arXiv:2304.06463v1 [math.FA] 13 Apr 2023

# 欧几里得空间中拓扑度简介

Pierluigi Benevieri[1],Massimo Furi[2], Maria Patrizia Pera[3], 和 Marco Spadini[4]

[1]圣保罗大学数学与统计研究所，巴西[2,3,4]意大利佛罗伦萨大学“乌利塞·迪尼”数学与计算机科学系

## 1 引言

本文旨在对欧几里得空间中的拓扑度理论作一番细致而自成体系的介绍。本文主要面向对分析学感兴趣的读者，一般而言，无需具备深厚的代数拓扑或微分拓扑背景。

粗略地说，我们构造拓扑度的方法可概括为几个步骤。首先，我们针对正则三元组 这一特殊情形定义度，即对于三元组 $(f, U, y)$，其中 $f$是一个取值于 $\mathbb{R}^k$的光滑函数，至少定义在开集 $U \subseteq \mathbb{R}^k$ 的闭包$\overline{U}$ 上，且在$\overline{U}$上适当，而 $y \in \mathbb{R}^k$是 $f$在 $U$中的正则值。然后，我们进一步定义一般情形下可容许三元组的度，此时假设 $f$ 仅连续且在 $\overline{U}$ 上适当，而 $y$ 是 $\mathbb{R}^k \setminus f(\partial U)$ 中的任意一点。最后，我们考虑所谓的弱可容许三元组扩展情形，即 $f$ 至少定义在 $U$ 上（且连续），并且 $y \in \mathbb{R}^k$ 满足 $f^{-1}(y) \cap U$ 是紧的。

我们的方法强调拓扑度的三项基本性质的重要性：归一化、可加性和同伦不变性（见下文）。事实上，这些性质以唯一的方式确定了度的概念，并给出一个适用于可容许三元组（$f$、$U$、$y$）的度的计算公式，其中 $f$ 在任意 $x \in f^{-1}(y)$ 中都是 Fréchet 可微的。这提供了一种替代方法。

本文的组织结构如下：第 2 节汇集后续各节所需的一些结果和概念。第 3 节定义正则三元组和可容许三元组的度，并探讨上述三条基本性质的主要推论。第 4 节专门讨论弱可容许三元组的度，而第 5 节则给出正则三元组的同伦不变性性质的（冗长）证明。

谨慎提示：除非另有说明，本文讨论的所有映射都是连续的。我们还回顾一下：如果定义在任意子集 $X$ of $\mathbb{R}^k$ 上的函数可延拓为 $C^\infty$（分别为 $C^r$）函数，且延拓到 $X$的某个开邻域上，则称该函数为 $C^\infty$ （分别为具有 $1 \le r < \infty$的 $C^r$ ）。

# 2 预备知识

设 $f\colon U \to \mathbb{R}^s$ 是定义在 $\mathbb{R}^k$的一个开子集上的 $C^1$ 映射。若元素$x \in U$的 Fréchet 导数 $f'(x) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^s)$不是满射，则称其为临界点（属于 $f$）；否则，$x$ 是一个正则点。若元素 $y \in \mathbb{R}^s$ 是临界值，则 $f^{-1}(y)$中包含临界点；否则，$y$ 是一个正则值。

为避免混淆，点位于源空间，值位于目标空间。

注意，如果 $k < s$，那么任何 $x \in U$ 都是临界点。因此，$f(U)$ 与 $f$ 的临界值集重合。

一个非常重要的特殊情形是 $k = s$。在此语境下，当且仅当 $f$ 在 $x$处的雅可比矩阵 $\det(f'(x))$ 非零时，$x \in U$ 是（$f$ 的）正则点。当这一条件成立时，$\det(f'(x))$ 的符号称为 的指标 $f$ 在 $x$，记作 $\mathrm{i}(f, x)$。实际上，即使 $f$ 仅仅是连续的，只要它在 $x$ 处 Fréchet 可微且导数可逆，指标 $\mathrm{i}(f, x)$ 仍定义为 $\mathrm{sign}(\det(f'(x)))$。

**练习 2.1.** 设 $p$ 是一个复多项式，并将 $p$ 视为从 $\mathbb{R}^2$ 到自身的映射。证明 $z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 是 $p$ 的临界点，当且仅当它是多项式 $p'$ 的根。证明，对于任意正则点 $z \in \mathbb{C}$，有 $\mathrm{i}(p, z) = 1$。

以下结果对度理论至关重要。（例如参见 [14]或 [10]。）

**萨德引理。** 设 $f\colon U \to \mathbb{R}^s$ 是定义在$\mathbb{R}^k$的一个开子集上的 $C^n$ 映射。若 $n > \max\{0, k-s\}$，则 $f$的临界值集合的（$s$维）勒贝格测度为零。特别地，$f$ 的正则值集合在$\mathbb{R}^s$中稠密。

注意，根据萨德引理，$C^1$ 曲线 $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^s$, $s > 1$不可能是佩亚诺曲线（即像包含内点的曲线）。

**定义 2.2。** 若度量空间之间的映射 $f\colon X \to Y$ 满足：只要 $K \subseteq Y$是紧集，$f^{-1}(K)$ 就是紧集，则称该映射为适当的 。

显然，若 $X$ 是紧的，则 $f$ 是适当的（假设任意映射都是连续的）。

**习题 2.3。** 证明：若 $f\colon X \to Y$ 是适当的，则它是闭映射（也就是说，当 $A \subseteq X$ 是闭集时，$f(A)$ 是闭集）。

**练习 2.4。** 设 $X \subseteq \mathbb{R}^k$ 是闭且无界的。证明，映射 $f\colon X \to \mathbb{R}^s$ 是适当的，当且仅当

$$\lim_{x \in X,\, |x| \to +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

**例 2.5。** 设 $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个非常数复多项式。则 $\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$. 因此，$p$ 是一个真映射。

接下来我们需要用更正则的函数来逼近连续函数。为此，我们将使用以下逼近定理

**光滑逼近定理。** 设 $U \subseteq \mathbb{R}^k$ 为开集，并设 $f$ 是定义在 $\mathbb{R}^k$中 $U$ 的闭包 $\overline{U}$ 上的一个取值于 $\mathbb{R}^s$的（连续）函数。那么，给定

连续函数 $\varepsilon$： $\overline{U} \to (0, \infty)$，存在一个 $C^\infty$ 函数 $g$： $\overline{U} \to \mathbb{R}^s$，使得对于任意 $x \in \overline{U}$， $|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x)$。

这个事实可以直接证明。然而，由于定义在 $\mathbb{R}^k$ 的闭子集上的任意连续函数，只要其值属于 $\mathbb{R}^s$，都可以延拓为定义在 $\mathbb{R}^k$ 上的连续函数（这是著名的Tietze延拓定理的推论，参见例如 [5]），因此，刚才陈述的逼近结果可以从一些更为人熟知的、适用于定义在开集上的映射的定理推导出来，参见例如 [8]。

# 3 欧几里得空间中的布劳威尔度

## 3.1 特殊情形

设 $U$ 是 $\mathbb{R}^k$的一个开子集， $f$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^k$、至少定义在 $U$的闭包 $\overline{U}$ 上的映射，并且 $y \in \mathbb{R}^k$。

**定义 3.1**。若三元组 $(f, U, y)$ 满足： $f$在 $\overline{U}$上是适当的，且 $f(x) \neq y, \forall x \in \partial U$，则称其为可容许的（关于 $\mathbb{R}^k$中的布劳威尔度）。

注意，根据习题 2.3， $f(\partial U)$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的闭子集。

**定义 3.2**。如果 $f$ 是 $C^\infty$，且 $y$ 是 $f$ 在 $U$ 中的正则值，则称可容许三元组 $(f, U, y)$ 为正则。

我们指出，如果 $(f, U, y)$ 是一个正则三元组，那么集合 $f^{-1}(y) \cap U$ 是有限的。事实上， $f^{-1}(y) \cap \overline{U}$ 是紧的（$f$ 在 $\overline{U}$ 上是适当的），它包含于 $U$ 中（因为 $y \notin f(\partial U)$），并且是离散的（由反函数定理可知）。这就为正则三元组这一特殊情形下的度的定义提供了依据。

**定义3.3**。正则三元组$(f, U, y)$的布劳威尔度 是整数

$$\deg(f, U, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} \mathrm{i}(f, x) \tag{3.1}$$

从某种意义上说，正则三元组 $(f, U, y)$ 的布劳威尔度是方程 $f(x) = y$ 在 $U$ 中解的个数的代数计数。正如我们将看到的，这个整数只取决于包含正则值 $y$ 的 $\mathbb{R}^k \setminus f(\partial U)$ 的连通分支。解的绝对计数（即集合 $f^{-1}(y)$ 的基数 $\#f^{-1}(y)$）则并非如此，例如真映射 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其定义为 $f(x) = x^2$，便是如此。顺便指出，在这种情况下，对于任意正则值 $y \in \mathbb{R}$（即任意 $y \neq 0$），都有 $\deg(f, \mathbb{R}, y) = 0$。

注意，记号 $\deg(f, U, y)$ 并非冗余，因为 $\overline{U}$ 可以严格包含于 $f$ 的定义域中，而 $f$ 与 $f$ 唯一对应。例如，若 $\deg(f, U, y)$ 有定义，且 $V$ 是 $U$ 的一个开子集，使得 $f^{-1}(y) \cap \partial V = \emptyset$，那么 $\deg(f, V, y)$ 也有定义（并且只取决于 $f$ 在 $V$ 上的限制映射）。

还要注意，$(f, U, y)$ 是正则三元组，当且仅当 $(f - y, U, 0)$ 也是正则三元组，其中 $f - y$ 表示映射 $x \mapsto f(x) - y$。显然，在这种情况下，有

$$\deg(f, U, y) = \deg(f - y, U, 0).$$

**例 3.4.** 给定一个正整数 $n$，令 $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为由 $p_n(z) = z^n$定义的映射。将 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^2$等同后， $0 \in \mathbb{C}$ 是$p_n$ 的唯一临界点（见练习 2.1）。因此， $0 = p_n(0)$ 是唯一的临界值。又因为 $p_n$是一个真映射（见练习 2.4），所以对任意 $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 度 $\deg(p_n, \mathbb{C}, w)$ 都有定义。由于任意 $w \neq 0$ 恰有 $n$ 个不同的$n$-根，练习 2.1 表明，对所有 $w \neq 0$, $\deg(p_n, \mathbb{C}, w) = n$。因此，很自然地将函数 $w \mapsto \deg(p_n, \mathbb{C}, w)$ 扩展为：即使对 $w = 0$，也令 $\deg(p_n, \mathbb{C}, w) = n$ （这将是度的一般定义的推论）。

