arXiv:2304.06453v1 [math.CO] 13 Apr 2023

关于中位图的一种推广：k-中位图

Marc Hellmuth* 和 Sandhya Thekkumpadan Puthiyaveedu

数学系，理学院，斯德哥尔摩大学，*SE - 106 91* 斯德哥尔摩，瑞典*通讯作者（marc.hellmuth@math.su.se）

摘要

中位图是这样一类连通图：对于任意三个顶点，都存在唯一的一个顶点属于这三个顶点中每一对顶点之间的最短路径。更正式地说，若对于所有 μ、u、v $\in$V (G)，均有 $|I(\mu, u) \cap I(\mu, v) \cap I(u, v)| = 1$，则图 G 是中位图，其中 I(x, y) 表示位于连接 x 和 y 的最短路径上的所有顶点所组成的集合。本文研究中位图的一种自然推广，即 k-中位图。若存在 k 个顶点 μ_1、...、$\mu_k \in$V (G)，使得对于所有 u、v $\in$V (G)，均有 $|I(\mu_i, u) \cap I(\mu_i, v) \cap I(u, v)| = 1$，$1 \leq i \leq k$，则图 G 是 k-中位图。根据定义，具有 n 个顶点的每个中位图都是 n-中位图。我们给出了 k-中位图的若干刻画，并进一步利用这些刻画给出了中位图的许多新刻画。

关键词：中位图、凸性、网状性与四边形性质、模、区间

1 引言

中位图是一种连通图，对于其中每组三个顶点 x、y、z，都存在唯一一个顶点 med(x,y,z)，称为中位点，它同时位于这三个顶点中任意一对之间的最短路径上 [7]。记 I(u,v) 为所有位于连接 u 和 v 的最短路径上的顶点集合，并令 I(x, y, z) :=I(x, y) ∩I(x, z) ∩I(y, z)，当且仅当对于图中所有顶点 x、y、z，均有 |I(x,y,z)| = 1 [31, 32] 时，该图是中位图。至少自 20 世纪 40 年代以来，中位图就一直受到研究 [1, 7, 34]，并自然地出现在数学的多个领域中，例如代数 [4]、、度量图论 [3]、、几何 [17]，以及分裂系统研究 [15, 20, 27]。此外，它们还在社会选择理论 [2, 19]、、系统发育学 [14, 21, 27]、和法医学 [36]等领域具有实际应用。

在本文中，我们研究中位图的一种推广，即 k-中位图。图 G 中的顶点 μ 称为中位一致（medico）顶点，如果对于所有 x、y $\in$V (G)，都有 $|I(\mu, x,y)| = 1$。如果图 G 包含 k 个 medico 顶点，则称 G 为 k-中位图。换言之，如果从 V (G) 中删除所有满足 $|I(x, y, z)| \neq 1$ 的顶点 x 后得到的集合 W 满足 $|W| \geq k$，则 G 是一个 k-中位图。Bandelt 等人在一项关于模图的研究中考察了 medico 顶点的存在性，即满足 I(x,y,z) $\neq$/0 且对所有 x,y,z $\in$V (G) 成立的图。在 [5]，medico 顶点被称为“中性”顶点，作者根据区间 I(x, y) 和 $K_{2,3}$ 子图，对模图 G 中的 medico 顶点给出了一个简单的刻画（参见 [5, 命题 5.5]）。

可以将 k-中位图中的整数 k 视为衡量给定图与中位图“接近”程度的指标，因为每个中位图 G 都是一个 $|V(G)|$- 中位图。研究 k- 中位图的动机还来自以下观察。在 [14]，中，作者感兴趣的是用有根中位图来“表示”边着色图。更准确地说，给定一个边着色图 H，任务是找到一个顶点着色中位图 G，并指定一个顶点 μ（在 [14]中称为根），使得对于所有 x, y $\in$V (H)，唯一中位点 med(μ, x,y) 的颜色对应于 H 中（非）边 {x, y} 的颜色。后者尤其推广了所谓的余图 [18]，符号超度量 [8, 24, 25]，或非定向 2-结构 [22, 26]，的概念，即由有根顶点着色树表示的组合对象。用中位图而非树的思想还可以进一步推广：要求任意顶点着色图 G 包含一个顶点 μ，使得对于所有 x, y $\in$V (G)，中位点 med(μ, x,y) 都有定义，并且 med(μ,x, y) 的颜色能够区分底层（非）边的

col颜色 $\{x, y\}$ 在边着色图 H 中的颜色。在这种情况下，只要求
that G 是一个 1-中位图，因此包含（至少）一个 medico 顶点。

本文研究 k-中位图的结构性质，这些性质进而也带来了中位图的新颖刻画。例如，我们证明了：对于所有 x,y,z $\in$ V (G)，当且仅当 I(x,y,z) $\neq$ /0 且由I(x,y,z) 中的顶点导出的子图是连通的，图 G 才是中位图（参见定理 5.11）。本文组织如下。第 2节介绍必要的记号和定义。随后，我们在第3 节总结主要结果。在第 4节中，我们建立基本的结构性质，并给出k-中位图的必要条件。在第 5节中，我们给出 k-中位图的刻画，这些刻画进而产生了大量关于中位图的新刻画。我们还通过一个简单的程序补充这些结果，该程序可以验证给定的图是否为 k-中位图，并在答案为肯定时计算这样的最大整数 k。这个直接的算法使用 Python 编写，托管于 GitHub [23])，可用于验证这些示例。

2 预备知识

对于集合 A，我们用 $A^n := \times_{i=1}^{n} A$ 表示 A 的 n 重笛卡尔积。本文讨论的所有图 G $=$ (V, E) 都是无向、简单且有限的，其顶点集为 V (G) $:=$ V，边集为 E(G) $:=$ E。我们记 $|G| := |V|$ and $\|G\| := |E|$。我们用 G[W] 表示由 W $\subseteq$ V 中的顶点导出的图。若 G 不含与 H 同构的导出子图，则称图 G 是 H-自由的。对于两个图 G 和 H，它们的交 G $\cap$ H 定义为图 (V (G) $\cap$ V (H), E(G) $\cap$ E(H))。完全图 $K^{|V|} =$ (V, E) 是满足对所有互异的 u, v $\in$ V 都有 {u, v} $\in$ E 的图。若图 G $=$ (V, E) 的顶点集 V 可划分为两个非空集合 V_1 和 V_2，使得 {x, y} $\in$ E 意味着 x $\in V_i$且 y $\in V_j$，i $\neq$ j，则称 G 为二部图。具有二分划分 $V_1 \cup V_2 =$ V 的二部图 G $=$ (V, E) 是完全的，记作 $K_{|V_1|,|V_2|}$；若 x $\in V_i$且 y $\in V_j$，i $\neq$ j，则有 {x, y} $\in$ E。圈 C 是所有顶点的度均为 2 的连通图。长度为 n $= |C|$ 的圈记作 C_n。超立方体 Q_n 的顶点集为 $\{0,1\}^n$，当且仅当两个顶点的坐标恰有一处不同时，它们相邻。我们用 Q_n^- 表示删除超立方体 Q_n 的一个顶点及其关联边后得到的图。

G $=$ (V, E) 中的所有路径均视为简单路径，即不会重复经过同一个顶点。图 G 中顶点 u 和 v 之间的距离 d_G(u, v) 定义为连接 u 和 v 的最短路径 P 的长度 $\|P\|$。注意，当 G 连通时，所有顶点之间的距离都有明确定义，并且 $d_G(x, y) = d_G(y, x)$。对于子集 W $\subseteq$ V，如果 w $\in$ W 在 W 中的所有顶点里距离 v $\in$ V 最近，即 $d_G(v, w) = \min_{x \in W} d_G(v, x)$，则称 w 是 v 的最近顶点。连接 u 和 v 的路径也称为 (u, v)-路径。含有 n $= |P|$ 个顶点的路径记作 P_n。如果对于所有 u, v $\in$ V (H)，均有 $d_H(u, v) = d_G(u, v)$，则称 G 的子图 H 是等距的。如果对于任意 u, v $\in$ V (H)，所有最短 (u, v)-路径都属于 H，则称 G 的子图 H 是凸的。子图 H 在 G 中的凸包是包含 H 的最小凸子图。如果上下文明确，对于给定的图 G，我们可以用 $d(\cdot,\cdot)$ 代替 $d_G(\cdot,\cdot)$。

为便于后续参考点，我们给出以下内容

引理2.1. 对于连通图G中的每条边 $\{u,v\}$ 在以及每个顶点$x \in V(G)$，都有$0 \le |d_G(x,u) - d_G(x,v)| \le 1$。此外，当且仅当对于所有 $x \in V(G)$以及 $\{u,v\} \in E(G)$，都有 $d_G(x,u) \neq d_G(x,v)$ 时，G是二部图。特别地，如果存在一个顶点 x，使得对于所有 $\{u,v\} \in E(G)$，都有 $d_G(x,u) \neq d_G(x,v)$，那么 G 是二部图。

证明。第一个结论是三角不等式的直接推论，即d_G(x, u) $\le d_G$(x, v) $+ d_G$(u, v)意味着 $|d_G(x,u) - d_G(x,v)| \le d_G(u,v) = 1$对所有边 {u, v} 以及所有顶点 x都成立。第二个结论等价于 [35, 定理 2.3]。现在假设 G $=$ (V,E)中存在一个顶点x，使得对于所有边 {u,v} $\in$ E，都有$d_G(x,u) \neq d_G(x,v)$。令 $V_1 :=$ {w $\in$ V $|\, d_G$(x, w)为奇数}。$V_2 :=$ {w $\in$ V $|\, d_G$(x, w)为偶数}，且 {u,v} $\in$ E。由于$d_G(x,u) \neq d_G(x,v)$，并由第一个结论可知，u $\in V_i$且 v $\in V_j$，即 i $\neq$ j。由于这对 E 中的所有边都成立，集合 V_1, V_2 构成 G 的一个有效二分划分。□

x 与 y 之间的区间是集合 I_G(x, y)，由所有位于最短 (x, y)-路径上的顶点组成。若 d(u, x) $+$ d(x, v) $=$ d(u, v)、d(v, x) $+$ d(x, w) $=$ d(v, w) 且 d(u, x) $+$ d(x, w) $=$ d(u, w)，则称顶点 x 是三个顶点 u、v 和 w 的中位点。等价地，若 x $\in I_G$(u, v, w) $:= I_G$(u, v) $\cap I_G$(u, w) $\cap I_G$(v, w) [31]，则 x 是 u、v 和 w 的中位点。若 I_G(u, v, w) $=$ {x} 仅由 x 组成，则记 med_G(u, v, w) $:=$ x，并称 med_G(u, v, w) 定义良好。若对图 G 的每组三个顶点 u、v 和 w，med_G(u, v, w) 均定义良好，则称图 G 为中位图。 [29, 33]。若对所有 u、v、w $\in$ V 均有 I_G(u, v, w) $\neq$ /0，则称图 G 为模图。容易验证，中位图是模图，而模图必定连通。根据[31],，若对所有 u、v $\in$ V 以及所有 x、y $\in$ I(u, v)，均有 I(x, y) $\subseteq$ I(u, v)，则称图 G 为区间单调图；也就是说，

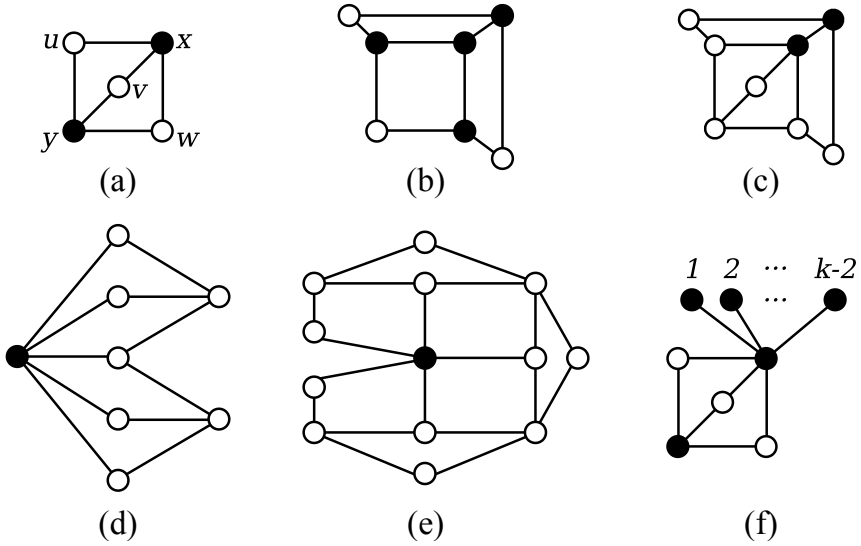

图1： 图中展示了若干k-中位图。相应的medico顶点以黑色顶点标出。图中展示了：(a) 一个$K^{2,3,}$；(b) 一个Q_3^-；(c) 一个$K^{2,3}$ 和Q_3^-的组合；(d) 一个不含Q_3^-的真1-中位图；(e) 一个不含$K^{2,3}$的真1-中位图。(f) 该图是所有$k \geq 2$的真k-中位图的通用示例。

