p-拉普拉斯算子在超图上的应用

硕士论文

作者**Ariane Fazeny**

arXiv:2304.06468v1 [math.CO] 14 Mar 2023

导师：理学硕士 Piero Deidda 和 Daniel Tenbrinck 博士

评审人：Martin Burger 教授，博士

本作品采用知识共享署名-非商业性使用-相同方式共享 4.0 国际许可协议进行授权。

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE
FAKULTÄT

Department
MATHEMATIK

摘要

关于超图上的p-拉普拉斯算子的文献已经存在，但其中引入的概念大多是为信号处理或化学反应网络等应用量身定制的。因此，本学位论文提出了适用于超图的梯度、伴随算子和p-拉普拉斯算子的一般化定义，并着重探讨所述概念的理论背景和性质。首先，本论文介绍普通图和超图（无向和有向），并通过批判性分析超图的两种普通图表示，说明为何将图扩展到超图是合理的，甚至是必要的，以便描述多个对象之间更高层次的联系。其次，本论文将普通图情形下已有的梯度、伴随算子和p-拉普拉斯算子（针对顶点和弧）的定义加以推广。最后，本论文将普通图情形中的概念扩展到超图情形，从而为顶点和超弧分别提出普遍适用的梯度、伴随算子和p-拉普拉斯算子定义。

致谢

我谨向 Martin Burger 教授致谢，感谢他热情地欢迎我加入他的课题组，并与我分享他在这一主题上的专业知识。我也感谢他抽出时间与我讨论这篇学位论文的总体方向，并为进一步发展我的想法提供宝贵建议。

此外，我还要感谢我的导师 Piero Deidda 硕士和 Daniel Tenbrinck 博士，感谢他们在这篇学位论文的各个阶段给予我支持、提供了许多有用的反馈，并在困难时期鼓励我。Daniel，非常感谢你甚至在晚上也抽空与我碰面，一起攻克学位论文中最棘手的部分；Piero，也非常感谢你尽管目前正忙于自己的博士论文，仍在线上与我们会面。我由衷感激你们的帮助，以及你们为这篇学位论文付出的所有时间。

我非常期待继续与您合作！

引言

本学位论文旨在推广有向正规图和有向超图上已有的梯度、伴随算子、散度、拉普拉斯算子及p-拉普拉斯算子的定义。目前，大多数出版物只介绍针对相应领域的应用专属概念，例如化学、生物学、社会学或电气工程。本学位论文不再另行引入面向应用的有向正规图和超图微积分版本，而是提供了非常通用的概念，可与相关出版物中的具体定义相匹配。

由于超图是一个相当新的研究主题，本学位论文首先详细介绍超图，尤其阐述如何通过不同的邻接矩阵、关联矩阵和邻接张量以代数方式表示超图。此外，学位论文还深入分析了超图为何是典型普通图的自然扩展，并证明每个普通图都是超图的一个特例。

此外，本学位论文还考察了超图的两种不同普通图表示，这可能会让人质疑最初引入超图的必要性。然而，与超图相比，这两种普通图表示——一种采用二部正规图，另一种采用带有完全子图的普通图——都存在显著缺陷。第一个缺点是映射回底层超图通常并非唯一；第二个缺点是普通图表示中的顶点数和\ 或边和弧可能大幅增加。这说明，相较于规模更大的普通图，采用更复杂的超图概念是合理的。

学位论文的第二部分则着重介绍有向正规图和超图上的梯度、伴随算子、散度、拉普拉斯算子和p-拉普拉斯算子。与其他出版物中已有的定义相比，这些算子更具一般性，并且可以通过选择不同的参数和权函数，针对不同的应用场景进行单独调整。

第（1）节给出了普通图的所有基本定义，并介绍了其代数表示；第（2）节则引入超图及其矩阵表示和张量表示。第（3）节列出了一些关于普通图和超图的补充定义，这些定义将在本学位论文后续部分用到。此外，第（4）节着重探讨普通图与超图之间的联系：证明每个普通图都是超图，并对超图的两种普通图表示进行批判性分析。

第（5）节介绍了定义在普通图的顶点、弧或边的定义域上的实值函数这一概念；第（6）节则定义了顶点梯度算子和弧梯度算子，以及顶点伴随算子和弧伴随算子。第（7）节利用这些算子计算普通图上相应的散度、拉普拉斯算子和 p-拉普拉斯算子。第（8）节将普通图上的实值顶点函数、弧函数和边函数推广为超图上的实值顶点函数、超弧函数和超边函数；第（9）节则利用这些超图上的广义函数，给出有向超图上的顶点梯度、超弧梯度、顶点伴随算子和超弧伴随算子的定义。最后，第（10）节将普通图情形推广至超图，介绍超图上作用于顶点和超弧的散度、拉普拉斯算子和 p- 拉普拉斯算子。

相关工作

以下出版物讨论了图或超图上的梯度、伴随算子、拉普拉斯算子或p-拉普拉斯算子。此外，以下大多数资料都包含新引入概念的实用应用。

- Elmoataz、Toutain、Tenbrinck（2015年）：图上的p-拉普拉斯算子与 ∞-拉普拉斯算子及其在图像与数据处理中的应用 [4]

  本文介绍了普通图上的p-拉普拉斯算子和 ∞-拉普拉斯算子，以及必要的梯度、伴随算子和散度定义，这些定义与连续情形的定义相符。文中介绍的应用包括图像复原、图像简化、插值、主动轮廓、半监督分割、分类和非局部图像修复。

  有向普通图的梯度、伴随算子、散度、拉普拉斯算子和 p-拉普拉斯算子，为本学位论文推广普通图情形中的相应算子，并在第二步将这些推广后的定义扩展到超图情形，提供了出发点。

- Jost、Mulas、Zhang（2021）：有向超图的p-拉普拉斯算子 [7]

  这篇出版物同时介绍了一般有向超图的顶点p-拉普拉斯算子和超边p-拉普拉斯算子（注：在本学位论文中，[7] 的超边称为超弧）。此外，文中讨论的应用包括顶点划分问题、超边划分问题，以及1-拉普拉斯算子的最小、最大和最小非零特征值问题。

  [7] 中的顶点p-拉普拉斯算子和超边p-拉普拉斯算子的定义，是本学位论文中介绍的更一般的顶点p-拉普拉斯算子和超弧p-拉普拉斯算子定义的一个特例。

- Jost、Mulas（2019年）：化学反应网络的超图拉普拉斯算子 [8]

  本文介绍了一种称为化学超图的有向超图特例，专为将超图应用于化学反应网络而设计。因此，超图的每条超边（注：在本学位论文中，[8]的超边称为超弧）都编码了一种元素的化学反应，而这些元素则编码为顶点。此外，本文还给出了拉普拉斯算子的定义，并分析了相应的特征值，重点探讨其在化学反应中的应用。

- Mulas、Kuehn、Böhle、Jost（2021）：超图上的随机游走和拉普拉斯算子：何时二者相符？ [10]

  本文介绍了无向超图上的随机游走概念。文中将相应的超图随机游走拉普拉斯算子与 [7], 中的归一化超图拉普拉斯算子进行了比较，后者基于生物学或化学应用，而非随机游走。此外，本文还对这两种不同的超图拉普拉斯算子进行了谱分析。

- Ding、Cui（2020）：《超图信号处理：理论基础与实际应用》 [13]

  本文提出了一个新的超图信号处理框架，以及用于数据分析应用的新方法。这些方法依托无向超图的张量表示，以捕捉高阶交互。研究结果表明，与传统信号处理方案相比，采用新提出的超图信号处理框架可显著提高准确率。其应用包括数据压缩、谱聚类、分类和去噪；此外，物联网、社交网络和自然语言处理也被列为该超图信号处理框架的潜在应用领域。

  尤其是，他们对非有向超图的张量表示的定义与本学位论文密切相关。该文献还基于普通图情形下的定义，给出了超图上的拉普拉斯算子 $L = D - A$ 的定义，但使用张量代替矩阵。

目录

摘要 I

致谢 **II**

引言 **III**

相关工作 **V**

1 正规图 1

1.1 普通图的一般定义.1 1.2 普通图的表示.4

2 超图 7

2.1 超图的一般定义.7 2.2 超图表示.10

3 普通图和超图的补充定义 2 **9**

3.1 普通图的补充定义.29 3.2 超图的补充定义.32

4 普通图与超图之间的联系 3 **5**

4.1 每个普通图都是超图.35 4.2 表示为普通图的超图.38

5 普通图上的实值函数 51

5.1 普通图上的实值顶点函数.51 5.2 正规图上的实边函数和实弧函数.53

6 有向正规图上的梯度和伴随算子 59

6.1 有向正规图上的梯度算子.59 6.2 有向正规图上的伴随算子.63

7 有向正规图上的散度与拉普拉斯算子 **69**

7.1 有向正规图上的散度算子.69 7.2 有向正规图上的拉普拉斯算子.71

7.3 p-拉普拉斯算子在有向正规图上的应用.75

8 超图上的函数 81

8.1 顶点函数.81 8.2 超边函数与超弧函数.83

9 有向超图上的梯度与伴随算子 91

9.1 有向超图上的梯度算子.91 9.2 有向超图上的伴随算子.97

10 有向超图上的散度与拉普拉斯算子 104

10.1 有向超图上的散度算子.104 10.2 有向超图上的拉普拉斯算子.106 10.3 有向超图上的p-拉普拉斯算子.112

11 结论 122

参考文献 123

1 普通图

给定一个由$N \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$个数据点$v_1, v_2, \ldots v_N$组成的数据集，目标是先利用普通图，之后再利用超图，来捕捉并描述这些数据点之间的复杂关系。在这两种情况下，给定的数据点$v_1, v_2, \ldots v_N$均由图的顶点表示，而数据点内部的关系则根据图的类型，由边、弧、超边或超弧来描述 (。

小节 (1.1) 介绍了无向普通图和有向普通图的定义。在标准图论中，这些定义通常称为图和有向图，其中顶点通过成对连接相连，这些连接称为边或弧。此外，本节还讨论了图的方向与朝向之间的区别，并给出了具有反转后方向的有向正规图的定义。最后，小节 (1.2) 给出了邻接矩阵和关联矩阵的定义，可用于以代数方式描述普通图。

1.1 正规图的一般定义

为了突出超图相较于标准普通图所具有的增强功能，下面给出了无向普通图和有向普通图的定义。这些定义基于 [12] 中简单图和简单有向图的定义。

定义 1.1 (**无向正规图** NG)。 *([12] 中第 148 页：简单图)* 无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$ 是一个由有限顶点集$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots v_N\}$和边集 $\mathcal{E}_G \subseteq \left\{\{v_i,\ v_j\} \,\middle|\, v_i,\ v_j \in \mathcal{V},\ v_i \neq v_j\right\}$组成的元组。

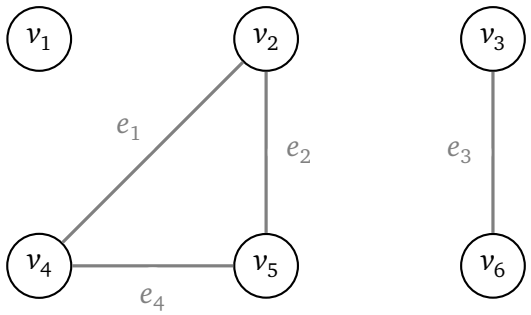
示例 1.2 (**无向正规图**)。
给定一个顶点集

$$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

以及一组边

$$\mathcal{E}_G = \{\{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_5\}\},$$

那么，无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$ 可以用以下方式表示：



对于无向正规图，边 $\{v_i,v_j\}$ 等于边 $\{v_j,v_i\}$，对所有顶点 $v_i,v_j \in \mathcal{V}$ 都成立，因此这种图称为“无向”图。与此相反，也存在一些正规图，其中方向 (边中顶点的顺序) 很重要。

定义 1.3 (有向正规图 *OG*)。 （*[12]* 第 *161* 页：简单有向图）有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_G)$ 由与无向正规图相同的有限顶点集 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots v_N\}$ 定义，但它不是由边集 $\mathscr{E}_G$ 构成，而是由弧集 $\mathscr{A}_G \subseteq \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in \mathcal{V}, v_i \neq v_j\} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 构成。

对于弧 $a_q = (v_i,v_j) \in \mathscr{A}_G$，顶点 v_i 称为弧 a_q 的输出顶点，相应地，顶点 v_j 称为弧 a_q 的输入顶点。

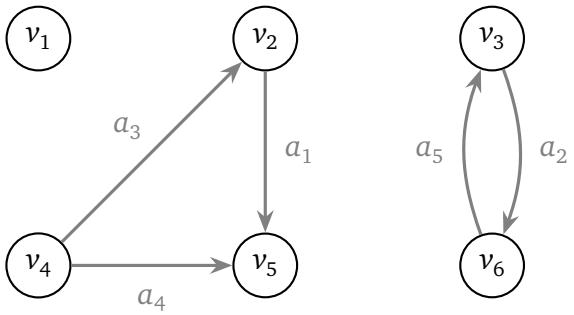
示例 1.4(有向正规图).
给定一个顶点集

$$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

以及一组弧

$$\mathscr{A}_G = \{(v_2, v_5), (v_3, v_6), (v_4, v_2), (v_4, v_5), (v_6, v_3)\},$$

the 有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_G)$ 可通过以下方式进行可视化：



注记 1.5 (**顶点集、边集和弧集的有限性**)
对于任意给定的无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$ 或有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$，假设顶点集、边集和弧集均为有限集：

$$|\mathcal{V}|, |\mathcal{E}_G|, |\mathcal{A}_G| < \infty. \tag{1}$$

此外，为了确保能够清楚地区分边和弧，假设边集 $\mathcal{E}_G$ 中的每条边以及弧集 $\mathcal{A}_G$ 中的每条弧都是唯一的，因此各自只出现一次。

在有向正规图中，更改弧 $(v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G$ 中顶点的顺序会表示不同的弧，这意味着对于满足 $v_i \neq v_j$ 的顶点 v_i、$v_j \in \mathcal{V}$，$(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$。

注记 1.6 (**方向与方向**)。
正如 *[10]*，中的注记 *3.1* 所述，本文将有向图与非有向图区分开来，而不使用有向图与无向图这一对术语，因为对于每条定向弧而言，其方向只有一种，但如果将其解释为边，则存在两种可能的方向。因此，改变一个图的方向就意味着交换每条弧的输出顶点和输入顶点。对于后文引入的超图，同样的推理也成立。

基于这条注记，可以为任意给定的有向正规图定义一个具有反转后的方向的有向正规图。

定义 1.7（**反转后的方向有向正规图** $\widetilde{OG}$）。
为了切换有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$ 的方向，顶点集 $\mathcal{V}$ 保持不变，但是对于每条弧 $a_q \in \mathcal{A}_G$，其输出顶点和输入顶点互换：

$$\widetilde{OG} = (\mathcal{V}, \widetilde{\mathcal{A}_G}) \tag{2}$$

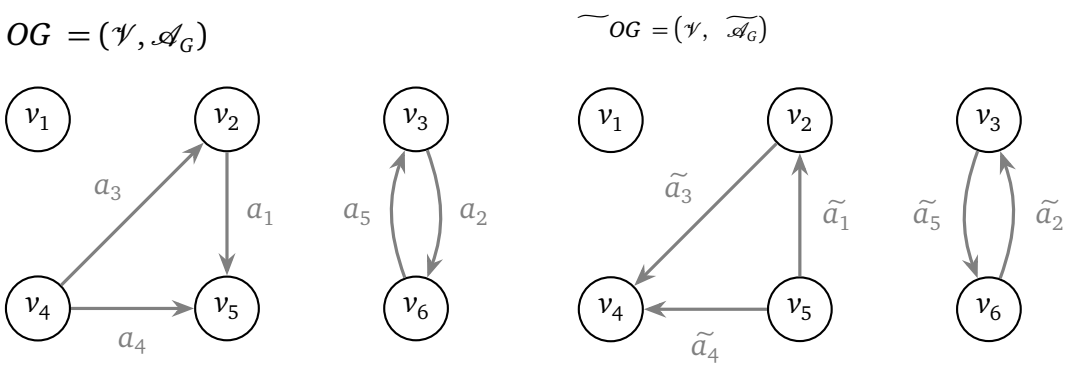
with

$$\widetilde{\mathcal{A}_G} = \{(v_j, v_i) \mid (v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G\}. \tag{3}$$

示例 1.8 (**有向正规图（反转后的方向）**).
给定前一个有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$，其中 $\mathcal{A}_G = \{(v_5, v_2), (v_6, v_3), (v_2, v_4), (v_5, v_4), (v_3, v_6)\}$，则相应的具有反转后的方向的有向正规图 $\widetilde{OG} = (\mathcal{V}, \widetilde{\mathcal{A}_G})$ 具有

$$\widetilde{\mathcal{A}_G} = \{(v_5, v_2), (v_6, v_3), (v_2, v_4), (v_5, v_4), (v_3, v_6)\}$$

可以通过以下方式进行可视化：



1.2 正规图的表示方式

为了不仅从视觉上表示普通图，还能从代数角度表示它们，通常会使用矩阵，例如在 [5], [6] and [11] 中。

定义 1.9 (**邻接矩阵** A_{NG})**.** *([11]*中的第*179*页：邻接矩阵*)* 无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$ 的邻接矩阵 $A_{NG} \in \{0,1\}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{V}|} = \{0,1\}^{N\times N}$ 定义如下：

$$(A_{NG})_{ij} = \begin{cases} 1 & \{v_i, v_j\} \in \mathcal{E}_G \\ 0 & otherwise \end{cases} . \tag{4}$$

因此，邻接矩阵的每个条目 $(A_{NG})_{ij}$ 表示两个顶点 v_i、$v_j \in \mathcal{V}$ 是否通过边 $\{v_i$、$v_j\} \in \mathcal{E}_G$ $\left(\text{连接，或等价地 } \{v_j、v_i\} \in \mathcal{E}_G\right)$。由于这一性质，邻接矩阵 A_{NG} 是对称的。

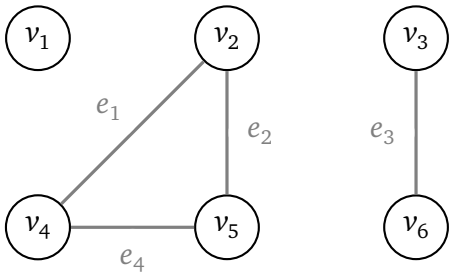
邻接矩阵也可用于表示有向正规图。在这种情况下，不仅需要记录两个顶点是否相连，还需要记录连接它们的弧的方向。

定义 1.10 (**邻接矩阵** A_{OG})。 （*[11]* 中的第*179*页：邻接矩阵）有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_G)$ 的邻接矩阵 $A_{OG} \in \{0,1\}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{V}|} = \{0,1\}^{N\times N}$ 定义如下：

$$(A_{OG})_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in \mathscr{A}_G \\ 0 & otherwise \end{cases} . \tag{5}$$

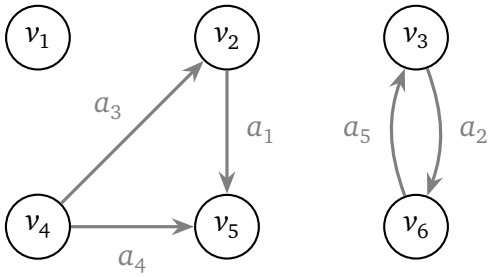
与此前介绍的无向普通图的邻接矩阵 A_{NG} 相比，这个邻接矩阵不一定是对称的，因为 $(v_i,v_j) \in \mathscr{A}_G$ 并不意味着 $(v_j,v_i) \in \mathscr{A}_G$，因此可能出现 $(A_{NG})_{ij} = 1$ 而 $(A_{NG})_{ji} = 0$ 的情况。

