的重新表述。

令 H 为定理 2.35 陈述中所描述的泛 Hopf 环。由于我们已经验证所有所需的关系都在 $H_{EP}{}^*(S^0)$ 中成立，因此必定存在唯一的 Hopf 环映射 π: $H \to H_{EP}{}^*(S^0)$，它与我们对生成元的选取相容。由于 $\bigoplus_{n\geq 0} H^*(\mathcal{S}_n;\rho)$ 中 $\odot$-不可分解元构成的环是 $\mathcal{R}^t$ 的线性对偶，而 $\mathcal{R}^t$ 由 $\gamma_i^{[p^k]}$、$\gamma'^{[p^k]}_i$ 和 λ_k 的像生成（由引理 3.8 可知），因此 $H_{EP}{}^*(S^0)$ 由本证明开头定义的类生成，进而 π 是满射。于是，由引理 3.11 可知，Hopf 单项式的像作为 $\mathbb{F}_p$-向量空间生成 $H_{EP}{}^*(S^0)$。为了证明 π 是同构，只需验证它们构成一个基；这可以通过按次数比较维数与同调中的 Nakaoka 基来完成，正如 [Gue17，定理 2.7] 中所做的那样。□

作为这一证明的副产品，我们可以直接得到以下结论。

推论 3.12。 由定义 $H_{EP}{}^*(S^0)$中在定义 *3.10*中定义的霍普夫单项式集合，是 $H_{EP}{}^*(S^0)$ 作为 $\mathbb{F}_p$-向量空间的三重分次加法基。

4. 带基点的扩张幂的上同调环

现在，我们可以着手进行主要计算。在第 2 节中，我们建立了一个代数框架，用于处理扩张幂的上同调环整体。该框架需要扭曲系数，因此在第 3 节中，我们将有关同调的经典结果推广到了这一情形。现在我们证明，在带除幂的分量霍普夫环框架内生成的上同调与同调完美配对。我们先为前者构造一个加法基，再证明配对结果。

4.1. DX_+**的上同调加法基**。

我们描述定理 2.37 和 2.38所给出的超霍普夫环（带加法除幂）的显式加法基。我们利用这些基与同调配对。我们的基有助于进行具体计算，因为我们描述了一种算法，可用它计算两个乘积和余乘积。

我们主要结合第 2.6 节的结果与引理 3.11。当 $A = H_{EP}{}^*(S^0)$ 和 $V = H^*(X;\ \mathbb{F}_p)$时，$Q(A)$ 的基由分支等于 p 的幂的聚合块构成，依据推论3.12。引理 2.44 所提供的基由这样的聚合块构成，并额外带有 X的上同调中的一个类这一数据。简而言之，根据 A中的Hopf环关系，具有相同轮廓的两个这样的聚合块的传递积再次是另一个聚合块。因此，我们可以合并具有相同轮廓以及 X 中相同额外上同调类的 $\odot$-因子，并去除对分支的约束。我们将其形式化如下。

定义 4.1。 令 X 为一个拓扑空间，令 $\mathcal{B}$ 为 $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ 的分次加法基。 $\mathcal{B}$ 上的一个**带装饰的聚集块** 是一个二元组 (x, b)，其中 b 是 $\bigoplus_{n\geq 0} H^*(\mathcal{S}_n;\ A_n)$ 中的一个聚集块，并且$x \in \mathcal{B}$。带装饰的聚集块 (x, b) 的**轮廓** 是 b 的轮廓，而其**装饰** 为 x。其符号次数 在 x 的次数与 b 的符号次数具有相同奇偶性时为 0，在二者奇偶性不同时为 1。 $\mathcal{B}$ 上的一个**带装饰的霍普夫单项式** 是形如 $b_1 \odot \cdots \odot b_r$ 的形式表达式，其中 b_1、……、b_r 是 $\mathcal{B}$上的带装饰的聚集块，并且对 b_i进行置换后视为相同；其中任意两个 b_i都不具有相同的轮廓和装饰，且所有 b_i都具有相同的符号次数。

我们之前的结果可归纳如下。

命题 *4.2.* 设 X 是一个拓扑空间，$\mathcal{B}$ 是 $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ 的分次加法基。设 $A=\bigoplus_{n\geq 0}H^*(\mathcal{S}_n;A_n)$，并设 $V=H^*(X;\mathbb{F}_p)$。令 H_{alg} 为满足定理 *2.38* 陈述中条件的、具有加法除幂的 *Hopf* 环范畴中的泛对象。令 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{B}$ 上带装饰的 *Hopf* 单项式集合。我们将 $\mathcal{M}$ 映射到 H_{alg} ：将带装饰的聚合块 (x,b) 实现为 $\iota(x)^{[n(b)]}\cdot\pi(b)$，并将带装饰的 *Hopf* 单项式实现为 H_{alg} 中各组成聚集块的 $\odot$-乘积。于是，$\mathcal{M}$ 是 H_{alg} 作为 $\mathbb{F}_p$-向量空间的加法基。

我们可以通过对 Giusti、Salvatore 和 Sinha 的天际线图作适度推广，以图形方式描述我们的加法基。此外，我们所有的结构态射都可以用图形方式理解。我们首先考虑无装饰天际线图，它们对应于 $H_{EP}{}^*(S^0)$ 中的类。

首先，我们回顾 [GSS12] 和 [Gue17]中的一些定义。

定义 4.3。 天际线图 是由若干列水平并排排列而成的图示。每列由宽度相同的矩形**盒子** 构成，这些盒子上下堆叠。盒子的可能尺寸取决于素数 p:

- 若 $p=2$，一列可以由任意数量的宽度为 $n2^k$、高度为 $1-2^{-k}$ 的盒子组成，其中 k、$n\in\mathbb{N}$、$n\geq 1$。
- 若 $p>2$，一列可以由任意数量的宽度为 np^k 、高度为 $2(1-p^{-k})$ 的空心矩形，以及至多一个宽度为 np^k、高度取决于子集 $S\subseteq\{1,\dots,k\}$ 的实心盒组成。为简化记号，令 $|S|=2a+\varepsilon$，其中 $a\in\mathbb{N}$ 且 $\varepsilon\in\{0,1\}$。对于任意选择的 k 和 S，有两种可能的高度：$n[2(a+\varepsilon-\sum_{s\in S}p^{-s})-\varepsilon p^{-k}]$ 和 $n[2(a-\sum_{s\in S}p^{-s})-(1-\varepsilon)p^{-k}+1]$。如果盒子的高度由第一个公式给出，我们称它为**偶型**；否则称它为**奇型**。当子集的基数 $|S|=2a$ 为偶数时，偶型盒子总是有定义的；而对于 $|S|=2a+1$，只有当 $n=1$ 时才允许使用偶型盒子。当子集的基数 $|S|=2a+1$ 为奇数时，奇型盒子总是有定义的；而对于 $|S|=2a$，只有当 $n=1$ 时才允许使用奇型盒子。若一列中的实心盒为偶型或不存在，则称该列为偶型；若实心盒为奇型，则称该列为奇型。

我们要求天际线图中不能包含两个由高度相同的基本矩形构成的列，而且其组成列必须全为偶型或全为奇型。我们不记录列的排列顺序，也不记录每列中方框的堆叠顺序，因此，列经过置换后不同的两个天际线图视为相同。

每个基本方框都应解释为 $\bigoplus_{n\geq 0}H^*(\mathcal{S}_n;\mathbb{F}_p)$ 或 $\bigoplus_{n\geq 0}H^*(\mathcal{S}_n;\mathrm{sgn})$ 中的一个类，且位于与其宽度相对应的分支中。具体来说：

- 若 $p=2$，尺寸为 $n2^k$ 和 $1-2^{-k}$ 的矩形对应于 ${\gamma_k}^{[n]}$
- 若 $p>2$，我们将宽度为 np^k、高度为 $2(1-p^{-k})$ 的空心矩形视为 ${\gamma_k}^{[n]}$
- 若 $p>2$，宽度为 np^k、与子集 S相对应的偶型（分别为奇型）实心盒，对应于聚合块 $\Gamma_{S,\,0,\,n}$（分别为 $\Gamma'_{S,\,0,\,n}$），如定义 3.10 所述。

一列被理解为构成它的基本方框的杯积，而一般的天际线图则被解释为其各列的传递积。借助这些对应关系，上述论文中得到的 $\bigoplus_{n\geq 0}H^*(\mathcal{S}_n;\mathbb{F}_2)$ 和 $\bigoplus_{n\geq 0}H^*(\mathcal{S}_n;\mathbb{F}_p)$ $(p>2)$ 的加法基元素，可用这些天际线图来描述（若 $p>2$，则各列为偶型）。例如，在图1 中，我们描绘了分别对应于 $\gamma_1^3\odot\gamma_2\in H^*(\mathcal{S}_6;\mathbb{F}_2)$ 和 ${\gamma_1}^{[3]}\gamma_{\{1\},2}\odot\gamma_1^2\in H^*(\mathcal{S}_{12};\mathbb{F}_3)$ 的天际线图。