导出子图 $G[I(u,v)]$ 是凸的。若上下文清楚，则对于给定的图 G，我们可以用 $I(\cdot,\cdot)$ 和 $I(\cdot,\cdot,\cdot)$ 分别代替 $I_G(\cdot,\cdot)$ 和 $I_G(\cdot,\cdot,\cdot)$。

为便于后续参考，我们在此总结文献 [31]中确立的命题1.1.2(iii)和1.1.3的结果。

引理 2.2。设 G 为一个连通图。则，$x \in I_G(u,v)$ 意味着 $I_G(u,x) \subseteq I_G(u,v)$。此外，对于 G 中任意三个顶点 u、v、w，存在一个顶点 $z \in I_G(u,v) \cap I_G(u,w)$ 使得 $I_G(z,v) \cap I_G(z,w) = \{z\}$。

在接下来的证明中，以下定义将发挥特别重要的作用。

定义2.3 (距离-ℓ-静态且网状)。 设 $G = (V,E)$ 是一个图。若四元组$(x,z,y,w) \in V^4$满足：对于某个 $\ell \geq 1$，$d_G(x,w) = d_G(z,w) = \ell = d_G(y,w) - 1$ 且 $d_G(x,z) = 2$，其中 y 是 x 和 z 的公共邻点，则称其为距离-ℓ-静态 。

若所有距离-ℓ-静态四元组$(x,z,y,w) \in V^4$ 都满足四边形性质，则称 G 为网状 图：存在一个公共邻点 u，它是 x和 z的公共邻点，并且 $d_G(u,w) = \ell - 1$。

网格图在中位图的刻画中发挥着核心作用 [9, 29]。根据定义，距离-ℓ-静态四元组 (x, z, y, w) 中的顶点 x 、 z 、 y 、 w 必须两两不同。注意，(x, z, y, w) 是距离 -ℓ- 静态的，当且仅当 (z, x, y, w) 是距离 -ℓ- 静态的。距离-ℓ-静态四元组 (x, z, y, w) 中其余顶点的排列顺序很重要，因为最后一个顶点 w 充当“参考点”，用于确定 x、y、z 到它的距离；而第三个顶点 y 则意味着 x、y、z 必须构成一条路径 P_3，其边为 {x, y} 和 {y,z}。

3 主要结果

考虑一个图 $G = (V,E)$，令 $W \subseteq V$ 表示从V中移除任意三个顶点u,v,w后得到的顶点集合，其中 $\mathrm{med}_G(u,v,w)$ 未定义良好。在这种情况下，W包含所有满足以下条件的顶点 μ：对于所有$v,w \in V$，$\mathrm{med}_G(\mu,v,w)$ 均定义良好。由此得到以下

定义 3.1 (medico 顶点与 k-中位图)。 若图 G 中的一个顶点 $\mu \in V$ 满足对所有不同的 v、$w \in V(G) \setminus \{\mu\}$，$\mathrm{med}_G(\mu,v,w)$ 均定义良好，则称其在图 G 中是中位一致（medico）的。

如果一个图有 k 个 ≥ 1 *medico* 顶点，则称其为 k-中位图 。此外，如果一个 k-中位图恰有 k 个 *medico* 顶点，则称其为真k-中位图。

注意，如果图 G 不是连通的，那么 $I_G(x,y,z) = /0$，其中任意两个顶点 x,y 位于同一个连通分量中，而 z 位于另一个连通分量中。因此，非连通图不可能包含任何 medico 顶点。我们将这一发现以及其他简单结果总结如下：

观察 3.2。设 G 为一个图。

- 如果 G 包含一个 *medico* 顶点 μ，则 G 是连通的。
- 对于每个 $k \geq 1$，存在一个真 k-中位图（参见图 *1*（*d*、*e*、*f*））。
- 每个 k-中位图对于所有 $\ell \in \{1,\ldots,k\}$ 都是一个 ℓ-中位图。
- 图 $G = (V,E)$ 是中位图，当且仅当 G 是 $|V|$-中位图。

下面的结果表明，不存在满足 $k \geq |V|-2$ 的真 k-中位图 G，并给出了中位图的一个新颖但相当简单的刻画。

命题 3.3。 **</style}图 G** (V,E) 是中位图，当且仅当 G 是一个 $(|V|-1)$-或 $(|V|-2)$-中位图。因此，不存在真 $(|V|-1)$-或 $(|V|-2)$-中位图。

证明。若 G $=$(V, E) 是中位图，那么观察 3.2 中最后两个陈述意味着 G 是 (|V| − 1)-中位图或 (|V| − 2)-中位图。根据逆否命题，假设 G 不是中位图。在这种情况下，至少存在一个顶点 x，它不是 G 的 medico 顶点。因此，存在两个顶点 y 和 z，使得 x、y 和 z 两两不同，且 med(x, y, z) 未定义。因此，y 和 z 都不可能是 medico 顶点。因此，G 要么根本不是 k-中位图，要么如果 G 是 k-中位图，则 k $\leq$ |V| − 3，这意味着 k $\notin \{|V|-1, |V|-2\}$。 □

与中位图不同，k-中位图可能包含一个导出的 $K_{2,3}$（参见图 1）。此外，中位图的特征是：对于这类图，G 任意等距圈的凸包C都是超立方体（参见 [29, 定理 5]）。由于 Q_3^- 是一个包含等距圈的 4-中位图 C_6, 这一性质一般而言并不适用于k-中位图。

现在，我们简要概述主要结果。在第 4 节中，我们给出了若干必要条件，并证明了其他结果，包括每个 k-中位图都是二部的、不含 $K_{3,3}$，且 G 中每个圈 C 的每条边 e $\in$ E(C) 也是 G 中某个导出 C_4 的一部分。此外，我们刻画了 k-中位图 G 中导出 $K_{2,3}$s 的存在性，并进一步证明，G 包含 Q_3^- 当且仅当它包含导出 C_6。接着，我们在第 5 节中推广了凸子图的概念。

定义 3.4(v-凸)。 设 G 为一个图，且$v \in V(G)$。G 的子图H 是 v-凸 的，当$v \in V(H)$，并且对于所有$x \in V(H)$，连接 v 和 x 的每条最短路径都包含于 H 中。

注意，v-凸子图 H在 G中满足 $I_G(v,x) \subseteq V(H)$ 对所有 $x \in V(H)$。此外，v-凸子图是连通的，但不一定是导出、等距或凸的，示例见图 2。由此我们推出

刻画 1 (定理 5.4)。 $G=(V,E)$ 是一个 k-中位图，当且仅当存在 k 个顶点 $\mu_1,\ldots,\mu_k \in V$，使得 μ_i 在每个 μ_i-凸子图中都是一个 *medico* 顶点，$1 \leq i \leq k$。

由此可得一个关于中位图的著名刻画：G 是中位图，当且仅当G 的每个凸子图都是中位图，参见例如 [31]。接下来我们将频繁使用以下条件 (C0)、(C1) 和 (C2)。

定义 3.5. 设 $G=(V,E)$ 是一个图，且 $u \in V$。那么，G 满足

关于 u 的 (C0) 条件为： $I_G(u,v) \cap I_G(v,w) = \{v\}$ 蕴含 $v \in I_G(u,w)$，对所有 $v,w \in V$ 均成立。
关于 u 的 (C1) 条件为： $G[I_G(u,v,w)]$ 至少包含一个顶点且是连通的，对所有 $v,w \in V$ 均成立。
关于 u 的 (C2) 条件为： $G[I_G(u,v,w)]$ 只要包含多个顶点，就包含一条边，对所有 $v,w \in V$ 均成立。

注意，G 关于 u 满足 (C0)，当且仅当 I_G(u,v) $\cap$ I_G(v,w) $=$ {v} 蕴含 d_G(u,v) $+d_G$(v,w) $=d_G$(u,w)，对所有 v, w $\in$V 均成立。此外，如果 G 关于某个 u $\in$V 满足 (C1)，那么 G 必须是连通的；否则，对于属于不同连通分量的 u 和 v，I_G(u,v, w) $=/0$。容易验证，每个中位图关于其每个顶点都满足 (C0)、(C1) 和 (C2)。一个关于某个顶点 u 既不满足 (C0) 也不满足 (C1) 的图的简单例子是一个导出的 C_6。为此，令 G $\simeq$ C_6，并设 v 和 w 是 G 中与 u 的距离为 2 的顶点。在这种情况下，G[I(u, v,w)] 不包含任何顶点，且 I_G (u,v) $\cap$ I_G(v, w) $=$ {v}，尽管连接 u 和 w 的唯一最短路径不经过 v，也就是说，v $\notin$ I_G(u, w)。相比之下，G $\simeq$ C_6 显然关于其所有顶点都满足 (C2)，因为对于所有 u,v, w $\in$V，|I(u, v,w)|要么为空，要么恰好包含一个元素。现在考虑图 G :=G_3，如图 2 所示。集合 I_G(a, b, c) $=$ {x,y} 是其他 I_G(a ·,·) 中唯一一个包含多个顶点的集合。此外，G[I_G(a, b, c)] 包含边 {x,y}，因此是连通的。因此

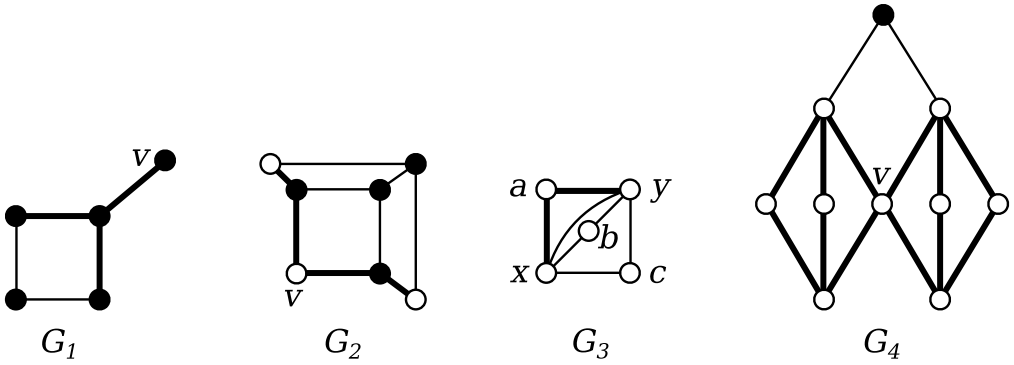

图 2：图 G_1,G_2,G_3和 G_4如图所示。medico 顶点以黑色顶点突出显示，G_i, $1 \leq i \leq 4$ 的子图 H_i 则以粗边突出显示。所有 H_i 都是 G_i 的 v-凸子图，但不是凸子图。由于 G_1 是中位图，且 v 是 G_1, 的 medico 顶点，因此 H_1 是等距的，进而也是导出的（参见引理 5.2）。相比之下，v 不是图 G_2中的 medico 顶点。尽管 H_2 是 v-凸且导出的，但它不是等距的。图 G_3 不包含任何 medico 顶点。G_3 的子图 H_3 是 a-凸的，但不是导出的。将边 {x, y} 添加到 H_3 中，会得到另一个同时也是凸的 a-凸子图。注意，$I := I_{G_3}(a, b, c) = \{x, y\}$。因此，$G_3[I] \simeq K_2$由边 {x, y} 构成，故为连通且非空。$G_4$ 的 v-凸子图 H_4 不是 1-中位图。根据引理 5.1，在二部图中，具有指定顶点集的 v- 凸子图是唯一确定的。

G满足 (C2)，关于 a。然而，$I_G(a,x,y) = /0$，这意味着 G关于 a不满足 (C1)。此外，G关于 a不满足 (C0)，因为 $I_G(a,x) \cap I_G(a,y) = \{a\}$，但是 $a \notin I_G(x,y)$。

我们首先给出一个基于条件 (C1) 的刻画。

刻画 2 (定理 5.8)。 图 G 是一个 k-中位图，当且仅当 G 关于以下顶点满足 *(C1)*：μ_1，……，$\mu_k \in V(G)$。在这种情况下，顶点 μ_1，……，$\mu_k \in V$ 是 G 的 *medico* 顶点。