示例 1.11 (**邻接矩阵**)。
给定前述无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$，其包含 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$和 $\mathcal{E}_G = \{\{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_5\}\}$，则对应的邻接矩阵是一个二元 6×6 矩阵：



$$A_{NG} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

类似地，对于前面具有相同顶点集 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ 和弧集 $\mathcal{A}_G = \{(v_2, v_5), (v_3, v_6), (v_4, v_2), (v_4, v_5), (v_6, v_3)\}$ 的有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$，其邻接矩阵为：



$$A_{OG} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

除了表示两个顶点是否相连的邻接矩阵外，还引入了关联矩阵。关联矩阵记录了顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 是否属于边 $e_q \in \mathcal{E}_G$ 或弧 $a_q \in \mathcal{A}_G$ 的信息，该信息位于第 i 行第 q 列。

定义 1.12 (**关联矩阵** I_{NG})。（*[6]*第 *291* 页：关联矩阵）无向普通图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$ 的关联矩阵 $I_{NG} \in \{0,1\}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}_G|} = \{0,1\}^{N \times M}$ 定义如下：

$$(I_{NG})_{iq} = \begin{cases} 1 & \{v_i, v_j\} = e_q \text{ for some } v_j \in \mathcal{V} \setminus \{v_i\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} . \tag{6}$$

因此，关联矩阵中的正项 $(I_{NG})_{iq}$ 表示顶点 v_i 属于边 $e_q \in \mathcal{E}_G$。

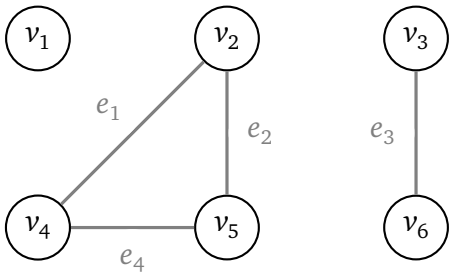
对于有向正规图，还需要区分每条弧 $a_q \in \mathcal{A}_G$ 的输出顶点和输入顶点。

定义 1.13 (**关联矩阵** I_{OG})。 （*[5]* 第 *827* 页：关联矩阵）有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$ 的关联矩阵 $I_{OG} \in \{-1,0,1\}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{A}_G|} = \{-1,0,1\}^{N\times M}$ 定义如下：

$$(I_{OG})_{iq} = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) = a_q \text{ for some } v_j \in \mathcal{V}\setminus\{v_i\} \\ -1 & (v_j, v_i) = a_q \text{ for some } v_j \in \mathcal{V}\setminus\{v_i\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} . \tag{7}$$

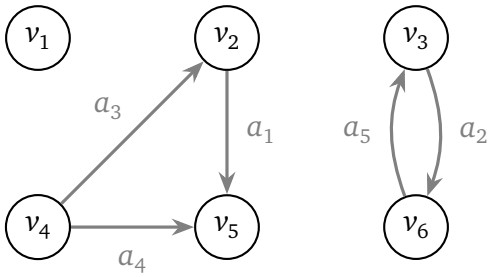
因此，关联矩阵中的正元素 $(I_{OG})_{iq}$ 表示顶点 v_i 是弧 $a_q \in \mathcal{A}_G$ 的输出顶点；类似地，若 v_i 是弧 a_q 的输入顶点，则元素 $(I_{OG})_{iq}$ 带负号。

示例 1.14 （**关联矩阵**）
给定无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$，其顶点为 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ 和 $\mathcal{E}_G = \{\{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_5\}\}$，则相应的关联矩阵是一个二进制 6×4 矩阵：



$$I_{NG} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

对于有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$，其中 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ 和 $\mathcal{A}_G = \{(v_2, v_5), (v_3, v_6), (v_4, v_2), (v_4, v_5), (v_6, v_3)\}$，相应的关联矩阵是一个 6×5 矩阵：



$$I_{OG} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 超图

在前面介绍的普通图中，边或弧只能对数据点 $v_1, v_2, \ldots v_N$ 之间的成对交互或连接进行建模，这使得高阶关系的表示变得无效，甚至不可能实现。例如，这种高阶连接可能出现在社交网络中，因为人们不仅可以两两成为朋友，还可以形成由两人以上组成的朋友群体。

因此，本节通过在小节（2.1）中引入无向超图和有向超图的概念，填补这一空白，并将其作为普通图的一种可能扩展。借助超边和超弧，可以用数学方式描述图中多个顶点之间的关联。此外，基于普通图情形中的定义，本文讨论了超图中方向与指向之间的区别，并给出了方向切换后的有向超图的定义。

随后，小节（2.2）对邻接矩阵和关联矩阵的概念进行了推广，使其也能够描述超图。对于有向超图的广义邻接矩阵，本文介绍了两种不同形式：一种是非唯一形式，其维数与普通图情形和无向超图情形相匹配；另一种是唯一形式，其维数更大。由于有向超图的广义邻接矩阵不易直接解读，本文还详细说明了如何从其邻接张量中还原底层有向超图。

2.1 超图的一般定义

引入超图是为了更优雅地捕捉数据点 $v_1, v_2, \ldots v_N$ 之间更复杂的关系，同时它也是普通图的自然扩展。无向超图和有向超图的定义基于 [7] 和 [13]。

定义 2.1 (**无向超图** *NH*)。 *(第 641 页 [13]: 超图)*
无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$ 的定义（*1.1*）可以推广到无向超图。无向超图定义为一对 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$，其顶点集与普通图相同，即 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots v_N\}$，但其所谓超边集 $\mathcal{E}_H$ 更为一般。超边集 $\mathcal{E}_H \subseteq \left\{e_q \,\middle|\, e_q \subseteq \mathcal{V} \text{ 满足 } \left|e_q\right| \geq 2\right\} \subset 2^{\mathcal{V}}$ 是顶点集的幂集 $2^{\mathcal{V}}$ 的子集，其中每条超边可以包含不同数量的顶点 $\big($，且至少包含两个顶点$\big)$。

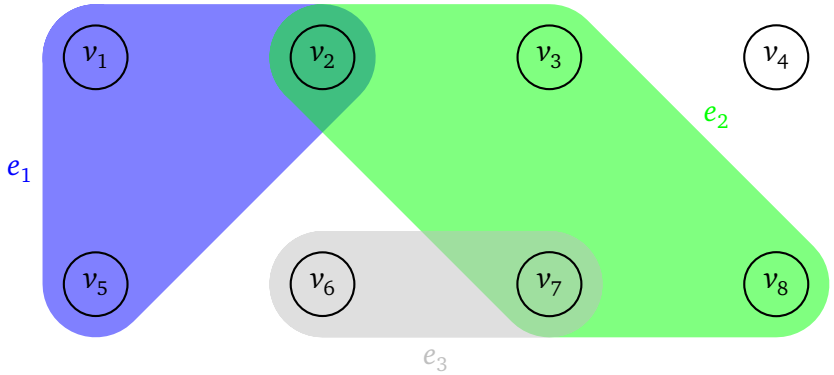
示例 2.2（无向超图）。
给定一个顶点集

$$\mathscr{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

以及一个超边集

$$\mathscr{E}_H = \{\{v_1, v_2, v_5\}, \{v_2, v_3, v_7, v_8\}, \{v_6, v_7\}\},$$

那么无向超图 $NH = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_H)$ 可用以下方式可视化：



与普通图的情况一样，超图也有有向版本。

定义 2.3（有向超图 OH）。（*[7]*中第 *31* 页：化学超图）有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H)$ 定义为定义 *(1.3)* 中有向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G)$ 的推广，它由相同的顶点集 $\mathscr{V}$ 和另一组所谓的超弧 $\mathscr{A}_H$ 组成。与无向超图中的超边不同，有向超图的超弧具有方向，这意味着每条超弧都由两个不相交的顶点集组成

$$a_q = \left(a_q^{out}, a_q^{in}\right) \tag{8}$$

其中 $\emptyset \subset a^{out}{}_q, a^{in}{}_q \subset \mathscr{V}$, $a^{out}{}_q \cap a^{in}{}_q = \emptyset$, $a^{out}{}_q$ 是所有输出顶点组成的集合，而 $a^{in}{}_q$ 是超弧 a_q 的所有输入顶点组成的集合。

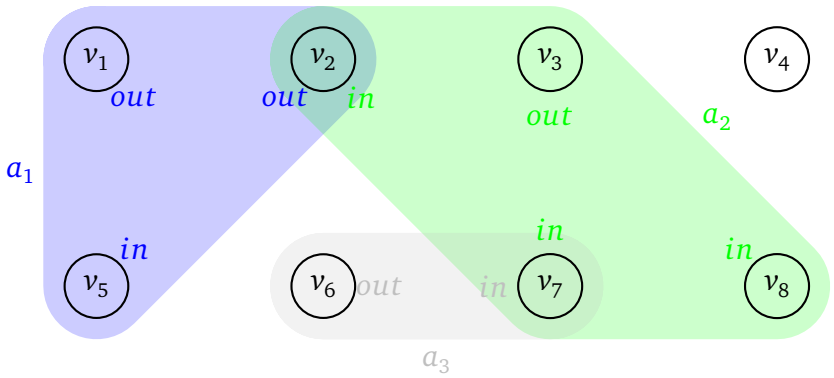
示例 2.4(有向超图)。
给定一个顶点集

$$\mathscr{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

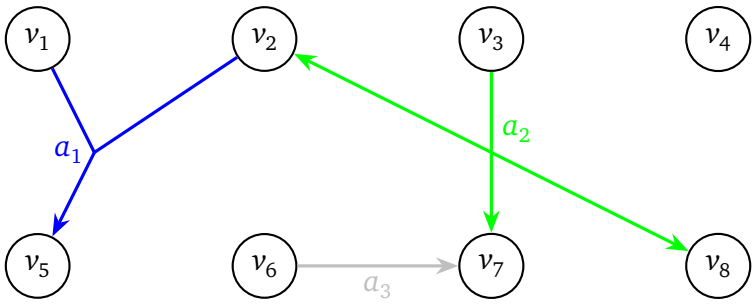
和一个超弧集

$$\mathscr{A}_H = \{(\{v_1, v_2\}, \{v_5\}), (\{v_3\}, \{v_2, v_7, v_8\}), (\{v_6\}, \{v_7\})\},$$

那么，有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H)$ 可以通过以下方式进行可视化：



或者，也可以像普通图中的弧一样对超弧进行可视化：



注记 2.5 (顶点集、超边集和超弧集的有限性)
对于任意给定的无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$ 或有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$，假设顶点集、超边集和超弧集均为有限集：

$$|\mathcal{V}|, |\mathcal{E}_H|, |\mathcal{A}_H| < \infty. \tag{9}$$

此外，为了确保能够清晰地区分超边和超弧，假定每条超边和每条超弧在超边集合 $\mathcal{E}_H$ 或超弧集合 $\mathcal{A}_H$ 中最多出现一次，因此可以对其进行明确识别。

有向超图的方向也可以像有向普通图的情况一样进行切换。

定义 2.6(方向切换后的有向超图 OH)。
为了改变有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$的方向，顶点集 $\mathcal{V}$保持不变；然而，对于每条超弧 $a_q \in \mathcal{A}_G$，输出顶点集和输入顶点集 $a^{out}{}_q$ 与 $a^{in}{}_q$ 会互换，从而导致

$$\widetilde{OH} = \left(\mathcal{V}, \widetilde{\mathcal{A}_H}\right) \tag{10}$$

with

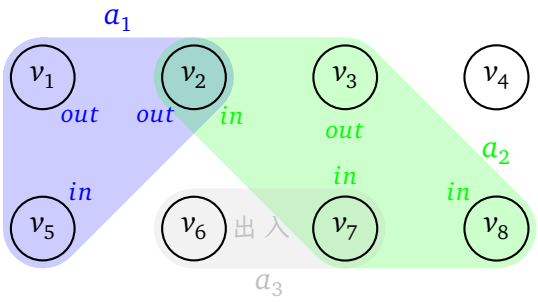
$$\widetilde{\mathcal{A}_H} = \left\{ \tilde{a}_q = \left(\widetilde{a_q^{out}}, \widetilde{a_q^{in}}\right) \,\middle|\, a_q \in \mathcal{A}_H \text{ and } \widetilde{a_q^{out}} = a_q^{in}, \widetilde{a_q^{in}} = a_q^{out} \right\}. \tag{11}$$

例 2.7（方向切换后的有向超图）。
给定具有 $\mathcal{V}=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$ 和 $\mathcal{A}_H=\{(\{v_1,v_2\},\{v_5\}),(\{v_3\},\{v_2,v_7,v_8\}),(\{v_6\},\{v_7\})\}$，那么对应的反转后的方向有向超图 $\widetilde{OH}=(\mathcal{V},\widetilde{\mathcal{A}_H})$ 具有

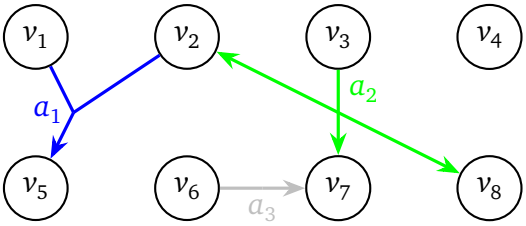
$$\widetilde{\mathcal{A}_H}=\{(\{v_5\},\{v_1,v_2\}),(\{v_2,v_7,v_8\},\{v_3\}),(\{v_7\},\{v_6\})\}$$

可以用以下两种方式表示：

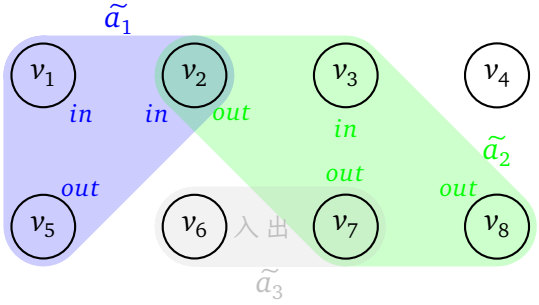
$OH=(\mathcal{V},\mathcal{A}_H)$



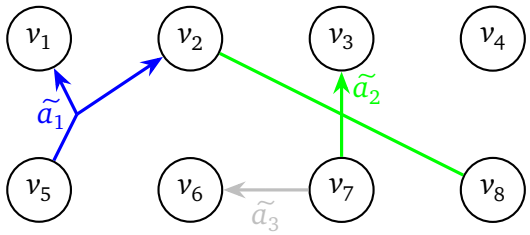
无向超图 $=(\mathcal{V},\mathcal{A}_H)$



$\widetilde{OH}=(\mathcal{V},\widetilde{\mathcal{A}_H})$



无向超图 $=(\mathcal{V},\widetilde{\mathcal{A}_H})$



2.2 超图的表示

本小节将 [13], 中介绍的无向超图表示方法推广到有向超图的表示。

以下定义已使用无向超图的最大超边基数max_e 以及有向超图的最大超弧基数max_a，其形式化定义见定义（3.8）。最大超边基数max_e 是指无向超图中单条超边所包含的顶点数的最大值。类似地，最大超弧基数max_a是指有向超图中单条超弧 (的输出顶点与输入顶点的并集所包含的顶点数的最大值)。

为了以代数方式描述无向超图，可以使用定义 (1.12) 中关联矩阵 I_{NG} 的推广版本。

定义 2.8（关联矩阵 I_{NH}）。（第 642 页，见 [13]）
关联矩阵 $I_{NH} \in \{0,1\}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{E}_H|} = \{0,1\}^{N\times M}$

无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$ 的关联矩阵定义如下：

$$(I_{NH})_{iq} = \begin{cases} 1 & v_i \in e_q \\ 0 & otherwise \end{cases} . \tag{12}$$

与无向正规图的关联矩阵 I_{NG} 不同，描述超边 $e_q \in \mathcal{E}_H$ 的关联矩阵 I_{NH} 的每一列中的非零元素数量并不受限于 2，而是受 $|\mathcal{V}|$ 限制；更具体地说，受该超图的最大超边基数 max_e 限制。

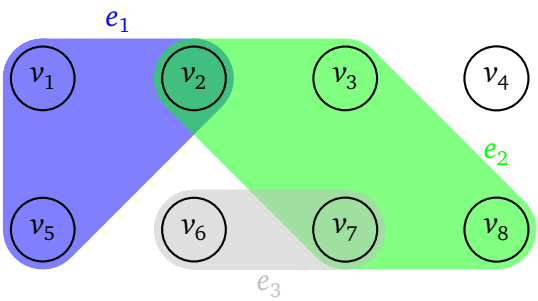
有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$ 也可以通过关联矩阵I_{OH}来描述，这与定义 (1.13) 中无向正规图的关联矩阵 I_{OG} 类似。

定义 2.9 (关联矩阵 I_{OH})**.**
关联矩阵 $I_{OH} \in \{-1,0,1\}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{A}_H|} = \{-1,0,1\}^{N\times M}$ 有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$ 的定义如下：

$$(I_{OH})_{iq} = \begin{cases} 1 & v_i \in a_q^{out} \\ -1 & v_i \in a_q^{in} \\ 0 & otherwise \end{cases} . \tag{13}$$

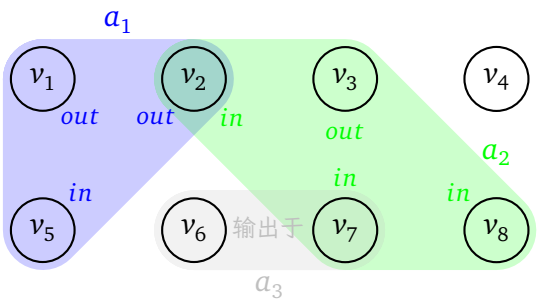
根据定义，超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 的所有输出顶点集合与所有输入顶点集合互不相交 $\left(a^{out}{}_q \cap a^{in}{}_q = \emptyset\right)$，因此关联矩阵 I_{OH} 定义良好。

示例 2.10 (关联矩阵)。
给定前述无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$，其顶点集为 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$，超边为 $\mathcal{E}_H = \{\{v_1, v_2, v_5\}, \{v_2, v_3, v_7, v_8\}, \{v_6, v_7\}\}$，则相应的关联矩阵是一个二进制 8×3 矩阵：



$$I_{NH} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

类似地，对于前述有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$，其顶点集为 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$，超弧集为 $\mathcal{A}_H = \{(\{v_1, v_2\}, \{v_5\}), (\{v_3\}, \{v_2, v_7, v_8\}), (\{v_6\}, \{v_7\})\}$，关联矩阵由下式给出 y:



$$I_{OH} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

使用关联矩阵I_{NH} 或I_{OH} 来描述超图虽然容易理解，但同时也限制了对超图进行数学运算的可能性。因此，除了矩阵表示之外，文献 [13] 还引入了无向超图的邻接张量表示。与定义 (1.9) 中普通图的邻接矩阵A_{NG} 类似，这种表示用于指示一个顶点子集是否由一条超边连接。

定义 2.11 (邻接张量 T_{NH})。 （*[13]* 第 *643* 页：邻接张量）无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$ 可以用一个阶数为 $max_e{}^{th}$、维数为 N 的张量来描述：

$$T_{NH} \in \mathbb{R}^{\underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{max_e - times}}$$

每条由 $2 \leq n \leq max_e$ 个顶点组成的超边 $e_q = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots\ldots v_{i_n}\} \in \mathcal{E}_H$，由所有满足以下条件的项 $(T_{NH})_{m_1, m_2, \ldots m^{max_e}}$ 表示：

$$\{i_1, i_2, \ldots i_n\} = \{m_1, m_2, \ldots m_{max_e}\},$$

这意味着，$(T_{NH})_{m_1, m_2, \ldots m^{max_e}}$ 的 n 个索引与 $\{i_1, i_2, \ldots\ldots i_n\}$ 完全相同，其余的 $max_e - n$ 个索引则从 $\{i_1, i_2, \ldots\ldots i_n\}$ 中任意选取。所有满足这两个条件、因而表示超边 $e_q \in \mathcal{E}_H$ 的项 $(T_{NH})_{m_1, m_2, \ldots m^{max_e}}$ 定义为：

$$(T_{NH})_{m_1, m_2, \ldots m_{max_e}} = \frac{n}{\sum_{\{l_1, l_2, \ldots l_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}: \sum_{k=1}^{n} l_k = max_e\}} \frac{max_e!}{l_1!\, l_2! \cdots l_n!}} > 0, \tag{14}$$