有时考虑用竖直虚线将某些基本矩形等分会很有用。具体来说，对应于 ${\gamma_k}^{[n]}$ 的盒子被分成 n 份，每份宽度为 p^k；如果 $p>2$，则对应于子集 S 的偶维实心盒（偶型）和奇维实心盒（奇型）被分成若干份，每份宽度为 $p^{\max(S)}$。

命题 4.4. $H_{EP}{}^*(S^0)$ 中的霍普夫单项式与上述定义的天际线图一一对应

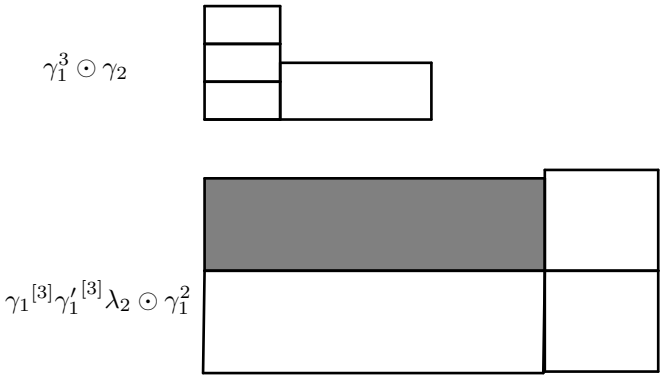

图1. $H^*(\mathcal{S}_6;\mathbb{F}_2)$（上）和 $H^*(\mathcal{S}_{12};\mathbb{F}_3)$（下）中的天际线图示例

证明。 我们已经指出，实心块对应于聚合块 $\Gamma_{S,\ D,\ n}$ 或 $\Gamma'_{S,\ D,\ n}$ ，而空心矩形对应于 $\gamma_k^{[n]}$ 。因此，所有可能的列的集合与聚合块的集合一一对应，其中类的杯积对应于构成方框的堆叠。类似地，通过对各列对应的聚合块取传递积，天际线图可导出 $H_{EP}{}^*(S^0)$ 中的霍普夫单项式。

要精确定义这一点，需要为每个天际线图中的方格和列固定一个排序，因为杯积和传递积仅在差一个符号的意义下可交换。有了这一点，直接根据定义进行检验即可发现这是一个双射。□

接下来，我们将描述我们对 $H_{EP}{}^*(X_+)$ 的天际线图的推广。

定义 4.5。 设 p 为一个素数，且 V 为一个在 $\mathbb{F}_p$上的分次代数。一个 **在**V 中装饰的列是如定义 4.3中所述的列图，并带有一个元素 $x \in V$。图示地，我们将该列的装饰描绘为一个额外的矩形，标记为 x ，其宽度等于该列的宽度，高度等于 x的次数，并置于该列下方。当 $p > 2$时，如果底层未装饰列的类型与装饰的维数同为偶数或同为奇数，则称装饰列为偶型。否则，称其为奇型。

一个以 V 标记的**天际线图**，是由以 V 标记的列构成的图示，这些列水平相邻排列；其中不存在两个由对应高度的方块构成且具有相同标记的列，并且所有组成列均为偶型或均为奇型。

若 $\mathcal{B}$ 是 V 作为分次的 $\mathbb{F}_p$-向量空间的一组加法基，则我们将装饰取自该基元素的天际线图定义为以 $\mathcal{B}$ 标记的**天际线图**。

现在我们假设 $V = H^*(X;\mathbb{F}_p)$。

命题 4.6。 设 p 为一个素数，且设 X 为一个拓扑空间，且设 $\mathcal{B}$ 为 $H^*(X;\ \mathbb{F}_p)$的一组基。以 $\mathcal{B}$ 标记的天际线图集合，与相对于给定基的霍普夫单项式之间存在双射对应，这些霍普夫单项式属于 $H_{EP}{}^*(X_+)$，如定义 *4.1*所述。将方块层叠在一起，对应于取相关上同调类的杯积（限制在相应分支上）；将列水平相邻放置，则对应于取它们的传递积。

证明。 若 c 是一个带有装饰 x的列，我们将与之对应的带装饰的聚集块记作 $\Gamma(c)\cdot x^{[w]}$，其中 w 是该列的宽度，而 $\Gamma(c)$ 是 $H_{EP}{}^*(S^0)$ 中与 c对应的聚集块。接着，我们将一个装饰天际线图对应到其各个装饰列所对应的带装饰的聚集块的传递积。由命题 4.4 很容易推出，这是一个双射。 □

只取列全为偶型的装饰天际线图，我们便得到$\bigoplus_{n\geq 0} H^*(D_n(X);\mathbb{F}_p)$的一组基。

我们的下一个目标是描述一种通过天际线图计算结构态射的方法。聚合块的杯积在图形上的粗略解释是“将相应的列分裂后，一列叠在另一列上”。然而，如果 $p>2$，此过程并不总能得到一个“允许的”列。因此，我们必须使用 $H^*(\mathcal{S}_n;\mathbb{F}_p)$ 或 $H^*(\mathcal{S}_n;\mathbb{F}_p\otimes$ 符号表示) 中的杯积关系，按如下方式将这叠矩形写成一个允许的列的倍数。

命题 4.7. $H_{EP}{}^*(X_+)$ 中由宽度为 $np^k, p\nmid n$ 的单列表示的类的杯积，按如下方式进行：

- 我们将两列的空心盒堆叠起来，并将两个实心部分（如果有的话）替换为一个实心矩形，其高度是原来两个实心盒高度之和
- 假设这两个实心盒分别对应两个递增子集 $S=\{s_1<\cdots<s_k\}$ 和$S'=\{s'_1,\ldots,s'_l\}$。将结果乘以标量系数 λ。如果两个序列有共同项，$\lambda=0$。否则，结果等于 ±1；符号由将序列 $(s_1,\ldots,s_k,s'_1,\ldots,s'_l)$ 按递增顺序排列的置换的符号决定。
- 当 $n=1$ 且给定的列为奇维偶型或偶维奇型时，我们添加一个高度为 $2(1-p^k)$ 的空心矩形，并相应下移实心部分，以保持列的总高度不变。

对以 $H^*(X)$ 标记的列求杯积，方法是对其底层未标记列求杯积，并将原标记的杯积作为标记。

现在我们可以用图形来描述两个乘积 $\cdot$ 和 $\odot$、余乘积 Δ以及除幂运算$-^{[n]}$：

- 将两个天际线图并排放置，即可得到它们的传递积。如果有两列的宽度分别为 n 和 m，且具有相同的装饰和相同高度的方框（即具有相同轮廓的聚合块），则将它们合并为一列，宽度为$n+m$，系数为 $\binom{n+m}{n}$；若 $p>2$ 且这两个装饰列的维数均为奇数，则系数为 0。
- 霍普夫单项式的余乘积可根据以下事实计算：生成元是本原元的标准非幂零元素，以及 Δ 和 $\odot$ 具有双代数性质。从图形上看，这相当于如上所述在矩形内部画竖直虚线，以各种可能的方式沿贯穿全高的竖线（虚线或实线）将每一列分成两部分，并将新列排列成两个图。每个新列都继承其来源旧列的装饰。等价地，可以用内部虚线将对应于 $x^{[n]}$、$x\in H_{EP}{}^*(X_+)$ 的矩形均匀地分割成宽度为 1 的部分。
- 两个天际线图的杯积可按以下步骤求得：首先画出基本方框内部所有虚线。然后将两个图分成若干列，可以沿用原有边界，也可以沿着贯穿现有列整个高度的虚线分割。最后，如果可能，将第一个图中的列与第二个图中的列一一配对，并保持宽度相同；再按照命题4.7计算配对列的杯积，并用它们构造一个新的天际线图（若 $p>2$，则需乘以适当的系数）。
- 若 $p=2$，除幂运算 $^{[n]}$ 作用于单列图时，会将其所有组成矩形的宽度缩放 n 倍，同时保留其高度和装饰。若 $p>2$，当该列为偶维时，此作用的计算方式相同；而对于奇维列，所有非平凡的除幂运算都作用为零。对含有 m 列的一般天际线图，$^{[n]}$ 的作用可通过对每一列分别施加该运算来理解，并将所得图乘以 $(n!)^{m-1}$。

4.2. **分析配对**。 为了证明我们的主定理，我们需要一个预备技术引理。

引理 4.8。 设 $\iota_X\colon H^*(X;\mathbb{F}_p)\otimes\rho\to H_{EP}{}^*(X_+)$ 为将定义域与陪域的分支-1 代数相识别的同态。令 $\pi\colon H_{EP}{}^*(S^0)\to H_{EP}{}^*(X_+)$ 为由终端映射 $X\to\{*\}$自然诱导的态射。对于所有 $m\in\mathbb{N}$，以及所有 $x\in H^*(X;\mathbb{F}_p)$，以下结论成立。

(1) 对于所有 $\alpha_i \in H_*(X;\mathbb{F}_p)$，同调与上同调之间的克罗内克配对满足

$$\langle \iota_X(x)^{[n]}, \alpha_1 * \cdots * \alpha_n \rangle = \pm \prod_{i=1}^{n} \langle \iota_X(x), \alpha_i \rangle,$$

而

$$\langle \iota_X(x)^{[n]}, q_{I_1}(\alpha_1) * \cdots * q_{I_r}(\alpha_r) \rangle = 0$$