Mulder 给出了中位图的如下刻画。

定理 3.6 ([31, 定理 3.1。7])。 图 G 是一个中位图，当且仅当 G 连通、区间单调，并且关于其所有顶点满足 *(C0)*。

根据定义，k-中位图是连通的，并且正如我们将在引理 5.9 中看到的，它们总是关于其中 k 个顶点满足 (C0)。然而，k-中位图一般并非区间单调。最简单的例子可能是图 1(a) 所示的 2-中位图 $K_{2,3}$，其二分划分为 $\{x,y\} \cup \{u,v,w\}$。可以观察到，$I(u,v) = \{u,v,x,y\}$，并且由于 $w \in I(x,y)$，因此 $I(x,y) \not\subseteq I(u,v)$。所以，由 I(u,v) 导出的子图不是凸的。这引出一个问题：定理 3.6 在多大程度上可以推广，以涵盖 k-中位图的性质？事实证明，区间单调性可以由条件 (C2) 与二部性共同取代。

刻画 3 （定理 5.10）。图 G 是 k-中位图，当且仅当 G 连通、二部，并且相对于 μ_1，..，$\mu_k \in V$（G）满足 *(C0)* 和 *(C2)*。此时，顶点 μ_1，...，$\mu_k \in V$ 是 G 的 *medico* 顶点。

后者的结果自然地转化为对中位图的新刻画。

刻画 4 （定理 5.4、5.11 和5.12）。对于每个图 G，以下陈述等价。

1. G 是一个中位图。 *2.* G 中的每个 $v \in V(G)$ 在 G 的每个 v-凸子图中都是一个*medico*顶点。*3.* G关于其所有顶点满足 *(C1)*。 *4.*G 是连通的、二部的，并且关于其所有顶点满足*(C0)* 和 *(C2)*。 *5.*对所有 u、v、$w \in V$，图 $G(u,v,w) := G(u,v) \cap G(u,w) \cap G(v,w)$ 都是非空且连通的，其中 $G(x,y)$ 表示 G的子图，其 $V(G(x,y)) = I_G(x,y)$，且 $E(G(x,y))$ 恰好由所有位于最短 (x,y)-路径上的边组成，其中 x、$y \in V$。

4 必要条件与子图

本节给出每个k-中位图都必须满足的若干性质。我们首先考察 medico 顶点到相邻顶点以及等距圈上顶点的距离。

Le引理 4.1. 设 $G=(V,E)$ 是一个 k-中位图，且 μ 是 G 中的一个 *medico* 顶点。那么 $|d_G(\mu,u)-d_G(\mu,v)|=1$ 对所有边 $\{u,v\}\in E$ 均成立。

证明。设 G =(V,E) 是一个带有 medico 顶点 μ 的 k-中位图，并且 $\{u,v\}\in E$ 是一条边。若 $u=\mu$ 或 $v=\mu$，则命题显然成立。因此，假设 $u,v\neq\mu$。由于 $\{u,v\}\in E$，我们有 $I_G(u,v)=\{u,v\}$。此外，由于 μ 是 G 中的一个 medico 顶点，必有 $|I_G(\mu,u)\cap I_G(\mu,v)\cap I_G(u,v)|=1$。因此，不失一般性，我们可以假设 $med(\mu,u,v)=u$。于是，根据中位数的定义，$d_G(\mu,v)=d_G(\mu,u)+d_G(u,v)=d_G(\mu,u)+1$，因此 $d_G(\mu,v)-d_G(\mu,u)=1$。□

引理2.1 和4.1 蕴含

命题 4.2. 每个 k-中位图都是二部图。

引理 4.3. 设 $G=(V,E)$ 是一个 k-中位图，且 μ 是 G 中的一个 *medico* 顶点。此外，假设 G 包含一个导出圈 C。设 $v\in V(C)$ 是 C 中距离 μ 最近的顶点，其中 $K:=d_G(v,\mu)=\min_{w\in V(C)}d_G(w,\mu)$。此外，设 $u\in V(C)$，并令 $i:=d_C(u,v)$。那么，

$$d_G(\mu,u)\in\begin{cases}\{K+1,K+3,\ldots,K+i\} & \text{if } i \text{ is odd}\\ \{K,K+2,\ldots,K+i\} & \text{if } i \text{ is even.}\end{cases}$$

证明。设 $G=(V,E)$ 是一个 k-中位图，μ 是 G 中的 medico 顶点，且 C 是 G中的一个导出圈。此外，设 $v\in V(C)$ 是 C 中距离 μ 最近的顶点，并令 $K:=d_G(v,\mu)$。现在考虑一个满足 $d_C(u,v)=i\geq 0$ 的顶点u。注意，$i\leq\lfloor |V(C)|/2\rfloor$。

现在，我们对长度 $d_C(u,v)=i$ 进行归纳。若 $i=0$，则 $u=v$，因此显然 $d_G(u,\mu)=K$，且 i 为偶数。若 $i=1$，则 $\{u,v\}\in E$。由于 v 是 C 中距离 μ 最近的顶点，因此 $d_G(\mu,u)\geq d_G(\mu,v)=K$。结合引理 4.1可得 $d_G(\mu,u)-d_G(\mu,v)=1$，从而 $d_G(\mu,u)\in\{K+1\}$，且 i 为奇数。

现在，假设对于所有满足 $0\leq i<\lfloor |V(C)|/2\rfloor$ 的 i，该命题均成立。设 $u\in V(C)$ 是一个满足 $d_C(u,v)=i+1$ 的顶点。由于我们已经验证了 $d_C(u,v)\in\{0,1\}$ 的情形，因此可假设 $d_C(u,v)\geq 2$。根据命题 4.2，G 是二部图，因此 $|C|\geq 4$。于是，确实存在这样一个顶点 $u\in V(C)$，使得 $d_C(u,v)\geq 2$。由于 $d_C(u,v)\geq 2$，存在顶点 $u'\in V(C)$，满足 $d_C(v,u')=i$ 且 $\{u',u\}\in E$。若 $d_C(u,v)$ 为奇数，则 $d_C(u',v)$ 必为偶数，根据归纳假设可得 $d_G(\mu,u')\in\{K,K+2,\ldots,K+i\}$。由引理 4.1，$|d_G(\mu,u)-d_G(\mu,u')|=1$。注意，v 的选取以及 $d_G(v,\mu)=K$ 意味着 $d_G(\mu,u)=K-1$ 不可能成立。由此，结合前述三个论证可得 $d_G(\mu,u)\in\{K+1,K+3,\ldots,K+(i+1)\}$。类似地，若 $d_C(u,v)$ 为偶数，则 $d_C(u',v)$ 必为奇数，且 $d_G(\mu,u')\in\{K+1,K+3,\ldots,K+i\}$，结合引理 4.1 可得 $d_G(\mu,u)\in\{K,K+2,K+4,\ldots,K+(i+1)\}$。□

现在，我们给出命题 5.5 的一个温和推广 [5]，该命题指出，每个模 k-中位图都必须是$K^{3,3}$-自由的。

引理 4.4. 每个 k-中位图都是 $K^{3,3}$-自由的 .

证明。设 G =(V,E) 是一个 k-中位图，且 μ 是 G 中的一个 medico 顶点。反设 G 含有一个导出 $K3,_3\subseteq G$，其顶点集划分为 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ 和 $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$，且该 $K^{3,3}$ 的所有边均形如 $\{x_i,y_j\}$，$1\leq i,j\leq 3$。

设 $v\in X\cup Y$ 是 G 中距 μ 最近的顶点之一，即 $d_G(\mu,v)=\min_{w\in X\cup Y}d_G(\mu,w)=K\geq 0$。由于该 $K^{3,3}$ 是导出的，不失一般性地假设 $v=x_1$。注意，x_1,x_2,y_1,y_2 导出一个 C_4。现在，我们可以应用引理 4.3，得出 $d_G(\mu,y_1)=d_G(\mu,y_2)=K+1$ 且 $d_G(\mu,x_2)\in\{K,K+2\}$。

反设 $d_G(\mu,x_2)=K$。注意，由于 $K^{3,3}$是导出的，因此 $x_1,x_2\in I_G(y_1,y_2)$。此外，可以在任意一条从 μ 到 x_1（长度为 K）的最短路径上添加边 $\{x_1,y_1\}$，从而得到一条从 μ 到 y_1、长度为 $K+1$ 的最短路径，因此 $x_1\in I_G(\mu,y_1)$。同理可得，$x_2\in I_G(\mu,y_1)$，以及 $x_1,x_2\in I_G(\mu,y_2)$。综上，$x_1,x_2\in I_G(\mu,y_1)\cap I_G(\mu,y_2)\cap I_G(y_1,y_2)$。因此，$med(\mu,y_1,y_2)$未定义，矛盾。

因此，$d_G(\mu,x_2)=K+2$必须成立；类似地，$d_G(\mu,x_3)=K+2$也必须成立。根据前面的类似论证，并且由于 $d_G(\mu,y_1)=d_G(\mu,y_2)=K+1$，我们可以得出 $y_1,y_2\in I_G(\mu,x_2)\cap I_G(\mu,x_3)\cap I_G(x_2,x_3)$。因此，$med(\mu,x_2,x_3)$ 未被良好定义，矛盾。□

所有中位图都是二部且网状的 [29]。二部网状图恰好是模图 [16, 引理 2。8]然而，由于 u、v、w 在 Q_3^- 中的三个非中值顶点满足 $I_G(u,v,w) =/0$，因此 Q_3^- 不是模图，因而也不是网状图。此外，由于 Q_3^- 是一个 4-中位图，所以存在并非网状图的 k-中位图。因此，在接下来的证明中，使用如下定义的网状图推广会更方便。

定义 4.5 (μ-网状)**.** 如果 $\mu \in V(G)$ 且所有距离-ℓ-静态四元组$(x,z,y\ \mu) \in V^4$都满足四边形性质，则称图 G 为 μ-网状。

正如我们接下来将看到的，只要 μ 是图 G 中的 medico 顶点，G 中的距离为 ℓ 的静态四元组（$x,z,y\ \mu$）就可以用包含 x,y 和 z 的导出 C_4s 来刻画。因此，对于所有 medico 顶点 μ，k-中位图都是 μ-网状的。进而，这可用于证明，k-中位图中圈的每条边也都属于某个导出C_4。下面的引理给出了k-中位图中距离为 ℓ 的静态四元组的刻画。有趣的是，这一结果表明，在k-中位图的每个C_4 中，两个相对顶点到任意 medico 顶点 μ 的距离均为 $\ell_\mu + 1$，而另外两个相对顶点到该 medico 顶点的距离分别为 ℓ_μ 和 $\ell_\mu + 2$；其中 ℓ_μ 是该C_4 中各顶点到 μ 的距离的最小值。

引理 4.6. 设 G 是一个 k-中位图，μ 是 G 中某个 *medico* 顶点。那么，以下两个命题等价。

1. 四元组 $(x, z, y\ \mu) \in V^4$是距离-ℓ-静态的。*2.* G 中存在一个导出 C_4，其顶点为 x、z、y、u，边为 $\{x, y\}, \{y,z\}, \{z,u\}, \{u, x\}$，其中 u 是 x、y、z、u 这些顶点中距离 μ最近的顶点。

特别地，对于 G 的每个 *medico* 顶点 μ，每个 k-中位图 G 都是 μ-网状 的。

证明。设 μ 是 k-中位图 G 中的一个 medico 顶点。先假设四元组 $(x, z, y\ \mu) \in V^4$是距离-ℓ-静态的。因此，对某个 $\ell \geq 1$，有 $d_G(x\ \mu) = d_G(z\ \mu) = \ell = d_G(y\ \mu) - 1$，且 $d_G(x, z) = 2$，其中 y 是 x 和 z 的公共邻点。特别地，这意味着 x、y、z μ两两不同，且 $\{x, y\}, \{y, z\} \subseteq E(G)$ 和 $\{x, z\} \notin E(G)$。由于 μ是 G 中的一个 medico 顶点，$med_G(\mu, x, y)$ 和 $med_G(\mu, x, z)$ 均有定义。令 $u := med_G(\mu, x, z)$。我们断言 $u \neq x$ 且 $u \neq z$。反设 $u = x$。因此，x 位于 μ 与 z 之间的一条最短路径上，特别地，$d_G(\mu, z) = d_G(\mu, x) + d_G(x, z) > \ell$；矛盾。因此，$u \neq x$。类似地，必有 $u \neq z$。由于 $d_G(x, z) = 2$且 $u = med_G(\mu, x, z)$，根据中位数的定义，有 $d_G(x, z) = d_G(x, u) + d_G(u, z) = 2$。结合 $u \neq x, z$ 可得 $\{u, x\}, \{u, z\} \in E(G)$。此外，$u = med_G(\mu, x, z)$ 意味着 $d_G(\mu, x) = d_G(\mu, u) + d_G(u, x)$。由于 $d_G(\mu, x) = \ell$且 $d_G(u, x) = 1$，可得 $d_G(\mu, u) = \ell - 1$。由于 $d_G(\mu, u) = \ell - 1$ 且 $d_G(y\ \mu) = \ell + 1$，有 $u \neq y$。因此，$(x, z, y\ \mu)$ 满足四边形性质。由于上述论证对任意距离-ℓ-静态四元组 $(x, z, y\ \mu)$ 都成立，所以对于 G 中的所有 medico 顶点 μ，G 都是 μ-网状的。此外，由引理 2.1 可知，u 和 y 不相邻。现在，$\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, u\}, \{z, u\} \in E(G)$，但 $\{x, z\}, \{u, y\} \notin E(G)$，这意味着 x、y、z、u 导出一个 C_4。