下面的定理 3.6 汇总了正则三元组的度的三个基本性质。前两个性质，即归一化和可加性，是定义的直接推论；第三个性质，即同伦不变性，对于一般情形下度的构造至关重要，并非显而易见（为了满足急于求知的读者），本章附录将给出证明。稍后我们将看到，满足这三个基本性质的整数值函数（定义在所有正则三元组的集合上）至多只有一个。

为了简化定理 3.6 的表述，引入以下概念会比较方便。

定义 3.5。设 $U$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的一个开子集， $H$ 是一个至少定义在 $\overline{U} \times [0,1]$ 上的 $\mathbb{R}^k$ 值映射，且 $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^k$ 是一条路径。称三元组 $(H, U, \alpha)$ 为（三元组的）同伦（在 $U$ 上），它连接 $(H(\cdot, 0), U, \alpha(0))$ 与 $(H(\cdot, 1), U, \alpha(1))$。此外，若 $H$ 在 $\overline{U} \times [0,1]$ 上是适当的，并且对于所有 $(x, \lambda) \in \partial U \times [0,1]$, 都有 $H(x, \lambda) \neq \alpha(\lambda)$, 则称 $(H, U, \alpha)$ 为可容许同伦（即三元组的可容许同伦）。若 $H$ 和 $\alpha$ 都是光滑映射，则称 $(H, U, \alpha)$ 为光滑的。

**定理 3.6.** 正则三元组的度满足以下三个基本性质：

(Normalization) $\deg(I, \mathbb{R}^k, 0) = 1$, *where $I$ denotes the identity on $\mathbb{R}^k$;*

(可加性) 如果$(f, U, y)$ 是正则的，并且 $U_1$和 $U_2$是 $U$ 的两个不相交开子集，使得 $f^{-1}(y) \cap U \subseteq U_1 \cup U_2$，那么

$$\deg(f, U, y) = \deg(f, U_1, y) + \deg(f, U_2, y);$$

(同伦不变性) 若$(H, U, \alpha)$ 是连接两个正则三元组的光滑可容许同伦，则

$$\deg(H(\cdot, 0), U, \alpha(0)) = \deg(H(\cdot, 1), U, \alpha(1)).$$

## 3.2 一般情形

Brouwer度最初为正则三元组定义，现可扩展到更大的可容许三元组类；我们回顾一下，三元组（$f$、$U$、 $y$）是可容许的（对于欧几里得空间中的度），当且仅当 $U$ 是 $\mathbb{R}^k$的开子集， $f$ 是一个 $\mathbb{R}^k$值映射，并且在 $\overline{U}$上是适当的，且 $y \in \mathbb{R}^k$ 不属于 $f(\partial U)$这一（可能为空的）集合。

从正则情形到可容许情形的过渡，可以一步完成，也可以像通常那样分成两个小步骤（涉及 $f$光滑的可容许三元组 $(f, U, y)$ 的中间阶段）。我们将只用一步达到目标，但在

这样一来，只对光滑情形感兴趣的读者便能轻松设想如何迈出第一小步：去掉三元组 $(f, U, y)$ 中的值 $y$ 是正则值这一假设。

在给出一般情形下度的定义之前，我们需要一些预备知识。

设 $f$ 和 $g$ 是定义在 $\mathbb{R}^k$ 的子集 $X$ 上（至少在该子集上有定义）的两个取值于 $\mathbb{R}^s$ 的映射。给定 $\epsilon > 0$，如果 $f$ 是 $\epsilon$-近于 $g$ 在 $X$ 中，即对任意 $|f$，都有 $x - g(x)| \leq \epsilon$，$\forall x \in X$，我们就称之为如此。此外，给定 $y, z \in \mathbb{R}^s$, $y$ 是 $\epsilon$-近于 $z$，条件是 $|y - z| \leq \epsilon$。

注意，如果 $(f, U, y)$ 是一个可容许三元组，且对于某个 $\epsilon > 0$，$g$ 在 $\overline{U}$ 中是 $\epsilon$-近于 $f$ 的，那么 $g$ 在 $\overline{U}$ 上是适当的（见练习 2.4）。此外，如果 $\epsilon < \text{dist}(y, f(\partial U))$,[1]，那么 $y \notin g(\partial U)$，此时三元组 $(g, U, y)$ 也可容许。更一般地，如果 $z \in \mathbb{R}^k$ 是 $\sigma$-近于 $y$ 的，且 $\epsilon + \sigma < \text{dist}(y, f(\partial U))$，那么 $(g, U, z)$ 也可容许。

**定义 3.7**。可容许三元组 $(f, U, y)$ 的度（也称为 $f$ 在 $U$ 处 $y$的度）是整数

$$\deg(f, U, y) := \deg(g, U, z),$$

其中 $(g, U, z)$ 是任意满足以下性质的正则三元组：

1. $g$ 与 $f$ 的距离不超过 $\epsilon$;
2. $z$ 与 $y$ 的距离不超过 $\sigma$;
3. $\epsilon + \sigma < \text{dist}(y, f(\partial U))$。

显然，给定可容许三元组 $(f, U, y)$，由光滑逼近定理（它保证 $g$ 的存在）和萨德引理（它保证 $z$ 的存在），可确保存在定义 3.7 中所述的正则三元组 $(g, U, z)$。

定理 3.6 的以下推论保证该定义实际上是良定义的。

**推论 3.8**。设 $(f,\ U,\ y)$ 是一个可容许三元组。那么，

$$\deg(g_0, U, z_0) = \deg(g_1, U, z_1)$$

对于满足以下条件的任意一对正则三元组$(g_0, U, z_0)$ 和$(g_1, U, z_1)$：

1. $g_0$ 和 $g_1$ 与 $f$的距离小于 $\epsilon$;
2. $z_0$ 和 $z_1$ 与 $y$的距离小于 $\sigma$;
3. $\epsilon + \sigma <$距离$(y, f(\partial U))$。

证明。设$(g_0, U, z_0)$和$(g_1, U, z_1)$如陈述所示，并定义连接$(g_0, U, z_0)$与$(g_1, U, z_1)$的光滑三元组同伦$(H, U, \alpha)$如下：

$$H(x, \lambda) = (1 - \lambda)g_0(x) + \lambda g_1(x), \quad \alpha(\lambda) = (1 - \lambda)z_0 + \lambda z_1.$$

我们有

$$H(x, \lambda) - f(x) = (1 - \lambda)(g_0(x) - f(x)) + \lambda(g_1(x) - f(x)).$$

[1]回顾约定 $\inf \emptyset = +\infty$，这意味着距离$(y, \emptyset) = +\infty$

因此，

$$|H(x,\lambda)-f(x)|\le\epsilon,\quad \forall(x,\lambda)\in\overline{U}\times[0,1],$$

根据练习 2.4，这意味着 $H$ 在 $\overline{U}$上是适当的。类似地，

$$|\alpha(\lambda)-y|\le\sigma,\quad \forall\lambda\in[0,1].$$

我们来证明

$$H(x,\lambda)\ne\alpha(\lambda),\quad \forall(x,\lambda)\in\partial U\times[0,1].$$

事实上，给定 $(x,\lambda)\in\partial U\times[0,1]$，我们有

$$H(x,\lambda)-\alpha(\lambda)=H(x,\lambda)-f(x)+f(x)-y+y-\alpha(\lambda)$$

因此，

$$|H(x,\lambda)-\alpha(\lambda)|\ge|f(x)-y|-\epsilon-\sigma>0.$$

现在，正则三元组的同伦不变性（见定理 3.6）即可推出该断言。

□

以下重要结果是一般情形下定理 3.6 的推广、推论和类比结果。

**定理 3.9**。 *Brouwer*度在 $\mathbb{R}^k$ 中满足以下三个基本性质：

(Normalization) $\deg(I,\mathbb{R}^k,0)=1$, *where* $I$ *denotes the identity on* $\mathbb{R}^k$;

(可加性) 如果$(f,U,y)$是可容许的，并且 $U_1$和 $U_2$是 $U$的两个不相交开子集，使得 $f^{-1}(y)\cap U\subseteq U_1\cup U_2$，那么

$$\deg(f,U,y)=\deg(f,U_1,y)+\deg(f,U_2,y);$$

(同伦不变性) 若 $(H,U,\alpha)$是一个可容许同伦，则

$$\deg(H(\cdot,0),U,\alpha(0))=\deg(H(\cdot,1),U,\alpha(1)).$$

证明。只需证明最后两个性质。

（可加性）由于 $f$ 在 $\overline{U}$ 上适当， $\mathbb{R}^k$ 的子集 $C=f(\overline{U}\setminus(U_1\cup U_2))$ 是闭集。此外，假设 $f^{-1}(y)\cap U\subseteq U_1\cup U_2$ 蕴含 $\operatorname{dist}(y,C)>0$。设 $g$ 是任意一个与 $f$ $\epsilon$- 接近的光滑映射，且 $\epsilon<\operatorname{dist}(y,C)$。容易验证 $g^{-1}(y)\cap U\subseteq U_1\cup U_2$。现在由定义 3.7 以及正则三元组的度的可加性（见定理 3.6）即可得出所述结论。

（同伦不变性）注意，根据练习 2.4，映射

$$(x,\lambda)\mapsto H(x,\lambda)-\alpha(\lambda)$$

在 $\overline{U}\times[0,1]$上是适当的。因此，该映射下集合 $\partial U\times[0,1]$的像在 $\mathbb{R}^k$中是闭集。于是，由于该集合不包含 $\mathbb{R}^k$的原点，扩展实数

$$\delta:=\inf\Big\{|H(x,\lambda)-\alpha(\lambda)|:(x,\lambda)\in\partial U\times(0,1)\Big\}$$

不为零。设 $(G,U,\beta)$是任意一个光滑的三元组的同伦，连接两个正则三元组，并满足以下性质：

1. $G$ 在 $\overline{U} \times [0,1]$上与 $H$ 的距离小于 $\epsilon$;
2. $\beta$ 在 $[0,1]$上与 $\alpha$ $\sigma$接近;
3. $\epsilon + \sigma < \delta$.