若 I_1、.. .、 I_r 是 KADL 运算的容许序列，且至少有一个 q_{I_i} 不同于 $q_0 \dots q_0$。*(2)* 对所有 x、$x' \in H^*(X;\mathbb{F}_p) \otimes \rho$（若 $p>2$，二者的总次数均为偶数），$\iota_X(x)^{[n]} \cdot \iota_X(x')^{[n]} = \iota_X(xx')^{[n]}$。*(3)* 对所有 $y \in H^*(\mathcal{S}_n;\rho)$，$(\iota_X(x)^{[n]} \cdot \pi(y))^{[m]} = \iota_X(x)^{[nm]} \cdot \pi(y)^{[m]}$。

证明。我们给出 出 $p>2$ 的证明。情形 $p=2$ 可以用同样的方法证明，不涉及复杂情况 符号表示的。对于 $n=1$，结论显然成立，因此我们假设 $n \geq 2$。

第一个结论由除幂余乘积的公式以及如下事实得出：在分支 $n=1$ 中，克罗内克配对与 $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ 和 $H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 之间的克罗内克配对一致。对于最后一个结论，再次利用除幂的余乘积公式，我们将问题归约到情形 $r=1$。

因此，我们只需证明：若 I 是长度为 k 且不同于 $q_0 \dots q_0$ 的 KADL 运算容许序列，则 $\langle \iota_X(x)^{[p^k]}, q_I(\alpha) \rangle = 0$。为此，我们选取 $\iota_X(x)^{[m]}$ 的一个合适的上链代表。假设 $x \in H^d(X;\mathbb{F}_p) \otimes \rho$。那么对于所有 $m \geq 2$，类 $\iota_X(x)^{[m]}$ 都属于 $H_{EP}{}^*(X)^{dm,\ m,\ e}$，其中若 d 为偶数，则 $e=0$；若 d 为奇数，则 $e=1$。几乎根据构造，$\iota_X(x)^{[m]}$ 由以下上链表示

$$W_0^{\mathcal{S}_m} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{F}_p \xrightarrow{x^{\otimes m}} H^*(X;\mathbb{F}_p)^{\otimes m} \otimes \mathrm{sgn}^e,$$

其中 $W_*^{\mathcal{S}_m} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{F}_p \to 0$ 是 $\mathbb{F}_p$ 作为 $\mathbb{F}_p[\mathcal{S}_m]$-模的一个自由分解。这是一个定义良好的上闭链，因为$x^{\otimes m}$ 在 $H^*(X;\mathbb{F}_p)^{\otimes m} \otimes$ 符号表示^{e}中对 $\mathcal{S}_m$ 的作用下是不变的。如果 q_I 不同于 $q_0 \dots q_0$，那么$q_I(\alpha) \in H_*(\mathcal{S}_{p^k};\ H_*(X;\mathbb{F}_p)^{\otimes p^k} \otimes_{\mathcal{S}_{p^k}} \rho)$由形如 $y \otimes_{\mathcal{S}_{p^k}} \alpha^{\otimes p^k}$ 的循环表示，其中 $y \in W_l^{\mathcal{S}_{p^k}}$ 和 $l>0$。这样的循环必然与上述 $\iota_X(x)^{[p^k]}$ 的上链代表配对为零。

类似地，$\iota_X(x')^{[n]}$ 可以在上链层面表示为 $W_0^{\mathcal{S}_n} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{F}_p \xrightarrow{x'^{\otimes n}} H^*(X;\mathbb{F}_p)^{\otimes n} \otimes$ 符号表示$^{e(x')}$。由于分解 W_* 的对角线必须保留增广 ε，将表示 $\iota_X(x)^{[n]}$ 和 $\iota_X(x')^{[n]}$ 的上链的张量积与对角线复合，我们得到 $W_0^{\mathcal{S}_n} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{F}_{p(xx')} \xrightarrow{\otimes n} H^*(X;\mathbb{F}_p)^{\otimes n} \otimes$ 符号表示$^{e(x)+e(x')}$，它同时表示 $\iota_X(x)^{[n]} \cdot \iota_X(x')^{[n]}$ 和 $\iota_X(xx')^{[n]}$。

我们可以假设 y 是三齐次的，并且 $k \geq 2$。如果 $t(y)$为奇数，那么该陈述是平凡的，因为$(x^{[n]} \cdot y)^{[k]}$ 和 $x^{[nk]} \cdot y^{[k]}$ 都为零，所以我们假设 $t(y)$为偶数。用一个$\mathcal{S}_{n(y)}$-等变上循环 f表示 y： $W_d^{\mathcal{S}_{n(y)}}(y) \to$符号表示$^{e(y)}$。令 $\mathrm{tr}: W_*^{\mathcal{S}_{n(y)k}} \to W^{\mathcal{S}_k} \otimes (W_*^{\mathcal{S}_{n(y)}})^{\otimes k}$为转移映射的链级代表。使用我们对 $\iota_X(x)^{[m]}$ 的代表，并与对角映射结合，我们立即得到，$\iota_X(x)^{[n(y)k]} \cdot \pi(y)^{[k]}$和$(\iota_X(x)^{[n(y)]} \cdot \pi(y))^{[k]}$都由同一个上循环表示

$$W_*^{\mathcal{S}_{nk}} \xrightarrow{\mathrm{tr}} W_*^{\mathcal{S}_k} \otimes (W_*^{\mathcal{S}_n(y)})^{\otimes k} \xrightarrow{\varepsilon \otimes f^{\otimes k}} \mathrm{sgn}^{e(y)}$$

$$\xrightarrow{x^{\otimes kn(y)}} H^*(X;\mathbb{F}_p)^{\otimes kn(y)} \otimes_{\mathcal{S}_{kn(y)}} \mathrm{sgn}^e \otimes \mathrm{sgn}^{e(y)} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mu_{kn(y)}} H^*(X;\mathbb{F}_p)^{\otimes kn(y)} \otimes_{\mathcal{S}_{kn(y)}} \mathrm{sgn}^{e+e(y)}.$$

□

现在我们可以证明本文的主要结果。

定理的证明 *2.37* 和 *2.38*。我们只证明 $p>2$的定理，因为 $p=2$ 的断言类似且明显更简单。

令 H_{alg} 为具有加法除幂且代数表示如上所示的分量超 Hopf 环。由引理 4.8 （陈述 2 和 3）可知，$H_{EP}{}^*(X)$ 中存在满足

定理所述关系的类，因此存在一个保持除幂结构的分次超霍普夫半环态射 $H_{alg} \to H_{EP}{}^*(X_+)$。我们将证明此映射是一个同构。

首先，如上所述，我们引用关于霍普夫代数结构的著名结果 [MM65，And71] 从而得知，双交换除幂超霍普夫代数 H 的分次线性对偶是由 $P(H)^\vee$ 本原生成的自由分次交换代数，其中 $P(H)^\vee$ 是本原元子空间 $P(H) \subseteq H$ 的对偶空间。要证明映射 $H_{alg} \to H_{EP}{}^*(X_+)$ 是同构，只需验证 $P(H_{alg})$ 与 $(H_{EP}{}^*(X_+))^\vee$ 的不可分解元空间 Q 之间诱导的配对是完美配对。我们通过进行专门分析来实现这一点，这也是证明中最精细的部分。

我们需要明确描述空间 Q 的不可分解元空间 $H_{EP}{}^*(X_+)^\vee$ 以及空间 P的本原元空间 H_{alg}。$H_{EP}{}^*(X_+)$ 的分次对偶用 KADL 运算来描述，并按第 3 节所述扩展到符号表示情形。具体而言，Q 有一个基 $\mathcal{B}_*$，其元素由如下形式的类给出

$$\beta^{\varepsilon_1} q_{i_1} \beta^{\varepsilon_2} q_{i_2} \dots \beta^{\varepsilon_r} q_{i_r}(\alpha),$$

其中，$(\varepsilon_1, i_1, \dots, \varepsilon_r, i_r)$ 是一个由 KADL 运算组成的强可容许序列，$i_{j+1} - \varepsilon_{j+1}$ 对所有 j 具有相同的奇偶性，并且 α 遍历 $H_*(X; \mathbb{F}_p)$ 的一个给定加法基。由于 $H_{EP}{}^*(X_+)$ 是三重分次的，且其结构映射保持次数不变，$(H_{EP}{}^*(X_+))^\vee$ 和 Q 也都是三重分次的。当 α 为三齐次时，基元素 $\beta^{\varepsilon_1} q_{i_1} \beta^{\varepsilon_2} q_{i_2} \dots \beta^{\varepsilon_r} q_{i_r}(\alpha)$ 的同调维数可由 $d(\alpha)$ 利用 KADL 运算的通常维数公式计算得到。其分支为 $p^r n(\alpha)$。如果 $d(\alpha)$ 与 i_r 具有相同的奇偶性，则其符号次数为 0；否则为 1。