现在假设 G 中存在一个由顶点 x、z、y、u 以及边{x、y}、{y、z}、{z、u}、{u、x} 构成的导出 C_4，并假设 u 是 G 中距离 μ 最近的顶点，即 $d_G(\mu,u) = \min^{v \in \{x,y,z,u\}} d_G(v\ \mu)$。假设对于某个 $\ell \geq 1$，$d_G(\mu, u) = \ell - 1$。这一点以及 {z、u} 和 {u、x} 是 G 中的边这一事实，结合引理 4.1，推出 $d_G(z\ \mu)$、$d_G(x\ \mu) \in \{\ell, \ell - 2\}$。然而，由于 $d_G(\mu,u) = \ell - 1$ 且 u 是距离 μ 最近的顶点，必有 $d_G(z\ \mu) = d_G(x\ \mu) = \ell$。此外，$\{x、y\} \in E$ 且 $d_G(x\ \mu) = \ell$，结合引理 4.1 可推出 $d_G(y\ \mu) \in \{\ell - 1, \ell + 1\}$。反设 $d_G(y\ \mu) = \ell - 1$。在这种情况下，$d_G(x\ \mu) = \ell$，且 $\{u,x\} \in E$，这意味着存在一条最短的 (μ, x)-路径经过 u，因此 $u \in I_G(\mu,x)$。通过类似的论证，必有 $y \in I_G(\mu,x)$，以及 $u、y \in I_G(\mu,z)$。此外，由于 G 中的 C_4 是由顶点 x、z、y、u 导出的，我们有 $d_G(x,z) = 2$；根据该 C_4 中边的定义，有 $u、y \in I_G(x, z)$。但这样一来，$u、y \in I_G(\mu, x) \cap I_G(\mu, z) \cap I_G(x, z)$，这意味着 $med_G(\mu,x, z)$ 没有明确定义；这与 μ 是 G 中一个 medico 顶点相矛盾。因此，必有 $d_G(y\ \mu) = \ell + 1$。现在很容易验证，$(x,z, y\ \mu) \in V^4$ 是距离-ℓ-静态的。

□

引理 4.7。设 G 是一个 k-中位图，μ 是一个 *medico* 顶点，C 是 G 中的一个圈。那么，存在边 $\{x, y\}, \{y,z\} \in E(C)$，使得$(x,z,y\ \mu)$ 对某个 $\ell \geq 1$ 是距离-ℓ-静态的。

证明。反设，为导出矛盾，假设对于所有满足 $\{x, y\}, \{y, z\} \in E(C)$ 的 $\mu(x, z, y\ \mu)$，以及任意 $\ell \geq 1$，它都不是距离-ℓ-静态的。注意，G 是二部图，因此对于所有 $\{x, y\}, \{y, z\} \in E(C)$，都有 $d_G(x, z) = 2$。将 C 的顶点标记为 y1,. .., $y^{|C|}$ and $\{y_1, y_2\}, \{y_2, y_3\}, \ldots, \{y^{|C|}, y_1\} \in E(C)$。由引理 4.1，$|d_G(\mu, y_1) -$

$d_G(\mu,y_2)|=1$，并且不失一般性地，假设 $d_G(\mu,y_1)=k$ 且 $d_G(\mu,y_2)=k+1$，其中某个 $k\geq 0$。同样，由引理 4.1，$|d_G(\mu,y_2)-d_G(\mu,y_3)|=1$，因此 $d_G(\mu,y_2)\in\{k,k+2\}$。由于不存在使用 C 中连续三个顶点的距离-ℓ-静态四元组，必有 $d_G(\mu,y_3)=k+2$。重复上述论证，可得 $d_G(\mu,y_{|C|})=k+|C|-1$。由于 $\{y_1,y_{|C|}\}\in E(G)$，且由引理 4.1，$1=d_G(\mu,y_{|C|})-d_G(\mu,y_1)=k+|C|-1-k=|C|-1$，这只有在 $|C|=2$ 时才可能；矛盾。

□

推论 4.8。 *k*-中位图不能包含凸圈 C_n，$n>4$。

证明。设 C 是 G 中具有 $n>4$ 个顶点的一个圈。引理 4.7 意味着，存在边 $\{x,y\},\{y,z\}\in E(C)$，使得 $(x,z,y\ \mu)$ 对某个 $\ell\geq 1$ 是距离-ℓ-静态的。根据引理 4.6，G 中存在一个导出 C_4，其边为 $\{z,u\},\{u,x\}$。因此，存在两条 (x, z)-最短路径。由于 $|C|>4$，其中只有一条位于 C 上。因此，C 不是 G 的凸子图。

□

命题 4.9。 设 *G* 是一个 *k*-中位图。那么，*G* 的每个圈 *C* 的每条边 $e\in E(C)$ 都是某个导出 C_4 的一条边。

证明。设 $G=(V,E)$ 是一个 k-中位图，且 μ 是 G 中的一个 medico 顶点。假设 $e=\{x,y\}$ 是 G 中某个圈的一条边。在所有包含 e 的圈中，令 C 为长度最小的一个。因此 C 必须是导出的。反设 $|C|>4$。于是，由于 G 是二部图，$|C|\geq 6$。由引理 4.1，$|d_G(\mu,x)-d_G(\mu,y)|=1$，不失一般性，我们可以假设 $d_G(\mu,x)<d_G(\mu,y)$。令$\{y,z\}\in E(C)$ 为 C 中与 y 关联且满足 $z\neq x$ 的边。若 $(x,z,y\ \mu)$ 是距离-ℓ-静态的，则由引理 4.6，顶点 x、y、z 因而边 $\{x,y\}$ 包含在同一个导出 C_4中。因此，假设 $(x,z,y\ \mu)$ 不是距离-ℓ-静态的。结合 $x\neq z$、$d_G(\mu,x)<d_G(\mu,y)$ 以及引理 4.1，可得 $d_G(\mu,x)<d_G(\mu,y)<d_G(\mu,z)$。现在，将 C 中的顶点标记为 $v0,\ldots,v_{|C|-1}$，使得 $v_0:=x$，$v_1:=y$，$v_2:=z$，且 $E(C)=\{\{v_0,v_1\},\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_{|C|-1},v_0\}\}$。下文中，我们用 $V_j:=\{v0,\ldots,v\,j\}$ 表示 C 中直到下标 j 的顶点集合。由引理 4.7，C 包含一个距离-ℓ-静态四元组 $(a,c,b\ \mu)$，也就是说，特别有 $d_G(\mu,a)<d_G(\mu,b)$ 且 $d_G(\mu,b)>d_G(\mu,c)$。因此，我们可以选取满足 $d_G(\mu,v_i)=\ell<d_G(\mu,v_{i+1})$ 且 $d_G(\mu,v_{i+1})>d_G(\mu,v_{i+2})$ 的最小下标 $i\geq 1$。由于 $d_G(\mu,x)<d_G(\mu,y)$，且根据 i 的选取，对于所有 $j\in\{0,\ldots,i\}$，都有 $d_G(\mu,v\,j)<d_G(\mu,v\,j_{+1})$。引理 4.1 表明 $d_G(\mu,v_i)=d_G(\mu,v_{i+2})=\ell$ 且 $d_G(\mu,v_{i+1})=\ell+1$。由于 v_i和 v_{i+2} 是不同的顶点，因此有 $\ell\geq 1$。此外，由于 G 是二部图，必有 $d_G(v_i,v_{i+2})=2$。总之，$(v_i,v_{i+2},v_{i+1},\mu)$ 是距离-ℓ-静态的。由引理 4.6，存在一个导出 C_4，包含边 $\{v_i,v_{i+1}\}$ 和 $\{v_{i+1},v_{i+2}\}$，以及一个附加顶点 u，使得 $d_G(\mu,u)=\ell-1$，并且特别地，$\{u,v_i\},\{u,v_{i+2}\}\in E(G)$。注意，若 $u\in V(C)$，则 C 要么不是导出的，要么 $i=1$ 且 $u=v_0$ 必须成立，此时 $C\simeq C_4$。因此，$u\notin V(C)$，特别地，$u\notin V_i$。根据 i 的选取，$d_G(\mu,v_{i-1})<d_G(\mu,v_i)=\ell$，结合引理 4.1 可得 $d_G(\mu,v_{i-1})=\ell-1$。此外，由于 G 是二部图，且 $\{u,v_i\},\{v_i,v_{i-1}\}\in E(G)$，我们有 $d_G(v_{i-1},u)=2$。注意，$\ell-1\geq 1$，否则 $d_G(\mu,u)=d_G(\mu,v_{i-1})=\ell-1=0$ 将推出 $u=\mu=v_{i-1}$；这与 u 和 v_{i-1}是不同顶点矛盾。总之，(v_{i-1},u,v_i,μ) 是距离 -$(\ell-1)$- 静态的。由引理 4.6，存在一个导出 C_4，包含边 $\{v_{i-1},v_i\}$ 和 $\{v_i,u\}$，以及一个附加顶点 u'，满足 $d_G(\mu,u')=\ell-2$，并且还包含边 $\{v_{i-1},u'\}$和 $\{u,u'\}$。若 $i=1$，则我们找到了一个导出 C_4，包含 $\{v_0,v_1\}=\{x,y\}$；这与 C 的选取矛盾。因此，必有 $i\geq 2$。我们断言 $u'\notin V_{i-2}$。为此，反设 $u'\in V_{i-2}$。先设 $u'=v_0$，并考虑经过 $u',v1,\ldots,v_i,u,u'$、长度为 $|C'|=i+2$ 的圈 C'。若 $|C|=i+2$，则 $v_{i+2}=v_0$。因此，$u'=v_0$推出 $v_{i+2}=u'$，从而存在一条边 $\{v_{i-1},u'\}=\{v_{i-1},v_{i+2}\}$，且 C 不是导出的；矛盾。因此，必有$|C|>i+2$。但此时 C'比 C 短，且包含边 $\{u',v_1\}=\{x,y\}$；这与 C 的选取矛盾。因此，必有 $u'=v_j\in V_{i-2}\setminus\{v_0\}$。现在考虑经过 $v_0,v1,\ldots,v\,j_{-1},u',u,v_{i+2},v_{i+3}\ldots,v_{|C|-1},v_0$（$v_1=u'$或 $v_1=v\,j_{-1}$可能成立）的圈 C''。注意，由于 $j\leq i-2$，$d_C(v\,j,v_{i+2})\geq 4$。此外，$d_G(v\,j,v_{i+2})=2$，因为在 G 中存在一条路径，其边为 $\{u',u\}=\{v\,j,u\}$，以及$\{u,v_{i+2}\}$。因此，C''比 C 短，且包含 $\{v_0,v_1\}=\{x,y\}$；再次产生矛盾。因此，我们找到了一个导出 C_4，其边为 $\{v_{i-1},v_i\},\{v_i,u\},\{u,u'\},\{u',v_{i-1}\}$，其中 $u\notin V_{i-1}$且 $u'\notin V_{i-2}$。现在，我们可以对 u',v_{i-1},v_{i-2}重复上述论证，并找到一个导出 C_4，其边为 $\{v_{i-2},v_{i-1}\},\{v_{i-1},u'\},\{u',u''\},\{u'',v_{i-2}\}$，其中 $u'\notin V_{i-2}$，$u''\notin V_{i-3}$。通过归纳法并重复上述论证，可以证明所有边 $\{v_0,v_1\}=\{x,y\},\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_i,v_{i+1}\}$都位于某个导出 C_4中；这与 C 的选取矛盾。因此，任何包含 $\{x,y\}$ 的最小圈都必须是一个导出 C_4。