光滑逼近定理和萨德引理保证了这样一个三元组的存在性。与推论 3.8的证明一样，可以证明$(G, U, \beta)$ 是一个可容许同伦。因此，由于正则三元组的同伦不变性，我们得到

$$\deg(G(\cdot,0), U, \beta(0)) = \deg(G(\cdot,1), U, \beta(1)).$$

该断言现在由定义 3.7 得出。 □

## 3.3 基本性质的直接推论

现在我们将证明布劳威尔度的一些重要附加性质。尽管这些性质可以很容易地从度的定义中推导出来，但我们更愿意从定理 3.9 中陈述的三条基本性质出发来证明它们：归一化、可加性和同伦不变性。这种方法的优点将在下一小节中显现，该小节专门讨论公理化方法。

首先注意，给定定义在 $\mathbb{R}^k$ 的子集 $X$ 上的映射 $f\colon X \to \mathbb{R}^k$，并给定 $y \in \mathbb{R}^k$，三元组 $(f, \emptyset, y)$ 是可容许的。因此，$\deg(f, \emptyset, y)$ 有定义。我们断言这个度为零。

事实上，根据可加性，将 $U = \emptyset$、$U_1 = \emptyset$ 和 $U_2 = \emptyset$ 代入，可得

$$\deg(f, \emptyset, y) = \deg(f, \emptyset, y) + \deg(f, \emptyset, y),$$

这就推出了我们的断言。

下面的性质在正则情形下显而易见，它表明，可容许三元组 $(f, U, y)$ 的度仅取决于 $f$ 在方程 $f(x) = y$，$x \in U$ 的解集任意邻域内的行为。

**定理 3.10** (切除性质)。若$(f, U, y)$是可容许的，且 $V$是 $U$的一个开子集，使得 $f^{-1}(y) \cap U \subseteq V$，那么$(f, V, y)$是可容许的，并且

$$\deg(f, U, y) = \deg(f, V, y).$$

证明。 $(f, V, y)$的可容许性显然。要证明等式，应用可加性性质，其中取 $U_1 = V$ 和 $U_2 = \emptyset$。 □

与上述性质一样，下面这个性质在正则情形下也显而易见。

**定理 3.11** (存在性性质)。若$\deg(f, U, y) \neq 0$，则方程$f(x) = y$在 $U$中至少有一个解。

证明。 假设 $f^{-1}(y) \cap U$ 为空集。根据切除性质，取$V = \emptyset$，得到

$$\deg(f, U, y) = \deg(f, \emptyset, y) = 0,$$

这是矛盾的。 □

给定一个可容许三元组 $(f,U,y)$，由于 $f$ 的目标空间是 $\mathbb{R}^k$，方程 $f(x)=y$ 等价于 $f(x)-y=0$。用度来表述这一事实，就是下面的性质，该性质在正则情形下显而易见。

**定理 3.12**（平移不变性）。若 $(f,U,y)$ 是可容许的，则 $(,,0)$ 也是可容许的，并且

$$\deg(f,U,y)=\deg(f-y,U,0).$$

证明。考虑以下方程族

$$f(x)-\lambda y=(1-\lambda)y,\quad \lambda\in[0,1],$$

并应用同伦不变性，取 $H(x,\lambda)=f(x)-\lambda y$ 和 $\alpha(\lambda)=(1-\lambda)y$。□

下一个结果是同伦不变性的一个直接推论，证明留给读者。

**定理 3.13**（连续依赖性）。设 $f$ 在开子集 $U$ 的闭包上是适当的，其中 $U$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的开子集。那么映射 $y\mapsto\deg(f,U,y)$ 定义在开集 $\mathbb{R}^k\setminus f(\partial U)$ 上，且局部为常值。因此，$\deg(f,U,y)$ 仅取决于包含 $y$ 的 $\mathbb{R}^k\setminus f(\partial U)$ 连通分支。

根据上述性质，给定开集 $U\subseteq\mathbb{R}^k$、$f$ 在 $\overline{U}$ 上适当，且 $\mathbb{R}^k\setminus f(\partial U)$ 的连通子集 $V$，我们将用记号 $\deg(f,U,V)$ 表示 $f$ 在 $U$ 中任意 $y\in V$ 处的度。特别地，若 $U=\mathbb{R}^k$，整数 $\deg(f,\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)$ 将记作 $\deg(f)$。

以下性质表明，给定 $y\in\mathbb{R}^k$ 和开且有界的 $U\subseteq\mathbb{R}^k$，映射 $f:\overline{U}\to\mathbb{R}^k$（在 $U$ 中于 $y$ 处）的度仅取决于 $f$ 在 $U$ 边界上的限制映射（假设条件 $y\notin f(\partial U)$ 成立；由于 $U$ 有界，这一条件足以定义度）。这一点很重要，因为在许多情况下，只需考察 $f$ 沿 $U$ 边界的表现，就能推导出方程 $f(x)=y$ 在 $U$ 中存在解；例如在 $U=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ 的情形下，条件 $f(a)f(b)<0$ 意味着 $f(x)=0$ 在 $(a,b)$ 中有解。

**定理 3.14 (边界依赖性).** 设 $U\subseteq\mathbb{R}^k$ 为开且有界的，并设 $f,g:\overline{U}\to\mathbb{R}^k$ 满足：对所有 $x\in\partial U$，$f(x)=g(x)$。那么，给定 $y\in\mathbb{R}^k\setminus f(\partial U)$，有

$$\deg(f,U,y)=\deg(g,U,y).$$

证明。该断言由如下定义的三元组 $(H,U,\alpha)$ 的同伦这一事实得出。

$$H(x,\lambda)=\lambda f(x)+(1-\lambda)g(x),\quad \alpha(\lambda)=y$$

是可容许的。□

我们指出，在上述结果中，不能去掉 $U$ 有界这一假设。为此，取 $U=(0,+\infty)$、$f(x)=x$、$g(x)=-x$、$y=1$。

## 3.4 公理化方法

从公理化的观点来看，拓扑度（在欧几里得空间中）是一个映射，它为任何可容许三元组（$f$、$U$、$y$）赋予一个整数，deg($f$、$U$、$y$)，并满足三个基本性质 （在定理 3.9中陈述）：归一化、可加性 和同伦不变性。

Amann-Weiss [1] （1973 年）的一项著名结果断言，拓扑度的唯一性。也就是说，在可容许三元组构成的类上定义的整数值映射中，至多存在一个满足三条基本性质的映射。

度的构造有多种方法（例如参见[2, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 15, 16]），然而，鉴于 Amann-Weiss 的结果，无论采用哪种方法，关键都是证明三条基本性质（在本小节中称为*Amann-Weiss* 公理）：正如我们在上一小节已经说明的那样，其他所有经典性质都将由此推出。

我们来说明，如何从三条 Amann-Weiss 公理推出一个显式公式，用于计算某类三元组的度；更确切地说，这类三元组在可容许三元组族中是稠密的。特别地，我们将证明，当一个可容许三元组（$f$， $U$， $y$）实际上是正则的时，

$$\deg(f, U, y) \;=\; \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} \mathrm{i}(f, x).$$

度的唯一性很容易由上述公式和同伦不变性性质推出（见下文定理 3.17）。

首先回顾，给定一个真映射 $f\colon\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$，deg($f$) 表示 deg($f, \mathbb{R}^k, y$)，其中 $y$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的任意值。这一记法由连续依赖性性质所支持；与上一小节中的其他性质一样，该性质也是公理的推论。注意，由于存在性性质，若 deg($f$) $\neq 0$，则 $f$ 是满射。我们还指出，作为同伦不变性公理的推论，若同伦 $H\colon\ \mathbb{R}^k \times [0,1] \to \mathbb{R}^k$ 是适当的，则 deg($H(\cdot, \lambda)$) 定义良好，且与 $\lambda$ 无关。

照例，令 L($\mathbb{R}^k$) 表示 $\mathbb{R}^k$ 的线性自同态所构成的赋范空间，并令 GL($\mathbb{R}^k$) 表示 L($\mathbb{R}^k$) 中由自同构组成的开子集；也就是说，

$$\mathrm{GL}(\mathbb{R}^k) = \Big\{ L \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^k) : \det(L) \neq 0 \Big\}.$$

现在，给定 $L \in$ 一般线性群($\mathbb{R}^k$)。由于 $L$ 可逆，它是从 $\mathbb{R}^k$到自身的真映射（注意，任何同胚都是真映射）。因此，deg($L$) 有定义。

下面证明 Amann-Weiss 公理蕴含

$$\deg(L) = \mathrm{sign}(\det(L)), \quad \forall L \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^k). \tag{3.2}$$

为此，我们回顾一下，L($\mathbb{R}^k$) 中的开子集 GL($\mathbb{R}^k$) 恰有两个连通分支。也就是说，

$$\mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^k) = \Big\{ L \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^k) : \det(L) > 0 \Big\}.$$

and

$$\mathrm{GL}_-(\mathbb{R}^k) = \Big\{ L \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^k) : \det(L) < 0 \Big\}.$$

由同伦不变性公理可知，将 $\deg(L)$ 赋给任意 $L \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^k)$ 的映射是局部常值的，这一点很容易验证。事实上，如果 $L_0$ 和 $L_1$ 彼此足够接近，则同伦 $H(x,\lambda) = L_0x + \lambda(L_1 - L_0)$ 是适当的。因此，$\deg(L)$ 只取决于 $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^k)$ 中包含 $L$ 的连通分支。

由于 $I$ of $\mathbb{R}^k$ 属于 $\mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^k)$，归一化公理蕴含 $\deg(L) = 1, \forall L \in \mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^k)$。

我们来证明 $\deg(L) = -1, \forall L \in \mathrm{GL}_-(\mathbb{R}^k)$。为此，考虑映射 $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$，其定义为

$$f(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k) = (\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, |\xi_k|).$$

此映射是适当的，因为 $\|f(x)\| = \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^k$。因此 $\deg(f)$ 有意义且为零，因为 $f$ 不是满射。