其中，分母中的求和遍历所有和为 max_e 的正整数 n 元组。T_{NH} 中所有不对应超边 $e_q \in \mathcal{E}_H$ 的项均设为0。

无向超图的邻接张量 T_{NH} 可以进行调整，以便同时描述有向超图，并构成邻接矩阵 A_{OG} 对定义（1.10）中的有向普通图的可行推广。

定义 2.12 (邻接张量 T_{OH})。
一个有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$ 可以由一个 $max_a{}^{th}$ 阶 N 维张量表示：

$$T_{OH} \in \mathbb{R}^{\overbrace{N \times N \times \cdots \times N}^{max_a - times}}.$$

每个由 $2 \leq n \leq max_a$ 个顶点组成且满足 $1 \leq r \leq n-1$ 的超弧 $a_q = \left(a^{out}q, a^{in}q\right) = \left(\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots v_{i_r}\}, \{v_{i_{r+1}}, v_{i_{r+2}}, \ldots v_{i_n}\}\right) \in \mathcal{A}_H$，由张量 $(T_{OH})_{m_1,m_2,\ldots m_s,m_{s+1},\ldots m^{max_a}}$ 的所有元素表示，其中 $r \leq s \leq r + max_a - n$，且

$$\{i_1, i_2, \ldots i_r\} = \{m_1, m_2, \ldots m_s\},$$
$$\{i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots i_n\} = \left\{m_{s+1}, m_{s+2}, \ldots m_{max_a}\right\},$$

这意味着，$(T_{OH})_{m_1,m_2,\ldots m^{max_a}}$ 的前 s 个索引仅由 $\{i_1, i_2, \ldots i_r\}$ 组成，其中每个顶点索引 $\{i_1, i_2, \ldots i_r\}$ 都至少在 $m_1, m_2, \ldots m_s$ 中出现一次。其余 $max_a - s$ 个索引 $m_{s+1}, m_{s+2}, \ldots m^{max_a}$ 同样仅由顶点索引 $\{i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots i_n\}$ 组成。对于表示超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 的所有此类索引 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a}$，定义：

$$(T_{OH})^{a_q}_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a}} = \frac{n}{\sum_{\{l_1,l_2,\ldots l_n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \sum_{k=1}^{n} l_k = max_a\}} \frac{max_a!}{l_1!\ l_2!\ \cdots\ l_n!}} > 0. \tag{15}$$

由于索引 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a}$ 可以同时表示多个超弧，因此邻接张量 T_{OH} 的元素设为：

$$(T_{OH})_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a}} = \sum_{a_q \in \mathcal{A}_H \ represented\ by\ m_1,m_2,\ldots m_{max_a}} (T_{OH})^{a_q}_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a}}. \tag{16}$$

T_{OH} 中所有不对应任何超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 的元素均设为 0 .

注记 2.13 (邻接张量的简化)。
由于张量元素 $(T_{NH})_{m_1,m_2,\ldots m^{max_e}}$ *(14)* 和 $(T_{OH})^{a_q}{}_{m_1,m_2,\ldots m^{max_a}}$ *(15)* 中的分母对于识别相应索引所编码的超边或超弧并不起作用，而且计算成本较高，因此可以简化为

$$(T_{NH})_{m_1,m_2,\ldots m_{max_e}} = \frac{n}{2} > 0 \tag{17}$$

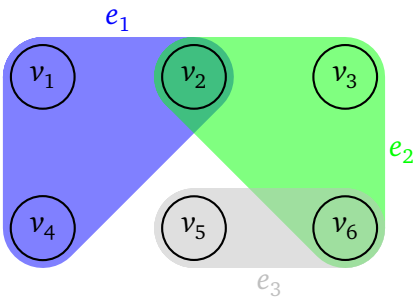
对于任意超边 $e_q = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots v_{i_n}\} \in \mathcal{E}_H$，以及

$$(T_{OH})^{a_q}_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a}} = \frac{n}{2} > 0 \tag{18}$$

对于任意超弧 $a_q = \left(\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots\ldots v_{i_r}\}, \{v_{i_{r+1}}, v_{i_{r+2}}, \ldots\ldots v_{i_n}\}\right) \in \mathcal{A}_H$，且不会造成任何信息损失。

该更复杂的定义在 *[13]* 中提出，旨在将无向超弧及其邻接张量应用于信号处理；然而，对于本学位论文的研究范围而言，这些特定性质并非必要。因此，下面的示例采用邻接张量 T_{NH} 和 T_{OH} 的简化定义。

例2.14 (邻接张量)。
给定无向超图 $NH=(\mathcal{V},\mathcal{E}_H)$，其顶点集为 $\mathcal{V}=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$，超边为 $\mathcal{E}_H=\{\{v_1,v_2,v_4\},\{v_2,v_3,v_6\},\{v_5,v_6\}\}$，则最大超边基数为 $max_e=3$，因此超边可由以下索引描述：



$$
\begin{aligned}
e_1=\{v_1,v_2,v_4\}: &\quad (1,2,4),(1,4,2),(2,1,4),\\
&\quad (4,1,2),(2,4,1),(4,2,1)\\
e_2=\{v_2,v_3,v_6\}: &\quad (2,3,6),(2,6,3),(3,2,6),\\
&\quad (6,2,3),(3,6,2),(6,3,2)\\
e_3=\{v_5,v_6\}: &\quad (5,5,6),(5,6,5),(6,5,5),\\
&\quad (5,6,6),(6,5,6),(6,6,5)
\end{aligned}
$$

而邻接张量 T_{NH} 是一个 3^{rd}阶6维张量：

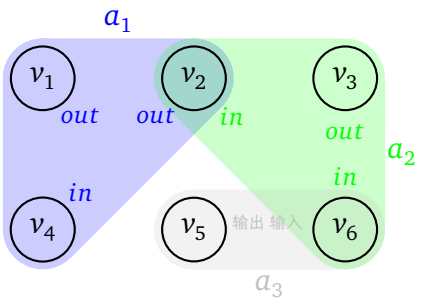
$$
(T_{NH})_{\cdot,\cdot,1}=\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&\frac{3}{2}&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&\frac{3}{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\qquad
(T_{NH})_{\cdot,\cdot,2}=\begin{pmatrix}
0&0&0&\frac{3}{2}&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\frac{3}{2}\\
\frac{3}{2}&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&\frac{3}{2}&0&0&0
\end{pmatrix}
$$

$$
(T_{NH})_{\cdot,\cdot,3}=\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\frac{3}{2}\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&\frac{3}{2}&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\qquad
(T_{NH})_{\cdot,\cdot,4}=\begin{pmatrix}
0&\frac{3}{2}&0&0&0&0\\
\frac{3}{2}&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
$$

$$
(T_{NH})_{\cdot,\cdot,5}=\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&1
\end{pmatrix}
\qquad
(T_{NH})_{\cdot,\cdot,6}=\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0\\
0&0&\frac{3}{2}&0&0&0\\
0&\frac{3}{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}
$$

类似地，对于顶点集为 $\mathcal{V}=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ 且超弧集为 $\mathcal{A}_H=\{(\{v_1,v_2\},\{v_4\}),(\{v_3\},\{v_2,v_6\}),(\{v_5\},\{v_6\})\}$ 的有向超图 $OH=(\mathcal{V},\mathcal{A}_H)$，最大超弧基数为 $give\ n$

由 $max_a=3$ 决定，因此超弧由以下索引（描述。注意：由超弧顶点组成的所有其他索引均无效，因为无法在不改变其顺序的情况下，按照超弧将它们分为输出顶点和输入顶点。）：



$$a_1=(\{v_1,v_2\},\{v_4\}):\quad (1,2,4),(2,1,4)$$
$$a_2=(\{v_3\},\{v_2,v_6\}):\quad (3,2,6),(3,6,2)$$
$$a_3=(\{v_5\},\{v_6\}):\quad (5,5,6),(5,6,6)$$

邻接张量 T_{OH} 仍然是一个 3rd 阶6维张量：

$$(T_{NH})_{\cdot,\cdot,1}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad (T_{NH})_{\cdot,\cdot,2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{3}{2}\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(T_{NH})_{\cdot,\cdot,3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad (T_{NH})_{\cdot,\cdot,4}=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{2}&0&0&0&0\\\frac{3}{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(T_{NH})_{\cdot,\cdot,5}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad (T_{NH})_{\cdot,\cdot,6}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&\frac{3}{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

接下来的页面将讨论如何根据给定的邻接张量 T_{OH} 推导出未知的底层有向超图这一问题。为此，需要一些预备结果，例如邻接张量 T_{OH} 中用于编码超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$ 的索引数量 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a}$，其中 $\left|a^{out}{}_q \cup a^{in}{}_q\right| = max_a$ 或 $\left|a^{out}{}_q \cup a^{in}{}_q\right| = max_a - 1$。

引理 2.15 （描述超弧的T_{OH} 索引数量）。
有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H)$的邻接张量 T_{OH} 中，描述满足 $\left|a^{out}{}_q \cup a^{in}{}_q\right| = max_a$ 的超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$ 的索引数量为

$$\left|a_q^{out}\right|! \left|a_q^{in}\right|! \tag{19}$$

类似地，描述满足 $\left|a^{out}{}_q \cup a^{in}{}_q\right| = max_a - 1$ 的超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$ 的索引数量为

$$\frac{\left(\left|a_q^{out}\right|+1\right)!}{2!}\left|a_q^{out}\right|\left|a_q^{in}\right|! + \left|a_q^{out}\right|!\frac{\left(\left|a_q^{in}\right|+1\right)!}{2!}\left|a_q^{in}\right|. \tag{20}$$

证明。
第一种情况： $\left|a^{out}{}_q \cup a^{in}{}_q\right| = max_a$

给定有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H)$ 的邻接张量 T_{OH} 以及满足 $\left|a^{out}q \cup a^{in}q\right| = max_a$ 的超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，则该超弧由 $n = \left|a^{out}q\right| + \left|a^{in}q\right| = max_a$ 个不同顶点组成。描述 a_q 的每个邻接张量项的 max_a 个索引分为 $\left|a^{out}q\right|$ 个索引，用于描述所有 $\left|a^{out}q\right|$ 输出顶点；同理，$\left|a^{in}q\right|$ 个索引用于描述所有 $\left|a^{in}q\right|$ 输出顶点。

共有 $\left|a^{out}{}_q\right|!$ 种可能的序列用于描述输出顶点，因为其中的顺序确实很重要；基于同样的原因，共有 $\left|a^{in}{}_q\right|!$ 种可能的序列用于描述输入顶点。由于索引是组合在一起的，总共有

$$\left|a_q^{out}\right|! \cdot \left|a_q^{in}\right|!$$

索引编码超弧 $a_q = \left(a^{out}{}_q, a^{in}{}_q\right)$.

第二种情况： $\left|a^{out}{}_q \cup a^{in}{}_q\right| = \text{最大值}_a - 1$

给定一条超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，其包含 $\left|a^{out}{}_q \cup a^{in}{}_q\right| = max_a - 1$，那么该超弧由$n = \left|a^{out}{}_q\right| + \left|a^{in}{}_q\right| = max_a - 1$个不同的顶点组成。这意味着，任何描述超弧 a_q 的索引都恰好包含一个冗余顶点，它要么是某个输出顶点的重复项，要么是某个输入顶点的重复项。

如果冗余顶点是输出顶点，那么描述输出顶点的有效索引数量为

$$\frac{\left(\left|a_q^{out}\right| + 1\right)!}{2!}\left|a_q^{out}\right|$$

其中 $\left(\left|a^{out}{}_q\right| + 1\right)!$ 是描述输出顶点的索引数量，$_{1\,2!}$ 是必需的，因为有一个顶点出现了两次 $(,$ 且重复出现的索引不可区分$)$；因子 $\left|a^{out}{}_q\right|$ 则是因为还有 $\left|a^{out}{}_q\right|$ 个位置可以放置重复的索引。

由于输入顶点没有冗余索引，因此描述输入顶点的有效索引数量为 $\left|a^{in}{}_q\right|!$。

这些索引再次合并，因此，描述超弧 a_q 且输出顶点索引存在冗余时的索引数量可通过以下方式计算：

$$\frac{\left(\left|a_q^{out}\right| + 1\right)!}{2!} \cdot \left|a_q^{out}\right| \cdot \left|a_q^{in}\right|!.$$

基于相同的论证，冗余位于输入顶点索引中的、描述超弧 a_q 的索引数量可计算如下：

$$\frac{\left(\left|a_q^{in}\right| + 1\right)!}{2!} \cdot \left|a_q^{in}\right| \cdot \left|a_q^{out}\right|!.$$

因此，编码具有 $\left|\text{个超弧 } a_q\, a^{out}{}_q \cup a^{in}{}_q\right| = max_a - 1$ 的索引总数为：

$$\frac{\left(\left|a_q^{out}\right| + 1\right)!}{2!}\left|a_q^{out}\right|\left|a_q^{in}\right|! + \left|a_q^{out}\right|!\frac{\left(\left|a_q^{in}\right| + 1\right)!}{2!}\left|a_q^{in}\right|.$$

□

除了描述超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$（其中 $\left|a^{out}{}_q \cup a^{in}{}_q\right| \in \{max_a - 1, max_a\}$）的 T_{OH} 中索引的数量外，邻接张量的其他性质对于注记 (2.18) 中的伪代码也同样是必要的。

定理 2.16（**邻接张量** T_{OH}）**的性质**。
有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H)$ 的邻接张量 $(T_{OH})_{m_1, m_2, \ldots m^{max_a}}$ 的所有元素（最大超弧基数为 max_a）具有以下性质：

1) $(T_{OH})_{m_1, m_2, \ldots m^{max_a}}$ 至多表示 $max_a - 1$ 个不同的超弧。*2)* $(T_{OH})_{m_1, m_2, \ldots m_1, m^{max_a}, \ldots m^{max_a}}$ 至多表示一个超弧。*3)* $(T_{OH})_{m_1, m_2, \ldots m^{max_a}} = \left| \{ a_q \in \mathscr{A}_H \mid \cdot n \text{ 由 } m\, m \ldots m \text{ 表示} \} \right| \{ l_1, l_2, \ldots l_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \sum_{k=1}^{n} l_k = max_a \} \, max_a! \, l_1! \, l_2! \cdots l_n!$。

证明。
给定一个有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H)$，其最大超弧基数为 max_a，索引为 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a}$，其邻接张量为 T_{OH}，则有：

1) 对于所有 $s \in \{1, 2, \ldots m_{max_a} - 1\}$ 索引 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a}$ 划分为两个集合 $(\{m_1, m_2, \ldots m_s\}, \{m_{s+1}, m_{s+2}, \ldots m_{max_a}\})$ 对应一个可能的超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$。

注意：索引 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a}$ 不一定两两不同，因此某些划分并不构成可行超弧。索引的一种划分 $(\{m_1, m_2, \ldots m_s\}, \{m_{s+1}、m_{s+2}、\ldots m_{max_a}\})$，其中 $m_t \in \{m_1, m_2, \ldots m_s\}$、$m_u \in \{m_{s+1}、m_{s+2}、\ldots m_{max_a}\}$ 且 $m_t = m_u$，不表示可行超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，因为 $a^{out}q \cap a^{in}q \neq \emptyset$。

因此，$(T_{OH})_{m_1, m_2, \ldots m^{max_a}}$ 至多编码 $max_a - 1$ 个不同的超弧。

2) 由于对于所有超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，$a^{out}{}_q$、$a^{in}{}_q \neq \emptyset$ 和 $a^{out}{}_q \cap a^{in}{}_q = \emptyset$，因此可以确定：

$$v_{m_1} \in a_q^{out} \quad \text{and} \quad v_{m_{max_a}} \in a_q^{in}$$

因此，如果 m_1 或 m^{max_a} 也出现在 $m_2, m_3, \ldots, m^{max_a - 1}$ 中，那么其中所有索引也都对应于输出顶点或输入顶点。对于 $m_1, m_2, \ldots m_1, m^{max_a}, \ldots m^{max_a}$ 这种情况，这些索引只允许一种可行划分 $(\{m_1, m_2, \ldots m_1\}, \{m^{max_a}, \ldots m^{max_a - 1}, m_{max_a}\})$，因此至多编码一个超弧。

划分 $(\{m_1, m_2, \ldots m_1\}, \{m^{max_a}, \ldots m^{max_a - 1}, m_{max_a}\})$ 仅当对应于一个可行的超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$ 时才成立，其中 $\{m_1, m_2, \ldots m_1\} \cap \{m^{max_a}, \ldots m^{max_a - 1}, m_{max_a}\} = \emptyset$。

3) 如果索引 $m_1, m_2, \ldots m_{max_a}$ 不对应任何超弧，那么由 $m_1, m_2, \ldots m_{max_a}\}$ 表示的集合 $\{a_q \in \mathscr{A}_H$ 为空，并且由 $m_1, m_2, \ldots m_{max_a}\}\big| = 0$ 表示的 $\big|\{a_q \in \mathscr{A}_H$ 也同样为空，因此 $(T_{OH})_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a}} = \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \frac{n}{\sum_{\{l_1,l_2,\ldots l_n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \sum_{k=1}^{n} l_k = max_a\}} \frac{max_a!}{l_1!\ l_2! \cdots l_n!}} \cdot n$ 由 $m_1, m_2, \ldots m_{max_a}\}$ $\{l_1, l_2, \ldots l_n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \sum_{k=1}^{n} l_k = max_a\}$ $max_a!\ l_1!\ l_2! \cdots l_n! = 0$，因为 $n \geq 2$。这与邻接张量 T_{OH} 的定义相符：对于不对应任何超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$ 的那些项，邻接张量的值为零。

如果索引 $m_1, m_2, \ldots m_{max_a}$ 描述了至少一个超弧，那么由 $m_1, m_2, \ldots m_{max_a}\}$ 表示的 $\{a_q \in \mathscr{A}_H$ 的所有超弧都由相同的 n 个顶点 $\{v_{i_1}、v_{i_2}、\ldots v_{i_n}\} = \{v_{m_1}、v_{m_2}、\ldots v_{m_{max_a}}\}$ 组成，其中划分中的输出顶点和输入顶点有所变化。由于集合 $\{a_q \in \mathscr{A}_H$ 中由 $m_1, m_2, \ldots m_{max_a}\}$ 表示的所有超弧的 n 和 max_a 都相同，因此有：

$$
\begin{aligned}
(T_{OH})_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a}} &= \sum_{\substack{a_q \in \mathscr{A}_H \text{ represented by} \\ m_1,m_2,\ldots m_{max_a}}} (T_{OH})^{a_q}_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a}} \\
&= \sum_{\substack{a_q \in \mathscr{A}_H \text{ represented by} \\ m_1,m_2,\ldots m_{max_a}}} \frac{n}{\sum_{\{l_1,l_2,\ldots l_n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \sum_{k=1}^{n} l_k = max_a\}} \frac{max_a!}{l_1!\ l_2! \cdots l_n!}} \\
&= \frac{\left|\{a_q \in \mathscr{A}_H \text{ represented by } m_1, m_2, \ldots m_{max_a}\}\right| \cdot n}{\sum_{\{l_1,l_2,\ldots l_n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \sum_{k=1}^{n} l_k = max_a\}} \frac{max_a!}{l_1!\ l_2! \cdots l_n!}}
\end{aligned}
$$