□

引理 4.10。 设 *G* 是一个以 μ 为 *medico* 顶点的 *k*-中位图。若 *G* 含有两个距离为 ℓ 的静态四元组 $(x,z,y\ \mu)$、$(x,z',y\ \mu)\in V_4$，则 *G* 含有一个导出的 $K^{2,3}$ *or* Q_3^-。

证明。设 μ 是 G $=$(V, E) 中的一个 medico 顶点，并且 (x, z, y μ)、(x, z′, y μ) $\in$V ^{4}是距离-ℓ-静态四元组。因此，我们有 d_G(x μ) $=d_G$(z μ) $=\ell=d_G$(y μ) -1，且 d_G(x,z) $=2$，其中 y 是 x 和 z 的公共邻点；同时有 d_G(x μ) $=d_G$(z′,μ) $=\ell$，且 d_G(x, z′) $=2$，其中 y 是 x 和 z′ 的公共邻点。因此，y 是 z 和 z′ 的公共邻点。由于 G 是二部图，d_G(z, z′) $=2$。此外，d_G(z μ) $=d_G$(z′,μ) $=\ell=d_G$(y μ) -1。因此，(z,z′, y μ) $\in$V ^{4}是距离-ℓ-静态的。

根据引理 4.6，G 中存在一个导出的 C_4，其边为 {x、y}、{y、z}、{z、u}、{u、x}；G 中还存在一个导出的 C_4，其边为 {x、y}、{y、z′}、{z′、u′}、{u′、x}。如果 u $=$u′，那么 G 包含一个导出的 $K_{2,3}$，其二分划分为{x、z}$\cup${u、y、z′}。因此，假设 u $\neq$u′。由于 (z, z′, y μ) $\in$V ^{4}是距离-ℓ-静态的，G 中存在一个导出的 C_4，其边为 {z、y}、{y、z′}、{z′、u″}、{u″、z}。同样，如果 u″ $=$u 或 u″ $=$u′，则存在一个导出的 $K_{2,3}$。如果 u、u′、u″两两不同，那么 x、z、z′、y、u、u′、u″导出一个 Q_3^-。 □

命题 4.11. 设 G 是一个不含 Q_3^- 的 k-中位图，且其 *medico* 顶点为 μ。那么，G 含有一个导出 $K_{2,3}$ 当且仅当 G 含有两个距离-ℓ-静态四元组 $(x, z, y\ \mu), (x, z', y\ \mu) \in V^4$。

证明。如果方向由引理 4.10 以及 G 不含 Q_3^- 可知。对于仅当方向，假设 G $=$(V, E) 含有一个导出的 $K_{2,3}$，其二分划分为 {x, x′}$\cup${y, y′, y″}。令 v $\in$ {x, x′, y, y′, y″} 为距离 μ最近的顶点之一，并假设对于某个 $\ell \geq 1$，$d_G(\mu, v) = \ell - 1$。反设 v $=$y。由于 y 距离 μ最近，且 {y, x}, {y, x′} $\in$E，由引理 4.1 可得 $d_G(\mu,$ x) $=d_G(\mu, x') = \ell$。由于 {y′, x}, {y′, x′} $\in$E，且根据引理 4.1，我们有 $d_G(\mu, y') \in \{\ell - 1, \ell + 1\}$。若 $d_G(\mu,$ y′) $=\ell - 1$，则容易验证 y, y′ $\in I_G(\mu, x, x')$，这不可能，因为 $\mathrm{med}_G(\mu, x, x')$ 定义良好。但此时，$d_G(\mu, y')$ $=\ell + 1$，且 x, x′ $\in I_G(\mu, y, y')$，由此得到所需矛盾。因此，必有 v $\notin$ {y, y′, y″}。不失一般性，我们可以假设 v $=$x。在此情形下，x 距离 μ最近，且 {x, y}, {x, y′}, {x, y″} $\in$E，结合引理 4.1 可得 $d_G(\mu, y) = d_G$ $(\mu, y') = d_G(\mu, y'') = \ell$。再次根据引理 4.1，且由于 x′与 y、y′和 y″相邻，我们有 $d_G(\mu, x') \in \{\ell - 1, \ell + 1\}$。然而，若 $d_G(\mu, x') = \ell - 1$，则 x, x′ $\in I_G(\mu, y, y')$，这不可能，因为 $\mathrm{med}_G(\mu, y, y')$ 定义良好。因此，我们有 $d_G(\mu, x') = \ell + 1$。于是，G 含有距离-ℓ-静态四元组 (y, y′, x′,μ) 和 (y, y″, x′,μ)。

□

中位图的特征是：其中每个等距圈的凸包都是一个超立方体。一般而言，k-中位图并不具备这一性质。例如，图 C_6 中等距“外部”圈的凸包G （见图 1(c)）与 G 重合，并包含一个导出的 Q_3^-和一个 $K_{2,3}$，但显然不是超立方体。然而，在k-中位图 G 中存在由六个顶点构成的等距圈，明确表明其中存在导出的 Q_3^-s G。

命题4.12。 k-中位图 G 含有一个导出 Q_3^-，当且仅当 G 含有一个导出（或等价地，一个等距）C_6。

证明。容易验证，当G 为二部图时，对于六个顶点上的圈，等距与导出这两个术语是等价的。此外，很容易验证，任何导出 Q_3^- $\subseteq$G 都包含一个导出 C_6（参见图 1(b)）。现在假设 G $=$ (V, E)包含一个导出C_6,，将其记为C。令 δ: V $\to \mathbb{N}$为如下映射：将每个顶点映射到其到 μ的距离，即 δ(v) $=d_G(\mu, v)$。假设 V(C) $=$ {v1,.. . , v_6}且 E(C) $= \{\{v_1, v_2\}, \ldots \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_1\}\}$。不失一般性，假设 v_1是 C 中距离 μ最近的顶点，并且 $\delta(v_1) = \ell - 1$对于某个 $\ell \geq 1$成立。当沿着 C从v_1经过v_2.. .到 v_6遍历时，我们得到有序元组 Δ(C) $:=(\delta$ (v_1) $\delta(v_2)$ ...,$\delta(v_6)$)。我们将 Δ^*(C) 记为元组 $(\delta(v_1)$ $\delta(v_6)$. .. , $\delta(v_2))$，即沿着 C从v_1经过 v_6. . . 到 v_2遍历所得到的元组。

对顶点C 到 μ 的所有可能距离进行完整枚举，并利用引理4.1，可知$\Delta(C)$总是以下形式之一

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 := (\ell-1, \ell, \ell-1, \ell, \ell-1, \ell);\\
&\Delta_2 := (\ell-1, \ell, \ell-1, \ell, \ell+1, \ell);\\
&\Delta_2^* := (\ell-1, \ell, \ell+1, \ell, \ell-1, \ell);\\
&\Delta_3 := (\ell-1, \ell, \ell+1, \ell, \ell+1, \ell);\ \text{or}\\
&\Delta_4 := (\ell-1, \ell, \ell+1, \ell+2, \ell+1, \ell).
\end{aligned}$$

首先假设 $\Delta(C) = \Delta_1 = (\ell - 1, \ell, \ell - 1, \ell, \ell - 1, \ell)$。于是，$(v_3, v_5, v4, \mu)$ 是一个距离-$(\ell - 1)$-静态四元组。根据引理4.6，G中存在一个导出C_4，其顶点为 v_3,v_4,v_5,u，边为{v_3,v_4}、{v_4,v_5}、{v_5,u}、{u、v_3}。特别地，$\delta(u) = \ell - 2$。由于 C是导出的，u $\notin$V (C)。如果u与 v_1, 相邻，则G 包含一个导出Q_3^-，结论得证。因此，假设 {u,v_1} $\notin$ E。现在考虑距离-$(\ell - 1)$-静态四元组 (v_1,v_5,v6,μ)。同样，存在一个包含 v_1,v_5,v_6和 u′ 的导出 C_4，并且 $\delta(u') = \ell - 2$。如果 u′ $=$u，或者u 与 v_3,相邻，则 G 包含一个导出 Q_3^-，并且我们

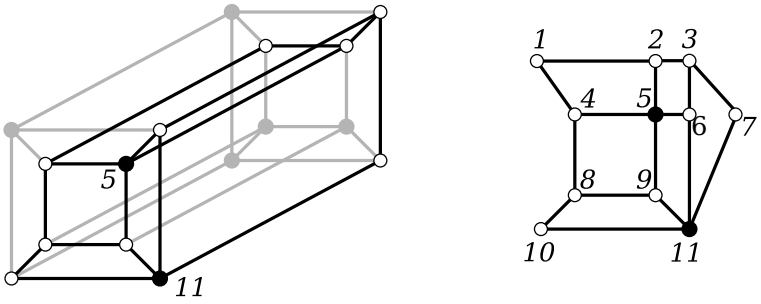

图 3：一个无$K_{2,3}$的真2-中位图 G（右）。其medico顶点 5和11以黑色顶点突出显示。G是超立方体 Q_4 的等距子图，其等距嵌入显示在左侧。根据命题 4.12，它的每个长度为六的等距圈（分别由4、5、6、8、10、11和2、3、5、7、9、11导出）都包含在G的某个 Q_3^- 子图中。G 中存在一个由1、2、3、4、7、8、10、11 导出的等距C_8，其凸包就是G。这个 C_8 不包含在 G 的某个导出 Q_4^- 中。

已完成。因此，假设$u \neq u'$，并且 $\{u', v_3\} \notin E$。类似地，对于距离-$(\ell-1)$-静态四元组$(v_1,v_3,v2,\mu)$，同样存在一个包含 v_1, v_2, v_3 和 u''的导出 C_4，且 $\delta(u'') = \ell - 2$。如果$u'' = u$ 或 $u'' = u'$，或者u'' 与 v_5，相邻，则G 包含一个导出Q_3^-，我们便完成了证明。因此，可以假设u、u′和 u″ 两两不同，并且 $\{u', v_5\} \notin E$。注意到 $\delta(u) = \delta(u') = \delta(u'') = \ell - 2$。此外，根据后一个论证，经过 v_1,u″、v_3, u、v_5, u′ 的圈是一个导出 C_6,，记作C′。此外，$\Delta(C') = (\ell-1, \ell-2, \ell-1, \ell-2, \ell-1, \ell-2)$。现在，我们可以在 C′ 上重复前述论证，从而得到一个导出Q_3^-，或者得到一个导出 C_6,，记作C″，使得 $\Delta(C'') = (\ell-3, \ell-2, \ell-3, \ell-2, \ell-3, \ell-2)$。由于 G 是有限的，上述过程必然终止，即在某一步中，我们无法找到另一个由六个顶点组成的导出圈 ˜C，因为 Δ (˜C) 中的距离变得越来越接近 μ。因此，G 必须包含一个导出 Q_3^-。

现在假设 $\Delta(C) = \Delta_2 = (\ell-1, \ell, \ell-1, \ell, \ell+1, \ell)$。在这种情况下，$(v_4, v_6, v5, \mu)$ 是一个距离为-ℓ的静态四元组。因此，G 中存在一个由顶点 v_4,v_5,v_6,u 导出的 C_4。特别地，$\delta(u) = \ell - 1$，并且由于 C 是导出的，$u \notin V(C)$。如果 $\{u, v_2\} \in E$，则 G 包含一个 Q_3^-。否则，如果 $\{u, v_2\} \notin E$，则 G 包含一个称为 C′ 的 C_6,，它由 v_1, v_2, v_3, v_4, u, v_6 导出，并且满足 $\Delta(C') = \Delta_1$。如前所示，这意味着 G 包含一个 Q_3^-。情形 $\Delta(C) = \Delta_2^*$ 可用类似方法证明。

现在假设 $\Delta(C) = \Delta_3 = (\ell-1, \ell, \ell+1, \ell, \ell+1, \ell)$。在这种情况下，$(v_4, v_6, v5, \mu)$ 是一个距离-ℓ-静态四元组，并且 G 中存在一个导出 C_4，其顶点为 v_4, v_5, v_6, u，且我们有 $\delta(u) = \ell - 1$。由于 C 是导出的，$u \notin V(C)$。若 $\{u, v_2\} \in E$，则 G 含有一个 Q_3^-。否则，由顶点 $v_1, v_2, v_3, v_4, u, v_6$ 构成的圈 C′ 是一个导出 C_6，并满足 $\Delta(C') = (\ell-1, \ell, \ell+1, \ell, \ell-1, \ell)$；我们可以沿用情形 Δ_2^* 中的论证，得出 G 含有一个导出 Q_3^-。