$P = P(H_{alg})$ 可以直接用 H_{alg} 的霍普夫单项式基来描述。事实上，根据第 4.1 节的构造，P 的一个基 $\mathcal{B}^*$ 由如下形式的类组成：$b \cdot x^{[p^n]}$，其中 $b \in H^*(\mathcal{S}_{p^n}; \rho)$ 是对称群 $\mathcal{S}_{p^n}$ 的扭曲或非扭曲上同调中的一个本原聚集块，而 x 属于 $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ 的一个给定加法基。$b \cdot x^{[p^n]}$ 在 H_{alg} 中的上同调度、分支和符号次数分别为 $d(b) + d(x)p^n$、p^n、$e(b) + d(x)$（模 2）。

根据上述描述，存在同构 $P_{\{*\}} \otimes H^*(X; \mathbb{F}_p) \cong P$ 和 $Q_{\{*\}} \otimes H_*(X; \mathbb{F}_p) \cong Q$，分别由 $b \otimes x \mapsto b \cdot x^{[n]}$ 和 $q_I \otimes \alpha \mapsto q_I(\alpha)$ 给出。我们断言，在这些同构下，P 与 Q 之间的配对等价于克罗内克配对 $P_{\{*\}} \otimes Q_{\{*\}} \to \mathbb{F}_p$和 $H^*(X; \mathbb{F}_p) \otimes H_*(X; \mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p$的张量积。这个断言将计算归结为第3节已经讨论过的特殊情形 $X = \{*\}$，从而完成证明。

为证明这一断言，我们首先使用 May 公式，计算 KADL 运算杯积的对偶余乘积 $\Delta_\cdot$，由此得到，对于所有 $b \in P_{\{*\}}$, $x \in H^*(X; \mathbb{F}_p)$, $q_I \in Q_{\{*\}}$, $\alpha \in H_*(X; \mathbb{F}_p)$,

$$\langle b \cdot x^{[n]}, q_I(\alpha) \rangle = \sum_{J+K=I} \sum_{\Delta_\cdot(\alpha) = \alpha_{(1)} \otimes \alpha_{(2)}} \pm \langle b \otimes x^{[n]}, q_J(\alpha_{(1)}) \otimes q_K(\alpha_{(2)}) \rangle.$$

根据引理 4.8 的陈述 1，$\langle x^{[n]}, q_K(\alpha_{(2)}) \rangle$ 除非满足 $q_K = q_0 \dots q_0$ 且$\alpha_{(2)}$ 的同调次数与 x的上同调度相同，否则为零。此外，由于 b 是来自 $H_{EP}{}^*(S^0)$的一个类的拉回，$\langle b, q_J(\alpha_{(1)}) \rangle$ 除非$\alpha_{(1)}$ 的同调次数为 0，否则为 0。这些条件只能对一个加项同时成立：$\alpha = \alpha_{(2)}$, $\alpha_{(1)}$ 是一个零维类，$q_J = q_I$ 且 $q_K = q_0 \dots q_0$，由此得到$\pm \langle b, q_I \rangle \langle x, \alpha \rangle$。□

5. 更多上同调环计算

我们利用对 $H^*(DX; \mathbb{F}_p)$ 的描述，得到相关代数 $H^*(DX; \mathbb{F}_p)$、$H^*(CX; \mathbb{F}_p)$ 和 $H^*(QX; \mathbb{F}_p)$ 的一个呈示。除 $H^*(QX; \mathbb{F}_2)$ 外，这些结果都是新的；对于后者，Dung [Dun92] 已经得到了一个等价结果。不过，该论文采用的技术与我们不同，而且我们认为我们的方法能带来更简单的证明。

5.1. 一般的扩张幂。

首先，我们描述当 X 不一定是通过添加一个不交基点而从拓扑空间得到时的 $H_{EP}{}^*(X)$。以下结果是我们的主定理的一个推论。

推论 5.1。 设 X 为一个带基点拓扑空间。设 $\mathcal{B}'$ 为 $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ 的分次基，并设$\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{1_X\}$ 为在 X 的非约化上同调基中加入 $H^*(X_{[*]}; \mathbb{F}_p)$的单位元后得到的基，

其中 $X_{[*]}$ 是包含基点的 X 的连通分支。 $H_{EP}{}^*(X)$ 同构于 $H_{EP}{}^*(X_+)$ 的一个子 *Hopf* 环，其上带有加法除幂；该子环由单位元以及带装饰的 *Hopf* 单项式（相对于基 $\mathcal{B}$）的线性张成所组成，其中装饰不同于 1_X。

证明。将 $*$ 映到 X 的基点的映射 $\pi\colon X_+ \to X$ 诱导出映射 $\pi^*\colon H_{EP}{}^*(X) \to H_{EP}{}^*(X_+)$，它既是 Hopf 环态射，也是除幂结构的态射。其在同调中的对偶映射 π_* 是代数的满射，其核为由 $Q_I(*)$ 生成的理想，其中 I 容许且非空。因此， π^* 必须是单射。从上一节给出的定理 2.38 的证明中，我们看到， $H_{EP}{}^*(X_+)$ 与 $D(X_+)$ 的同调（系数取 ρ）之间的克罗内克配对，限制为未以 1_X 装饰的本原聚集块与 $D(X_+)$ 的同调中不属于 $\ker(\pi_*)$ 的不可分解元之间的完美配对。由此可推得， π^* 的像必定是推论陈述中所确定的子 Hopf 环。□

5.2. **无限扩张幂**。给定带基点拓扑空间 X ，其基点为 $*$，我们考虑定义为如下形式的空间 $D_\infty X$

$$\tilde{D}_\infty X = \{p \times_{\mathcal{S}_\infty} (x_1, \dots, x_n, \dots) : |\{n : x_n \neq *\}| < \infty\} \subseteq E(\mathcal{S}_\infty) \times_{S_\infty} X^{\mathbb{N}},$$

其中 $\mathcal{S}_\infty = \varinjlim_n \mathcal{S}_n$ 是无限对称群。（在 Dung 的论文中，该空间记作 $\mathcal{S}_\infty \wr X$。）根据我们的主定理，可以直接计算 $D_\infty X$ 的上同调。

推论 *5.2.* 设 X 为拓扑空间，且 $\mathcal{B}$ 是 $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ 的一个 $\mathbb{F}_p$-代数基，其中包含 $1_{H^*(X)}$，并扩充了 X 的约化上同调的一个加法基。对于所有 $n \leq m$，令 $\rho_{n,m}\colon H^*(D_mX;\mathbb{F}_p) \to H^*(D_nX;\mathbb{F}_p)$ 为向量空间同态；它将霍普夫单项式 x 映为 *0*，若 x 不含形如 $1^{[r]}_{H^*(X)}$ 且满足 $r \geq m-n$ 的组成块；若 $x = y \odot 1^{[r]}_{H^*X}$，则将其映为 $y \odot 1^{[r-m+n]}_{H^*X}$，其中 y 是另一个霍普夫单项式，且不含任何以 $\odot$ 为因子的 1_{H^*X} 的除幂。

然后，所有映射 $\rho_{n,\,m}$ 都是环同态，并构成一个 $\mathbb{F}_p$ 代数的逆系统。此外， $D_\infty X$ 的模 p 上同调环自然同构于其逆极限。

$$\varprojlim_n H^*(\tilde{D}_nX;\mathbb{F}_p).$$

证明。根据构造， $D_\infty X$ 是拓扑空间 D_nX的直接极限。 $n \leq m$ 的 D_nX到 D_mX 中的嵌入由函数给出

$$f_{n,m}\colon \tilde{D}_nX = E(\mathcal{S}_n) \times_{\mathcal{S}_n} X^n \to E(\mathcal{S}_m) \times_{\mathcal{S}_m} X^m = \tilde{D}_mX, \quad (n \leq m)$$

对应于标准单射 $\mathcal{S}_n \hookrightarrow \mathcal{S}_m$，以及将 X^n 恒等映射到 X^m 的前 n 个坐标、并使最后 $m-n$ 个坐标等于基点的包含映射 $X^n \hookrightarrow X^m$ 。

对于所有 $n \leq m$，诱导态射 $f^*_{n,m}\colon H^*(D_mX;\mathbb{F}_p) \to H^*(D_nX;\mathbb{F}_p)$ 等于 $\rho_{n,m}$。这一事实可直接由定理 2.37 和定理 2.38 得出，因为我们可以将 $f^*_{n,m}$ 认作迭代余积的复合。

$$H^*(\tilde{D}_mX;\mathbb{F}_p) \to H^*(\tilde{D}_nX;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(\tilde{D}_1X;\mathbb{F}_p)^{\otimes^{m-n}} \cong H^*(\tilde{D}_nX;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(X;\mathbb{F}_p)^{\otimes^{m-n}}$$

带有$\mathrm{id}_{H^*(\tilde{D}_nX;\mathbb{F}_p)} \otimes \varepsilon^{\otimes^{m-n}}$，其中 $\varepsilon\colon H^*(\tilde{D}_1X;\mathbb{F}_p) \cong H^*(X;\mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p$是通过对 X 的基点的类进行求值给出的增广。

由于映射$\rho_{n,m}$ 是满态射，对给定空间的极限取上同调，得到所需的同构，即 $H^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)$与 $\varprojlim_n H^*(D_nX;\mathbb{F}_p)$ 之间的同构。□