因此，对于所有索引 $m_1, m_2, \ldots m_{max_a} \in \{1、2、\ldots N\}$，等式

$$
(T_{OH})_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a}} = \frac{\left|\{a_q \in \mathscr{A}_H \text{ represented by } m_1, m_2, \ldots m_{max_a}\}\right| \cdot n}{\sum_{\{l_1,l_2,\ldots l_n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \sum_{k=1}^{n} l_k = max_a\}} \frac{max_a!}{l_1!\ l_2! \cdots l_n!}}
$$

得以满足。

□

下面的示例说明，如何从有向超图的邻接张量中读取有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H)T_{OH}$，并不像在非有向情形下那样简单。

示例 2.17 (邻接张量的解释难题 T_{OH})。给定具有顶点集 $\mathscr{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ 和超弧集 $\mathscr{A}_H = \{(\{v_1\}, \{v_2, v_3\}), (\{v_2\}, \{v_1, v_3\})\}$ 的有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H)$，那么这两条超弧在邻接张量 T_{OH} 中编码时使用以下索引：

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (\{v_1\}, \{v_2, v_3\}): \quad (1,2,3), (1,3,2) \\
a_2 &= (\{v_2\}, \{v_1, v_3\}): \quad (2,1,3), (2,3,1)
\end{aligned}
$$

仅考虑邻接张量的非零指标时，并不明显看出超弧 $(\{v_1, v_2\}, \{v_3\})$ 并非底层有向超图的一部分，因为表示该超弧的两个索引 $(1,2,3)$ 和 $(2,1,3)$ 在邻接张量中都有非零元素。

因此，仅根据顶点 $\mathcal{V}$ 逐一检查每个可能超弧，以确定所有对应索引是否会使邻接张量 T_{OH} 中的条目非零，并不足以找出底层有向超图的所有超弧。相反，必须采用迭代方法。

注记 2.18 (解读邻接张量 T_{OH})。
给定邻接张量元素 $(T_{OH})_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a}} > 0$，则应按以下步骤查找有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_H)$ 中编码的超弧 $a_q = \left(a^{out}{}_q, a^{in}{}_q\right) \in \mathscr{A}_H$。

由于由索引 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a}$ 表示的所有超弧均由相同的 $n = \left|\{m_1, m_2, \ldots m_{max_a}\}\right|$ 个顶点组成，即 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots v_{i_n}\} = \{v_{m_1}, v_{m_2}, \ldots v_{m_{max_a}}\}$，因此该方法区分了两种情况：

$$n \leq max_a - 2 \qquad and \qquad n \in \{max_a - 1, max_a\}.$$

第一种情况：$n \leq$ 最大值$_a - 2$

1) 如定理（*2.16*）中所论证的，对于所有索引 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a}$，若邻接张量元素为 $(T_{OH})_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a}} > 0$，则可以确定，对于由 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a}$ 表示的所有超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，$v_{m_1} \in a^{out}{}_q$ 和 $v_{m_{max_a}} \in a^{in}{}_q$ 均成立。此外，每条编码后的超弧都可以用一个划分来描述。

$$\left(\{v_{m_1}, v_{m_2}, \ldots v_{m_s}\}, \{v_{m_{s+1}}, v_{m_{s+2}}, \ldots v_{m_{max_a}}\}\right) \; with \; s \in \{1, 2, \ldots max_a - 1\}.$$

当 $n \leq max_a - 2$ 时，$m_1, m_2, \ldots m^{max_a}$ 中至少有两个索引是冗余的，因此可以用 m_1 和 m^{max_a} 替换，而新索引仍编码相同的超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$。对于形式为 $m_1, m_2, \ldots m_s, m_1, m^{max_a}, m_{s+1}, \ldots m^{max_a}$ 的索引，这一点尤其成立；如定理（*2.16*）所示，它们唯一地描述了先前的划分。因此，只需检查这些索引对应的邻接项是否为正，即可找出由 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a}$ 表示的所有超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$。

$hyperarcs = \{\}$
remove two redundant indices from $m_1, m_2, \ldots m_{max_a}$
for $s \in \{2, 3, \ldots max_a - 1\}$ ***do***
  if $(T_{OH})_{m_1,m_2,\ldots m_s,m_1,m_{max_a},m_{s+1},\ldots m_{max_a}} > 0$ ***then***
    $hyperarcs \longleftarrow hyperarcs \cup \left(\left\{v_{m_1}, v_{m_2}, \ldots v_{m_s}\right\}, \left\{v_{m_{s+1}}, v_{m_{s+2}}, \ldots v_{m_{max_a}}\right\}\right)$
  end if
end for
return *hyperarcs*

注意：$(T_{OH})_{m_1,m_2,\ldots m_s,m_1,m^{max_a},m_{s+1},\ldots m_{max_a}} = 0$ 要么表示这些索引不适用于描述超弧，因为

$$\{m_1, m_2, \ldots m_s\} \cap \left\{m_{s+1}, m_{s+2}, \ldots m_{max_a}\right\} \neq \emptyset$$

或者，超弧 $\left(\left\{v^{m_1}、 v^{m_2}、 \ldots\ldots v_{m_s}\right\}, \left\{v^{m_{s+1}}、 v^{m_{s+2}}、 \ldots\ldots v_{m_{max_a}}\right\}\right)$ 不属于底层有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$的超弧集合 $\mathcal{A}_H$。

第二种情况：$n \in \{max_a - 1,\ max_a\}$

与第一种情况不同，若不考虑索引由相同集合 $\{m_1, m_2, \ldots\ldots m_{max_a}\}$构成的所有其他元素，就无法确定邻接张量元素 $(T_{OH})_{m_1,\ m_2,\ldots m_{max_a}} > 0$所编码的超弧，其中 $\left|\{m_1, m_2, \ldots \ldots m_{max_a}\}\right| \geq ma\, x_a - 1$。因此，应对邻接张量 T_{OH}的所有非零元素执行以下步骤。

1) 对于由索引 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a}$表示的所有超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$，$v^{m_1} \in a^{out}{}_q$和 $v_{m_{max_a}} \in a^{in}{}_q$均成立；可行超弧也满足条件 $a^{out}{}_q \cap a^{in}{}_q = \emptyset$。因此，可以通过以下方式找到其他某些输出顶点和输入顶点：

$outputvertices = \left\{v_{m_1}\right\}$
$inputvertices = \left\{v_{m_{max_a}}\right\}$
for $t \in \{2, 3, \ldots max_a - 1\}$ ***do***
  if $v_{m_t} \in outputvertices$ ***then***
    $outputvertices \longleftarrow outputvertices \cup \left\{v_{m_2}, v_{m_3}, \ldots v_{m_t}\right\}$
  end if
  if $v_{m_t} \in inputvertices$ ***then***
    $inputvertices \longleftarrow inputvertices \cup \left\{v_{m_t}, v_{m_{t+1}}, \ldots v_{m_{max_a - 1}}\right\}$
  end if
end for
return $outputvertices, inputvertices$

2) 将上一步得到的顶点集作为输出顶点 $= \{v^{m_1}, v^{m_2}, \ldots v_{m_t}\}$，输入顶点 $= \{v^{m_u}, v^{m_{u+1}}, \ldots v_{m_{max_a}}\}$，其中 $t \in \{1, 2, \ldots max_a - 1\}$，$t < u$，且 $u \in \{2, 3, \ldots max_a\}$，则可通过以下步骤确定可行划分 $s \in \{t, t+1, \ldots, u\}$：

possiblepartitions $= \{t, t+1, \ldots u-1\}$
for $s \in \{t, t+1, \ldots u\}$ ***do***
  if $\{v_1, \ldots v_{m_t}, v_{m_{t+1}}, \ldots v_{m_s}\} \cap \{v_{m_{s+1}}, \ldots v_{m_{u-1}}, v_{m_u}, \ldots v_{m_{max_a}}\} \neq \emptyset$ ***then***
    delete s from possiblepartitions
  end if
end for
return *possiblepartitions*

3）基于邻接张量中每个非零条目对应的*"possiblepartions"*集合，创建一个整体的可能超弧集合。在该集合中，添加"可能超弧"时不检查它是否已经存在于列表中（它可能出现多次），以便记录有多少个索引编码了某个特定的超弧：

possiblearcs $= \emptyset$
for *nonzeroindex* $\in$ *nonzeroindices* ***do***
  for $s \in$ *possiblepartitions* ***do***
    add $\left(\{v_1, v_2, \ldots v_{m_s}\}, \{v_{m_{s+1}}, v_{m_{s+2}}, \ldots v_{m_{max_a}}\}\right)$ *to possiblearcs*
  end for
end for
return *possiblearcs*

4) 由于对于每条超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，邻接张量 T_{OH} 中所有对应元素都必须为正，因此可以通过统计邻接张量中应编码"可能超弧"的非零元素，来确定哪些超弧不属于原始有向超图：

对于 $h \in$ 可能弧集合 执行 若 h 中的顶点数 $= max_a$ 则索引数 $= |h^{out}|! \cdot |h^{in}|!$若 h 的计数 $\in$ 可能弧集合 $<$ 索引数 则从可能弧集合中移除所有 h结束 若 结束 若 若 h 中的顶点数 $= max_a - 1$ 则索引数 $= \frac{(|h^{out}|+1)!}{2}! \cdot |h^{out}| \cdot |h^{in}|! + |h^{out}|! \cdot \frac{(|h^{in}|+1)!}{2}! \cdot |h^{in}|$若 h 的计数 $\in$ 可能弧集合 $<$ 索引数 则从可能弧集合中移除所有 h结束 若 结束 若 结束 循环 返回 可能弧集合

注：*“*$h \in$ 可能弧集合的计数”是指可能超弧 h 在“可能弧集合”中出现的次数，因此这也是可能用于编码 h 的索引数量。

5) 找出原始超弧的最后一步，是计算邻接张量中每个非零项编码了多少条超弧。然后利用这些信息，迭代地区分可能的索引划分：根据步骤 *4)*，哪些划分确定描述了一条超弧，哪些确定不描述底层有向超图中的超弧：

超弧{}当 非零索引 $\neq \emptyset$ 对 非零索引 $\in$ 非零索引 执行弧的数量 $= (T_{OH})_{nonzeroindex} \cdot {}^{2}{}_{n}$根据步骤 *2)* 确定可能的划分作为超弧对于 弧 $\in$ 可能的划分 执行若 弧 $\notin$可能弧集合 则从可能的划分中移除弧若 弧 $\in$ 超弧 则从可能的划分中移除弧 弧的数量 $\longleftarrow$ 弧的数量 -1结束若 结束对于 若 弧的数量 $=$ |可能的划分| 则超弧 $\longleftarrow$ 超弧 $\cup$ 可能的划分 从非零索引中移除非零索引结束若 若 弧的数量 $= 0$ 则从非零索引中移除非零索引结束若 结束对于 结束当 返回 超弧

注：根据定理（*2.16*），以下等式成立：

$$(T_{OH})_{nonzeroindex} = \frac{\left|\left\{a_q \in \mathscr{A}_H \text{ represented by nonzeroindex}\right\}\right| \cdot n}{2} \quad \Longleftrightarrow$$

非零指标$\}\big| = (T_{OH})_{nonzeroindex}$·表示的弧$= \left|\{a_q \in \mathscr{A}_H$ 的数量 $\frac{2}{n}$

该算法遍历每个非零指标的所有可能的划分，直到每个非零指标的每个划分都可以被判定为超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，或者可以确定该划分无法描述底层无向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H)$ 的超弧。

若干数值测试表明，所提出的算法在所有情况下都能返回正确的定向超图；然而，下一个示例表明，可以构造出两个由同一个邻接张量 T_{OH} 表示的超图。因此，该算法无法区分这两个超图，也不一定能返回正确的底层超图。

示例 *2.19*（邻接张量 T_{OH} 的唯一性反例）。给定有向超图 $OH_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{A}_{H_1})$，其顶点集为 $\mathcal{V}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，超弧集为 $\mathcal{A}_{H_1} = \{(\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}), (\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}), (\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}), (\{v_2, v_3\}, \{v_1, v_4\}), (\{v_2, v_4\}, \{v_1, v_3\}), (\{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\})\}$，则这些超弧在邻接张量 T_{OH} 中编码为以下索引：

$$
\begin{aligned}
a_1^1 = (\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}): &\quad (1,2,3,4), (1,2,4,3), (2,1,3,4), (2,1,4,3)\\
a_2^1 = (\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}): &\quad (1,3,2,4), (1,3,4,2), (3,1,2,4), (3,1,4,2)\\
a_3^1 = (\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}): &\quad (1,4,2,3), (1,4,3,2), (4,1,2,3), (4,1,3,2)\\
a_4^1 = (\{v_2, v_3\}, \{v_1, v_4\}): &\quad (2,3,1,4), (2,3,4,1), (3,2,1,4), (3,2,4,1)\\
a_5^1 = (\{v_2, v_4\}, \{v_1, v_3\}): &\quad (2,4,1,3), (2,4,3,1), (4,2,1,3), (4,2,3,1)\\
a_6^1 = (\{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\}): &\quad (3,4,1,2), (3,4,2,1), (4,3,1,2), (4,3,2,1)
\end{aligned}
$$

给定第二个有向超图 $OH_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{A}_{H_2})$，其顶点集为 $\mathcal{V}_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，超弧集为 $\mathcal{A}_{H_2} = \{(\{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\}), (\{v_2\}, \{v_1, v_3, v_4\}), (\{v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}), (\{v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\})\}$，则这些超弧用与第一个超图相同的索引编码：

$$
\begin{aligned}
a_1^2 = (\{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\}): &\quad (1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2),\\
&\quad (1,4,2,3), (1,4,3,2)\\
a_2^2 = (\{v_2\}, \{v_1, v_3, v_4\}): &\quad (2,1,3,4), (2,1,4,3), (2,3,1,4), (2,3,4,1),\\
&\quad (2,4,1,3), (2,4,3,1)\\
a_3^2 = (\{v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}): &\quad (3,1,2,4), (3,1,4,2), (3,2,1,4), (3,2,4,1),\\
&\quad (3,4,1,2), (3,4,2,1)\\
a_4^2 = (\{v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}): &\quad (4,1,2,3), (4,1,3,2), (4,2,1,3), (4,2,3,1),\\
&\quad (4,3,1,2), (4,3,2,1)
\end{aligned}
$$

这两个超图具有相同的最大超弧基数 $max_a = 4$，以及相同的顶点数 $|\mathcal{V}| = N = 4$。因此，这两个超图均可表示为具有相同非零指标的 4th 阶4维张量。由于所有非零项的值仅取决于编码超弧（中的顶点数，而两个超图中的所有超弧）的该顶点数均为4，因此，也无法根据邻接张量的各项取值来区分这两个超图。

总体而言，这构成了一个邻接张量 T_{OH} 的示例，该张量无法与底层有向超图进行唯一匹配，因此，所提出的算法可能会返回两个可行超图中的任意一个（，具体取决于注记 *(2.18)*）的步骤 *5)* 中集合“非零索引”的排列顺序。

将有向超图的邻接张量阶数增加二阶，即可避免上一个示例中描述的问题。

定义 2.20 （增阶邻接张量 $T^{+}{}_{OH}$ ）。
对于有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$，增阶邻接张量 $T^{+}{}_{OH}$ 定义为一个 $(max_a + 2)^{th}$ 阶 N 维张量

$$T^{+}_{OH} \in \mathbb{R}^{\overbrace{N \times N \times \cdots \times N}^{(max_a+2)-times}},$$

其中，每条由 $2 \le n \le max_a$ 个顶点组成且满足 $1 \le r \le n-1$ 的超弧 $a_q = \left(a^{out}_q, a^{in}_q\right) = \left(\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots v_{i_r}\}, \{v_{i_{r+1}}, v_{i_{r+2}}, \ldots v_{i_n}\}\right) \in \mathcal{A}_H$，由张量 $\left(T^{+}OH\right)_{m_1,m_2,\ldots m_s,m_{s+1},\ldots m_{max_a+2}}$ 中所有满足 $r \le s \le r + max_a + 2 - n$ 的元素表示，并且有：

$$\{i_1, i_2, \ldots i_r\} = \{m_1, m_2, \ldots m_s\}$$
$$\{i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots i_n\} = \left\{m_{s+1}, m_{s+2}, \ldots m_{max_a+2}\right\}.$$

这意味着，$\left(T^{+}{}_{OH}\right)_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a+2}}$ 的前 s 个索引仅由 $\{i_1, i_2, \ldots i_r\}$ 构成，其中每个顶点索引 $\{i_1, i_2, \ldots i_r\}$ 在 $m_1, m_2, \ldots m_s$ 中至少出现一次。其余 $max_a + 2 - s$ 个索引 m_{s+1}, m_{s+2}, $\ldots m_{max_a+2}$ 同样仅由顶点索引 $\{i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots i_n\}$ 构成。对于所有此类表示超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 的索引 $m_1, m_2, \ldots m_{max_a+2}$，定义：

$$\left(T^{+}_{OH}\right)^{a_q}_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a+2}} = \frac{n}{\sum_{\{l_1,l_2,\ldots l_n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \sum_{k=1}^{n} l_k = max_a+2\}} \frac{(max_a+2)!}{l_1!\ l_2! \cdots l_n!}} > 0. \tag{21}$$

由于索引 $m_1, m_2, \ldots m_{max_a+2}$ 可以同时编码多个超弧，因此邻接张量 $T^{+}{}_{OH}$ 的元素设为：

$$\left(T^{+}_{OH}\right)_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a+2}} = \sum_{a_q \in \mathcal{A}_H \ represented\ by\ m_1,m_2,\ldots m_{max_a+2}} \left(T^{+}_{OH}\right)^{a_q}_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a+2}}. \tag{22}$$

$T^{+}{}_{OH}$ 中所有不对应任何超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 的元素均设为 0 .