最后，假设 $\Delta(C) = \Delta_4 = (\ell-1, \ell, \ell+1, \ell+2, \ell+1, \ell)$。在这种情况下，$(v_3, v_5, v4, \mu)$ 是一个距离-$(\ell+1)$-静态四元组，并且 G 中存在一个导出圈 C_4，其顶点为 v_3,v_4,v_5,u。并且我们有$\delta(u) = \ell$。由于 C 是导出的，$u \notin V(C)$。如果 $\{u, v_1\} \in E$，则 G 含有一个 Q_3^-。否则，由顶点 v_1, v_2, v_3, u, v_5, v_6构成的圈 C′ 是一个导出 C_6，且满足 $\Delta(C') = (\ell-1, \ell, \ell+1, \ell, \ell+1, \ell) = \Delta_3$，因此我们可以重复情形 Δ_3 中的论证，得出 G 含有一个导出 Q_3^-。

□

部分立方体是能够等距嵌入超立方体的图。圈C_6 是一个部分立方体。因此，命题 4.12 表明，存在并非k-中位图的部分立方体。尽管C_6 在一个 k-中位图中的每个导出圈都表明存在一个 Q_3^-，但对于更大的等距圈，类似结果未必成立，例子见图3。

图 1 表明存在 k-中位图，它们包含导出的 Q_3^- 或 $K_{2,3}$。事实上，我们既没有找到相关实例，也没有找到明确的论证来表明存在 $K_{2,3}$-无和 Q_3^--无的 k-中位图（除了等距圈为 C_4 的中位图之外），或者存在 $K_{2,3}$-无的 k-中位图，且它们不是部分立方体。特别地，这提出了以下未决问题。

问题 1. 每个不是中位图的 k-中位图是否都包含导出 Q_3^- 或 $K_{2,3}$?

推论 5.16 表明，每个 k-中位图若不是中位图，就必定包含一个导出$K_{2,3}$。

问题 2。 每个不含 $K_{2,3}$ 的 k-中位图都是中位图或超立方体的（等距）子图吗?

5 k-中位图的刻画

5.1 凸性

我们首先介绍运用广义凸性概念的结果。回顾一下，若 $v \in V(H)$，且对于所有 $x \in V(H)$，在 G 中连接 v 和 x 的每条最短路径也都包含在 H 中，则称子图 $H \subseteq G$ 是 v-凸的。请注意，具有相同顶点集的 v-凸子图不一定具有相同的边集，因此彼此可能不同。例如，在 K_3 a 中，包含三个顶点的 v-凸子图可以是路径 P_3，也可以是图 K_3。更多示例见图 2。尽管如此，当底层图是二部图时，v-凸子图具有唯一性。

引理 5.1。对于每个二部图 G，每个 v-凸子图都是导出的。因此，对于所有 $W \subseteq V(G)$以及所有 $v \in W$，G 中顶点集为 W 的任意两个 v-凸子图都相同。

证明。设G 是一个二部图，H是 G的一个 v-凸子图。设 $\{x, y\} \in E(G)$是一条边，其中 $x,y \in V(H)$。由H的 v-凸性可知，我们有$d_G(v, x) = d_H(v, x) = k$ 和 $d_G(v,y) = d_H(v,y) = k'$。由于$H \subseteq G$是二部且连通的，我们可以应用引理 2.1，从而得出 $|k - k'| = 1$ 必须成立。不失一般性，我们可以假设 $k' = k + 1$。考虑G 中一条最短的 (v,x)-路径P。由于 $\|P\| = k < d_G(v,y)$，顶点 y不可能位于 P 上。因此，通过添加 $\{x, y\}$，可以将 P延伸为 G中的一条 (v, y)-路径 P'。根据构造，$\|P'\| = k + 1$，因此 P'是 G中一条最短的(v, y)-路径。由于 H 是 v- 凸的，我们有 $P' \subseteq H$，因此 $\{x, y\} \in E(H)$。所以，H 是 G 的一个导出子图。 □

尽管v-凸子图未必是凸的（参见图 2），但只要v 是 G中的 medico 顶点，它们就是等距子图和 1-中位图。

引理 5.2。设 G 是一个 k-中位图，$\mu \in V(G)$ 中的某个顶点是 G 中的 *medico* 顶点，且 H 是 G 的一个 μ-凸子图。那么，H 是 G 的等距子图。特别地，H 是一个具有 *medico* 顶点 μ的$\mathrm{med}_H(\mu, x, y) = \mathrm{med}_G(\mu, x, y)$ 的1-中位图，对所有 $x, y \in V(H)$均成立。

证明。设 G 是一个 k-中位图，$\mu \in V(G)$ 中的某个顶点是 G 中的 medico 顶点，且 H 是 G 的一个 μ-凸子图。我们先证明 H 是 G 的等距子图，也就是说，对所有 $x,y \in V(H)$，$d_H(x, y) = d_G(x, y)$。为此，任取 $x, y \in V(H)$。若 $x = y$，则结论显然成立。因此，假设 $x \neq y$。首先，设 $x = \mu$。由于 H 是 G 的子图，因此 $d_H(\mu, y) \not< d_G(\mu,y)$。此外，H 的 μ-凸性意味着所有连接 μ 与 y 的最短路径也都位于 H 中，因此 $d_H(\mu, y) = d_G(\mu, y)$。由于 y 是任意选取的，因此对所有 $v \in V(H)$，均有 $d_H(\mu, v) = d_G(\mu, v)$。

现在假设 x 和 y 均不同于 μ。由于 μ 是 G 中的 medico 顶点，$z := \mathrm{med}_G(\mu,x, y)$ 定义良好。我们首先证明 $d_H(z, x) = d_G(z, x)$。显然，若 $x = z$，则命题显然成立。因此，假设 $x \neq z$。由于对于所有 $v \in V(H)$，都有 $d_H(\mu, v) = d_G(\mu, v)$，所以 $d_H(\mu, x) = d_G(\mu, x)$。由此以及 H 的 μ-凸性可知，G 中每条最短的 (μ, x)-路径也包含于 H 中，特别地，它也是 H 中一条最短的 (μ, x)-路径。由于 z 是 G 中 μ、x 和 y 之间的唯一中位点，z 位于 G 中某条最短的 (μ, x)-路径 P 上；根据上述论证，P 也是 H 中一条最短的 (μ, x)-路径。特别地，这意味着 $z \in I_H(\mu, x)$。考虑 P' 中连接 z 和 x 的子路径。由于 P 是 H 中（分别也是 G 中）的一条最短路径，我们可以得出结论：P' 是 H 中（分别也是 G 中）连接 z 和 x 的最短路径。因此，$d_H(z, x) = d_G(z, x)$。用类似的论证可知，$z \in I_H(\mu, y)$ 以及 $d_H(z, y) = d_G(z, y)$ 均成立。由三角不等式，$d_H(x, z) + d_H(z, y) \geq d_H(x, y)$。由于 $d_H(z, x) = d_G(z, x)$ 且 $d_H(z, y) = d_G(z, y)$，我们可以得出结论：$d_G(x, z) + d_G(z, y) = d_H(x, z) + d_H(z, y)$。此外，$z = \mathrm{med}_G(\mu, x, y)$，且 H 是 G 的子图，这意味着 $d_H(x, y) \geq d_G(x, y) = d_G(x, z) + d_G(z, y)$。综合以上三个论证可得

$$d_H(x,y) \geq d_G(x,y) = d_G(x,z) + d_G(z,y) = d_H(x,z) + d_H(z,y) \geq d_H(x,y).$$

因此，$d_H(x, y) = d_G(x, y)$，如所述，且 $z \in I_H(x, y)$。所以，H 是 G 的等距子图。特别地，$z = \mathrm{med}_G(\mu, x, y) \in I_H(\mu, x) \cap I_H(\mu, y) \cap I_H(x, y) = I_H(\mu, x, y)$ 必须成立。

还需证明 H 是一个 1-中位图，且其 medico 顶点为 μ。根据后一论证，$z \in I_H(\mu, x, y)$。接下来证明 $|I_H(\mu, x, y)| = 1$。反设 $|I_H(\mu, x, y)| \geq 2$，并令 $z' \in I_H(\mu, x, y) \setminus \{z\}$。因此，$z'$位于 H 中某条最短的 (μ, x)-路径 P、某条最短的 (μ, y)-路径 P'以及某条最短的 (x, y)-路径 P''上。由于 H 是等距的，我们有 $\|P\| = d_G(\mu, x)$、$\|P'\| = d_G(\mu, y)$ 和 $\|P''\| = d_G(x, y)$。由此以及 H 是 G 的子图这一事实可知，P 、P' 和 P'' 分别是 G 中最短的 (μ, x)-路径、最短的 (μ, y)-路径和最短的 (x, y)-路径。但这样一来，必有 $z' \in I_G(\mu, x) \cap I_G(\mu, y) \cap I_G(x, y)$，这意味着 $\mathrm{med}_G(\mu, x, y)$ 未被良好定义，矛盾。因此

su总而言之，H是一个 1-中位图，其 medico 顶点为 μ。特别地，$\{z\} = I_H(\mu, x, y)$ 成立，因此 ，$\mathrm{med}_H(\mu,x,y) = \mathrm{med}_G(\mu,x,y)$ 对所有$x,y \in V(H)$。 □

引理 5.2 一般仅对v-凸子图成立，其中 v 是一个 medico 顶点。例如，图 G_2 见图 2 是一个 k-中位图，但非 medico 顶点的v-凸子图并非等距。更进一步，图 G_4 见图 2 表明，k-中位图的v-凸子图不一定是 1-中位图。引理5.2 可用于得到以下

命题 5.3。 如果且仅如果 μ 是 G 的每个 μ-凸子图中的 *medico* 顶点，顶点 $\mu \in V(G)$ 才是图 G 中的 *medico* 顶点。

证明。 该 如果方向由以下简单事实得出： G 显然是一个 μ-凸子图 G。对于仅当 方向，假设 $\mu \in V$ 是 G 中的一个 medico 顶点，并假设 H 是一个 μ-凸子图G。根据引理 5.2， μ 是 H中的一个 medico 顶点。 □

.....的定义k-中位图和中位图，连同命题 5.3 立即蕴含 es

定理5.4。 $G = (V,E)$是一个k-中位图，当且仅当存在 k个顶点 μ_1、.....、 $\mu_k \in V$，使得μ_i 在G 的每个 μ_i-凸子图中都是一个 *medico* 顶点， $1 \leq i \leq k$。特别地，对于所有$v \in V(G)$，当且仅当v 在 G的每个 v-凸子图中都是一个 *medico* 顶点时，G 是一个中位图。

推论 5.5. 设 G 是一个1-中位图，且 μ 是 G 中某个 *medico* 顶点。那么，对于所有 $v \in V(G)$，由区间 $I_G(\mu, v)$ 导出的子图 $G[I_G(\mu,v)]$ 是 G 的一个 μ- 凸等距子图，并且是一个以 μ 为 *medico* 顶点的 1- 中位图。

证明。设 G 是一个 1-中位图， μ 是 G 中的某个 medico 顶点，且 $v \in V(G)$。令 $I := I_G(\mu, v)$。根据定义，G 中连接 μ 和 v 的所有最短路径都包含在 G[I]中。设 $w \in I$。根据引理 2.2，$I(\mu, w) \subseteq I$。因此，对于所有 $w \in I$，所有 (μ, w)-最短路径都位于 G[I] 中。故 I 是 μ-凸的。第二个结论现在可由引理 5.2 直接推出。 □

请注意，推论 5.5 的逆命题一般并不成立。为说明这一点，考虑图 $G \simeq K_{2,3}$，其二分划分为 $V(G) = X \cup Y$，其中 $X = \{x_1, x_2\}$，$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$。令 $\mu := y_1$。当 $i \in \{2,3\}$ 时，我们有 $I(\mu, y_1) = \{y_1\}$ 和 $I(\mu, y_i) = \{\mu, x_1, x_2, y_i\}$。此外，$I(\mu, x_i) = \{\mu, x_i\}$，$i \in \{1,2\}$。容易看出，对于这些区间中的每一个，导出子图 G[I]都是 μ-凸、等距的 1-中位图，且以 μ 为 medico 顶点。然而，由于 $I(\mu, y_2, y_3) = \{x_1, x_2\}$， μ并不是 G 的 medico 顶点。

以下结果是众所周知的（参见 [31]），而后面的结果使我们能够给出一个简单的替代证明。

推论 5.6。 当且仅当 G 的每个凸子图都是中位图时，G 才是中位图 .