前一个推论提供了一种实用的方法：通过限制到 D_nX 且 n 有限的 $D_\infty X$，来计算其上同调中的杯积。假设 X 是连通的，且 α_1、 $\alpha_2 \in H^*(D_\infty X;\ \mathbb{F}_p)$ 分别是维数为 d_1 和 d_2 的上同调类。映射$\rho_{n,m}$ 在维数小于或等于 d_1+d_2时是同构，条件是 n、 $m \geq d_1+d_2$。这一点很容易直接看出，但我们也可以将其视为同调稳定性的推论。因此，自然限制态射 $\rho_n\colon H^{d_1+d_2}(\tilde{D}_\infty X;\ \mathbb{F}_p) \to H^{d_1+d_2}(\tilde{D}_nX;\ \mathbb{F}_p)$ 对所有 $n \geq d_1+d_2$都是同构。因此，要计算 $\alpha_1 \cdot \alpha_2$，只需应用$\rho_{d_1+d_2}$，并在 $H^*(D_{d_1+d_2};\ \mathbb{F}_p)$ 中进行计算。

˜我们用此方法为 $H^*(D_\infty X;\ \mathbb{F}_p)$ 提取一组完整的生成元和关系。在本节剩余部分中，我们始终假设 $\mathcal{B}'$ 是 $H^*(X;\ \mathbb{F}_p)$ 作为 $\mathbb{F}_p$-向量空间的一组加法基，而 $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{1\}$ 是通过添加单位元 $1 \in H^*(X_{[*]};\ \mathbb{F}_p)$ 得到的 X 的非约化上同调的基，其中 $X_{[*]}$ 是 X 中包含基点的连通分支。本节中，我们经常只考虑连通空间 X。在这些情况下，$\mathbf{1}$ 将是 X上同调环的单位元。

˜**定义 5.3.** 设 $\mathcal{M}$ 为由 $\mathcal{B}$构造的 $H^*(DX;\mathbb{F}_p)$ 的天际线图基。元素 $x \in \mathcal{M}$ 的**有效宽度** 是从 x 中移除所有装饰为 $\mathbf{1}$ 且高度为 $\mathbf{0}$ 的列后得到的天际线图的宽度。用聚合单项式表示，x 的有效宽度是唯一的聚合单项式 y 的分支，其中 $x = y \odot 1^{[r]}$ 对某个 $r \geq 0$成立。若 $x \in \mathcal{M}$ 的宽度等于其有效宽度，或者等价地，若 x 没有形如 $1^{[r]}$的组成块，则称 $x \in \mathcal{M}$ 为**纯的**。

引理 5.4. 设 $x \in H^*(\tilde{D}_n X;\mathbb{F}_p)$ 为一个纯霍普夫单项式。存在一个类 $x\odot 1^{[*]}$ 属于 $\lim_{\longleftarrow n} H^*(\tilde{D}_n X;\ \mathbb{F}_p) \cong H^*(\tilde{D}_\infty X;\mathbb{F}_p)$，当 $m = n + r$时，它映射到 $H^*(D_m X)$ 中的 $x \odot 1^{[r]}$。

证明。只需验证以下等式成立，即可看出逆极限中存在这样一个类

- $\rho_{n-1,n}(x) = 0$
- $\forall m > 0 : \rho_{n+m-1,n+m}(x \odot 1^{[m]}) = x \odot 1^{[m-1]}$.

为证明第一个恒等式，注意到$\rho_{n-1,\ n}$ 等于迭代余积与˜增广 ε 在一个张量因子上的复合。令 V 为由纯霍普夫单项式生成的 $H^*(DX;\mathbb{F}_p)$的 $\mathbb{F}_p$-子空间。由于余积保持列的标记，$\Delta(V) \subseteq V \otimes V$。因此，$\rho_{n-1,\ n}$ 等于形如 $\varepsilon(y)z$的项之和，其中 $y \in H^*(X;\mathbb{F}_p)$和 $z \in H^*(D_{n-1}X;\mathbb{F}_p)$是纯霍普夫˜单项式。根据定义，$X \simeq D_1 X$ 的上同调中的纯霍普夫单项式是 $\mathcal{B}'$的元素，因此它们属于 ε的核。因此，$\rho_{n-1,\ n}(x) = 0$。

为了证明后一个恒等式，我们注意到 $\rho_{n+m-1,\ n+m}(x \odot 1^{[m]})$ 是 x 在该态射下的像

$$H^*(\tilde{D}_n X;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{-\otimes 1^{[m]}} H^*(\tilde{D}_n X;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(\tilde{D}_m X;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\odot} H^*(\tilde{D}_{n+m} X;\mathbb{F}_p)$$

$$\xrightarrow{\Delta_{n+m-1,1}} H^*(\tilde{D}_{n+m-1} X;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(X;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon} H^*(\tilde{D}_{n+m-1} X;\mathbb{F}_p).$$

由于 Δ 和 $\odot$ 构成一个双代数，这等于以下两个映射复合的和，其中 τ 交换两个因子:

$$H^*(\tilde{D}_n X;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{-\otimes 1^{[m]}} H^*(\tilde{D}_n X;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(\tilde{D}_m X;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\Delta_{m-1,1}} H^*(\tilde{D}_n X;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(\tilde{D}_{m-1} X;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(X;\mathbb{F}_p)$$

$$\xrightarrow{\odot\otimes\mathrm{id}} H^*(\tilde{D}_{n+m-1} X;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(X;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon} H^*(\tilde{D}_{n+m} X;\mathbb{F}_p)$$

$$H^*(\tilde{D}_n X;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{-\otimes 1^{[m]}} H^*(\tilde{D}_n X;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(\tilde{D}_m X;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\Delta_{n-1,1}\otimes\mathrm{id}} H^*(\tilde{D}_{n-1} X;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(X;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(\tilde{D}_m X;\mathbb{F}_p)$$

$$\xrightarrow{(\odot\otimes\mathrm{id})\circ\tau} H^*(\tilde{D}_{n+m-1} X;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(X;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon} H^*(\tilde{D}_{n+m} X;\mathbb{F}_p)$$

第一个复合等于 $\_ \otimes 1^{[m-1]}$，因为 $\Delta_{m-1,\ 1}(1^{[m]}) = 1^{[m-1]} \otimes 1$ 且 $\varepsilon(\mathbf{1}) = 1$。纯霍普夫单项式属于第二个复合的核，因为正如我们已经看到的，余乘积保持由它们生成的子空间，而 $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ 中的每个纯单项式都属于 ε 的核。因此，$\rho_{n+m-1,\ n+m}(x \odot 1^{[m]}) = x \odot 1^{[m-1]}$。□

引理 5.5。集合 $\{x \odot 1^{[*]} :\ x \in \mathcal{M}$ 纯$\}$ 在 $H^*(\tilde{D}_\infty X;\ \mathbb{F}_p)$ 中线性无关。此外，若 X 连通，它就是该向量空间的一组基。

证明。给定一个由形如 $x \odot 1^{[*]}$ 的元素组成的有限集，当 $N \in \mathbb{N}$ 足够大时，它们在$H^*(D_N X;\ \mathbb{F}_p)$ 上的限制线性无关，这意味着原始元素线性无关。若 X 连通，给定 $k \in \mathbb{N}$，当 N 足够大（取决于 k）时，映射 $\rho_N\colon H^k(\tilde{D}_\infty X;\ \mathbb{F}_p) \to H^k(\tilde{D}_N X;\ \mathbb{F}_p)$ 是一个同构，因此给定集合是 $H^k(\tilde{D}_\infty X;\ \mathbb{F}_p)$ 的一组基，因为它限制为$H^k(\tilde{D}_N X;\ \mathbb{F}_p)$ 的一组基。□

若 X 不连通，我们可以如下将 $H^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)$ 的计算归约到连通情形。令 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\pi_0(X)}$ 为 X 的连通分支集合。令 $[*]$表示 $\pi_0(X)$ 中与包含基点的分支相对应的元素。于是存在一个自然的同伦等价

$$\tilde{D}_\infty X \simeq \prod_{\alpha\in\pi_0(X)\setminus\{[*]\}} \tilde{D}X_\alpha \times \tilde{D}_\infty X_{[*]},$$

它诱导出一个上同调代数的同构

$$H^*(\tilde{D}_\infty X;\mathbb{F}_p) \cong \prod_{\{n_\alpha\}_\alpha\in\mathbb{N}^{\pi_0(X)\setminus\{[*]\}}} \bigotimes_\alpha H^*(\tilde{D}_{n_\alpha} X_\alpha;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(\tilde{D}_\infty X_{[*]};\mathbb{F}_p).$$

接下来我们将分析类 $x \odot 1^{[*]}$ 的杯积计算。作为一项技术工具，我们将利用 $\mathbb{F}_p$ 向量空间的递增滤过 $\{F_n H^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)\}_{n\geq 0}$ 的存在，其中 $F_n H^*(D_\infty X;\ \mathbb{F}_p)$ 是由元素 $x \odot 1^{[*]}$ 张成的线性空间，这些元素来自宽度小于或等于 n 的纯霍普夫单项式 x。引理 5.5 保证，当 X 连通时，$\bigcup_{n\geq 0} F_n H^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p) = H^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)$。