令 $V_-$ 和 $V_+$ 分别表示 $\mathbb{R}^k$中末坐标为负和为正的点所构成的开半空间。考虑以下两个解

$$x_- = (0, \dots, 0, -1) \quad \text{and} \quad x_+ = (0, \dots, 0, 1)$$

方程 $f(x) = y$的两个解，其中 $y = (0, \dots, 0, 1)$，并注意到 $x_- \in V_-, x_+ \in V_+$。

由可加性公理可得

$$0 = \deg(f) = \deg(f, V_-, y) + \deg(f, V_+, y).$$

现在注意，在 $V_+$ 中，映射 $f$ 与 $\mathbb{R}^k$ 的恒等映射 $I$ 重合。因此，根据切除性质，有

$$\deg(f, V_+, y) = \deg(I) = 1,$$

这意味着 $\deg(f, V_-, y) = -1$。

由于 $V_-$ 中的 $f$ 与由下式给出的线性映射 $L_- \in \mathrm{GL}_-(\mathbb{R}^k)$ 重合

$$(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, -\xi_k),$$

我们得到 $\deg(L_-) = -1$。因此，由于 $\mathrm{GL}_-(\mathbb{R}^k)$ 是连通的，最终可得，对于所有 $L \in \mathrm{GL}_-(\mathbb{R}^k)$，$\deg(L) = -1$，如所声称的。

下面说明如何从 Amann-Weiss 公理推导出计算正则三元组的度的公式 (3.1)。更一般地，我们证明以下结果。

**定理 3.15** (计算公式)。设 $(f, U, y)$ 是一个可容许三元组。假设对于任意 $x \in f^{-1}(y) \cap U$，$f$均为 *Fréchet* 可微且其导数非奇异。那么 $f^{-1}(y) \cap U$ 是有限的，并且

$$\deg(f, U, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} \mathrm{i}(f, x).$$

为了证明定理 3.15，我们需要以下结果。

**引理 3.16.** 设$(f, V, y_0)$ 是一个可容许三元组。假设方程$f(x) = y_0$ 有唯一解 $x_0 \in V$。如果 $f$ 在 $x_0$ 处 *Fréchet* 可微，且$f'(x_0)$ 可逆，那么$\deg(f, V, y) = \deg(f'(x_0))$。

证明。 由于 $f$ 在 $x_0$处可微，因此我们有

$$f(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + \|x - x_0\|\epsilon(x - x_0), \quad \forall x \in \overline{V},$$

其中， $\epsilon(h)$ 在 $h \in -x_0 + \overline{V}$ 上有定义，是连续的，并且满足 $\epsilon(0) = 0$。

注意， $f$ 在 $x_0$， $g$（$x$）：$= y_0 + f'$（$x_0$）（$x - x_0$）的线性化映射是一个仿射映射，其线性部分为 $f'$（$x_0$）$\in$ GL（$\mathbb{R}^k$）。因此， $g$ 是适当的，并且由平移不变性性质可知，deg（$g$）$=$ deg（$f'$（$x_0$））。因此，根据切除性质，只需证明大小规律。

$$\deg(f, W, y_0) = \deg(g, W, y_0), \tag{3.3}$$

其中， $W$ 是包含于 $V$ 中的足够小的开邻域。

为此，定义同伦 $H : \overline{V} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^k$，将 $g$ 与 $f$ 连接起来，通过

$$H(x, \lambda) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + \lambda\|x - x_0\|\epsilon(x - x_0).$$

我们有

$$\|H(x, \lambda) - y_0\| \geq (m - \|\epsilon(x - x_0)\|)\, \|x - x_0\|,$$

其中 $m = \inf\{\|f'(x_0)v\| : \ \|v\| = 1\}$为正，且 $f'(x_0)$ 可逆。这表明，在 $x_0$的一个适当邻域 $W$ 中，三元组 $(H, W, y_0)$ 的同伦是可容许的，并且等式 3.3 得以成立。 □

定理 *3.15* 的证明。由于 $f$ 在 $\overline{U}$ 上是适当的，集合 $f^{-1}(y) \cap \overline{U}$ 是紧的，而条件 $y \notin f(\partial U)$ 确保它包含于 $U$ 中。另一方面，如引理 3.16 的证明所示，假设在任意 $x \in f^{-1}(y) \cap \overline{U}$ 处，导数 $f'(x)$ 是单射，这就保证该集合由孤立点组成。因此，它实际上是一个有限集。设 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ 是 $U$ 的两两不交开子集，每个开子集恰好包含 $f^{-1}(y)$ 中的一个点。可加性公理意味着

$$\deg(f, U, y) = \sum_{i=1}^{n} \deg(f, V_i, y),$$

而结论由引理 3.16 和公式 (3.2)（用于计算线性自同构的度）得出。

□

下面的结果特别表明，可容许三元组的度与任意充分接近的正则三元组的度相同，这蕴含了度的唯一性。

**定理 3.17**。 设 $(f, U, y)$ 是一个可容许三元组。若$(g, U, z)$ 是一个正则三元组，且可通过可容许同伦与$(f, U, y)$ 相连，那么

$$\deg(f, U, y) \ = \sum_{x \in g^{-1}(z) \cap U} \mathrm{i}(g, x). \tag{3.4}$$

特别地，对于任何满足以下条件的正则三元组$(g, U, z)$，上述结论均成立：

1. $g$ 与 $f$的距离小于 $\epsilon$；
2. $z$ 与 $y$的距离小于 $\sigma$；

3. $\epsilon + \sigma <$距离$(y, f(\partial U))$.

证明。 设 $(g, U, z)$ 是一个正则三元组，可通过可容许同伦与 $(f, U, y)$ 相连。由同伦不变性公理可得

$$\deg(f, U, y) = \deg(g, U, z),$$

而等式 (3.4) 由定理 3.15 得出。

现在假设 $(g, U, z)$ 是满足性质 1、2 和 3 的正则三元组。只需证明由下式定义的三元组的同伦 $(H, U, \alpha)$:

$$H(x, \lambda) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x), \quad \alpha(\lambda) = (1 - \lambda)y + \lambda z,$$

在 $U$ 上是可容许的。这可以像推论 3.8 的证明中那样完成。 □

## 3.5 拓扑学的初步应用

现在，我们给出布劳威尔度在欧几里得空间中的一些直接拓扑学应用。

首先，我们来证明，非恒定多项式的拓扑度与其代数次数相同。这提供了代数学基本定理（它实际上是一个拓扑学性质的结果）的诸多证明之一，也说明了布劳威尔使用“度”这一表述的合理性。从某种意义上说，布劳威尔度是将代数中的度这一概念推广到更一般情形。

和之前一样，若 $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 是一个真映射，我们用 $\deg(f)$ 表示整数 $\deg(f, \mathbb{R}^k, y)$，其中 $y$ 是 $\mathbb{R}^k$中的任意一点。根据连续依赖性（定理 3.13），$\deg(f)$定义良好。

注意，若 $H\colon \mathbb{R}^k \times [0,1] \to \mathbb{R}^k$ 是一个真映射，那么根据同伦不变性，$\deg(H(\cdot, \lambda))$ 与 $\lambda \in [0,1]$无关。

**定理 3.18.** 设 $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是代数次数为 $n > 0$的多项式。那么 $p_n$，视为一个从 $\mathbb{R}^2$ 到自身的映射，其拓扑度为 $n$。

证明。设 $p_n(z) = az^n + q(z)$，其中 $a \neq 0$，且 $q(z)$ 是一个次数小于 $n$ 的多项式。考虑同伦

$$H(z, \lambda) = az^n + \lambda q(z)$$

并注意到

$$\lim_{|z| \to +\infty} |H(z, \lambda)| = +\infty,$$

关于 $\lambda \in [0,1]$一致。因此， $H$ 是真映射，从而两个映射 $p_n$ 和 $f_n : z \mapsto az^n$ 的拓扑度相等。要得出 $f_n$ 的 Brouwer度为 $n$，注意到方程 $az^n = a$恰好有 $n$ 个解，且每个解的指标均为一（见习题 2.1）。 □

采用与定理 3.18 的证明相同的方法，可以证明：如果$p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个代数次数为 $n > 0$的多项式，那么由 $f_n(z) = p_n(\bar{z})$给出的映射 $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$的度为 $-n$，其中 $\bar{z}$ 是 $z$的共轭数。因此，我们得到了从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的具有任意非零度的真映射示例。一个简单的（真）零度映射由 $f_0(x, y) = (x, y^2)$给出。

容易验证，如果 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是真映射，并且 $I$ 表示 $\mathbb{R}^s$上的恒等映射，那么映射

$$I \times f : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^2$$

是适当的，且 $\deg(I \times f) = \deg(f)$。因此，如果 $k > 1$，就可以找到从 $\mathbb{R}^k$ 映到其自身的任意度数的映射。

**练习 3.19**。证明，如果 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是适当的，那么 $\deg(f)$ 只能取三个值：$-1$、0、1。

由定理 3.18 和度的存在性立即可得娱乐主管

**代数学基本定理**。任何非常数复系数多项式至少有一个根。

下面是另一个可以由度理论轻易推导出的著名拓扑学结果。

**布劳威尔不动点定理**。令 $U$ 为 $\mathbb{R}^k$ 中的开单位球，并令 $f: \overline{U} \to \mathbb{R}^k$连续，且满足 $f(\overline{U}) \subseteq \overline{U}$（或者，更一般地，$f(\partial U) \subseteq \overline{U}$）。那么 $f$在 $\overline{U}$中有一个不动点。

证明。如果三元组（$I - f, U, 0$）不可容许，那么 $f$在$\partial U$上有一个不动点，结论即得。因此，假设情况并非如此。考虑同伦 $H: \overline{U} \times [0,1] \to \mathbb{R}^k$，其定义为 $H(x, \lambda) = x - \lambda f(x)$，并注意到对于所有 $x \in \partial U$和 $\lambda \in [0,1]$，都有 $x \neq \lambda f(x)$。因此，根据同伦不变性，我们有

$$\deg(I - f, U, 0) = \deg(I, U, 0).$$

另一方面，切除性质蕴含

$$\deg(I, U, 0) = \deg(I, \mathbb{R}^k, 0) = 1.$$

现在，由存在性应用于方程$x - f(x) = 0$, $x \in U$，即可得到结论。

□

回顾一下，拓扑空间 $X$ 的子集 $A$ 称为 $X$ 的收缩，如果存在一个连续映射 $r: X \to A$，称为收缩映射，其在 $A$ 上的限制映射是恒等映射。显然，区间 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$的边界是不连通的，因此不是 $[a,b]$的收缩。下面这个由边界依赖性直接得到的简单推论推广了这一初等事实。