证明。充分性方向直接由以下简单事实得出：G 是 G 的凸子图。对于必要性方向，设 G 是一个中位图，且 H 是 G 的某个凸子图。由于 H 是凸的，对于所有 $v \in V(H)$，H 都是 v- 凸的。根据定理 5.4，对于所有 $v \in V(H)$，v 都是 H 中的 medico 顶点。因此，H 是 a|V (H)|-中位图，从而是一个中位图。 □

然而，对于k-中位图是否也存在类似结果，仍然是一个悬而未决的问题。

问题 3。 k-中位图 G 的每个凸子图是否都是 *1*-中位图?

问题 3 将得到肯定回答，见命题 5.19 ，针对模k-中位图。

5.2 条件*(C0)*、*(C1)* 和*(C2)*

现在我们给出k-中位图的另外两种刻画。为此，我们首先证明

引理 5.7。 若图 G 关于某个顶点 $u \in V(G)$满足 *(C1)*，则对于 $G(G)$ 中的所有边 $\{a,b\} \in E$，都有 $d_G(u, a) \neq d_G(u, b)$；因此，G 是二部图。

证明。由逆否命题，设 u 是图 G 中的一个顶点，且存在一条边 $\{a,b\} \in E(G)$，使得 $d_G(u,a) = d_G(u,b)$。因此，$I_G(a,b) = \{a,b\}$。由于 $b \notin I_G(u, a)$，否则 $d_G(u,a) = d_G(u, b) + d_G(a, b) \neq d_G(u,b)$；这就产生了矛盾。由类似的论证可得，$a \notin I_G(u, b)$。因此，$I_G(u,a,b) = /0$，故 G 不满足关于 u 的 (C1)。最后，由引理 2.1 可知，G 是二部图。 □

Th定理 5.8。 图 $G=(V,E)$ 是 k-中位图，当且仅当 G 满足关于 μ_1、…、$\mu_k \in V$ 的 *(C1)* .
*In t*在该情形下，顶点 μ_1、...、$\mu_k \in V$ 是 G 的 *medico* 顶点。

证明。设 G $=$(V, E) 为一个图，任取 v、w $\in$V，并令 I $:=$ $I_G(\mu, v, w)$。假设 μ 是 G 中的一个 medico 顶点。由命题 4.2，G 是二部图。此外，由于 μ 是一个 medico 顶点，我们有 $|I|=1$。因此，G[I] $\simeq K_1$ 非空且连通。由于 v、w 是任意选取的，G 关于 μ 满足 (C1)。

现在假设 G 关于 $\mu \in \{\mu_1,\ldots,\mu_k\}$ 满足 (C1)。因此 G 必须是连通的。由于 G[I] 不是空图，我们有 I $\neq$ / 0。反设 $|I|>1$。由于 G 关于 μ 满足 (C1)，G[I] 是连通的。因此，存在 a、b $\in$I，使得 {a、b} $\in$E(G)。下文中的距离 $d(\cdot,\cdot)=d_G(\cdot,\cdot)$ 均取为关于 G 的距离。由引理 5.7，$d(\mu, a) \neq d(\mu, b)$，而引理 2.1 表明 $d(\mu, a)$ 与 $d(\mu, b)$ 恰好相差 1，不妨设 $d(\mu, b)=d(\mu, a)+1$。由于 a、b $\in I(\mu, v)$，有 $d(\mu, v)=d(\mu, a)+d(a, v)=d(\mu, b)+d(b, v)$。因此，$d(b, v)=d(a, v)+d(\mu, a)-d(\mu, b)=d(a, v)-1$。通过类似的论证，并且由于 a、b $\in I_G(\mu, w)$，我们得到 $d(b, w)=d(a, w)-1$。后面两个论证与 a、b $\in I_G(v, w)$ 一起意味着 $d(v, w)=d(v, b)+d(b, w)=d(v, a)+d(a, w)-2=d(v, w)-2$；矛盾。因此，必须有 $|I|=1$。由于 v、w 是任意选取的，$|I_G(\mu, v, w)|=1$ 对所有 v、w $\in$V 均成立。 consequently， μ 是 G 的一个 medico 顶点，且 G 是一个 k-中位图。 □

根据定理3.6，中位图是区间单调的，并且相对于其所有顶点始终满足 (C0)。如第 3 节所述，k-中位图不一定是区间单调的。不过，它们始终相对于其 medico 顶点满足 (C0)。

引理 5.9。*G* 对每个 *medico* 顶点 $\mu \in V(G)$ 均满足 *(C0)*，相对于 μ。

证明。设 μ 是 G $=$(V, E) 的一个 medico 顶点。假设存在顶点 v,w $\in$V，使得 $I(\mu,v) \cap I(v,w) = \{v\}$。由于 μ 是 G 中的一个 medico 顶点，因此必有 $|I(\mu, v) \cap I(v, w) \cap I(\mu, w)|=1$，从而 $med_G(\mu, v,w) = v$。因此，v $\in I(\mu,w)$，且 G 相对于 μ 满足 (C0)。 □

定理 3.6 和引理5.9 引出了一个问题：定理3.6 在多大程度上可以推广，以涵盖k-中位图的性质。接下来的结果给出了答案。

定理 5.10. 图 *G* 是 *k*-中位图，当且仅当 *G* 连通、二部，并且相对于 $\mu_1,..,\mu_k \in V(G)$ 满足 *(C0)* 和 *(C2)*。在这种情况下，$\mu_1,\ldots,\mu_k \in V$ 是 *G* 的 *medico* 顶点。

证明。对于仅当方向，首先假设 G $=$ (V, E) 是一个 k-中位图。根据命题 4.2，G 是二部图。令 $\mu \in$V 为其（至少 k 个）medico 顶点之一。根据引理 5.9，G 相对于 μ 满足 (C0)。此外，由于 μ是 G 中的一个 medico 顶点，我们有 $G[I(\mu,v, w)] \simeq K_1$，对所有 u,v $\in$V 均成立。因此，G 显然相对于 μ 满足 (C2)。

对于充分性方向，现假设 G 是连通二部图，并且相对于 μ_1、.....、μ_k 满足 (C0) 和 (C2)。令 $\mu \in \{\mu_1,\ldots,\mu_k\}$。我们首先证明，对于所有 v、w $\in$V，都有 $I(\mu, v, w) \neq /0$。由于 G 是连通的，我们可以应用引理 2.2，从而得出：对于所有 v、w $\in$V，存在一个顶点 z $\in I(\mu, v) \cap I(v, w)$，使得 $I(\mu, z) \cap I(z, w) = \{z\}$。由于 G 相对于 μ 满足 (C0)，我们有 z $\in I(\mu, w)$，因此，对于所有 v、w $\in$V，都有 $I(\mu, v, w) \neq /0$。现在反设 μ 不是 G 中的 medico 顶点。因此，存在顶点 v、w，使得 $med_G(\mu, v, w)$ 未定义。根据上述论证，$|I(\mu, v, w)|>1$。由于 G 相对于 μ 满足 (C2)，存在一条边 {a, b} $\in$E(G)，其中 a、b $\in I(\mu, v, w)$。G 的二部性与 2.1 一起意味着，$d_G(\mu, a)$ 和 $d_G(\mu, b)$ 恰好相差 1；不妨设 $d_G(\mu, b)=d_G(\mu, a)+1$。现在，我们可以完全采用定理 5.8 证明中的相同论证，得出 $d_G(v, w)=d_G(v, w)-2$，从而得到所需的矛盾。因此，对于所有 v、w $\in$V，都有 $|I\mu, v, w)|=1$。于是， μ 是 G 的 medico 顶点，并且 G 是一个 k-中位图。 □

后面的结果对中位图有直接的影响。

定理 5.11。 对于任意图 *G*，以下陈述等价。

1. G 是中位图。*2. G* 关于其所有顶点都满足 *(C1)*。*3. G* 是连通二部图，且关于其所有顶点都满足 *(C0)* 和 *(C2)*。

证明。 (1) 与 (2) 的等价性由定理5.8 以及中位图中所有顶点都是 medico 顶点这一事实得出。类似地，定理 5.10给出了 (1) 与 (3) 的等价性。

□

我们与朋友兼同事 Wilfried Imrich 讨论了后面的结果，尤其是定理 5.11(2)。正如他指出的，条件 (C1) 中的导出子图 G[I_G(u,v, w)] 可以替换为“图的交”，从而得到中位图的另一种刻画。更准确地说，令 G(u,v) 为 G 的子图，其顶点集为 V (G(u, v)) $= I_G$(u, v)，且 E(G(u,v)) 恰由所有位于最短 (u, v)-路径上的边组成。此外，对于任意 u,v, w $\in$V (G)，令 G(u, v,w) $:=$ G(u,v) $\cap$G(u,w) $\cap$G(v, w)。容易验证，V (G(u,v,w)) $= I_G$(u, v,w)，且 G(u, v,w) $\subseteq$ G[I_G(u,v, w)]。图 2 展示了 G[I_G(u, v,w)] 与 G(u,v,w) 之间的区别。在此例中，对于图 G′，我们有 I $:=$ $I_{G'}$(a,b,c) $=$ {x,y}。导出子图 G′[I] $\simeq$ K_2 连通且非空，因为它由边 {x, y} 构成。相比之下，G′(a, b,c) 不连通，且仅由顶点 x 和 y 构成。基于这一思路，我们得到

定理5.12。 当且仅当对于所有 $u, v,w \in V(G)$，$G(u,v,w)$ 非空且连通时，G 是中位图。

Pro 对于。如果 $G = (V,E)$ 是一个中位图，那么 $V(G(u,v,w)) = I_G(u,v,w)$ 蕴含 $|V(G(u,v,w))| = 1$ and 因此，$G(u,v,w) \simeq K_1$ 对所有 $u,v,w \in V$。因此，$G(u,v,w)$ 非空且连通。

现在假设对于所有 u,v,w $\in$V (G)，G(u,v, w) 都非空且连通。由于 G[I_G(u,v,w)] 与 G(u,v, w) 具有相同的顶点集，且 G(u,v, w) $\subseteq$G[I_G(u,v, w)]，因此可知 G 满足关于其所有顶点的 (C1)。定理 5.11 表明 G 是一个中位图。 □

5.3 模图

为确保完整性，我们在此给出 Bandelt 等人针对模图这一特殊情形所确立的已知结果及其一些推论。

定理 5.13 ([5, 命题 5.5])。 模图 G 是一个以 μ_1、.. 、μ_k 为 *medico* 顶点的 k-中位图，当且仅当满足以下命题：若 u、v 是导出子图 $K_{2,3} \subseteq G$ 中度为三的顶点，则对所有 $\mu \in \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$，$u \in I_G(\mu, v)$ 或 $v \in I_G(\mu, u)$。

由于定理 5.13 对于$K^{2,3}$-无图总是成立，因此它意味着

推论 5.14。 每个模 $K^{2,3}$-*free* 图 G 都是一个 k-中位图，对所有$k \in \{1, \ldots, |V(G)|\}$。

此外，由于中位图是模图且不含$K^{2,3}$，因此

推论 5.15 ([29, 定理 3])：图 G 是中位图，当且仅当 G 是模图且不含 $K^{2,3}$-*free*。

作为推论 5.15 的一个直接结果，5.15，我们得到以下结构性结果，它部分回答了问题1中提出的问题。

推论 5.16。 任何不是中位图的模(*k*-中位) 图都必须包含一个导出 $K^{2,3}$。

并非所有 k-中位图都是模图。举例来说，Q_3^- 是一个 4-中位图，但不是模图。为说明这一点，考虑 x、y、z 这三个 Q_3^-（参见图 1（b））。容易验证$I(x,y,z) = \emptyset$ 必须成立。模的 1-中位图恰好是网格图。为证明这一点，我们首先注意到，在 [16] 中，弱模图被定义为满足所谓三角性质的网状图。二部图中显然满足这一三角性质。因此，在二部图中，网状图与弱模图这两个术语是等价的。基于此，我们可以将引理 2.8 在 [16]（另见 [5, 命题 1。7]）改写为

引理 5.17. 图 G 是模图，当且仅当 G 是连通、二部且网状的。

推论 5.18。 设 G 是一个 k-中位图。那么，G 是模的当且仅当 G 是网状的。

证明。 如果 G 是模的，则引理 5.17表明 G 是网状的。反之，设 G 是网状的。由于 G 是一个 k-中位图，所以它必定是连通的。此外，命题 4.2 表明G 是二部的。根据引理 5.17，G 是模的。 □