引理 5.6。设 $b_1,\dots,b_r$ 是 $H^*(DX;\mathbb{F}_p)$ 中的本原聚集块，并设 $n_1,..,n_r$ 是严格正整数。那么

$$\prod_{i=1}^{r}(b_i^{[n_i]} \odot 1^{[*]}) - b_1^{[n_1]} \odot \cdots \odot b_r^{[n_r]} \odot 1^{[*]} \in F_{w-1}H^*(\tilde{D}_\infty X;\mathbb{F}_p),$$

其中 w 是 $b_1^{[n_1]},\dots,b_r^{[n_r]}$ 的宽度之和。

证明。论证归结为将问题限制在 $H^*(D_N X;\ \mathbb{F}_p)$ 中，其中 $N \in \mathbb{N}$ 取足够大，并在其中进行计算；此时结论直接由我们的霍普夫环表示推出。

具体而言，我们注意到 Δ 保持有效宽度不变。形式上，若霍普夫单项式 x 的有效宽度为 w，则其余乘积可写为 $\Delta(x) = \sum_i x_i' \otimes x_i''$，其中 x_i' 和 x_i'' 的有效宽度之和为 w。此外，我们的杯积公式表明，给定一个非平凡聚集块 $b \in H^*(D_n X;\mathbb{F}_p)$ 和一个属于同一分支的霍普夫单项式（不一定是纯的）$x \in H^*(D_n X;\mathbb{F}_p)$，其杯积 $x\cdot b$（若不为零）总是纯霍普夫单项式之和。结合这两个事实与霍普夫环分配公式可知，给定有效宽度为 w 的 $x \in H^*(D_n X;\mathbb{F}_p)$，以及一个宽度小于或等于 $n-w$ 的非平凡聚集块 $b \in H^*(D_m X;\mathbb{F}_p)$，有如下等式：

$$x\cdot(b \odot 1^{[n-m]}) = \sum_i (x_i'\cdot b)\odot x_i'',$$

其中，x_i''的有效宽度小于或等于 w；仅在一种情形下取等，此时$x_i' = 1^{[m]}$ 和$x_i'' = \rho_{n-m,\ n}(x)$。因此，差值 $x\cdot(b\odot 1^{[n-m]}) - b\odot\rho_{n-m,\ n}(x)$是有效宽度严格小于 n的霍普夫单项式的线性组合。

现在我们可以对 r使用归纳法来证明这一断言。对于 $r=1$，该陈述显然成立。对于 $r>1$，取足够大的 N、$M\in\mathbb{N}$，将前面对 $x = b_1^{[n_1]}\odot\cdots\odot b_{r-1}^{[n_{r-1}]}\odot 1^{[N]}$和 $b = b_r^{[n_r]}\odot 1^{[M]}$的论证应用于此，即可完成归纳。□

引理 5.7。设 $b\in H^*(DX;\ \mathbb{F}_p)$ 是一个聚合块。若 $p>2$ 我们还假设 b 是偶维的，则$(b\odot 1^{[*]})^{p} = b^p \odot 1^{[*]}$。

证明。首先，我们证明一个辅助公式。对于任意 $a\in\mathbb{N}$，定义 $\nu_j(a)\in\{0,1\}$ 为 a的二进制展开中 2^j 的系数。给定 n、k、$N\in\mathbb{N}$，令 $\mathcal{A}_{n,\ k,\ N}$为满足以下三个条件的 2^k-元组 $(a_1,\dots,a_{2^k})\in\mathbb{N}^{2^k}$ 的集合：

- $\forall 0 \leq j < k : \sum_{i=1}^{2^k} a_i \nu_j(2^k - i) = n$
- $\sum_{i=1}^{2^k} a_i = n + N.$

˜对于所有 n、$k \in \mathbb{N}$，对于所有足够大的 $N \in \mathbb{N}$，以及对于所有 $b \in H^*(DX; \mathbb{F}_p)$ 宽度为w的本原聚集块，以下等式成立：

$$(b^{[n]} \odot 1_X^{[Nw(b)]})^k = \sum_{\underline{a} \in \mathcal{A}_{n,k,N}} \bigodot_{i=1}^{2^k} (b^{[a_i]})^{\sum_{j=0}^{k-1} \nu_j(2^k - i)}.$$

我们对 k 使用归纳法证明这个公式。对于 $k = 1$，这是显然的；归纳步骤则是 Hopf 环分配律的直接应用。

现在我们构造一个置换 $\sigma \in \mathcal{S}_{2^k}$，当它通过置换 2^k 个坐标作用于 $\mathbb{N}^{2^k}$ 时，会将 $\mathcal{A}_{n,\ k,\ N}$ 映到自身。给定 $\tau \in \mathcal{S}_k$，我们按以下公式定义 $\overline{\tau} \in \mathcal{S}_{2^k}$：

$$\forall 1 \leq i \leq 2^k : \overline{\tau}(i) = 2^k - \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \nu_{\tau(j+1)-1}(2^k - i)$$

令 $\sigma = \overline{\tau}$，其中 $\tau \in \mathcal{S}_k$ 是一个 k-循环。注意：

- σ 的阶为 k，它在 $\{1, \ldots, 2^k\}$ 中的不动点为 1 和 2^k；
- $\sigma(\mathcal{A}_{n,k,N}) = \mathcal{A}_{n,k,N}$；
- 中属于同一 σ-轨道的两个 2^k-元组，在上式中产生的各项仅相差传递积因子的一个置换。

这些评　论意味着，σ 在$\mathcal{A}_{n,\ k,\ N}$ 中的不动点是那些在 σ-轨道上的 $\{1, \ldots, 2^k\}$。

我们对 $k = p$ 的情形进行专门讨论，以完成证明。由于在此条件下，σ 的阶为 p，前一个等式中所有不对应于 σ 在$\mathcal{A}_{n,\ p,\ N}$ 中的不动点的项之和为零，这是由于 $\odot$的交换性。此外，函数 $\sum_{j=0}^{k-1} \nu_j(2^k - \_)$ 在 σ 于 $\{1, \ldots, 2^k\}$中的轨道上为常数。因此，在对应于 2^k-元组$\underline{a} \in \mathcal{A}_{n,\ k,\ N}$且满足 $\sigma(\underline{a}) = \underline{a}$的各项中，因子$(b^{[a_i]})^{\sum_{j=0}^{k-1} \nu_j(2^k - i)}$ 至少出现 p 次，如果 $i \notin \{1, 2^k\}$。根据除幂代数的性质，除非对所有 $i \notin \{1, 2^k\}$都有 $a_i = 0$，否则这些项全部为零。这样只剩下一项，容易看出它等于$(b^{[n]})^p \odot 1^{[Nw]}$。取极限即完成证明。□

˜我们终于可以给出 $H^*(D_\infty X; \mathbb{F}_p)$ 的呈示了。为此，我们需要对 $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ 的基 $\mathcal{B}$ 施加一些限制。回想一下，弗罗贝尼乌斯同态使得 $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ 成为 $\mathbb{F}_p$ 上的阿贝尔受限李代数。若它是有限型的，则可将其分解为单生成阿贝尔受限李代数的直和，形式为 $\mathbb{F}_p\{x, x^p, \ldots, x^{p^k}\}$，其中 $\deg(x) = d \in \mathbb{N}$、$k \in \mathbb{N}$ 和 $x^{p^{k+1}} = 0$。这些子空间上的基 $\{x, x^p, \ldots, x^{p^k}\}$ 以及该分解的存在，决定了 $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ 的一个基 $\mathcal{B}_F$。

定理 5.8（据 Dung [Dun92]，见 $p = 2$）。设 X 是有限型的连通空间。设 $\mathcal{B}_F$ 为˜上文构造的基。那么，$H^*(D_\infty X; \mathbb{F}_p)$ 是由以下形式的类生成的分次交换 $\mathbb{F}_p$-代数：$b \odot 1^{[*]}$，其中 b 是一个聚合块（或用天际线图的术语来说，是一个装饰列），其宽度是 p 的幂，且满足以下条件中的至少一项：

- 该列的装饰不是 $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ 中的 p^{th} 次幂。
- 列中的至少一个组成矩形出现的次数不能被 p整除
- 该列具有非平凡的实心部分（如果 $p > 2$）

此外，这些生成元的完备关系集由形如 $(b \odot 1^{[*]})^{p^{h(b)}} = 0$ 的等式给出，其中 b 为偶维。若 x 表示 b 的装饰，我们通过以下公式定义 $h(b)$：

$$h(b) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} : x^{p^n} = 0\} & \text{if } p = 2 \text{ or } b \text{ has no solid part} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

˜证明。引理 5.7 保证给定的关系在 $H^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)$中成立。因此，我们需要证明两件事，即给定的类生成该上同调代数，并且不存在其他独立的关系。

˜ ˜为了证明第一个断言，我们使用先前定义的按有效宽度对 $D_\infty X$˜ 的上同调进行的滤过 $\{F_nH^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)\}_{n\geq 0}$。我们对 n 作归纳法，证明 $F_nH^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)$ 包含于由所选元素 $b\odot 1^{[*]}$ 生成的子空间 V 中。对于 $n=0$，断言显然成立。因此，假设˜ $n>0$，且 $F_{n-1}H^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)\subseteq V$。