**定理 3.20.** 设 $U$ 是 $\mathbb{R}^k$的有界开子集。那么 $\partial U$ 不是 $\overline{U}$的收缩。

证明。假设存在映射 $r: \overline{U} \to \partial U$，使得 $r(x) = x, \forall x \in \partial U$。令 $y \in U$。由于 $U$ 有界，边界依赖性（定理 3.14）蕴含

$$\deg(r, U, y) = \deg(I, U, y) = 1.$$

因此，方程 $r(x) = y$ 在 $U$ 中有一个解，这与事实相矛盾，因为 $r$ 将$\overline{U}$ 映射到 $\partial U$ 上。

□

子集 $(0,+\infty)$ 的边界是 $[0,+\infty)$ 的一个收缩这一事实表明，在定理 3.20 中，不能去掉 $U$ 有界这一假设。

现在，我们给出度理论在 $\mathbb{R}^k$ 中非线性方程的存在性与解的多重性问题上的一些应用。

我们从以下结果开始。

**命题 3.21**。设 $f:\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 是适当映射，且 $g:\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 是有界映射。那么 $f+g$ 是适当映射，且 度$(f+g)$ $=$度$(f)$。因此，如果度$(f) \neq 0$，方程 $f(x)+g(x)=0$ 至少有一个解。

证明。 映射 $f+g$ 是适当映射（根据练习 2.4），因为假设

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$$

意味着

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)+g(x)\| = +\infty.$$

基于同样的理由，映射 $(x,\lambda) \mapsto f(x) + \lambda g(x)$ 也是适当的，因此立即可由同伦不变性得到等式 $\deg(f+g) = \deg(f)$。

□

下面通过一个简单的例子来说明如何运用上述结果，证明 $\mathbb{R}^k$ 中非线性方程的解的存在性。

**例 3.22.** 考虑以下由两个方程组成、含有两个未知数的非线性方程组：

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - \sin(xy) &= 0 \\ xy + 2\cos x + \frac{1}{1+y^2} &= 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

我们断言，这个方程组至少有一个解。不难验证，映射 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given by $f(x, y) = (x^2 - 2y^2, xy)$ 是适当的。事实上，设 $c$ 为一个正数，并考虑以下不等式：

$$|x^2 - 2y^2| \le c \quad \text{and} \quad |xy| \le c.$$

第一个不等式意味着，当 $|x|$ 很大时， $|y|$ 也很大；但这与第二个不等式矛盾。因此，如果 $f(x,y)$ 属于一个紧集，那么 $(x,y)$ 也必定始终处于某个紧集中。

为了计算 $f$ 的度（它是良定义的），注意该方程组

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 &= 1 \\ xy &= 0 \end{cases}$$

有以下两个解：$(1,0)$ 和 $(-1,0)$。可以验证，这两个解都是正则的，指标均为 1。因此 $\deg(f) = 2$，而命题 3.21 表明，方程组 (3.5) 至少存在一个解，正如所声称的那样。

事实上，由于 $\deg(f) = 2$，应用萨德引理（以及正则三元组的度的定义），还可以得出更进一步的结论：对于几乎所有的 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$，该方程组

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - \sin(xy) &= a \\ xy + 2\cos x + \frac{1}{1+y^2} &= b \end{cases}$$

至少有两个解（当然，对于所有 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$，至少有一个解）。

由命题 3.21 可立即得出，以下类型的非线性方程组

$$Lx + g(x) = 0 \tag{3.6}$$

至少有一个解，前提是 $L$ 是 $\mathbb{R}^k$上的可逆线性算子，且 $g$： $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 是有界映射。另一方面，也可以利用布劳威尔不动点定理证明这一点，因为 (3.6) 可以等价地写成如下形式的不动点方程： $x = -L^{-1}g(x)$，其中映射 $x \mapsto -L^{-1}g(x)$ 将整个空间 $\mathbb{R}^k$ 映到一个有界集（尤其是将某个闭球映到自身）。

这一存在性结果的推广是下面的推论 3.24，它直接来自以下延拓原理（该原理的表述不涉及度理论）。

**定理 3.23**（欧几里得空间中的延拓原理）。设 $U$ 是 $\mathbb{R}^k$的一个有界开子集，$f$： $\overline{U} \to \mathbb{R}^k$ 是在 $f^{-1}(0)$的某个邻域内的 $C^1$ 类连续映射，而 $h$：$\overline{U} \times [0,1] \to \mathbb{R}^k$ 是连续映射。假设：

1. $h(x,0) = 0$ 对所有 $x \in U$; 2. $f(x) + h(x,\lambda) \neq 0$ 对所有 $(x,\lambda) \in \partial U \times [0,1]$;3. $\det(f'(x)) \neq 0$ 对任意 $x \in f^{-1}(0)$;

4. 整数

$$\sum_{x \in f^{-1}(0)} \operatorname{sign}(\det(f'(x)))$$

非零。

那么，方程 $f(x) + h(x,1) = 0$在 $U$ 中至少有一个解。

证明。定义 $H$: $\overline{U} \times [0,1] \to \mathbb{R}^k$，由 $H(x,\lambda) = f(x) + h(x,\lambda)$给出，并注意到，由于假设 2，三元组（$H$，$U$，0）是一个可容许同伦。因此，根据同伦不变性可知

$$\deg(H(\cdot,0), U, 0) = \deg(H(\cdot,1), U, 0).$$

另一方面，由于条件1，我们有 $H(\cdot,0) = f$，现在该断言由假设3和 4、计算公式（定理 3.15）以及存在性（定理3.11）得出。

□

下面这个由定理 3.23 得出的简单推论，推广了与方程 (3.6) 相关的存在性结果，去除了映射 $g$ 有界这一假设。

**推论 3.24**。设 $L$ 是 $\mathbb{R}^k$ 上的线性算子，且 $g$： $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 是一个连续映射。如果集合

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^k : Lx + \lambda g(x) = 0 \text{ for some } \lambda \in [0,1] \right\}$$

有界，那么方程 $Lx + g(x) = 0$ 至少有一个解。

证明。注意到 $S$ 的有界性意味着 $L$ 是单射，因此 $\det(L) \neq 0$。由定理 3.23，取包含 $S$、$f = L$ 和 $h(x,\lambda) = \lambda g(x)$ 的任意开球 $U$，即可得到该断言。

□

推论 3.24 可以用一种更初等的方法证明：它可以直接由布劳威尔不动点定理推出（上述延拓原理则不能这样处理）。下面简要说明如何做到这一点。

定义 $\sigma\colon\ \mathbb{R}^k \to [0,1]$ 由 $\sigma(x) = \max\{1 - \text{距离}(x, S)\ 0\}$，并注意到，方程 $Lx+\sigma(x)g(x) = 0$ 的任何解都属于 $S$。因此，它也是 $Lx + g(x) = 0$的一个解，因为对于 $x \in S$，$\sigma(x) = 1$。为了证明 $Lx + \sigma(x)g(x) = 0$有解，注意到 $L$ 是可逆的（因为 $S$ 有界），并对方程 $x = -\sigma(x)L^{-1}g(x)$应用布劳威尔不动点定理。

**例 3.25**。 为说明推论 3.24 的应用，我们证明该系统

$$\begin{cases} x + y + x^3 + \sin(xy) &= 0 \\ y + 2\cos(xy) + y^5 &= 0 \end{cases}$$

至少有一个解。为此，我们需要证明该系统的所有可能解 $(x, y)$

$$\begin{cases} x + y + \lambda x^3 + \lambda \sin(xy) &= 0 \\ y + 2\lambda \cos(xy) + \lambda y^5 &= 0 \end{cases}$$

当参数 $\lambda$ 在 $[0,1]$中变化时，它们是先验有界的。事实上，第二个方程意味着，若 $(x, y)$ 是这样的一个解，那么 $y$ 必定属于区间 $[-2, 2]$，因此由第一个方程可得 $|x| \le 3$。

度可用于证明如下类型的方程 $f(x) = 0$ 存在非平凡解，其中 $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 满足条件$f(0) = 0$。以下结果便是这方面的一个结论。

**定理 3.26**。设 $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 是一个真映射，且 $f(0) = 0$。假设 $f$ 在原点处 *Fréchet* 可微。若 $f'(0)$ 可逆，且 $\deg(f) \neq \mathrm{i}(f, 0)$，则方程 $f(x) = 0$ 有一个非平凡解（即一个解$x \neq 0$）。

证明。 如果方程 $f(x) = 0$ 具有唯一解 $x = 0$，计算公式将与假设 $\deg(f) \neq \mathrm{i}(f, 0)$ 矛盾。 □

**例 3.27**。 考虑系统

$$\begin{cases} x - 2\sin(x + x^2 - y^2) &= 0 \\ 2x + y + 1 - \cos(xy) &= 0 \end{cases}$$

并注意到它具有平凡解 $(0, 0)$。由于可逆线性算子 $L\colon (x, y) \mapsto (x, 2x + y)$ 的度为 1，根据命题 3.21，映射

$$(L + g)\colon (x, y) \mapsto (x - 2\sin(x + x^2 - y^2), 2x + y + 1 - \cos(xy))$$

是适当的，且度为 1。

现在请注意，$(L + g)$ 在原点处的线性化映射为 $(x, y) \mapsto (-x, 2x + y)$，其行列式为负。因此，定理 3.26 表明，上述系统至少有一个非平凡解（很可能至少有两个，因为萨德引理和计算公式的缘故）。

度理论在分岔问题的研究中有着重要应用。让我们看看它在有限维情形中的作用。

设 $J$ 为一个实区间，$U$ 为 $\mathbb{R}^k$ 的一个包含原点 $0 \in \mathbb{R}^k$ 的开子集，且 $f$: $J \times U \to \mathbb{R}^k$ 是满足条件 $f(\lambda, 0) = 0$ 的连续映射，其中该条件对任意 $\lambda \in J$ 均成立。考虑方程

$$f(\lambda, x) = 0. \tag{3.7}$$

任何满足 $\lambda \in J$ 的点对 $(\lambda,0)$ 都称为上述方程的 平凡解，因此，任何其他解都称为 非平凡解。

方程 (3.7) 的一个分岔点是一个数 $\lambda_0 \in J$（或者等价地，一个平凡解 $(\lambda_0, 0) \in J \times U$），其性质是：$(\lambda_0, 0)$ 的任意邻域都包含非平凡解。

例如，若 $f$ 具有如下特殊形式

$$f(\lambda, x) = \lambda x - Lx,$$

其中 $L$ 是 $\mathbb{R}^k$ 上的一个线性算子，那么 $L$ 的任何特征值都是一个分岔点。因此，从某种意义上说，分岔点是线性情形中特征值的非线性类比。