例 2.21 (增阶邻接张量)。
使用前面定义的有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$，其顶点集为 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$，超弧为 $\mathcal{A}_H = \left\{\left(\{v_1, v_2\}, \{v_4\}\right), (\{v_3\}, \{v_2, v_6\}), (\{v_5\}, \{v_6\})\right\}$，且最大超弧基数为 $max_a = 3$，则升阶邻接张量 $T^{+}{}_{OH}$ 中的非零指标为：

$$\begin{aligned} a_1 = \left(\{v_1, v_2\}, \{v_4\}\right): \quad & (1,1,1,2,4), (1,1,2,1,4), (1,2,1,1,4), (2,1,1,1,4), \\ & (1,1,2,2,4), (1,2,1,2,4), (1,2,2,1,4), (2,1,1,2,4), \\ & (2,1,2,1,4), (2,2,1,1,4), (1,2,2,2,4), (2,1,2,2,4), \\ & (2,2,1,2,4), (2,2,2,1,4), (1,1,2,4,4), (1,2,1,4,4), \\ & (2,1,1,4,4), (1,2,2,4,4), (2,1,2,4,4), (2,2,1,4,4), \\ & (1,2,4,4,4), (2,1,4,4,4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_2 = (\{v_3\},\{v_2,v_6\}): \quad & (3,3,3,2,6),(3,3,3,6,2),(3,3,2,2,6),(3,3,2,6,2),\\
& (3,3,6,2,2),(3,3,2,6,6),(3,3,6,2,6),(3,3,6,6,2),\\
& (3,2,2,2,6),(3,2,2,6,2),(3,2,6,2,2),(3,6,2,2,2),\\
& (3,2,2,6,6),(3,2,6,2,6),(3,2,6,6,2),(3,6,2,2,6),\\
& (3,6,2,6,2),(3,6,6,2,2),(3,2,6,6,6),(3,6,2,6,6),\\
& (3,6,6,2,6),(3,6,6,6,2)\\
a_3 = (\{v_5\},\{v_6\}): \quad & (5,5,5,5,6),(5,5,5,6,6),(5,5,6,6,6),(5,6,6,6,6)
\end{aligned}
$$

最后一个示例表明，对于有向超图的邻接张量，所表示的超图的唯一性与张量的大小之间存在权衡。下面的定理证明，增阶邻接张量$T^{+}{}_{OH}$能够唯一描述有向超图，并且可以通过注记（2.18）中介绍的算法的第一种情况来识别底层超图。

定理 2.22 (邻接张量 $T^{+}{}_{OH}$ 唯一确定有向超图)。

给定一个有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$，则相应的增阶邻接张量 $T^{+}{}_{OH}$ 唯一地描述了该超图，而注记 *(2.18)* 中描述的算法可返回正确的底层超图。

证明。
给定一个升阶邻接张量 $T^{+}{}_{OH}$，底层有向超图的顶点集 $\mathcal{V}$显然可以根据张量的维数确定。此外，最大超弧基数 max_a 也可以从邻接张量的阶数中读出。假设 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots v_N\}$ 且$max_a \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

通过检查邻接张量各项的符号，基于顶点 $\mathcal{V}$) 的所有可能超弧(可以划分为一组“超弧”和一组“非超弧”:

第一种情况： $m_1, m_2, \ldots m^{max_a+2}$其中 $\left(T^{+}{}_{OH}\right)_{m_1,m_2,\ldots m} = 0$
$_{max_a+2}$
对于此类索引，划分 $\left(\{m_1, m_2, \ldots m_s\}, \{m_{s+1}, m_{s+2}, \ldots m_{max_a+2}\}\right)$with s $\in \{1, 2, \ldots \max_a + 1\}$ 肯定不是底层超图的超弧。对于 $\{m_1, m_2, \ldots m_s\} \cap \{m_{s+1}, m_{s+2}, \ldots m_{max_a+2}\} = \emptyset$ 的情况，因此可以将划分 $(\{m_1, m_2, \ldots m_s\}, \{m_{s+1}, m_{s+2}, \ldots m_{max_a+2}\})$ 加入“非超弧”集合。

第二种情况： $m_1, m_2, \ldots m^{max_a+2}$ 其中 $\left(T^+_{OH}\right)_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a+2}} > 0$

由于每条超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$ 至多包含 max_a 个不同的顶点，因此，对于所有满足 $\left(T^+_{OH}\right)_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a+2}} > 0$ 的索引 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a+2}$，条件 $\left|\{m_1, m_2, \ldots m_{max_a+2}\}\right| \leq max_a$ 均成立。否则，$\left|\{m_1, m_2, \ldots m_{max_a+2}\}\right| > max_a$ 将意味着存在一条包含超过 max_a 个不同顶点的超弧 a_q，因为每个不同的索引都对应一个顶点。因此，$m_1, m_2, \ldots m_{max_a+2}$ 中始终至少存在两个冗余索引；当 $\left(T^+_{OH}\right)_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a+2}} > 0$ 成立时，可以用 m_1 和 m_{max_a+2} 替换这两个索引。

如注记（2.18）中的第一种情形所述，对于索引 $($ 的位置数最多少两个顶点的超弧——在本情形中，位置数为 max_a+2——可以利用定理（2.16）的第二个性质明确识别。因此，任何满足 $1 \leq r \leq n-1$ 的超弧 $a_q = (\{i_1, i_2, \ldots i_r\}, \{i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots i_n\}) \in \mathscr{A}_H$，都可以由索引 $m_1, m_2, \ldots m_s, m_1, m^{max_a+2}, m_{s+1}, m_{s+2}, \ldots m^{max_a+2}$ 唯一描述，其中 $\{i_1, i_2, \ldots i_r\} = \{m_1, m_2, \ldots m_s\}$，且 $\{i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots i_n\} = \{m_{s+1}, m_{s+2}, \ldots m_{max_a+2}\}$.

因此，只需对索引 $m_1, m_2, \ldots m^{max_a+2}$ 的所有划分 $(\{m_1, m_2, \ldots m_s\}, \{m_{s+1}, m_{s+2}, \ldots m_{max_a+2}\})$ 检查 $\left(T^+OH\right)_{m_1,m_2,\ldots m_s,m_1,m^{max_a+2},m_{s+1},m_{s+2},\ldots m_{max_a+2}} > 0$，以区分确定存在的超弧和不存在的超弧，并找出底层有向超图中的所有超弧。

注记（2.18）中介绍的算法的第一种情况恰好完成了两个必要步骤：

- 从 $m_1, m_2, \ldots m_{maxa+2}$ 中移除两个冗余指标，得到 $\left(T^+_{OH}\right)_{m_1,m_2,\ldots m_{maxa+2}} > 0$
- 检查所有划分 $\left(\{m_1, m_2, \ldots ms\}, \{ms+1, ms+2, \ldots mmaxa_{+2}\}\right)$ 是否 $\left(T^+_{OH}\right)_{m_1,m_2,\ldots ms,m_1,mmaxa^{+2},ms+1,ms+2,\ldots mmaxa+2} > 0$

不需要算法的第二种情况，因为邻接张量的升阶中不会出现以下情况：$\left(T^+_{OH}\right)_{m_1,m_2,\ldots m_{max_a+2}} > 0$，且 $\left|\{m_1, m_2, \ldots m_{max_a+2}\}\right| = max_a + 1$，或 $\left|\{m_1, m_2, \ldots m_{max_a+2}\}\right| = max_a + 2$。因此，该算法可应用于 T^+_{OH}，并且总能找到正确的底层有向超图。

□

3 正规图和超图的补充定义

本节将介绍普通图和超图的补充定义，这些定义是后续定义梯度、伴随算子、散度、拉普拉斯算子和p-拉普拉斯算子所必需的。

小节（3.1）介绍二部普通图、完全无向正规图、普通图上的顶点度函数 $\left(\deg、\deg_{out} 和 \deg_{in}\right)$ 、弧指示函数 $\left(\delta\right)$，以及顶点-弧指示函数 $\left(\delta_{out} 和 \delta_{in}\right)$。此外，小节（3.2）给出了最大超边和超弧基数 $\left(max_e 和 max_a\right)$，以及最小超边和超弧基数 $\left(min_e 和 min_a\right)$ 的定义，还介绍了超图上的顶点度函数 $\left(\deg、\deg_{out} 和 \deg_{in}\right)$，以及顶点-超弧指示函数 $\left(\delta_{out} 和 \delta_{in}\right)$。

3.1 普通图的补充定义

本小节的定义基于 [1], [2] 和 [3]的研究。

定义 3.1 (**二部正规图**)。 *(第 7 页，见 [1]：二部图)*
如果无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$ 的顶点集 $\mathcal{V}$可以划分为两个子集 X 和 Y，使得每条边都连接第一子集 X 中的一个顶点和第二子集 Y 中的一个顶点，则称该图为二部图：

$$\mathcal{V} = X \cup Y \ with \ X \cap Y = \emptyset \tag{23}$$

$$\forall e_q \in \mathcal{E}_G : \quad e_q = \{v_i, v_j\} \ with \ v_i \in X \ and \ v_j \in Y. \tag{24}$$

同样，如果有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$ 的顶点集 $\mathcal{V}$可以按照前文所述划分，且每条弧都连接第一子集 X 中的一个顶点和第二子集 Y 中的一个顶点，则称该图为二部图：

$$\mathcal{V} = X \cup Y \ with \ X \cap Y = \emptyset \tag{25}$$

$$\forall a_q \in \mathcal{A}_G : \quad a_q = (v_i, v_j) \ with \ v_i \in X, v_j \in Y \ or \ with \ v_i \in Y, v_j \in X. \tag{26}$$

定义 3.2 (**完全无向正规图**)。 *(第 21 页，见 [3]：完全多重图)*

如果每个顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 都恰好通过一条边 $e_q \in \mathcal{E}_G$ 与除自身以外的每个其他顶点 $v_j \in \mathcal{V} \setminus \{v_i\}$ 相连，则称无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$ 为完全图：

$$\mathcal{E}_G = \left\{ \{v_i, v_j\} \;\middle|\; v_i \in \mathcal{V} \ and \ v_j \in \mathcal{V} \setminus \{v_i\} \right\}. \tag{27}$$

定义 3.3（**普通图的连通分支**）。（第 *572* 页，见 *[2]*：连通分支）

在无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$中，如果存在边 $\mathcal{E}_G$ 的一个子集，使得可以沿这些边从顶点 v_i 移动到顶点 v_j，并且反向也成立，那么两个顶点 v_i，$v_j \in \mathcal{V}$称为连通。同样，在有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_G)$中，如果存在弧 $\mathscr{A}_G$ 的一个子集，使得可以沿这些弧（移动，同时忽略其方向并将其视为边），从一个顶点移动到另一个顶点，那么两个顶点 v_i，$v_j \in \mathcal{V}$称为连通。

NG 或 OG 的极大连通子图称为普通图的一个连通分量。这意味着每个顶点 $v_i \in \mathcal{V}$、每条边 $e_q \in \mathcal{E}_G$ 和每条弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$ 都恰好属于一个连通分量。

定义 3.4（**顶点度函数** deg、$\deg_{out}$、$\deg_{in}$）。（第 *5* 页，见 *[3]*：出度、入度和度）

对于无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$，只定义广义度函数 deg，其定义如下

$$\deg : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad v_i \longmapsto \deg(v_i)$$

将顶点 $v_i \in \mathcal{V}$的度设为

$$\deg(v_i) = \left|\left\{e_q \in \mathcal{E}_G \;\middle|\; v_i \in e_q\right\}\right|. \tag{28}$$

因此，广义度函数 deg 为每个顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 给出包含该顶点的边 $e_q \in \mathcal{E}_G$ 的数量。

对于有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_G)$，出度函数 $\deg_{out}$ 和入度函数 $\deg_{in}$ 定义如下

$$\deg_{out} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$v_i \longmapsto \deg_{out}(v_i) = \left|\left\{a_q \in \mathscr{A}_G \;\middle|\; a_q = \left(v_i, v_j\right) \textit{ for some } v_j \in \mathcal{V} \setminus \{v_i\}\right\}\right| \tag{29}$$

以及分别

$$\deg_{in} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$v_i \longmapsto \deg_{in}(v_i) = \left|\left\{a_q \in \mathscr{A}_G \;\middle|\; a_q = \left(v_j, v_i\right) \textit{ for some } v_j \in \mathcal{V} \setminus \{v_i\}\right\}\right|. \tag{30}$$

因此，出度函数$\deg_{out}$ 返回包含以 v_i 为输出顶点的弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$的数量；类似地，入度函数$\deg_{in}$ 返回以 v_i 为输入顶点的弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$的数量。

有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$ 的广义度函数deg 可以使用出度函数和入度函数来定义，结果为

$$\deg : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad v_i \longmapsto \deg(v_i)$$

其中顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 的度设为

$$\deg(v_i) = \deg_{out}(v_i) + \deg_{in}(v_i). \tag{31}$$

注记 3.5（**用于有向普通图的广义度函数** deg **统计相连的弧**）。

有向普通图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$ 中的弧集 $\mathcal{A}_G$ 定义为

$$\mathcal{A}_G \subseteq \left\{ (v_i, v_j) \;\middle|\; v_i, v_j \in \mathcal{V}, v_i \neq v_j \right\}$$

因此，不可能在$\deg(v_i)$ (中将同一条弧 $a_q \in \mathcal{A}_G$ 计数两次，即在$\deg_{out}(v_i)$ 中计数一次，又在$\deg_{in}(v_i)$) 中计数一次，因为任何顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 都不可能同时是弧 a_q 的输出顶点和输入顶点。因此，以下结论成立：

$$\deg(v_i) = \left| \left\{ a_q \in \mathcal{A}_G \;\middle|\; a_q = (v_i, v_j) \text{ or } a_q = (v_j, v_i) \text{ for } v_j \in \mathcal{V} \right\} \right|, \tag{32}$$

其中 $v_j \neq v_i$ 自动成立。这意味着$\deg(v_i)$ 统计包含顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 的弧 $a_q \in \mathcal{A}_G$。

定义 3.6（**弧指示函数** δ）。
对于有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$，如果两个顶点 v_i、$v_j \in \mathcal{V}$满足 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G$，或满足 $a_q = (v_i, v_j) \notin \mathcal{A}_G$，则弧指示函数 δ 对此进行指示。因此，弧指示函数定义为：

$$\delta : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \{0,1\} \qquad (v_i, v_j) \longmapsto \delta(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & a_q = (v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G \\ 0 & otherwise \end{cases}. \tag{33}$$

定义 3.7（**顶点-弧指示函数** δ_{out}、δ_{in}）。
对于有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$，可以定义用于指示顶点 $v_i \in \mathcal{V}$是否为弧 $a_q \in \mathcal{A}_G$的输出顶点或输入顶点的函数。输出顶点-弧指示函数 δ_{out} 定义为

$$\delta_{out} : \mathcal{V} \times \mathcal{A}_G \longrightarrow \{0,1\}$$
$$(v_i, a_q) \longmapsto \delta_{out}(v_i, a_q) = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) = a_q \text{ for some } v_j \in \mathcal{V} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{34}$$

且输入顶点-弧指示函数 δ_{in} 定义为：

$$\delta_{in} : \mathcal{V} \times \mathcal{A}_G \longrightarrow \{0,1\}$$
$$(v_i, a_q) \longmapsto \delta_{in}(v_i, a_q) = \begin{cases} 1 & (v_j, v_i) = a_q \text{ for some } v_j \in \mathcal{V} \\ 0 & otherwise \end{cases}. \tag{35}$$

3.2 超图上的补充定义

本小节的部分内容基于 [13]，其余定义则推广了上一小节中的普通图情形。

定义 3.8 (最大超边基数 max_e 和最大超弧基数 max_a). *([13]中的第 641 页：超边的最大基数 $m.c.e\ (\mathscr{H})$)* 对于无向超图 $NH = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_H)$，最大超边基数 max_e 定义为

$$max_e = \max\left\{|e_q| \,\middle|\, e_q \in \mathscr{E}_H\right\}. \tag{36}$$

对于有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H)$，最大超边基数 max_e 随后称为最大超弧基数 max_a *with*

$$max_a = \max\left\{|a_q^{out}| + |a_q^{in}| \,\middle|\, a_q \in \mathscr{A}_H\right\}. \tag{37}$$

定义 3.9 (最小超边基数 min_e 和最小超弧基数 min_a)。

类似于最大超边基数 max_e，对于无向超图 $NH = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_H)$，最小超边基数 min_e 定义为

$$min_e = \min\left\{|e_q| \,\middle|\, e_q \in \mathscr{E}_H\right\}. \tag{38}$$

对于有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H)$，最小超弧基数 min_a 定义为

$$min_a = \min\left\{|a_q^{out}| + |a_q^{in}| \,\middle|\, a_q \in \mathscr{A}_H\right\}. \tag{39}$$

注记 3.10(最小和最大超边及超弧基数的性质).

给定一个无向超图 $NH = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_H)$，对于最小超边基数 min_e 和最大超边基数 max_e，以下结论成立：

$$2 \le min_e \le max_e \le |\mathscr{V}| = N, \tag{40}$$

由于所有超边 $e_q \in \mathscr{E}_H$ 均满足条件 $\left|e_q\right| \ge 2$ 和 $e_q \subseteq \mathscr{V}$。

给定一个有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H)$，则最小超弧基数 min_a 和最大超弧基数 max_a 满足不等式

$$2 \le min_a \le max_a \le |\mathscr{V}| = N, \tag{41}$$

因为对于所有可行超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，均有 $\emptyset \subset a^{out}{}_q$，$a^{in}{}_q \subset \mathscr{V}$ 以及 $a^{out}{}_q \cap a^{in}{}_q \neq \emptyset$。

定义 3.11 (顶点度函数 deg、$\deg_{out}$、$\deg_{in}$)。
对于无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$，仅定义了广义度函数 deg

$$\deg : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad v_i \longmapsto \deg(v_i)$$

将顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 的度设为

$$\deg(v_i) = \left|\left\{e_q \in \mathcal{E}_H \;\middle|\; v_i \in e_q\right\}\right|. \tag{42}$$

如前所述，广义度函数 deg 返回对于每个顶点 $v_i \in \mathcal{V}$，包含顶点 v_i 的超边 $e_q \in \mathcal{E}_H$ 的数量。

对于有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$，出度函数 $\deg_{out}$ 和入度函数 $\deg_{in}$ 定义为

$$\deg_{out} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$v_i \longmapsto \deg_{out}(v_i) = \left|\left\{a_q \in \mathcal{A}_H \;\middle|\; v_i \in a_q^{out}\right\}\right| \tag{43}$$

以及分别。

$$\deg_{in} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$v_i \longmapsto \deg_{in}(v_i) = \left|\left\{a_q \in \mathcal{A}_H \;\middle|\; v_i \in a_q^{in}\right\}\right|. \tag{44}$$

因此，出度函数 $\deg_{out}$ 统计输出顶点为 v_i 的超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 的数量；类似地，入度函数 $\deg_{in}$ 统计输入顶点为 v_i 的超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 的数量。

有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$ 的广义度函数 deg 可以利用出度函数和入度函数来定义，由此得到

$$\deg : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad v_i \longmapsto \deg(v_i)$$

其中顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 的度设为

$$\deg(v_i) = \deg_{out}(v_i) + \deg_{in}(v_i). \tag{45}$$

注释 3.12 （有向超图的广义度函数 deg 统计相连的超弧）。

由于有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$ 中的所有超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 都满足条件

$$a_q^{out} \cap a_q^{in} = \emptyset,$$

不可能将同一条超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 计数两次：一次计入 $\deg(v_i)$ (，另一次计入$\deg_{out}($ $v_i)$，因为任何顶点 $v_i \in \mathcal{V}$都不可能同时是超弧 a_q 的输出顶点和输入顶点。因此，以下结论成立：

$$\deg(v_i) = \left| \left\{ a_q \in \mathcal{A}_H \;\middle|\; v_i \in a_q^{out} \; or \; v_i \in a_q^{in} \right\} \right|, \tag{46}$$

这意味着，广义度函数 $\deg(v_i)$ 对包含顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 的超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 进行计数。

定义 3.13 (顶点-超弧指示函数 δ_{out}, δ_{in})。
对于有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$，可以定义用于指示顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 是否为超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 的输出顶点或输入顶点的函数。输出顶点-超弧指示函数 δ_{out} 定义如下：

$$\delta_{out} : \mathcal{V} \times \mathcal{A}_H \longrightarrow \{0,1\}$$

$$(v_i, a_q) \longmapsto \delta_{out}(v_i, a_q) = \begin{cases} 1 & v_i \in a_q^{out} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{47}$$

且输入顶点-超弧指示函数 δ_{in} 定义为

$$\delta_{in} : \mathcal{V} \times \mathcal{A}_H \longrightarrow \{0,1\}$$

$$(v_i, a_q) \longmapsto \delta_{in}(v_i, a_q) = \begin{cases} 1 & v_i \in a_q^{in} \\ 0 & otherwise \end{cases} . \tag{48}$$

4 普通图与超图之间的联系

为进一步说明超图为何是普通图的自然扩展，第 (4.1) 小节证明了每个普通图都是超图，并且将先前定义的邻接张量 T_{NH} 或 T_{OH} 应用于普通图后，会得到邻接矩阵 A_{NG} 或 A_{OG}。

此外，小节（4.2）介绍了超图的两种不同普通图表示，并分析了每种表示的优缺点。本节还通过示例展示这两种普通图表示，说明不同超图映射到其普通图表示后，可能得到相同的普通图。因此，通常无法在没有额外信息的情况下，仅凭普通图表示唯一重构底层超图。

4.1 每个普通图都是一个超图

本小节进一步探讨了［13］的工作，并将其扩展到有向超图情形。

以下定理证明，任何普通图都“只不过是”超图的一个特例。

定理 4.1（**每个普通图都是超图**）。
普通图与超图通过以下关系相互联系：

1）每个无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$ 都是一个无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$，其中对每条超边 $e_q \in \mathcal{E}_H$，都有 $|e_q| = 2 = max_e$。*2*）每个有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$ 都是一个有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$，其中对每条超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$，都有 $|a_q| = 2 = max_a$。