首先，对于任意宽度为 b 的幂的聚合块 p，$b\odot 1^{[*]}\in V$，即使 b 不满足所要求的三个条件中的任何一个。事实上，由于引理 5.7，任何这样的元素都是 $(p^k)^{th}$ 次幂，其中 $k\in\mathbb{N}$是某个形如 $b'\odot 1^{[*]}$ 的其他类，它由一个 b' 满足其中一个条件的聚合块产生。

其次，对于任意宽度为 x n的纯霍普夫单项式，x 都可以写成某些聚合块 b_1，.....，b_r 的传递积的倍数，这些聚合块的宽度都是 p的幂。由引理5.6 可知

$$x\in\prod_{i=1}^{r}(b_i\odot 1^{[*]})+F_nH^*(\tilde{D}_\infty X;\mathbb{F}_p)\subseteq V$$

这就证明了我们的第一个断言。

˜为了证明给定的关系足以完整描述 $H^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)$，只需验证该上同调代数的庞加莱级数与由给定呈示定义的分次交换 $\mathbb{F}_p$-代数 $A_\infty(X)$ 相等。

一方面，我们注意到

$$A_\infty(X)=\bigotimes_{b,\deg(b)\text{ even}}\frac{\mathbb{F}_p[b\odot 1^{[*]}]}{(b\odot 1^{[*]})^{h(b)}}\otimes\Lambda\{b,\deg(b)\text{ odd}\},$$

其中 Λ 是外代数函子，张量积取遍满足本定理陈述中条件的聚合块 b。

˜另一方面，由纯霍普夫单项式 $H^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)$ 生成的子空间（根据引理5.5，它与˜中以下子代数同构：$H^*(DX;\mathbb{F}_p)$ 该子空间关于传递积构成子代数，并且同构于

$$\bigotimes_{b,\deg(b)\text{ even}}\frac{\mathbb{F}_p[b]}{(b^{\odot p})}\otimes\Lambda\{b,\deg(b)\text{ odd}\}.$$

这里的张量积取遍宽度为 p 的幂且不同于 $1^{[p^k]}$ 的所有聚合块，无论所述条件如何。

正如我们已经观察到的，对于每个生成元 $b\odot 1^{[*]}$ 和每个 $1\leq k<h(b)$，幂 $(b\odot 1^{[*]})^{p^k}$ 仍是形如 $b'\odot 1^{[*]}$的类，其中 b' 是另一个非平凡聚合块，其宽度为 p 的幂。反过来，任何这样的元素都可以通过对 $A_\infty(X)$ 的某个生成元迭代应用弗罗贝尼乌斯同态得到。这意味着对于任意次数 d，$(A_\infty(X))_d$ 和 $H^d(\tilde{DX};\mathbb{F}_p)$ 的维数相同。□

5.3. **自由 E_∞ 空间**。我们转而考察 CX 的上同调；它是由 E_∞ 生成的自由 X-空间，定义见 Cohen–May–Lada[CLM76]。

令 X_+ 为由 X 添加一个不相交的基点 $*$所得的带基点拓扑空间。注意，$C(X_+)\cong D(X_+)\cong DX$。将 $*$ 映到 X 的基点的映射 $p\colon X_+\to X$ 诱导出一个满射函数˜ ˜ $Cp\colon DX\cong C(X_+)\to CX$。此映射经由投影 $DX\to D_\infty X$分解。

由 [CLM76 第一部分定理 4.1] 给出的函子 $H_*(C\_;\mathbb{F}_p)$ 的描述，以及映射 $p_*\colon H(X_+;\mathbb{F}_p)\to H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 的满射性，意味着同调中的诱导态射 $(Cp)_*\colon H_*(DX;\mathbb{F}_p)\to H_*(CX;\mathbb{F}_p)$ 以及由此直接得到的 $H_*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)\to H_*(CX;\mathbb{F}_p)$ 都是满态射。对偶地，这˜意味着 $H^*(CX;\mathbb{F}_p)\to H^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)$ 是一个单态射。因此，我们将 $H^*(CX;\mathbb{F}_p)$ 视为 $H^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)$ 的一个子环˜。

˜在同调层面上，$(Cp)_*\colon H_*(DX;\mathbb{F}_p)\to H_*(CX;\mathbb{F}_p)$ 是唯一一个保持映射 $p_*\colon H_*(X_+;\mathbb{F}_p)\to H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 的 Dyer–Lashof 代数上的代数态射。因此，利用同调

运算，其核可描述为由 $Q_I([x_0])$ 生成的理想，其中 $I \neq ()$ 和 $1-[x_0][x_0] \in H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 是 $H_0(X;\mathbb{F}_p)$ 中与基点 $x_0 \in X$ 对应的类。对偶化可得如下结果。

推论 5.9。设 X 是一个有限型连通空间。那么 $H^*(CX;\ \mathbb{F}_p)$ 自然同构于 $H^*(\tilde{D}_\infty X;\ \mathbb{F}_p)$ 的子环，该子环由满足定理 $(b \odot 1^{[*]})$ *5.8* 所述条件且满足附加条件（即 b的装饰不同于 1）的类生成。

此外，这些生成元之间的关系 $(b \odot 1^{[*]})^{p^{h(b)}} = 0$ 足以完整描述 $H^*(CX;\ \mathbb{F}_p)$ 作为一个代数的结构。

尽管前述推论仅对连通空间 X 成立，但我们可以将 $H^*(CX;\mathbb{F}_p)$ 的一般计算归约到这一特殊情形。只需注意，若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\pi_0(X)}$ 是 X 的连通分支集合，则存在自然同胚 $CX \cong \prod_{\alpha\in\pi_0(X)\setminus\{[*]\}} D(X_\alpha) \times C(X_{[*]})$，然后应用 Künneth 同构即可。

5.4. **自由无限循环空间**。我们以对 QX 的上同调的类似描述结束本节。当 X 连通时，CX 和 QX 也连通，并且自然映射 $CX \to QX$ 在上同调中诱导一个同构。当 X 不连通时，CX 不连通，其交换 H-空间结构使 $\pi_0(CX)$ 成为交换幺半群。利用上述描述，我们立即看到 $\pi_0(CX) \cong \mathbb{N}^{\pi_0(X)\setminus\{[*]\}}$，并且与 $\underline{k} = \{k_\alpha\}_{\alpha\in\pi_0(X)\setminus\{[*]\}}$ 对应的分支同胚于 $\prod_\alpha D_{k_\alpha}(X_\alpha) \times C(X_{[*]})$。我们将这个分支命名为 $(CX)_{\underline{k}}$。

我们回顾一下存在如下霍普夫代数的自然同构 $H_*(QX;\ \mathbb{F}_p) \cong H_*(CX;\ \mathbb{F}_p) \otimes_{\pi_0(CX)} \mathbb{F}_p[G]$，其中 $G = \mathbb{Z}^{\pi_0(X)\setminus\{[*]\}}$ 是 $\pi_0(CX)$ 的群完备化，而 $\mathbb{F}_p[G]$ 是其在 $\mathbb{F}_p$ 上的群代数。这个同构是经典的众所周知的结果，见 [CLM76，第一部分，定理 4。2]。

现在我们可以观察到，$H_*(CX;\ \mathbb{F}_p) \otimes_{\pi_0(CX)} \mathbb{F}_p[G]$ 是以 G 为指标的余代数 $\bigoplus_{g\in G} H_g$ 的直和。具体而言，对于所有 $g \in G$，

$$H_g = \sum_{h\in\pi_0(CX)} H_*((CX)_h;\mathbb{F}_p) \otimes_{\pi_0(CX)} (gh^{-1}).$$

令 Π 为偏序集 $\mathbb{N}^{\pi_0(X)\setminus\{[*]\}} = \pi_0(CX)$，其序关系为

$$\{k_\alpha\}_\alpha \leq \{n_\alpha\}_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in \pi_0(X)\setminus\{[*]\} : k_\alpha \leq n_\alpha.$$

对于所有满足 $\underline{k} \leq \underline{n}$ 的 $\underline{k}$、$\underline{n} \in \Pi$，令 $f_{\underline{k},\underline{n}}$：$H_*((CX)_{\underline{k}};\ \mathbb{F}_p) \to H_*((CX)_{\underline{n}};\ \mathbb{F}_p)$ 定义为与 $[x_{\underline{n}-\underline{k}}]$ 相乘，其中 $[x_{\underline{n}-\underline{k}}]$ 是点 $x_{\underline{n}-\underline{k}} \in (CX)_{\underline{n}-\underline{k}}$ 的类。这些映射构成一个直系，其极限对于所有 $g \in G$ 均同构于 H_g。与此对应的拓扑结果是同伦等价 $QX \simeq Q_0X \times G$，其中 Q_0X 是包含基点的 QX 的连通分支。事实上，上述直极限同构于 Q_0X 的同调。