现在假设 $f$ 关于第二个变量连续可微（至少在平凡解集合 $J \times \{0\}$ 的某个邻域内），并设定 $\lambda_0 \in J$。如果偏导数 $\partial_2 f(\lambda_0, 0)$ 非奇异，那么隐函数定理表明，在 $(\lambda_0, 0)$ 的一个适当邻域 $I \times V$ 内，集合 $f^{-1}(0)$ 是一个从 $I$ 到 $V$ 的映射的图像。因此，假设 $f(\lambda, 0) \equiv 0$ 意味着 $\lambda_0$ 不是分岔点。因此，我们得到以下结果。

**定理 3.28**（分岔的必要条件）。设 $f$ 如上，并考虑连续实函数 $\varphi(\lambda) = \det(\partial_2 f(\lambda, 0))$，$\lambda \in J$。若 $\lambda_0 \in J$ 是方程 $f(\lambda, x) = 0$ 的分岔点，则 $\varphi(\lambda_0) = 0$。

有一些简单的例子表明，条件 $\varphi(\lambda_0) = 0$ 对于 $\lambda_0$ 成为分岔点而言并不充分。也许最简单的例子是由 $f$ 给出的：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定义为 $f(\lambda, x) = (\lambda^2 + x^2)x$，其中 $\lambda_0 = 0$。

$\lambda_0$ 是分岔点的一个充分条件是 $\varphi(\lambda)$ 在 $\lambda_0$ 处变号。事实上，我们有如下结果。

定理 *3.29*（分岔的充分条件）。设 $[a, b]$ 为一个实区间，$U$ 为包含原点 $0 \in \mathbb{R}^k$ 的 $\mathbb{R}^k$ 的开子集，且 $f$ 是从 $[a, b] \times U$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的连续映射，满足条件 $f(\lambda, 0) = 0$ 对任意 $\lambda$ 属于 $[a, b]$ 都成立。假设 $f$ 在方程 $f(\lambda, x) = 0$ 的任意平凡解 $(\lambda, 0)$ 处关于第二个变量可微，并定义 $\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}$ 为 $\varphi(\lambda) = \det(\partial_2 f(\lambda, 0))$。

如果 $\varphi(a)\varphi(b) < 0$，那么区间 $[a, b]$ 至少包含一个分岔点。特别是，如果 $\varphi(\lambda)$ 在某个 $\lambda_0 \in [a, b]$ 处发生符号跳跃，那么 $\lambda_0$ 就是一个分岔点。

证明。反设不然。那么，由 $[a, b]$的紧致性，存在一个有界的 0 的开邻域 $V$，使得 $\overline{V} \subseteq U$，并且方程 $f(\lambda, x) = 0$ 的所有位于 $[a, b] \times \overline{V}$ 中的解都是平凡解。特别地

$$f(\lambda, x) \neq 0, \quad \forall (\lambda, x) \in [a, b] \times \partial V.$$

因此，同伦不变性意味着

$$\deg(f(a,\cdot),V,0)=\deg(f(b,\cdot),V,0).$$

另一方面，根据计算公式（定理 3.15），我们得到

$$\deg(f(a,\cdot),V,0)=\operatorname{sign}(\varphi(a))\quad\text{and}\quad\deg(f(b,\cdot),V,0)=\operatorname{sign}(\varphi(b)),$$

这与假设 $\varphi(a)\varphi(b)<0$ 矛盾。 □

下面这个简单的例子说明了定理 3.29 的应用。

**例 3.30**。该系统

$$\begin{cases} x-\lambda\sin(x+x^2-y^2) &= 0\\ 2x+y+1-\cos xy &= 0\end{cases}\tag{3.8}$$

在 $\lambda=1$ 处有一个分岔点。为此，考虑线性化问题

$$\begin{cases} x-\lambda x &= 0\\ 2x+y &= 0\end{cases}$$

（在 $\mathbb{R}^2$ 的原点处应用 (3.8)），并注意到函数

$$\varphi(\lambda)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

在 $\lambda=1$ 处发生符号跳跃。

# 4 扩展情形

本节将布劳威尔度推广到弱可容许三元组这一类；也就是说，推广到形如 $(f,U,y)$ 的三元组，其中 $U\subseteq\mathbb{R}^k$ 是一个开集，$f$ 是一个至少定义在 $U$ 上的 $\mathbb{R}^k$ 值映射，而 $y\in\mathbb{R}^k$ 满足 $f^{-1}(y)\cap U$ 是紧集。

可容许三元组的度的切除性质（定理 3.10）表明，下面的定义是良定义的。

**定义 4.1**。弱可容许三元组 $(f,U,y)$ 的布劳威尔度 是整数

$$\deg(f,U,y):=\deg(f,V,y),$$

其中，$V$是 $f^{-1}(y)$的任意有界开邻域，且满足 $\overline{V}\subseteq U$。

如上所述，设 $U$ 是 $\mathbb{R}^k$的一个开子集，$H$ 是一个至少定义在 $U\times[0,1]$上的 $\mathbb{R}^k$值映射，而 $\alpha\colon\ [0,1]\to\mathbb{R}^k$ 是一条路径。若集合为紧集，则称三元组（，，）构成弱可容许三元组同伦

$$\Sigma=\Big\{(x,\lambda)\in U\times[0,1]:H(x,\lambda)=\alpha(\lambda)\Big\}$$

是紧的。

下述结论是定理 3.9 的直接推论。

**定理 4.2**。 弱可容许三元组的 *Brouwer*度满足以下三个基本性质:

(归一化) $\deg(I,\ \mathbb{R}^k,\ 0)\ =1$，其中 $I$表示 $\mathbb{R}^k$上的恒等映射;

(可加性) 若 $(f,\ U,\ y)$ 是弱可容许的，并且 $U_1$和 $U_2$是 $U$ 的两个不相交开子集，使得 $f^{-1}(y)\cap U\subseteq U_1\cup U_2$，则

$$\deg(f,U,y)=\deg(f,U_1,y)+\deg(f,U_2,y);$$

(同伦不变性) 若 $(H,\ U,\ \alpha)$ 是三元组的弱可容许同伦，则

$$\deg(H(\cdot,0),U,\alpha(0))=\deg(H(\cdot,1),U,\alpha(1)).$$

给定 $\mathbb{R}^k$ 的一个开子集 $U$ 以及一个 $\mathbb{R}^k$值映射 $f$，其定义域（至少）为$U$，整数 $\deg(f,U,y)$ 不一定关于 $y$连续。例如，对于所有 $y\in\mathbb{R}$，三元组 $(\exp\ \mathbb{R},\ y)$ 都是弱可容许的，但映射$y\mapsto\deg(\exp\ \mathbb{R},y)$ 在 $y=0$处不连续。为避免这种不便，给定上述的$U$ 和 $f$，我们从 $\mathbb{R}^k$中剔除一个子集，称为 $U$中 $f$ 的边界集，该子集具有这样的性质：映射 $y\mapsto\deg(f,M,y)$ 在此集合的补集上定义良好且连续。此外，当 $f$ 在$\overline{U}$上是适当映射时，此集合与 $f(\partial U)$ 重合。

给定 $y\in\mathbb{R}^k$，我们称 $f$ 在 $U$ 中是 $y$-适当的，如果存在 $y$ 的一个邻域 $V$，使得对于 $V$ 的任意紧子集 $K$，$f^{-1}(K)\cap U$ 都是紧的（这意味着 $f$ 从 $U\cap f^{-1}(V)$ 到 $V$ 的限制映射是适当的）。显然，集合

$$\left\{y\in\mathbb{R}^k:f\text{ is }y\text{-proper in }U\right\}$$

在 $\mathbb{R}^k$ 中是开集。因此，其补集称为 $f$ 在 $U$ 中的边界集，记为 $\partial(f,U)$，是闭集。

显然，对于任意 $y\in\mathbb{R}^k\setminus\partial(f,U)$，$\deg(f,U,y)$ 都有定义；并且由于同伦性质，它关于 $y$ 连续变化。

**练习 4.3**。 设 $f:\ U\to\mathbb{R}^k$ 是定义在 $\mathbb{R}^k$ 的开子集 $U$ 上的映射。证明: $f$ 是适当的，当且仅当 $\partial(f,U)\ =\emptyset$。

**练习 4.4**。 设 $f$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^k$ 的映射，至少定义在开集 $U\subseteq\mathbb{R}^k$ 上。证明 $f(\partial U)\ \subseteq\partial(f,U)$。此外，若 $f$ 在 $\overline{U}$ 上是适当的，证明 $f(\partial U)\ =\partial(f,U)$。

下面的结果是上述同伦不变性的一种有用推广。

**定理 4.5** (一般同伦不变性)。 设 $H$ 是定义在 $\mathbb{R}^k\times[0,1]$ 的开子集 $W$ 上的一个取值于 $\mathbb{R}^k$ 的映射，并且 $\alpha:\ \ [0,1]\to\mathbb{R}^k$ 是一条路径。若集合

$$\Sigma=\left\{(x,\lambda)\in W:H(x,\lambda)=\alpha(\lambda)\right\}$$

是紧的，则

$$\deg(H_\lambda,W_\lambda,\alpha(\lambda))$$

不依赖于 $\lambda\in[0,1]$，其中 $H_\lambda:\ W_\lambda\to\mathbb{R}^k$ 表示在切片 $W_\lambda=\{x\in\mathbb{R}^k:\ x,\ \lambda)\ \in W\}$ 上定义的部分映射$H(\cdot,\ \lambda)$。

证明。显然，给定 $\lambda \in [0,1]$，$\deg(H_\lambda, W_\lambda, \alpha(\lambda))$ 有定义，因为集合 $H_\lambda^{-1}(\alpha(\lambda))$ 与 $\Sigma$ 的 $\lambda$-截面 $\Sigma_\lambda$ 重合，而后者是紧集。因此，只需证明函数 $\varphi : [0,1] \to \mathbb{Z}$，由 $\varphi(\lambda) = \deg(H_\lambda, W_\lambda, \alpha(\lambda))$ 给出，是局部常值的。为此，固定任意 $\mu \in [0,1]$，并考虑 $\Sigma_\mu$ 的任意有界开邻域 $V$，使得 $\overline{V} \subseteq W_\mu$。由于 $\overline{V}$ 是紧集，存在 $[0,1]$ 中 $\mu$ 的一个闭邻域 $I_\delta = [\mu-\delta, \mu+\delta] \cap [0,1]$，使得 $\overline{V} \times I_\delta \subseteq W$。