证明。
为了证明每个普通图都是超图，定义顶点集 $\mathcal{V}$、超边集 $\mathcal{E}_H$ 和超弧集 $\mathcal{A}_H$：

1) 无向超图的顶点集 $\mathcal{V}$ 可以与无向正规图的顶点集相同。超边 e_q of $\mathcal{E}_H$ 随后定义为：

$$\mathcal{E}_H = \left\{ e_q = \{v_i, v_j\} \,\middle|\, \{v_i, v_j\} \in \mathcal{E}_G \right\}.$$

根据超边集合 $\mathscr{E}_H$ 的定义，对于所有超边 $e_q \in \mathscr{E}_H$，均有 $|e_q| = 2$，这自动意味着无向超图的最大超边基数满足 $max_e = 2$。

2) 有向超图的顶点集 $\mathscr{V}$ 可以选择为与有向正规图的顶点集相同。随后将 $\mathscr{A}_H$ 的超弧 $a_q = a^{out}{}_q \cup a^{in}{}_q$ 定义如下：

$$\mathscr{A}_H = \left\{ a_q = \left(a_q^{out}, a_q^{in} \right) = \left(\{v_i\}, \{v_j\} \right) \middle| \left(v_i, v_j \right) \in \mathscr{A}_G \right\}.$$

根据超弧集的这一定义，所有超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$ 均满足等式 $|a^{out}{}_q| + |a^{in}{}_q| = 1 + 1 = 2$，因此有向超图的最大超弧基数为 $max_a = 2$。

□

根据前述定理，超图的代数表示（即邻接张量）现在也可以应用于普通图。

定理 4.2 (**无向普通图的邻接张量 T_{NG} 与邻接矩阵 A_{NG} 的等价性**)。*(第 641 页，[13])*

将定义 *(2.11)* 中无向超图的邻接张量 T_{NG} 应用于无向普通图 $NG = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_G)$，得到定义 *(1.9)* 中无向普通图的邻接矩阵 A_{NG}。

证明。

由于每个无向正规图 $NG = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_G)$ 都是具有性质 $|e_q| = 2 = max_e$（对所有超边 $e_q \in \mathscr{E}_H$ 均成立）的无向超图，因此相应的邻接张量 T_{NG} 是 N 维且为 2nd 阶。因此，T_{NG} 可以写成一个 $N \times N$ 矩阵。

此外，对于每条边 $\{v_i, v_j\} \in \mathscr{E}_G$，均成立：它对应于超边 $e_q = \{v_i, v_j\} \in \mathscr{E}_H$，其中 $|e_q| = n = 2$，位于相应的 NG 超图中。根据邻接张量的定义，可得：

$$\begin{aligned}(T_{NG})_{ij} = (T_{NG})_{ji} &= \frac{2}{\sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}:\ \sum_{k=1}^{2} l_k = 2} \frac{2!}{l_1!\, l_2!}} = \frac{2}{\sum_{l_1 = 1, l_2 = 1} \frac{2!}{l_1!\, l_2!}} = \frac{2}{\frac{2!}{1!\, 1!}} = 1 \\ &= (A_{NG})_{ij} = (A_{NG})_{ji}\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 A_{NG} 的对称性得到。（注：如果使用简化的邻接张量定义 $(T_{NG})_{ij} = (T_{NG})_{ji} = n_2$，则等式 $(T_{NG})_{ij} = (T_{NG})_{ji} = 1 = (A_{NG})_{ij} = (A_{NG})_{ji}$ 同样成立。）

由于邻接矩阵 A_{NG} 和邻接张量 T_{NG} 中所有其他不对应于边或超边的条目（entries not corresponding to edges or hyperedges）根据定义均被设为零，因此等式 $T_{NG} = A_{NG}$ 成立。

□

定理 4.3（**有向正规图的邻接张量T_{OG}与邻接矩阵A_{OG}的等价性**）。

将定义（*2.12*）中的有向超图邻接张量 T_{OG} 应用于有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_G)$，得到定义（*1.10*）中的有向正规图邻接矩阵 A_{OG}。

证明。
如前所述，每个有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_G)$ 都是满足性质 $|a_q| = 2 = max_a$ 的有向超图，其中该性质对所有超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$ 均成立。因此，相应的邻接张量 T_{OG} 是 N 维且为 2nd 阶，可以写成一个 $N \times N$ 矩阵。
此外，对于每条弧 $(v_i, v_j) \in \mathscr{A}_G$，它都对应于 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathscr{A}_H$ 这一超弧，其中 $|a^{out}{}_q \cup a^{in}{}_q| = n = 2$，该超弧位于 OG 的相应超图中。根据邻接张量的定义，可得如下结果：

$$\begin{aligned}(T_{OG})_{ij} &= \frac{2}{\sum_{l_1,l_2 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \sum_{k=1}^{2} l_k = 2} \frac{2!}{l_1!\ l_2!}} = \frac{2}{\sum_{l_1=1,l_2=1} \frac{2!}{l_1!\ l_2!}} = \frac{2}{\frac{2!}{1!\ 1!}} = 1 \\ &= (A_{OG})_{ij}\,.\end{aligned}$$

（注意：如果采用简化邻接张量定义 $(T_{OG})_{ij} = {}_{n}{}_{2}$，等式 $(T_{OG})_{ij} = 1 = (A_{OG})_{ij}$ 同样成立。）
根据定义，邻接矩阵 A_{OG} 和邻接张量 T_{OG} 中所有其他元素（即不对应弧或超弧的元素）均设为零，因此等式 $T_{OG} = A_{OG}$ 成立。

□

注意：将定义 (2.20) 中的增阶邻接张量 $T^{+}{}_{OG}$ 应用于有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_G)$，会得到一个 $N \times N \times N \times N$ 矩阵，因此无法得到邻接矩阵 A_{OG}。

4.2 表示为普通图的超图

以下两种超图的正规图表示说明了为什么超图是普通图的一种重要推广，也说明了为什么通常无法通过普通图表示有效地捕捉超图的所有性质。第一种正规图表示在 [9] 中作了简要讨论，第二种正规图表示则在 [14]的引言中提及。

De定义 4.4 (无向超图的第一正规图表示).
（*[9]*中的第 *3* 页：超图的二部图表示）
给定一个顶点集为 $\mathcal{V}_H = \{v_1, v_2, \ldots v_N\}$ 的无向超图 $NH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$，则可以定义一个用于表示该超图的普通图 $NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$，其定义为：

$$\mathcal{V}_G = \mathcal{V}_H \cup \left\{ v_{N+q} \,\middle|\, e_q \in \mathcal{E}_H \right\}, \tag{49}$$

$$\mathcal{E}_G = \left\{ \left\{ v_i, v_{N+q} \right\} \,\middle|\, v_i \in e_q \; for \; e_q \in \mathcal{E}_H \right\}, \tag{50}$$

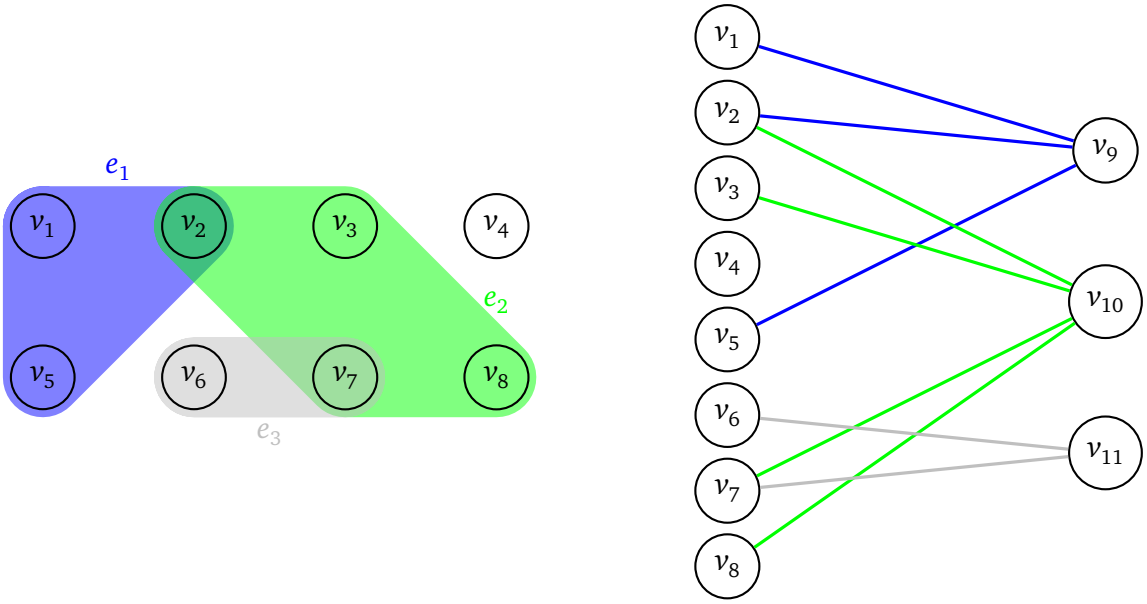
其中，对于每条超边 $e_q \in \mathcal{E}_H$，引入一个新顶点 v_{N+q}。然后，边将代表超边 e_q 的顶点 v_{N+q} 与属于该超边的原始顶点 $v_i \in \mathcal{V}_H$连接起来。

例 4.5(无向超图的第一正规图表示).
给定无向超图 $NH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$ with $\mathcal{V}_H = \{v_1, v_2, \ldots, v_8\}$ 和 $\mathcal{E}_H = \{\{v_1, v_2, v_5\}, \{v_2, v_3, v_7, v_8\}, \{v_6, v_7\}\}$，那么表示该超图的无向正规图 $NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$ 如下所示：

$$\mathcal{V}_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \cup \{v_9, v_{10}, v_{11}\}$$

$$\mathcal{E}_G = \{\{v_1, v_9\}, \{v_2, v_9\}, \{v_5, v_9\}, \{v_2, v_{10}\}, \{v_3, v_{10}\}, \{v_7, v_{10}\}, \{v_8, v_{10}\}, \{v_6, v_{11}\}, \{v_7, v_{11}\}\}$$

并可通过以下方式进行可视化：



这种正规图表示也可以为有向超图定义。

定义 4.6（有向超图的第一种普通图表示）。
对于具有 $\mathcal{V}_H = \{v_1, v_2, \ldots v_N\}$ 的有向超图 $OH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{A}_H)$，可将编码该超图的普通图 $OG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{A}_G)$ 定义为

$$\mathcal{V}_G = \mathcal{V}_H \cup \left\{ v_{N+q} \;\middle|\; a_q \in \mathcal{A}_H \right\}, \tag{51}$$

$$\mathcal{A}_G = \left\{ \left(v_i, v_{N+q}\right) \;\middle|\; v_i \in a_q^{out} \text{ for } a_q \in \mathcal{A}_H \right\} \cup \left\{ \left(v_{N+q}, v_i\right) \;\middle|\; v_i \in a_q^{in} \text{ for } a_q \in \mathcal{A}_H \right\}, \tag{52}$$

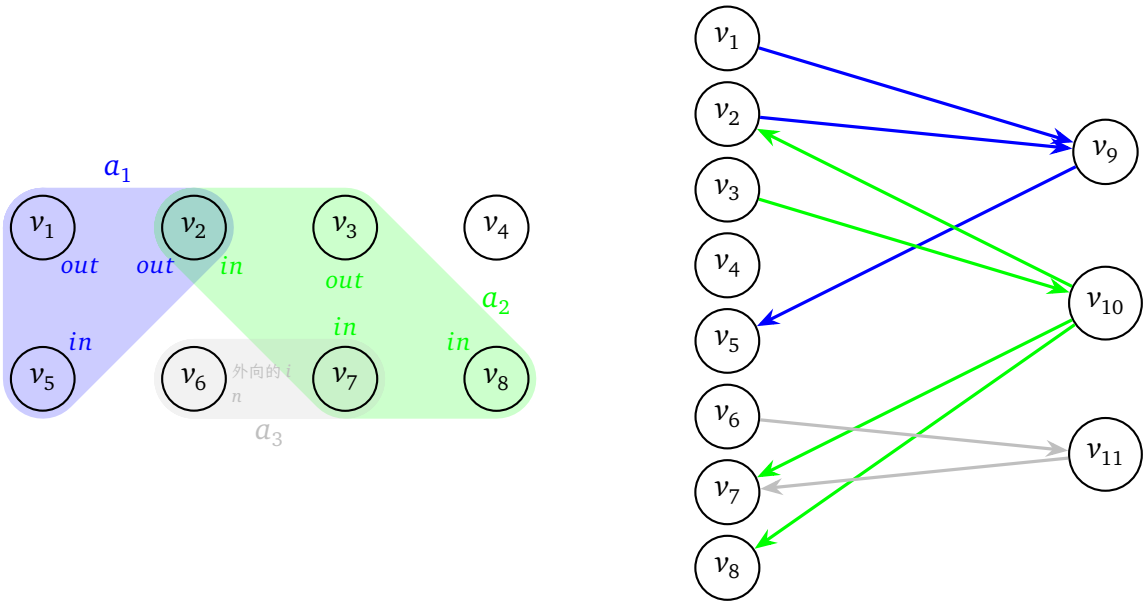
其中，弧 $\left(v_i, v_{N+q}\right)$ 和 $\left(v_{N+q}, v_i\right)$ 的方向表示原始顶点 $v_i \in \mathcal{V}_H$ 是超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 的输出顶点还是输入顶点。

示例 4.7（有向超图的第一种普通图表示）
给定有向超图 $OH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{A}_H)$，其具有 $\mathcal{V}_H = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ 以及 $\mathcal{A}_H = \left(\{v_1, v_2\}, \{v_5\}\right), \left(\{v_3\}, \{v_2, v_7, v_8\}\right), \left(\{v_6\}, \{v_7\}\right)\}$，那么表示该超图的有向正规图 $OG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{A}_G)$ 可表示为：

$$\mathcal{V}_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \cup \{v_9, v_{10}, v_{11}\}$$

$$\mathcal{A}_G = \{(v_1, v_9), (v_2, v_9), (v_9, v_5), (v_3, v_{10}), (v_{10}, v_2), (v_{10}, v_7), (v_{10}, v_8), (v_6, v_{11}), (v_{11}, v_7)\}$$

并且可以通过以下方式进行可视化：



在第一正规图表示的情况下，所得普通图的顶点度具有不同的含义，具体取决于它是顶点集 $\mathcal{V}_H$ 中原始顶点的顶点度，还是顶点集 $\mathcal{V}_G \backslash \mathcal{V}_H$ 中新顶点的顶点度。

注记 4.8（**第一正规图表示中的顶点度**）。
给定一个无向超图 $NH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$ 及其无向正规图表示 $NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$，则对于顶点 $v_i \in \mathcal{V}_H$ 的顶点度，有以下关系：

$$\deg(v_i) = \left|\left\{e_q \in \mathcal{E}_H \;\middle|\; v_i \in e_q\right\}\right| \tag{53}$$

且对于顶点 $v_{N+q} \in \mathcal{V}_G|\mathcal{V}_H$，有

$$\deg\left(v_{N+q}\right) = \left|e_q\right|, \tag{54}$$

因为每个原始顶点 $v_i \in \mathcal{V}_H$ 仅与顶点 $v_{N+q} \in \mathcal{V}_G|\mathcal{V}_H$ 相连，而这些顶点表示包含顶点 v_i 的超边 $e_q \in \mathcal{E}_H$；反之亦然。

类似地，给定有向超图 $OH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{A}_H)$ 及其相应的正规图表示 $OG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{A}_G)$，对于所有原始顶点 $v_i \in \mathcal{V}_H$，有

$$\deg(v_i) = \left|\left\{a_q \in \mathcal{A}_H \;\middle|\; v_i \in a_q^{out} \text{ or } v_i \in a_q^{in}\right\}\right| \tag{55}$$

且对于顶点 $v_{N+q} \in \mathcal{V}_G|\mathcal{V}_H$ 的顶点度，有

$$\deg\left(v_{N+q}\right) = \left|a_q^{out} \cup a_q^{in}\right|, \tag{56}$$

因为每个原始顶点 $v_i \in \mathcal{V}_H$ 只与顶点 $v_{N+q} \in \mathcal{V}_G|\mathcal{V}_H$ 相连，而这些顶点表示超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$；该超弧包含 v_i，且 v_i 是输出顶点或输入顶点。

以下定理表明，第一正规图表示所得到的普通图是二部正规图。

定理 4.9（**第一正规图表示得到二部图**）。（第 *3* 页，见 *[9]*：超图的二部图表示）

无论是无向超图 $NH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$，还是有向超图 $OH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{A}_H)$，所得到的第一正规图表示要么是二部无向正规图 $NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$，要么是二部有向正规图 $OG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{A}_G)$。

证明。
第一种情况：无向超图

给定无向超图 $NH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$，其中包含 $\mathcal{V}_H = \{v_1, v_2, \ldots v_N\}$，以及 $\mathcal{E}_H = \{e_1, e_2, \ldots e_M\}$，其对应的正规图表示为 $NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$，那么顶点集 $\mathcal{V}_G$ 可以按以下方式划分：

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_G &= \{v_1, v_2, \ldots v_N, v_{N+1}, v_{N+2}, \ldots v_{N+M}\} \\ &= \{v_1, v_2, \ldots, v_N\} \cup \{v_{N+1}, v_{N+2}, \ldots v_{N+M}\} \\ &= \mathcal{V}_H \cup \{v_{N+1}, v_{N+2}, \ldots v_{N+M}\},\end{aligned}$$

这会自动满足条件 $\mathcal{V}_H \cap \{v_{N+1}, v_{N+2}, \dots v_{N+M}\} = \emptyset$。因此，根据定义 (3.1) 中针对非定向二分普通图的第一条条件，顶点集 $\mathcal{V}_G$ 的划分是有效的。

由于边集 $\mathcal{E}_G$ 的定义基于第一正规图表示，因此有：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_G &= \left\{\left\{v_i, v_{N+q}\right\} \,\middle|\, v_i \in e_q \text{ for } e_q \in \mathcal{E}_H\right\} \\ &= \left\{\left\{v_i, v_j\right\} \,\middle|\, v_i \in e_q \subseteq \mathcal{V}_H \text{ for } e_q \in \mathcal{E}_H \text{ and } v_j \in \{v_{N+1}, v_{N+2}, \dots v_{N+M}\} \text{ with } j = N+q\right\}\end{aligned}$$

因此， $\mathcal{V}_G$ 的顶点集划分与边集 $\mathcal{E}_G$ 也满足二部无向正规图的第二个条件

$$\forall e_q \in \mathcal{E}_G: \quad e_q = \left\{v_i, v_j\right\} \text{ with } v_i \in \mathcal{V}_H \text{ and } v_j \in \{v_{N+1}, v_{N+2}, \dots v_{N+M}\}.$$

这证明，无向超图 $NH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$ 的正规图表示 $NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$ 会得到一个二部无向正规图。

第二种情况： 有向超图

类似地，对于一个有向超图 $OH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{A}_H)$，其包含 $\mathcal{V}_H = \{v_1, v_2, \dots v_N\}$、$\mathcal{A}_H = \{a_1, a_2, \dots a_M\}$，且对应的正规图表示为 $OG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{A}_G)$，其顶点集 $\mathcal{V}_G$ 可划分为

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_G &= \{v_1, v_2, \dots v_N, v_{N+1}, v_{N+2}, \dots v_{N+M}\} \\ &= \{v_1, v_2, \dots, v_N\} \cup \{v_{N+1}, v_{N+2}, \dots v_{N+M}\} \\ &= \mathcal{V}_H \cup \{v_{N+1}, v_{N+2}, \dots v_{N+M}\},\end{aligned}$$