现在我们对问题3作出部分回答。

命题 5.19. 模 k-中位数图的每个凸子图都是1-中位图。

证明。设 $G = (V,E)$ 是一个模 k-中位图，μ 是 G 的一个 medico 顶点，且 H 是 G的一个凸子图。首先假设 $\mu \in V(H)$。由于 H 是凸的，H 是 μ-凸的。由命题 5.3，μ 是 H中的一个 medico 顶点。因此，H 是一个 1-中位图。

现在假设对于 G 的任意 medico 顶点 μ，$\mu \notin V(H)$。设 $v \in V(H)$ 是 H 中距离 μ 最近的顶点，并任意选取 $x, y \in V(H)$。由于 G 是模图，我们有 $I_G(v, x, y) \neq \emptyset$。设 P 是 H 中一条最短的 (v, x)-路径（因此也是 G 中的最短路径）。设 $w \neq v$ 是 P 上的一个顶点。若 $d_G(\mu, w) + d_G(w, v) = d_G(\mu, v)$，则 w 到 μ 的距离会比 v 更近。因此，必有 $d_G(\mu, w) + d_G(w, v) > d_G(\mu, v)$，所以对于每个 $w \in V(P) \setminus \{v\}$ 以及每条最短的 (v, x)-路径 P，都有 $w \notin I_G(\mu, v)$。通过类似的论证，最短的 (v, y)-路径上的顶点中，除顶点 v 外，没有顶点属于 $I_G(\mu, v)$。因此，$I_G(\mu, v) \cap I_G(v, x) = I_G(\mu, v) \cap I_G(v, y) = \{v\}$。由于 G 是 k-中位图，定理 5.10 蕴含 G 关于 μ 满足 (C0)。综合前两条论证可得，$v \in I_G(\mu, x) \cap I_G(\mu, y)$。引理 2.2 蕴含 $I_G(v, x) \subseteq I_G(\mu, x)$，且 $I_G(v, y) \subseteq I_G(\mu, y)$。因此，$I_G(v, x, y) \subseteq I_G(\mu, x, y)$。由于 μ 是一个 medico 顶点，$I_G(\mu, x, y) = \{z\}$，其中某个 $z \in V$。结合前两条论证以及 $I_G(v, x, y) \neq \emptyset$ 这一事实，可得 $I_G(v, x, y) = \{z\}$。由于 z 位于 G 中一条最短的 (x, y)-路径上，且 H 是凸的，因此 $z \in V(H)$。由于上述论证对所有 $x, y \in V(H)$ 均成立，即对所有 $x, y \in V(H)$，都有 $\mathrm{med}_G(v, x, y) = \mathrm{med}_H(v, x, y)$，因此 H 是一个以 v 为 medico 顶点的 1-中位图。

□

请注意，k-中位图 G 的凸子图中的 medico 顶点不一定是 G的 medico 顶点。举例来说，图 $K^{2,3}$ 的每个导出子图 G_4（见图2）都是凸的，同时也是一个 2-中位图。然而，这些 $K^{2,3}$中没有任何一个 medico 顶点是G_4的 medico 顶点。

6 总结与展望

在本文中，我们将k-中位图视为中位图的一种自然推广。我们基于凸性的一种推广（ν-凸性）以及三个简单条件 (C0)、(C1) 和 (C2)，给出了k-中位图的若干种刻画。这些结果进而根据由三个顶点及其间相应的最短路径和区间构成的子图结构，推导出中位图的若干种新刻画。我们还在 GitHub [23] 提供了一个用 Python 编写的简单工具，可用于验证给定的图是否为k-中位图；若是，则计算满足条件的最大整数k。

在过去几十年中，已有数十种关于中位图的有趣刻画被建立起来，相关综述请参见 [29]。进一步深入了解其他刻画和结果与k-中位图结构之间的联系，将很有意义。特别是，我们希望更深入地理解$K^{2,3}$-自由k-中位图与超立方体和中位图结构之间的联系（参见问题 2）。此外，每个不是中位图的k-中位图是否都包含一个导出的$K^{2,3}$ 或Q_3^-（问题 1）？k-中位图的凸子图是否为 1-中位图（问题3）？

此外，k-中位图中的距离-ℓ-静态四元组（x,z,y μ）可以确定由C_4构成的导出图，其中x,z,y以及另一个顶点u 比相应的 medico 顶点 μ更近。也就是说，反复应用距离-ℓ-静态四元组来重构C_4，必然会在某个阶段终止，并为导出C_4提供有价值的信息。这引出了一个问题：能在多大程度上根据沿大等距圈的距离-ℓ-静态四元组重构 k-中位图？更进一步，哪类 k-中位图可以由大等距圈及其产生的距离-ℓ-静态四元组唯一确定?

Martyn Mulder [31, 33] 提出的或许是最重要的刻画：每个中位图都可以通过所谓的凸扩张过程，从单顶点图K_1 构造得到。虽然证明k-中位图在凸扩张过程下封闭或许相对容易，但每个k-中位图是否都能通过对某一特定起始图集合应用凸扩张而构造得到，仍是一个悬而未决的问题。此外，k-中位图与中位图的其他推广或子类有何关联？参见例如 [6, 10–13, 28, 30, 37]。

迄今为止，我们讨论了k中位图，但没有对整数k作出额外假设。未来研究可以探讨固定k时真 k中位图的结构。此外，要使某些图修改操作（例如删边、加边或边收缩）保留图为k中位图这一性质，需要满足哪些条件?

致谢

我们谨向 Carmen Bruckmann、Peter F. Stadler、Wilfried Imrich 和 Sandi Klavˇzar 致谢，感谢他们围绕这一主题展开的精彩讨论并提出的宝贵意见。定理 5.12 的思路源自 Wilfried Imrich。本研究部分由 Knut and Alice Wallenberg Foundation 资助的 Data-driven Life Science (DDLS) program 支持。

参考文献

[1] Avann SP（1961）度量三元分配半格。美国数学会会刊 12：407–414，DOI 10.2307/2034206 [2] Bandelt HJ，Barth´el´emy JP（1984）中位图中的中位数。离散应用数学 8：131–142，DOI 10.1016/0166-218X(84)90096-9[3] Bandelt HJ，Chepoi V（2008）度量图论与几何：综述。载于：离散与计算几何综述，当代数学，第453卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，第49–86页，DOI 10.1090/conm/453/08795[4] Bandelt HJ，Hedl´ıkov´a J（1983）中位代数。离散数学 45(1)：1–30，DOI 10.1016/ 0012-365X(83)90173-5[5] Bandelt HJ，van de Vel M，Verheul E（1993）模区间空间。数学新闻 163(1)：177–201，DOI https://doi.org/10.1002/mana.19931630117[6] Bandelt HJ，Mulder HM，Wilkeit E（1994）准中位图与代数。图论杂志 18(7)：681–703，DOI https://doi.org/10.1002/jgt.3190180705[7] Birkhoff G，Kiss SA（1947）分配格上的一个三元运算。美国数学会通报 53：749–752，DOI 10.1090/S0002-9904-1947-08864-9[8] B¨ocker S，Dress AWM（1998）从符号超度量中恢复符号标记日期的有根树。数学进展 138：105–125，DOI 10.1006/aima.1998.1743[9] Breˇsar B（2002）图的自然印记函数。欧洲组合学杂志 23(2)：149–161，DOI https://doi.org/10.1006/eujc.2001.0555[10]Breˇsar B（2007）近中位图的刻画。欧洲组合学杂志 28(3)：916–920，DOI https://doi.org/10.1016/j.ejc.2005.10.009[11] Breˇsar B，Klavˇzar S（2007）中位图的极大真子图。离散数学 307(11)：1389–1394，DOI https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.11.076，第四届卡拉科夫图论会议 ˇ[12] Breˇsar B，Imrich W，Klavˇzar S，Mulder HM，Skrekovski R（2002）铺砌部分立方体。图论杂志 40(2)：91–103，DOI https://doi.org/10.1002/jgt.10031 ˇ[13] Breˇsar B，Klavˇzar S，Skrekovski R（2003）准中位图、其推广以及树状等式。欧洲组合学杂志 24(5)：557–572，DOI https://doi.org/10.1016/ S0195-6698(03)00045-3[14] Bruckmann C，Stadler PF，Hellmuth M（2022）从模分解树到有根中位图。离散应用数学 310：1–9，DOI https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.12.017[15] Buneman P（1971）从差异度量中恢复树。载于：Hodson F，Kendall D，Tautu P（编）考古与历史科学中的数学，爱丁堡大学出版社，爱丁堡，第387–395页[16] Chalopin J，Chepoi V，Hirai H，Osajda D（2020）弱模图与非正曲率，第268卷（1309）。美国数学会，DOI 10.1090/memo/1309，URL https://hal. science/hal-01787197

[17]Chepoi V (2000) 某些CAT(0)复形的图。应用数学进展 24(2):125–179，DOI 10.1006/aama.1999.0677[18] Corneil DG, Lerchs H, Steward Burlingham L (1981) 补图可约图。离散与应用数学 3:163–174，DOI 10.1016/0166-218X(81)90013-5[19] Day WHE, McMorris FR (2003) 群体选择与生物信息学中的公理化共识理论。工业与应用数学学会，罗得岛州普罗维登斯，DOI 10.1137/1.9780898717501[20] Dress A, Hendy M, Huber K, Moulton V (1997) Buneman图的顶点数与边数。组合学年刊 1(1):329–337，DOI 10.1007/BF02558484[21] Dress A, Huber K, Moulton V (1997) Buneman主题的若干变体。组合学年刊 1:339–352，DOI 10.1007/BF02558485[22] Engelfriet J, Harju T, Proskurowski A, Rozenberg G (1996) 一致非本原标记2-结构的刻画与复杂性。理论计算机科学 154:247–282，DOI 10.1016/ 0304-3975(94)00272-X[23] Hellmuth M (2023) https://github.com/marc-hellmuth/K-Median-Graph（访问日期：2023年4月11日）[24] Hellmuth M, Wieseke N (2018) 关系与图的树表示：符号超度量与余图边分解。组合优化杂志 36:591–616，DOI 10.1007/s10878-017-0111-7[25] Hellmuth M, Hernandez-Rosales M, Huber KT, Moulton V, Stadler PF, Wieseke N (2013) 直系同源关系、符号超度量与余图。数学生物学杂志 66:399–420，DOI 10.1007/s00285-012-0525-x[26] Hellmuth M, Stadler PF, Wieseke N (2017) 异源关系的数学：有向余图、符号超度量、2-结构与可由树表示的二元关系系统。数学生物学杂志 75:199–237，DOI 10.1007/s00285-016-1084-3[27] Hellmuth M, Huber KT, Moulton V, Scholz GE, Stadler PF (2023) 单射分裂系统。图与组合，施普林格，DOI arxiv:2211.04322，（即将出版）[28] Imrich W, Klavˇzar S (1998) 二部图的凸性引理与扩张过程。欧洲组合学杂志 19(6):677–685，DOI https://doi.org/10.1006/eujc.1998.0229[29] Klavˇzar S, Mulder HM (1999) 中位图：刻画、定位理论及相关结构。组合数学与组合计算杂志 30:103–128[30] Klavˇzar S, Shpectorov S (2012) 近中位图的刻画 II。离散数学 312(2):462–464，DOI https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.09.008[31] Mulder HM (1980) 图的区间函数。数学中心论丛 132，荷兰数学与计算机科学中心，阿姆斯特丹[32] Mulder HM (1999) 度量图论：中位图的情形。载于：Balakrishnan R, Mulder A H M Vijayakumar（编）《图连接会议论文集》，Allied Publishers Ltd.，孟买，第19–32页[33]Mulder M (1978) 中位图的结构。离散数学 24:197–204，DOI 10.1016/ 0012-365X(78)90199-1[34] Nebesk´y L (1971) 中位图。卡罗来纳大学数学通讯 12:317–325[35] Ovchinnikov S (2011) 图与超立方体。施普林格科学与商业媒体，施普林格，纽约，多德雷赫特，海德堡，伦敦，DOI 10.1007/978-1-4614-0797-3[36] Parson W, D¨ur A (2007) EMPOP——法医线粒体DNA数据库。国际法医学：遗传学 1(2):88–92，DOI 10.1016/j.fsigen.2007.01.018[37] Seemann CR, Moulton V, Stadler PF, Hellmuth M (2023) 平面中位图与立方方格图。离散应用数学 331:38–58，DOI https://doi.org/10.1016/j.dam.2023.01.022