我们断言，若 $\delta$ 足够小，则对所有 $\lambda \in I_\delta$，$\Sigma_\lambda \subseteq V$。反设结论不成立。因此，存在一个序列 $\{(x_n, \lambda_n)\}$，属于 $\Sigma$，使得 $\lambda_n \to \mu$，且对所有 $n \in \mathbb{N}$，$x_n \notin V$。由于 $\Sigma$ 的紧致性（并且 $V$ 是开集），我们可以假设 $x_n \to y \notin V$。因此 $(y, \mu) \in \Sigma$，这意味着 $y \in \Sigma_\mu$；而根据假设，$\Sigma_\mu \subseteq V$，故这就产生了矛盾。

不失一般性，假设对所有 $\lambda \in I_\delta$，$\Sigma_\lambda \subseteq V$。此外，由于 $\overline{V}$ 是紧集，且对所有 $\lambda \in I_\delta$ 都包含于 $W_\lambda$，根据定义 4.1 可得

$$\deg(H_\lambda, W_\lambda, \alpha(\lambda)) = \deg(H_\lambda, V, \alpha(\lambda)), \quad \forall \lambda \in I_\delta.$$

现在注意到，对所有 $(x, \lambda) \in \partial V \times I_\delta$，$H(x, \lambda) \neq \alpha(\lambda)$。因此，度的同伦不变性（定理 3.9）意味着 $\varphi(\lambda)$ 不依赖于 $\lambda \in I_\delta$；又因为 $\mu$ 是任意的，故断言成立。 □

# 5 附录：正则三元组的同伦不变性证明

这里，我们的目的是证明构造布劳威尔度过程中的一个关键结果：正则三元组的同伦不变性（见定理 3.6）。

设 $U$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的开集，且 $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^k$ 是一个真光滑映射（回顾一下，若 $f$ 在包含 $\overline{U}$ 的某个开集上存在光滑延拓，则称其在 $\overline{U}$ 上光滑）。考虑临界点构成的闭集

$$K = \{x \in \overline{U} : \det(f'(x)) = 0\}$$

$\overline{U}$ 中 $f$ 的临界点集。回顾一下，真映射是闭映射（见习题 2.3），因此集合

$$W = \mathbb{R}^k \setminus (f(\partial U) \cup f(K))$$

使得 $(f, U, y)$ 构成正则三元组的点 $y$ 所构成的集合是开集。正如前面所指出的，对任意 $y \in W$，集合 $f^{-1}(y)$ 是紧且离散的，因此是有限集。

我们需要下面这个引理；它不能被视为定理 3.13 的一个特例，因为后者是由三条基本性质推导出来的。

**引理 5.1**。设 $U$、$f$ 和 $W$ 如上所述。那么映射

$$\deg(f, U, \cdot) : W \to \mathbb{Z},$$

是局部常数。

证明。任取 $y \in W$，并设 $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$。根据反函数定理，存在 $n$ 个两两不相交的邻域 $U_1, U_2, \ldots, U_n$

$x_1$、$x_2$、.....、$x_n$，它们被微分同胚地映射到 $y$ 的邻域 $V_1$、$V_2$、.....、$V_n$。我们可以假设每个 $V_i$ 都包含在 $W$ 中，并且在每个 $U_i$ 中，$\det(f'(x))$ 的符号恒定。因此，如果 $z \in V := V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ 且 $\Omega := U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$，方程 $f(x) = z$ 在 $\Omega$ 中恰有 $n$ 个解，并且

$$\deg(f, U, y) = \deg(f, \Omega, z).$$

现在注意，当 $z \in \mathbb{R}^k$ 充分接近 $y$ 时，方程 $f(x) = z$ 在 $C = \overline{U} \setminus \Omega$ 中没有解。事实上，当 $z$ 不属于 $f(C)$ 时便会如此；这是一个不包含 $y$ 的闭子集。因此，若 $z$ 属于 $y$ 的邻域 $V \setminus f(C)$，我们便得到

$$\deg(f, U, z) = \deg(f, \Omega, z) = \deg(f, U, y),$$

并且断言得证。 □

在证明正则三元组的同伦不变性之前，我们先回顾有限维向量空间中（有序）基族的一些重要事实。

令 $\Sigma_k = (e_1, e_2, \cdots, e_k)$ 表示 $\mathbb{R}^k$ 的标准基；也就是说，

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \ldots,\ e_k = (0, \cdots, 0, 1).$$

$\mathbb{R}^k$ 的基 $B$ 称为**正向定向**（在 $\mathbb{R}^k$ 中），如果它与 $\Sigma_k$ 等价；也就是说，从 $\Sigma_k$ 到 $B$ 的过渡矩阵具有正行列式。若非如此，则 $B$ 为**负向定向**。基 $B$ 是正向定向还是负向定向，这一状态显然是稳定的，因为过渡矩阵依赖于 $B$，且这种依赖在 $(\mathbb{R}^k)^k$ 的拓扑下是连续的。此外，将基 $B$ 中任意一个向量替换为其相反向量，会使 $B$ 从一种状态转变为另一种状态（从正向定向变为负向定向，反之亦然）。最后指出，$\mathbb{R}^k$ 的有序基 $B$ 是正向定向的，当且仅当通过将标准基 $\Sigma_{k+1}$（属于 $\mathbb{R}^{k+1}$）的最后一个向量添加到 $B$ 上所得到的 $\mathbb{R}^{k+1}$ 的基 $(B, e_{k+1})$ 也是正向定向的；其中 $B$ 被视为 $\mathbb{R}^{k+1}$ 的子空间 $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ 的一组基。

给定一个 $k$ 维向量空间 $E$ 以及一个线性同构 $L : E \to \mathbb{R}^k$，我们用 $L^{-1}(\Sigma_k)$ 表示 $L$ 下标准基 $\Sigma_k$的原像。当然，这构成了 $E$的一个基。需要注意的是，如果 $L$ 是 $\mathbb{R}^k$的一个自同构，那么 $\det(L) > 0$ 当且仅当 $L^{-1}(\Sigma_k)$ 是 $\mathbb{R}^k$的正向定向基。这个基本事实在下面的证明中至关重要。

**正则三元组的同伦不变性性质的证明。** 首先回顾一下，三元组 $(f, U, y)$ 是正则的，当且仅当 $(f - y, U, 0)$ 也是正则的；在这种情况下

$$\deg(f, U, y) = \deg(f - y, U, 0).$$

因此，令 $G(x, \lambda) = H(x, \lambda) - \alpha(\lambda)$，只需证明两个正则三元组 $(G_0, U, 0)$ 和 $(G_1, U, 0)$ 的度相同；和通常一样，$G_\lambda$ 表示部分映射 $G(\cdot, \lambda)$。

应用引理 5.1，找到 $0 \in \mathbb{R}^k$ 的一个开邻域 $V$，其中的值对于 $G_0$ 和 $G_1$ 都是正则值，并且满足

$$\deg(G_0, U, z) = \deg(G_0, U, 0) \quad \text{and} \quad \deg(G_1, U, z) = \deg(G_1, U, 0),$$

对所有 $z \in V$ 都成立。根据萨德引理，存在一个正则值 $y \in V$，它是 $G$ 在 $U \times [0,1]$ 中的正则值，而不仅仅是 $G$ 到边界的限制映射的正则值（按流形的意义而言）

$$\delta(U \times [0,1]) = (U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\}).$$

现在只需证明即可得出该断言，即

$$\deg(G_0 - y, U, 0) = \deg(G_1 - y, U, 0).$$

因此，我们归结为证明若$(F, U, 0)$ 是三元组的光滑可容许同伦，且0 是 $F$ 以及部分映射 $F_0$和 $F_1$的正则值，那么$\deg(F_0, U, 0) = \deg(F_1, U, 0)$。

假设 $F$ 是这样的同伦。由于 0 对 $F$ 以及 $F$ 在 $\delta(U \times [0,1])$ 上的限制映射都是正则值，带边界流形的正则性定理（例如参见 [7, 8, 10]）保证 $F^{-1}(0)$ 是一个紧的一维流形，其边界为

$$\delta F^{-1}(0) = F^{-1}(0) \cap \delta(U \times [0,1]).$$

$\delta F^{-1}(0)$ 中的点可以分为两类：$A_0 = F_0^{-1}(0) \times \{0\}$ 和$A_1 = F_1^{-1}(0) \times \{1\}$，二者都是有限集，因为 $0 \in \mathbb{R}^k$ 是部分映射 $F_0$ 和 $F_1$ 的正则值。

可按如下方式为 $\delta F^{-1}(0)$中的任意点赋予符号 $+1$ 或 $-1$：如果 $p = (x, \lambda) \in \delta F^{-1}(0)$，则令 $\mathrm{sign}(p) = \mathrm{sign}(\det(F'_\lambda(x)))$。因此，我们需要证明

$$\sum_{p \in A_0} \mathrm{sign}(p) = \sum_{p \in A_1} \mathrm{sign}(p).$$

这将通过证明任意点 $p \in \delta F^{-1}(0)$ 都有唯一的伴随点 $c(p) \in \delta F^{-1}(0)$ 来完成，该伴随点满足：$\mathrm{sign}(p) = -\mathrm{sign}(c(p))$当且仅当 $p$ 和 $c(p)$ 同属于同一侧（$A_0$ 或 $A_1$）。

回顾一下，任何边界非空的光滑紧致连通一维实流形（称为一条弧）都与区间 $[0,1]$ 微分同胚。[2]因此，任意 $p \in \delta F^{-1}(0)$ 都是一条弧的端点（该弧是 $\delta F^{-1}(0)$ 中包含 $p$ 的连通分支），其另一个端点 $c(p)$ 仍属于 $\delta F^{-1}(0)$。顺便注意，$c$ 在 $\delta F^{-1}(0)$ 上的自映射是一个双射（事实上，$c^{-1} = c$）。

例如，考虑弧 $M$包含于 $F^{-1}(0)$ 中，且其端点 $p_0$ 和 $p_1$ 都在 $A_0$中的情形。我们需要证明这两点的符号相反。其余两种情形（两个端点都在 $A_1$中，或一个在$A_0$ 中、另一个在 $A_1$中）也可以用类似的方法处理，这里不再讨论。