其中包含 $\mathcal{V}_H \cap \{v_{n+1}、v_{n+2}、\dots v_{n+m}\} = \emptyset$。因此，顶点集 $\mathcal{V}_G$ 满足定义 (3.1) 中引入的二部有向正规图的第一个条件。

此外，对于弧集 $\mathcal{A}_G$，以下结论成立：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_G &= \left\{\left(v_i, v_{N+q}\right) \,\middle|\, v_i \in a_q^{out} \text{ for } a_q \in \mathcal{A}_H\right\} \\ &\quad \cup \left\{\left(v_{N+q}, v_i\right) \,\middle|\, v_i \in a_q^{in} \text{ for } a_q \in \mathcal{A}_H\right\} \\ &= \left\{\left(v_i, v_j\right) \,\middle|\, v_i \in a_q^{out} \subseteq \mathcal{V}_H \text{ for } a_q \in \mathcal{A}_H \text{ and } v_j \in \{v_{N+1}, v_{N+2}, \dots v_{N+M}\}, j = N+q\right\} \\ &\quad \cup \left\{\left(v_j, v_i\right) \,\middle|\, v_i \in a_q^{in} \subseteq \mathcal{V}_H \text{ for } a_q \in \mathcal{A}_H \text{ and } v_j \in \{v_{N+1}, v_{N+2}, \dots v_{N+M}\}, j = N+q\right\}\end{aligned}$$

这表明二部有向正规图的第二个条件

$$\forall a_q \in \mathscr{A}_G : \quad a_q = (v_k, v_l) \text{ with } v_k \in \mathscr{V}_H, v_l \in \{v_{N+1}, v_{N+2}, \dots v_{N+M}\}$$

$$\text{or with } v_k \in \{v_{N+1}, v_{N+2}, \dots v_{N+M}\}, v_l \in \mathscr{V}_H$$

也成立。

因此，有向超图$OG = (\mathscr{V}_G, \mathscr{A}_G)$ 的正规图表示会得到一个二部有向正规图。

□

下述定理描述了必要的附加信息，借助这些信息，可以从正规图表示唯一地重构底层超图。

定理 4.10 (唯一的第一种正规图表示)。
给定一个无向超图 $NH = (\mathscr{V}_H, \mathscr{E}_H)$ 或有向超图 $OH = (\mathscr{V}_H, \mathscr{A}_H)$，以及基于第一正规图表示的对应无向正规图 $NG = (\mathscr{V}_G, \mathscr{E}_G)$ 或有向正规图 $OG = (\mathscr{V}_G, \mathscr{A}_G)$。如果 NG 或 OG 的每个连通分量中都至少存在一个顶点 $v \in \mathscr{V}_G$，且已知 $v \in \mathscr{V}_H$ 还是 $v \notin \mathscr{V}_H$，那么便可以从 NG 或 OG 唯一地重构超图 NH 或 OH。

证明。
根据定理（4.9），无向超图$NH = (\mathscr{V}_H, \mathscr{E}_H)$或有向超图$OH = (\mathscr{V}_H, \mathscr{A}_H)$的正规图表示$NG = (\mathscr{V}_G, \mathscr{E}_G)$或$OG = (\mathscr{V}_G, \mathscr{A}_G)$始终是二部普通图。这也表明，所有连通分量都是二部子图，并且对于每个连通分量G，都有：

如果顶点v 是G 中的唯一顶点，那么显然$v \in \mathscr{V}_H$，因为对于$v \notin \mathscr{V}_H$ (自动意味着$v \in \mathscr{V}_G \backslash \mathscr{V}_H$)，$v$ 需要至少与$min_e \geq 2$ 或$min_a \geq 2$ 个原始顶点相连，因此G 至少需要由三个顶点组成。

根据上一个论证，只有两个顶点的连通分量也是不可能的。

否则，如果 G 至少包含三个顶点，那么 G 的所有顶点集可以被划分，使得这两个顶点集满足正规图表示的二部性质。对于每个连通分量，满足二部性质所需的顶点划分是唯一的。根据假设，对于 G中的一个顶点 v ，已经可以确定 $v \in \mathscr{V}_H$ 还是 $v \in \mathscr{V}_G \backslash \mathscr{V}_H$。因此，

G 的两个顶点集可以根据顶点v明确识别为 $\mathcal{V}_H$ 和 $\mathcal{V}_G \backslash \mathcal{V}_H$。因此， $\mathcal{V}_G \backslash \mathcal{V}_H$ 中编码为顶点的所有超边或超弧，以及它们在 $\mathcal{V}_H$ 中各自对应的顶点，均可被解码，从而得到唯一的无向超图或有向超图。

这一推理适用于正规图表示中的所有连通分支G，因此也适用于整个普通图。因此，对于给定的正规图表示，如果每个连通分量中都有一个顶点$v \in \mathcal{V}_H$ 或$v \notin \mathcal{V}_H$，就可以唯一地重构底层超图，这表明超图与其正规图表示之间存在某种对偶性。

□

推论 4.11 (唯一的第一普通图表示性质)。
给定无向超图 $NH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$或有向超图 $OH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{A}_H)$及其普通图表示 $NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$或 $OG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{A}_G)$，若每个连通分量至少满足以下两个性质之一，则从普通图表示到底层超图的映射是唯一的：

1）至少存在一个顶点 $v \in \mathcal{V}_G$ 满足 $\deg(v) < min_e$ 或 $\deg(v) < min_a$.

2）至少存在一个顶点 $v \in \mathcal{V}_G$ 满足 度数 $(v) > max_e$ *or* 度数 $(v) > max_a$.

证明。
对于超图$NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$或$OG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{A}_G) NH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$或$OH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{A}_H)$的普通图表示，有如下结论：

1) 如果对于任意顶点 $v \in \mathcal{V}_G$，均有 $\deg(v) < min_e$ 或 $\deg(v) < min_a$，则这意味着 $v \in \mathcal{V}_H$。

假设$v \in \mathcal{V}_G \backslash \mathcal{V}_H$ 成立。这意味着顶点v 表示一条超边$e_q \in \mathcal{E}_H$ 或一条超弧$a_q \in \mathcal{A}_H$，而它仅与 $\deg(v) < min_e$或 $\deg(v) < min_a$个原始顶点相连，这与定义 (3.9) 中的最小超边或超弧基数相矛盾。

2）类似地，如果对于任意顶点 $v \in \mathcal{V}_G$，满足 $\deg(v) > max_e$或 $\deg(v) > max_a$，那么这意味着 $v \in \mathcal{V}_H$。

假设 $v \in \mathcal{V}_G \backslash \mathcal{V}_H$ 成立，则这意味着顶点 v 表示一个超边 $e_q \in \mathcal{E}_H$或一个超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$，其由 $\deg(v) > max_e$个或 $\deg(v) > max_a$个原始顶点组成，这与定义（3.8）中超边或超弧基数的最大值相矛盾。

因此，若正规图表示的每个连通分量都满足这两个条件中的至少一个，则每个连通分量中至少存在一个顶点 v，且已知 $v \in \mathcal{V}_H$。因此，可以应用定理（4.10），据此，从正规图表示映射回底层超图的映射是唯一的。

□

正如定理（4.10）所表明的，对于一般超图，不能保证生成的第一个正规图表示能够唯一地追溯到底层超图；相反，多个超图可能具有相同的正规图表示。

例 4.12 (第一正规图表示唯一性的反例)

对于这两个无向超图 $NH_1 =$ $\left(\mathcal{V}_{H_1}, \mathcal{E}_{H_1}\right)$ *with*

$$\mathcal{V}_{H_1} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

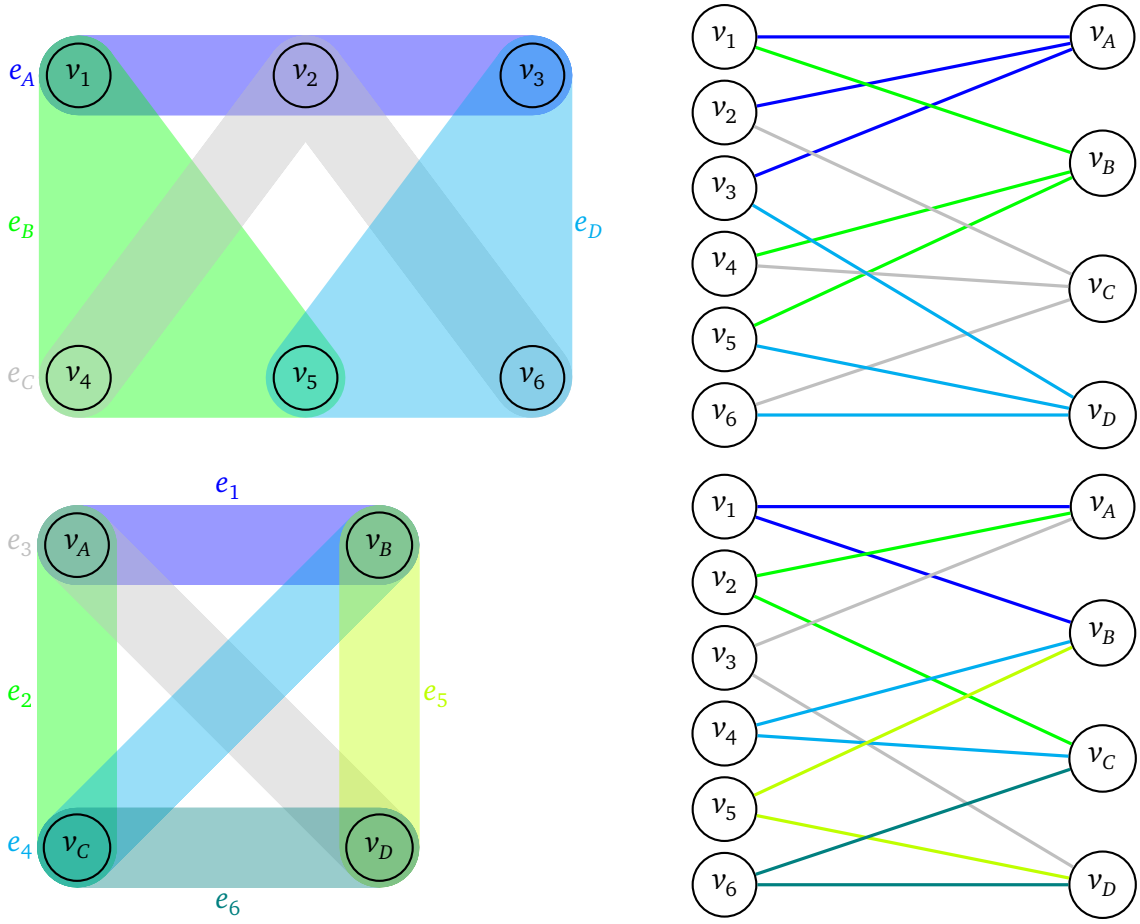
$$\mathcal{E}_{H_1} = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_4, v_5\}, \{v_2, v_4, v_6\}, \{v_3, v_5, v_6\}\}$$

以及 $NH_2 = \left(\mathcal{V}_{H_2}, \mathcal{E}_{H_2}\right)$ 与

$$\mathcal{V}_{H_2} = \{v_A, v_B, v_C, v_D\}$$

$$\mathcal{E}_{H_2} = \{\{v_A, v_B\}, \{v_A, v_C\}, \{v_A, v_D\}, \{v_B, v_C\}, \{v_B, v_D\}, \{v_C, v_D\}\},$$

所得的第一正规图表示是等价的。



因此，如果没有更多信息，例如原始顶点数 $|\mathcal{V}_H|$、超边数 $|\mathcal{E}_H|$、最小或最大超边基数，或者关于某个顶点 $v \in \mathcal{V}_G$ 的信息，即 $v \in \mathcal{V}_H$ 或 $v \in \mathcal{V}_G|\mathcal{V}_H$，就无法唯一重构底层超图。这两个超图具有相同的第一正规图表示 $NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$，其特征为：

$$\mathcal{V}_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_A, v_B, v_C, v_D\}$$

$$\mathcal{E}_G = \{\{v_1, v_A\}, \{v_1, v_B\}, \{v_2, v_A\}, \{v_2, v_C\}, \{v_3, v_A\}, \{v_3, v_D\}, \{v_4, v_B\}, \{v_4, v_C\}, \{v_5, v_B\}, \{v_5, v_D\}, \{v_6, v_C\}, \{v_6, v_D\}\}.$$

除了从普通图还原为超图时存在不唯一的问题外，第一正规图表示还可能导致新顶点和边或弧的数量呈指数增长。

注记 4.13 (第一正规图表示的缺点)。
假设超图中的超边和超弧必须是唯一的（如注记（2.5）中所讨论的），那么无向超图 $NH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$ 中的超边数量将受到严格限制，最多为

$$|\mathcal{E}_H| \leq \left|2^{\mathcal{V}} \setminus \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \ldots \{v_N\}\}\right| = \left|2^{\mathcal{V}}\right| - (N+1) = 2^N - (N+1) \tag{57}$$

而无向超图 $OH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{A}_H)$ 中超弧的数量受到严格限制，上限为

$$|\mathcal{A}_H| \leq C \text{ with } 2^N - (N+1) < C, \tag{58}$$

因为每条可能的超边 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots v_{i_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ 都可以划分为至少两条可行且唯一的超弧 $\left(\{v_{i_1}\}, \{v_{i_2}, v_{i_3} \ldots v_{i_n}\}\right)$ 和 $\left(\{v_{i_2}, v_{i_3} \ldots v_{i_n}\}, \{v_{i_1}\}\right)$。因此，给定一个顶点集 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots v_N\}$，可能超弧的最大数量至少是可能超边数量的两倍。

这表明，表示底层超图的超边或超弧的新顶点集合 $\mathcal{V}_G|\mathcal{V}_H$ 的基数相对于原始顶点数量 N 可能呈指数增长。此外，由于每个新顶点 $v \in \mathcal{V}_G|\mathcal{V}_H$ 至少连接2 个、至多连接 N 个原始顶点，边或弧的数量也可能相对于原始顶点数量 N 呈指数增长。

为了解决新顶点数量可能呈指数级增长的问题，引入了第二种普通图表示法。

定义 4.14 （无向超图的第二种正规图表示）。 （简介 *duction in [14]*）
给定一个无向超图 $NH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$，则可以定义一个编码该超图的无向正规图 $NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$，其定义如下

$$\mathcal{V}_G = \mathcal{V}_H, \tag{59}$$

$$\mathcal{E}_G = \bigcup_{e_q \in \mathcal{E}_H} \left\{ \{v_i, v_j\} \,\middle|\, v_i, v_j \in e_q \ and \ v_i \neq v_j \right\}, \tag{60}$$

其中，对于每条超边 $e_q \in \mathcal{E}_H$ 以及每对顶点 v_i，$v_j \in e_q \subseteq \mathcal{V}_H$，都引入一条新边。因此，底层超图中的每条超边 $e_q \in \mathcal{E}_H$ 在正规图表示中都会对应一个完全子图。

注意：如果两个顶点 v_i，$v_j \in \mathcal{V}_H$ 同时属于多条超边 $e_q \in \mathcal{E}_H$，那么新边 $\{v_i, v_j\}$ 会出现 $\mathcal{E}_G$ 多次（，确切地说是 $\left|\{e_q \in \mathcal{E}_H \,|\, v_i, v_j \in e_q\}\right|$次）。

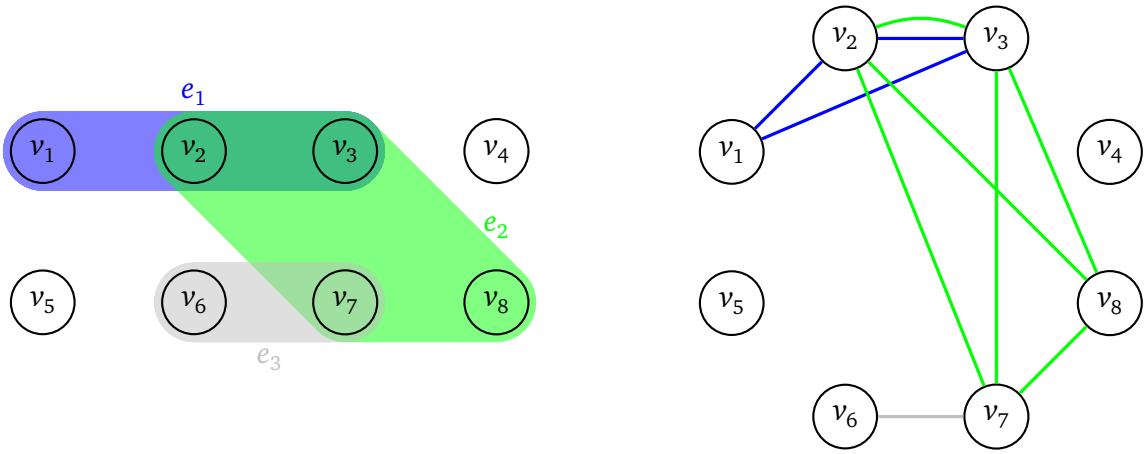
例4.15 （无向超图的第二种正规图表示）。

对前述无向超图 $NH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H) with \mathcal{V}_H = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} and \ \mathcal{E}_H = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3, v_7, v_8\}, \{v_6, v_7\}\}$稍作变动后，表示该超图的无向正规图 $NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$ 可表示为

$$\mathcal{V}_G = \mathcal{V}_H = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\},$$

$$\mathcal{E}_G = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_7\}, \{v_2, v_8\}, \{v_3, v_7\}, \{v_3, v_8\}, \{v_7, v_8\}, \{v_6, v_7\}\}$$

并且可以通过以下方式进行可视化：



定义4.16 (有向超图的第二种正规图表示)。

给定一个有向超图 $OH = (\mathscr{V}_H, \mathscr{A}_H)$，则可以定义一个编码该超图的有向正规图 $OG = (\mathscr{V}_G, \mathscr{A}_G)$，其定义为。

$$\mathscr{V}_G = \mathscr{V}_H, \tag{61}$$

$$\mathscr{A}_G = \bigcup_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left\{ (v_i, v_j) \,\middle|\, v_i \in a_q^{out}, v_j \in a_q^{in} \text{ or } v_i, v_j \in a_q^{out} \text{ or } v_i, v_j \in a_q^{in}, v_i \neq v_j \right\}, \tag{62}$$

其中，新引入的弧 (v_i, v_j) 表示顶点 v_i 和 v_j 属于超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，其中 v_i 是输出顶点，v_j 是输入顶点；或者表示顶点 v_i 和 v_j 均属于超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$ 的输出顶点集或输入顶点集。

注：如果对于两个顶点 $v_i, v_j \in \mathscr{V}_H$，存在多个超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，使得 $v_i \in a^{out}{}_q$ 且 $v_j \in a^{in}{}_q$，那么新弧 (v_i, v_j) 将在弧集 $\mathscr{A}_G$ 中出现多次。类似地，如果两个顶点 $v_i, v_j \in \mathscr{V}_H$ 同时属于多个超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$的同一个输出顶点集或输入顶点集，那么弧 (v_i, v_j) 和 (v_j, v_i) 将在 $\mathscr{A}_G$中出现多次。总之，满足 $v_i \neq v_j$ 的弧 (v_i, v_j) 属于 $\mathscr{A}_G$。

$$\left| \left\{ a_q \in \mathscr{A}_H \,\middle|\, v_i \in a_q^{out}, v_j \in a_q^{in} \text{ or } v_i, v_j \in a_q^{out} \text{ or } v_i, v_j \in a_q^{in} \right\} \right|$$

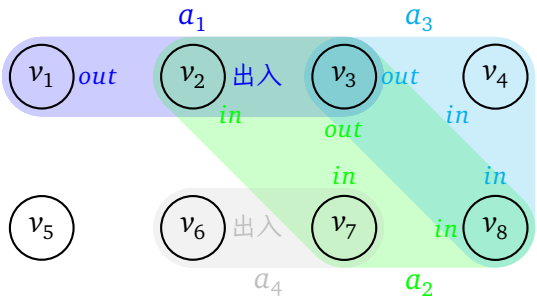
次。

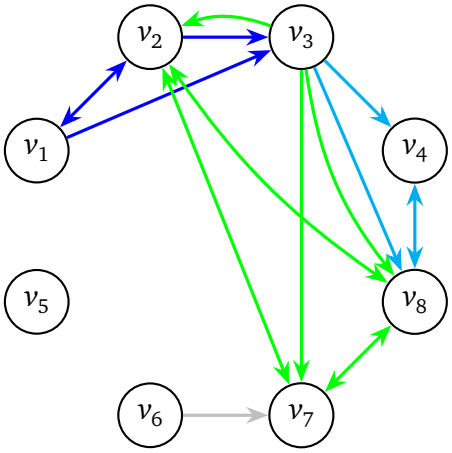
Exa示例 4.17(有向超图的第二种正规图表示)。

给定有向超图 $OH = (\mathscr{V}_H, \mathscr{A}_H)$，其 $\mathscr{V}_H = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$，$\mathscr{A}_H = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，其中 $a_1 = (\{v_1\}, \{v_2, v_3\})$，$a_2 = (\{v_3\}, \{v_2, v_7, v_8\})$，$a_3 = (\{v_3\}, \{v_4, v_8\})$，$a_4 = (\{v_6\}, \{v_7\})$，那么编码该超图的有向正规图 $OG = (\mathscr{V}_G, \mathscr{A}_G)$ 表示为

$$\mathscr{V}_G = \mathscr{V}_H = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\},$$
$$\mathscr{A}_G = \{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_1, v_2), (v_2, v_1)\} \cup$$
$$\{(v_3, v_2), (v_3, v_7), (v_3, v_8), (v_2, v_7), (v_7, v_2), (v_2, v_8), (v_8, v_2), (v_7, v_8), (v_8, v_7)\} \cup$$
$$\{(v_3, v_4), (v_3, v_8), (v_4, v_8), (v_8, v_4)\} \cup \{(v_6, v_7)\}$$

并可通过以下方式进行可视化：





为了尽可能清晰地保持正规图表示，任意超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$ 的情形 $\left\{(v_i, v_j), (v_j, v_i) \,\middle|\, v_i, v_j \in a^{out}{}_q \text{ 或 } v_i, v_j \in a^{in}{}_q, v_i \neq v_j\right\}$ 用一条合并弧 $\longleftrightarrow$ 表示，而不是用两条单独的弧 $\longleftarrow$ 和 $\longrightarrow$ 表示。

与第一正规图表示类似，从普通图映射回底层超图的映射不一定唯一。

例4.18 (第二种正规图表示唯一性的反例).