因此，描述 QX 的上同调等价于计算该直极限的对偶，也就是由对偶空间构成的逆系统的逆极限。注意，态射 $f^*_{\underline{k},\underline{n}}$：$H^*((CX)_{\underline{n}};\ \mathbb{F}_p) \to H^*((CX)_{\underline{k}};\ \mathbb{F}_p)$ 类似于引理 5.5 中用于计算 $H^*(D_\infty X;\mathbb{F}_p)$ 的映射 $\rho_{n,m}$，但其中形如 $1^{[r]}$ 的块被维数为零的任意聚合块所取代。具体而言，如果基 $\mathcal{B}$ 包含所有单位元 $1_{H^*(X_\alpha;\mathbb{F}_p)}$，那么它们具有形式 $1^{[r]}_{H^*(X_\alpha;\mathbb{F}_p)}$，其中某个 $\alpha \in \pi_0(X)$ 如此。由此，我们可以重复用于计算 $D_\infty X$ 上同调的论证，从而确定 $H^*(QX;\mathbb{F}_p)$，方法是将纯霍普夫单项式替换为不含零高度列或装饰为 1 的列的霍普夫单项式。下面给出精确表述。

定义 5.10. 设 x $H^*(DX;\mathbb{F}_p)$ 中的一个霍普夫单项式。若 x 不含任何维数为 0 的聚合块，则称其为**全宽**。

引理 5.11。假设所选的基 $\mathcal{B}$ 的 $H^*(X;\ \mathbb{F}_p)$ 对所有 $\alpha \in \pi_0(X)$都包含 $1_\alpha = 1_{H^*(X_\alpha;\ \mathbb{F}_p)}$。那么，对于每个不含以 $1_{[*]}$ 为装饰的组成块的全宽度霍普夫单项式，我们都可以关联

由公式定义的元素 $x_\infty \in \lim_{\longleftarrow \underline{k}\in\Pi} H^*((CX)_{\underline{k}};\mathbb{F}_p) \cong H^*(Q_0X;\mathbb{F}_p)$

$$(x_\infty)|_{H^*((CX)_{\underline{k}};\mathbb{F}_p)} = \begin{cases} (x \odot \bigodot_{\alpha\in\pi_0(X)\setminus\{[*]\}} 1_\alpha^{[k_\alpha - n_\alpha]}) \odot 1^{[*]} & if\ \underline{k} \geq \underline{n}_x \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

其中 $\underline{n}_x$ 是 $\Pi = \pi_0(CX)$ 中唯一满足 $x \odot 1^{[*]} \in (CX)_{\underline{n}_x}$ 的元素。这些元素 x_∞ 构成 $H^*(Q_0X;\mathbb{F}_p)$ 作为 $\mathbb{F}_p$-向量空间的一组基。

定理 5.12。选择基 $\mathcal{B}$ 的 X 如我们在定理 5.8中所做的那样。此外，假设 $1_{H^*(X_\alpha;\ \mathbb{F}_p)} \in \mathcal{B}$对于所有 $\alpha \in \pi_0(X)$均成立。考虑元素集合 b_∞，其中 b 是一个宽度等于 p的某个幂的全宽聚合块，其装饰不同于 $1_{[*]}$，并且满足以下至少一个条件：

- 该列的装饰不是 $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ 中的 p^{th} 次幂。
- 列中的至少一个组成矩形出现的次数不能被 p整除
- 该列有一个非平凡的实心部分（如果 $p > 2$）

该集合生成 $H^*(Q_0X;\mathbb{F}_p)$ 作为分次交换代数，其关系由 $(b_\infty)^{p^{h(b)}} = 0$给出，其中我们定义 $h(b)$如定理 5.8所示。

证明。由于引理 5.6 和引理 5.7 的明显类比在此情形下也成立，因此可以使用定理 5.8所采用的相同论证来证明该结论，将 CX 替换为 Q_0X 并将 $b \odot 1^{[*]}$ 替换为b_∞。 □

参考文献

[AM99] Greg Arone 和 Mark Mahowald。《恒等函子的 Goodwillie 塔与球面的不稳定周期同伦》。Invent. Math., 135(3):743–788, 1999. [AM04] Alejandro Adem 和 R. James Milgram。《有限群的上同调》，《数学基础原理》第 309 卷。/数学科学基础原理/。Springer-Verlag，柏林，第二版，2004 年。[And71] M. André。《带除幂的霍普夫代数》。J. Algebra, 18:19–50, 1971. [Ber] Calista Bernard。《扭曲同调运算》。[Ber74] Pierre Berthelot。《特征为 $p > 0$的概形的晶体上同调》。《数学讲义》第 407 卷。Springer-Verlag，柏林-纽约，1974 年。[BMMS86] R. R. Bruner、J. P. May、J. E. McClure 和 M. Steinberger。 H_∞ 环谱及其应用，《数学讲义》第 1176 卷。Springer-Verlag，柏林，1986 年。[BP72] Michael Barratt 和 Stewart Priddy。《非连通幺半群及其相关群的同调》。Comment. Math. Helv., 47:1–14, 1972. [Car55] 高等师范学校 Henri Cartan 研讨班，1954/1955。《Eilenberg-MacLane 代数与同伦》。第 i+234 页，1955 年。[CLM76] Frederick R. Cohen、Thomas J. Lada 和 J. Peter May。《迭代环路空间的同调》。《数学讲义》第 533 卷。Springer-Verlag，柏林-纽约，1976 年。[Dun92] Nguyen Viet Dung。《花环积 $\Sigma_\infty \wr X$的模 2 上同调代数》。载于《代数拓扑》（San Feliu de Guíxols，1990），《数学讲义》第 1509 卷，第 115–119 页。Springer，柏林，1992 年。[EML54] Samuel Eilenberg 和 Saunders Mac Lane。《群 $H(\Pi, n)$论》。II. 计算方法。Ann. of Math. (2), 60:49–139, 1954. [Fes02] Mark Feshbach。《对称群的模 2 上同调环与不变量》。Topology, 84(3):41–57, 2002. [FMS22] Greg Friedman、Anibal Medina 和 Dev Sinha。《几何上同调》。可按需索取，2022 年。[Gal04] Sø ren Galatius。《稳定映射类群的模 p 同调》。Topology, 43(5):1105–1132, 2004. [GS14] Chad Giusti 和 Dev Sinha。《Fox-Neuwirth……》2014 年。[GS17] Chad Giusti 和 Dev Sinha。《交错群的模 2 上同调环》。arXiv:1705.01141, 2017. [GSS12] Chad Giusti、Paolo Salvatore 和 Dev Sinha。《对称群的模 2 上同调环》。《拓扑学杂志》，5(1):169–198, 2012. [Gue17] Lorenzo Guerra。《对称群模 p 上同调的霍普夫环结构》。Algebr. Geom. Topol., 17(2):957–982, 2017. [Haz78] Michiel Hazewinkel。《形式群及其应用》，《纯粹与应用数学》第 78 卷。Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich 出版社], 纽约-伦敦，1978 年。[HHP+] Hanna Hoffman、Dana Hunter、Kristy Pelatt、Sarah Peterson、Dev Sinha 和 Courtney Thatcher。《Eilenberg-MacLane 空间的同调作为除幂霍普夫环》。准备中。

[Hun] Dana Hunter。《经由上同调的 Curtis-Wellington 谱序列》。arXiv:2111.01770. [Kec09] Nondas E. Kechagias。《模-P 群上同调中 $\Sigma_P \int \Sigma_{PN-1}$、 $\Sigma_{PN-1} \int \Sigma_P$与 Σ_{PN}之间的转移》。《同伦相关结构杂志》，4(1):153–179, 2009 年。[May70] J. Peter May。《Steenrod 运算的一般代数方法》。载于《Steenrod 代数及其应用》（庆祝 N. E. Steenrod 六十寿辰的会议论文集, Battelle Memorial Institute，哥伦布，俄亥俄州，1970 年），《数学讲义》第 168 卷，第 153–231 页。Springer，柏林，1970 年。[Mil70] R. James Milgram。《模 2 球面特征类》。Ann. of Math. (2), 92:238–261, 1970. [MM65] John W. Milnor 和 John C. Moore。《霍普夫代数的结构》。Ann. of Math. (2), 81:211–264, 1965. [Nis75] Goro Nishida。《球面的稳定同伦群中元素的幂零性》。第 285–289 页，1975 年。[Rob65] Norbert Roby。《带除幂的代数》。Bull. Sci. Math. (2), 89:75–91, 1965. [RW80] Douglas C. Ravenel 和 W. Stephen Wilson。《Eilenberg-Mac Lane 空间的 Morava K理论与 Conner-Floyd 猜想》。Amer. J. Math., 102(4):691–748, 1980. [Sch67] Colette Schoeller。《域上的 $\Gamma - H$-代数》。C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 265:A655–A658, 1967. [ST97] Neil P. Strickland 和 Paul R. Turner。《有理 Morava E理论与 DS^0》。Topology, 36(1):137–151, 1997. [Ste53] N. E. Steenrod。《对称群的同调群与约化幂运算》。Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 39:213–217, 1953. [Tho57] Emery Thomas。《广义 Pontrjagin 上同调运算与带除幂的环》。Mem. Amer. Math. Soc. no., 27:82, 1957. [Wil00] Steve Wilson。《代数拓扑中的霍普夫环》。2000 年。

罗马第二大学 Tor Vergata电子邮件地址:
guerra@mat.uniroma2.it

罗马第二大学
电子邮件地址: salvator@mat.uniroma2.it

俄勒冈大学数学系电子邮箱地址：dps@uoregon.edu