粗略地说，为了证明 $M$ 的两个端点 $p_0 = (x_0, 0)$ 和$p_1 = (x_1, 0)$ 的符号相反，我们连续地沿着 $M$ 移动 $\mathbb{R}^{k+1}$的一个基 $B_t$，使得在出发时（对于 $t = 0$），这个基与

$$(F'_0(x_0)^{-1}(\Sigma_k), e_{k+1})$$

并且在到达时（对于 $t = 1$）与之重合的是

$$(F'_0(x_1)^{-1}(\Sigma_k), -e_{k+1}),$$

[2]这是光滑一维实流形（边界可以为空）众所周知的分类定理的推论。参见例如 [7, 10]。

其中，回顾一下， $F_0$ 表示部分映射 $F(\cdot, 0)$。由于 $B_t$ 是所有 $t \in [0,1]$的基，从 $B_t$ 到 $\Sigma_{k+1}$的过渡矩阵的行列式符号恒定。因此，事实证明，两个基 $B_0$ 和 $B_1$ 要么都正向定向，要么都负向定向。因此，例如，如果 $\mathbb{R}^k$ 的基 $F_0'(x_0)^{-1}(\Sigma_k)$是正向定向的，那么另一个基$F_0'(x_1)^{-1}(\Sigma_k)$必定是负向定向的，这意味着

$$\operatorname{sign}(\det(F_0'(x_0))) = -\operatorname{sign}(\det(F_0'(x_1))),$$

这表明弧 $M$ 的两个端点符号相反。

设 $\gamma(t) = (x(t)\ \lambda(t))$， $t \in [0,1]$，是弧 $M$ 的参数化。换言之， $\gamma\colon\ [0,1] \to M$ 是从 $[0,1]$ 到 $M$ 的微分同胚，我们可以假设其定向为从 $p_0$ 到 $p_1$ （即 $\gamma(0) = p_0$ 且 $\gamma(1) = p_1$）。

由于 $F(\gamma(t)) \equiv 0$，我们有 $F'(\gamma(t))\gamma'(t) \equiv 0$。此外，假设 $\gamma$ 是微分同胚，这意味着对所有 $t \in [0,1]$， $\gamma'(t) \neq 0$ 。因此，给定 $t$，满射算子 $F'(\gamma(t)) : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^k$ 的核是一维的，由 $\gamma'(t)$ 张成。这意味着，将 $F'(\gamma(t))$ 限制到 $\mathbb{R}^{k+1}$ 的任意一个不包含 $\gamma'(t)$ 的 $k$ 维子空间 $E$ 上，都是一个同构；因此，在此同构下， $\mathbb{R}^k$ 的标准基 $\Sigma_k$ 的原像是 $E$ 的一个基。

为简化记号，给定点 $p \in U \times [0,1]$ 和子空间 $E \subset \mathbb{R}^{k+1}$，如果 $F'(p)$ 到 $E$ 的限制映射 $F'(p)|_E$ 是同构，那么标准基 $\Sigma_k$ 的原像 $(F'(p)|_E)^{-1}(\Sigma_k)$ 记作 $\Sigma(p, E)$】【。

由于对于任何 $t \in [0,1]$， $\gamma'(t) = (x'(t)\ \lambda'(t))$ 都是非零向量，并且偏导数 $\partial_1 F(x(0)\ \lambda(0))$ 和 $\partial_1 F(x(1)\ \lambda(1))$ 都是可逆的（回想一下，$\lambda(0) = \lambda(1) = 0$，且 0 是部分映射 $F(\cdot, 0)$ 的正则值），恒等映射

$$\partial_1 F(x(t), \lambda(t))x'(t) + \lambda'(t)\partial_2 F(x(t), \lambda(t)) \equiv 0$$

得到 $\lambda'(0) \neq 0$ 和 $\lambda'(1) \neq 0$。事实上， $\lambda(t) \in [0,1]$ 对所有 $t \in [0,1]$都成立，这意味着 $\lambda'(0) > 0$ 和 $\lambda'(1) < 0$。换言之，用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^{k+1}$中的内积，我们有 $\langle \gamma'(0)\ e_{k+1} \rangle > 0$ 和 $\langle \gamma'(1)\ e_{k+1} \rangle < 0$。

定义一个沿弧线 $M$ 移动的点 $p_t$ ，使其满足

$$p_t = \begin{cases} p_0 & \text{if } t \in [0, 1/3] \\ \gamma(3t-1) & \text{if } t \in [1/3, 2/3] \\ p_1 & \text{if } t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

对于任意 $t \in [0,1]$，定义向量 $v_t \in \mathbb{R}^{k+1}$ ，使其满足

$$v_t = \begin{cases} (1-3t)e_{k+1} + 3t\gamma'(0) & \text{if } t \in [0, 1/3] \\ \gamma'(3t-1) & \text{if } t \in [1/3, 2/3] \\ (3-3t)\gamma'(1) - (3t-2)e_{k+1} & \text{if } t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

注意，对于任意 $t \in [0,1]$，都有 $v_t \neq 0$ 。因此，与 $v_t$ 正交的空间 $v_t^{\perp}$ 总是 $k$ 维的。下面证明，对于所有 $t \in [0,1]$，导数 $F'(p_t)$ 在 $v_t^{\perp}$ 上的限制映射都是同构。为此，给定 $t \in [0,1]$，我们需要证明 $v_t^{\perp}$ 不包含 $F'(p_t)$ 的一维核。由于 $0 \in \mathbb{R}^k$ 是 $F$ 的正则值，这个核与 $M$ 在 $p_t$ 处的切空间重合；若 $t \in [0, 1/3]$，该切空间由 $\gamma'(0)$ 张成；若 $t \in [1/3, 2/3]$ ，则由 $\gamma'(3t-1)$ 张成；若 $t \in [2/3, 1]$，则由 $\gamma'(1)$ 张成。

先考虑 $t \in [0,1/3]$ 的情形。我们需要证明 $\gamma'(0)$ 不属于 $v_t^\perp$，这意味着 $\langle v_t, \gamma'(0)\rangle \neq 0$。事实上，由于 $\lambda'(0) > 0$，我们有

$$\langle v_t, \gamma'(0)\rangle = (1-3t)\lambda'(0) + 3t\|\gamma'(0)\|^2 > 0.$$

如果 $t \in [1/3, 2/3]$，

$$\langle v_t, \gamma'(3t-1)\rangle = \|\gamma'(3t-1)\|^2 > 0.$$

最后，由于 $t \in [2/3, 1]$，$\lambda'(1)$ 为负，可得

$$\langle v_t, \gamma'(1)\rangle = (3-3t)\|\gamma'(1)\|^2 - (3t-2)\lambda'(1) > 0.$$

设 $t \in [0,1]$。由于如前所述，$F'(p_t)$到 $v_t^\perp$的限制映射是同构，因此可以定义 $\mathbb{R}^{k+1}$的以下基:

$$B_t = (\Sigma(p_t, v_t^\perp), v_t).$$

显然，作为映射到 $\left(\mathbb{R}^{k+1}\right)^{k+1}$ 的映射，$B_t$ 连续地依赖于 $t \in [0,1]$。还要注意，空间 $v_0^\perp$ 和 $v_1^\perp$ 与 $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ 重合。因此，将 $\mathbb{R}^k$ 与 $\mathbb{R}^{k+1}$ 的子空间 $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ 认同，我们有

$$B_0 = (F_0'(x_0)^{-1}(\Sigma_k), e_{k+1}) \quad \text{and} \quad B_1 = (F_0'(x_1)^{-1}(\Sigma_k), -e_{k+1}).$$

现在，正如前面所指出的，由于 $B_t$ 始终是 $\mathbb{R}^{k+1}$ 的基，因此 $B_0$ 和 $B_1$ 要么都正向定向，要么都负向定向。因此，$B_0$ 和

$$B_1^- = (F_0'(x_1)^{-1}(\Sigma_k), e_{k+1})$$

具有相反的定向，这意味着这两个基也

$$F_0'(x_0)^{-1}(\Sigma_k) \quad \text{and} \quad F_0'(x_1)^{-1}(\Sigma_k)$$

具有相反的定向。因此，

$$\operatorname{sign}(\det(F_0'(x_0))) = -\operatorname{sign}(\det(F_0'(x_1))),$$

弧 $M$ 的两个端点 $p_0$ 和 $p_1$ 符号相反，证毕。 □

# 参考文献

[1] Amann H.、Weiss S.，关于拓扑度的唯一性，《数学杂志》**130** （1973），37–54。

[2] Deimling K.，《非线性泛函分析》，施普林格出版社，柏林，1985年。

[3] Dinca G., Mawhin J.，布劳威尔度：非线性分析的核心，《非线性微分方程及其应用进展》（PNLDE，第95卷），Birkhäuser，尚贝里，2021。

[4] Dold A.，《代数拓扑讲义》，数学科学基础丛书，施普林格出版社，1980。

[5] Dugundij J.，《拓扑》，Allyn and Bacon 高等数学丛书，Allyn and Bacon，波士顿，1966。[6] Furi, M., Pera, M. P., Spadini, M.，《可微流形上切向量场度的一组公理》。不动点理论与应用，(2010) **文章编号 845631** 共11页。[7] Guillemin V., Pollack A.，《微分拓扑》，Prentice-Hall Inc.，Englewood Cliffs，新泽西州，1974。[8] Hirsch M. W.，《微分拓扑》，数学研究生教材，第33卷，施普林格出版社，柏林，1976。[9] Lloyd N.G.，《度理论》，剑桥数学论丛第73卷，剑桥大学出版社，剑桥，1978。[10] Milnor J.W.，《从可微观点看拓扑》，弗吉尼亚大学出版社，Charlottesville，1965。[11] Nagumo M.，《基于无穷小分析的度理论》，《美国数学杂志》**73** (1951)，485-496。[12] Nirenberg L.，《非线性泛函分析专题》，Courant 数学科学研究所，纽约，1974。[13] Outerelo E., Ruiz J. E.，《映射度理论》，数学研究丛书第108卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛；西班牙皇家数学学会，马德里，2009年[14] Sard A.，《可微映射临界点的测度》，《美国数学会通报》**48** (1942)，883-890。[15] Schwartz J.T.，《非线性泛函分析》，Gordon and Breach，纽约，1969。[16] Zeidler E.，《非线性泛函分析及其应用》，第1卷，施普林格出版社，纽约，1985。