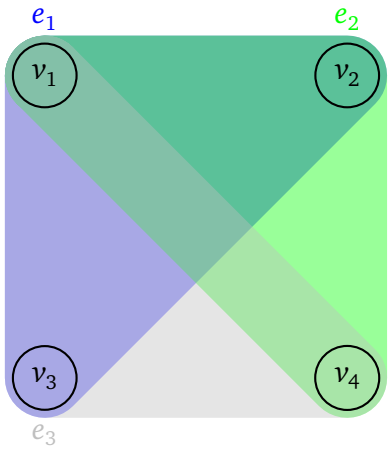
对于两个无向超图 $NH_1 = \left(\mathscr{V}_{H_1}, \mathscr{E}_{H_1}\right)$，其中

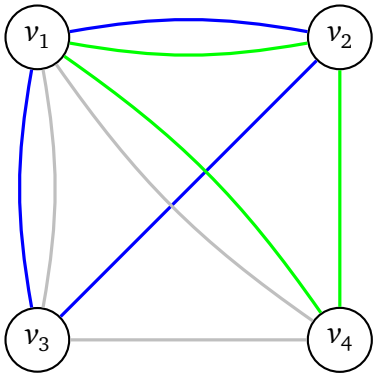
$$\mathscr{V}_{H_1} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$
$$\mathscr{E}_{H_1} = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}\}$$

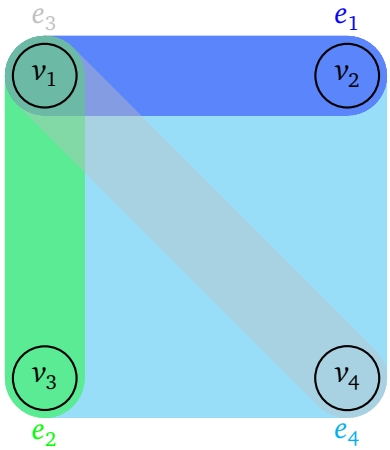
以及 $NH_2 = \left(\mathscr{V}_{H_2}, \mathscr{E}_{H_2}\right)$ 与

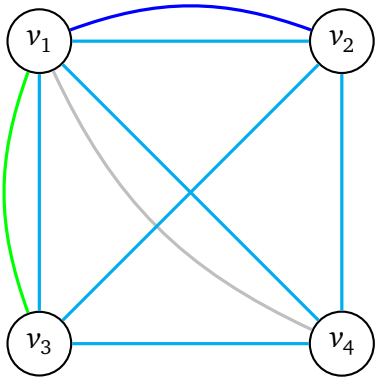
$$\mathscr{V}_{H_2} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$
$$\mathscr{E}_{H_2} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}\},$$

由此得到的第二种正规图表示是等价的。









因此，如果没有更多信息，例如超边的数量 $|\mathcal{E}_H|$ 或最小或最大超边基数，就不可能唯一地重建底层超图。这两个超图具有相同的第二种正规图表示 $NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$，其形式如下：

$$\mathcal{V}_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$\mathcal{E}_G = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}.$$

尽管第二种正规图表示不会引入新顶点，因此不存在新顶点数量可能呈指数级增长的问题，但描述一个超边或超弧所需的边或弧的数量，仍会随该超边或超弧中的顶点数呈二次增长。

备注 4.19（**第二种正规图表示的缺点**）。
给定一个无向超图 $NH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{E}_H)$ 及其正规图表示 $NG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{E}_G)$，则描述超边 $e_q \in \mathcal{E}_H$ 所需的新边数为

$$\binom{|e_q|}{2} = \frac{|e_q|!}{2!(|e_q|-2)!} = \frac{|e_q|(|e_q|-1)}{2} \in \mathcal{O}\left(|e_q|^2\right) \tag{63}$$

由于超边中的每一对顶点都恰好由一条新边（连接，因此顶点的顺序）在正规图表示中并不重要。

类似地，对于有向超图 $OH = (\mathcal{V}_H, \mathcal{A}_H)$ 及其正规图表示 $OG = (\mathcal{V}_G, \mathcal{A}_G)$，描述超弧 $a_q = \left(a^{out}{}_q, a^{in}{}_q\right) \in \mathcal{A}_H$ 所需的新弧数为

$$2\binom{|a_q^{out}|}{2} + 2\binom{|a_q^{in}|}{2} + |a_q^{out}||a_q^{in}| =$$
$$|a_q^{out}|(|a_q^{out}|-1) + |a_q^{in}|(|a_q^{in}|-1) + |a_q^{out}||a_q^{in}| \in \mathcal{O}\left(\left(|a_q^{out}| + |a_q^{in}|\right)^2\right) \tag{64}$$

因为超弧的输入顶点集合和输出顶点集合中的每对顶点之间都由两条弧相连。此外，每个输出顶点都与该超弧的每个输入顶点相连，因此产生了额外的 $|a^{out}{}_q||a^{in}{}_q|$ 条新弧。

因此，使用第二种正规图表示对超边或超弧进行编码所需的新边或弧的数量，与该超边或超弧中的顶点数呈二次关系。

从正规图表示反向映射到超图时映射不唯一的问题，以及正规图表示中顶点数和\ 或边和弧数量不断增加的现象，清楚地表明了将普通图扩展到超图的必要性。

超图非常适合用于一致地建模多个对象之间的联系，例如社交网络中的交互或化学反应。此外，所介绍的正规图表示都表明，与普通图相比，使用超图对对象之间的复杂链接进行建模具有计算优势。这些考量促使我们将普通图情形中的概念推广到超图，同时也说明了为何后续章节中关于超图的定义比普通图中的定义更复杂。

5 普通图上的实值函数

在普通图的顶点集 $\mathcal{V}$ 以及边集 $\mathcal{E}_G$ 或弧集 $\mathcal{A}_G$ 上，可以定义实值函数，以便对原始数据集$v_1, v_2, \ldots v_N$中的更多信息进行编码。后续章节将利用这些函数定义梯度、伴随算子、散度、拉普拉斯算子以及p-拉普拉斯算子。

第（5.1）小节介绍顶点函数，它可以进一步描述各个数据点 $v_1, v_2, 。\ldots\ldots v_N$，例如使用顶点权函数。本小节还将所有顶点函数构成的空间定义为希尔伯特空间，并给出相应的内积、绝对值以及顶点函数的 $\mathcal{L}^p$-范数。

此外，第（5.2）小节定义了无向普通图上的边函数和有向普通图上的弧函数，用于编码有关数据点 $v_1, v_2, 。\ldots\ldots v_N$之间成对关系的更多信息。边权重函数和弧权函数作为边函数和弧函数的示例一并介绍，同时还说明了它们的对称性以及对其进行归一化的可能性。与前一小节一样，本节也将所有边函数或弧函数构成的空间定义为希尔伯特空间，并给出相应的内积、绝对值以及 $\mathcal{L}^p$-范数。

5.1 正规图上的实值顶点函数

为了进一步描述这些数据点（即顶点）$v_1, v_2, \ldots v_N$，可以使用定义在顶点集 $\mathcal{V}$ 上的实值函数。关于这一主题已有大量研究成果发表在 [4] 中，因此本小节将推广其中的定义和概念。

定义 5.1 (**实值顶点函数** f)。 （*[4]*第 *2418* 页：顶点上的实值函数）

实值顶点函数f定义在无向正规图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$或有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$的顶点 $\mathcal{V}$所构成的定义域上，并可写作

$$f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v_i \longmapsto f(v_i). \tag{65}$$

实值顶点函数的一个示例是顶点权重函数w，它为每个顶点w 赋予一个正权重$v_i \in \mathcal{V}$。

定义 5.2（顶点权重函数 w）。
顶点权重函数 w 既可以定义在无向正规图 $NG=(\mathcal{V},\mathcal{E}_G)$ 上，也可以定义在有向正规图 $OG=(\mathcal{V},\mathcal{A}_G)$上，定义如下：

$$w:\mathcal{V}\longrightarrow\mathbb{R}_{>0}\qquad v_i\longmapsto w(v_i). \tag{66}$$

无向正规图和有向正规图连同顶点权重函数 w，可分别写成三元组 $NG=(\mathcal{V},\mathcal{E}_G,w)$ 或 $OG=(\mathcal{V},\mathcal{A}_G,w)$。

通常，可以在同一个普通图上定义多个顶点函数。因此，在本学位论文中，不同的顶点函数用其下标标示。

注记 5.3（顶点权重函数 w_I 和 w_G）。
由于将使用加权有向正规图 $OG=(\mathcal{V},\mathcal{A}_G,w)$ 的不同顶点权重函数 w 来定义实值顶点函数空间的内积，以及顶点梯度和弧梯度，因此用不同的下标标示该顶点权重函数是来自内积 w_I 还是梯度定义 w_G。两个顶点权重函数 w_I 和 w_G 均定义在加权有向正规图 OG 的同一顶点集 $\mathcal{V}$上。

无向普通图$NG=(\mathcal{V},\mathcal{E}_G)$或有向普通图$OG=(\mathcal{V},\mathcal{A}_G)$上的实值顶点函数的其他重要示例，是定义（3.4）中前面定义的顶点度函数 $\deg$、$\deg_{out}$ 和 $\deg_{in}$。

由于假设顶点数 $|\mathcal{V}|=N\in\mathbb{N}$ 有限，因此所有实值顶点函数f构成的空间可与一个N−维希尔伯特空间相关联。

定义 5.4(实值顶点函数空间 $\mathscr{H}(\mathcal{V})$)。
实值顶点函数f的空间定义为

$$\mathscr{H}(\mathcal{V})=\{f\mid f:\mathcal{V}\longrightarrow\mathbb{R}\} \tag{67}$$

其对应的内积为

$$\langle f,g\rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{V})}=\sum_{v_i\in\mathcal{V}}w_I(v_i)^{\alpha}f(v_i)\,g(v_i) \tag{68}$$

对于任意两个实值顶点函数f、$g\in\mathscr{H}(\mathcal{V})$、顶点权重函数 w_I 和参数$\alpha\in\mathbb{R}$。$\left($注：$w_I(v_i)^{\alpha}=(w_I(v_i))^{\alpha}\right)$

注释 5.5 （**实顶点函数内积的参数选择**）。
通过选择 $\alpha = 0$，即可得到实值顶点函数内积的通常定义（ *[4]* 中的第 *2418* 页： $\mathscr{H}(\mathscr{V})$ 上的内积）。

$$\langle f, g \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{V})} = \sum_{v_i \in \mathscr{V}} f(v_i) g(v_i) \tag{69}$$

对于任意两个实值顶点函数、$g \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$。

此外，基于实值连续函数的定义，可以定义实值顶点函数的绝对值和 $\mathscr{L}^p$-范数。

定义 5.6 (**实值顶点函数空间上的绝对值与 $\mathscr{L}^p$-范数**)。 *(*第 *2418* 页，见 *[4]*: $\mathscr{L}^p(\mathscr{V})$*)*

For 对于顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 处的一个实值顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$，其绝对值定义为 a *s:*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$f(v_i) \longmapsto |f(v_i)| = \begin{cases} f(v_i) & f(v_i) \geq 0 \\ -f(v_i) & otherwise \end{cases}. \tag{70}$$

此外，实值顶点函数 f 的 $\mathscr{L}^p$-范数定义为：

$$||\cdot||_p : \mathscr{H}(\mathscr{V}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$f \longmapsto ||f||_p = \begin{cases} \left(\sum_{v_i \in \mathscr{V}} |f(v_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \max_{v_i \in \mathscr{V}} (|f(v_i)|) & p = \infty \end{cases}. \tag{71}$$

5.2 普通图上的实边函数和实弧函数

关于任意两个数据点v_i、$v_j \in \{v_1, v_2, \ldots\ldots v_N\}$之间成对关系的更多信息，可以通过边或弧，以及定义在边集 $\mathscr{E}_G$ 或弧集 $\mathscr{A}_G$上的所谓边函数或弧函数来编码。本小节再次推广了 [4]的工作。

定义 5.7 (**实边函数或弧函数 F**)**.** *([4]* 中的第 *2418* 页：边上的实值函数*)*

实边函数或弧函数 F 定义在无向正规图 $NG = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_G)$ 的边定义域 $\mathscr{E}_G$ 上，或定义在有向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G)$ 的弧定义域 $\mathscr{A}_G$ 上，如下所示

$$F : \mathscr{E}_G \longrightarrow \mathbb{R} \qquad e_q = \{v_i, v_j\} \longmapsto F(e_q) = F(\{v_i, v_j\}) \tag{72}$$

或者在有向正规图的情况下

$$F : \mathscr{A}_G \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a_q = (v_i, v_j) \longmapsto F(a_q) = F((v_i, v_j)). \tag{73}$$

由于边 $\{v_i,v_j\} \in \mathscr{E}_G$ 缺乏顺序性，实值边函数总是对称的。

备注5.8 （实值边函数的对称性）。
对于无向正规图 $NG = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_G)$，边函数 $F: \mathscr{E}_G \longrightarrow \mathbb{R}$ 总是对称的，这意味着

$$\forall \{v_i, v_j\} \in \mathscr{E}_G: F(\{v_i, v_j\}) = F(\{v_j, v_i\}). \tag{74}$$

实值弧函数 $F: \mathscr{A}_G \longrightarrow \mathbb{R}$通常不具备这一性质，因此不能假定对所有弧 $(v_i, v_j) \in \mathscr{A}_G$都有 $F((v_i, v_j)) = F((v_j, v_i))$ 成立。(注意：$(v_i, v_j) \in \mathscr{A}_G$ 并不意味着 $(v_j, v_i) \in \mathscr{A}_G$，因此 $F((v_j, v_i))$ 甚至可能没有定义。)

实边函数或弧函数的一个示例是边或弧权重函数W，它为边或弧赋予正权重。

定义5.9(边或弧权重函数W)。
边或弧权重函数 W 既可以定义在无向正规图 $NG = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_G)$ 上，也可以定义在有向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G)$上:

1) 对于无向正规图 NG，边权函数 W 定义为 by

$$W: \mathscr{E}_G \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \qquad e_q = \{v_i, v_j\} \longmapsto W(e_q) = W(\{v_i, v_j\}) \tag{75}$$

具有自动对称性 $W(\{v_i, v_j\}) = W(\{v_j, v_i\})$，对所有边均成立 $\{v_i, v_j\} \in \mathscr{E}_G$.

2) 类似地，对于有向正规图 OG，弧权函数 W 定义在所有弧的定义域上 $\mathscr{A}_G$，而不是所有边的定义域上 $\mathscr{E}_G$

$$W: \mathscr{A}_G \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \qquad a_q = (v_i, v_j) \longmapsto W(a_q) = W((v_i, v_j)) \tag{76}$$

具有对称性 $W((v_i,v_j)) = W((v_j,v_i))$，但该性质不一定对所有弧 $(v_i,v_j) \in \mathscr{A}_G$都成立。

带有边权函数 W 的无向正规图 $NG = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_G)$，或带有弧权函数 W 的有向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G)$，称为加权 (非) 有向正规图，可记为三元组 $NG = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_G, W)$ 或 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, W)$。

也可以在同一个普通图上定义多个边函数或弧函数。因此，不同的边函数或弧函数通过其下标表示。

注记 5.10（**弧权函数 W_I 和 W_G**）。

加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, W)$的不同弧权函数将用于实值弧函数空间的内积，也用于顶点和弧梯度的定义。因此，不同的下标表示弧权函数是来自内积 W_I 还是梯度定义 W_G；然而，弧权函数 W_I 和 W_G 都定义在加权定向正规图 OG 的同一弧集 $\mathcal{A}_G$ 上。

如前所述，实值弧函数不一定是对称的。因此，不能想当然地认为有向正规图上的弧权函数 W 是对称的。

定义 5.11（**对称弧权函数**）。

若有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$ 上的弧权函数 W 对所有弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G$ 均满足

$$W(a_q) = W(\tilde{a}_q) \tag{77}$$

对于 $\tilde{a}_q = (v_j, v_i) \in \widetilde{\mathcal{A}_G}$，其中 $\widetilde{\mathcal{A}_G}$ 可在反转方向后的有向正规图的定义 *(1.7)* 中找到。

注意：此性质要么需要将弧权函数 $\widetilde{W}$ 的定义域从 $\mathcal{A}_G$ 扩展到 $\mathcal{A}_G \cup \mathcal{A}_G$，要么要求有向正规图满足性质 $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_G$，由此可推出，对所有弧 $(v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G$，$(v_j, v_i) \in \mathcal{A}_G$ 也成立。

每个边或弧权重函数都可以重新缩放，使其映射值仅为小于或等于 1 的正值。

定理 5.12 (**边或弧权重函数的归一化**)。

每个边或弧权重函数 W 都可以归一化，使其映射到 $(0, 1]$ 中的值，而不是 $\mathbb{R}_{>0}$。

证明。

以下证明中的所有论证均适用于无向普通图 $NG = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$ 和有向普通图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G)$，因为论证过程中并未使用边或弧的方向，也未使用 W 的对称性。因此，不失一般性，假设 W 定义在无向普通图 NG的边集 $\mathcal{E}_G$ 的定义域上。

那么，对于每条超边$e_q \in \mathscr{E}_G$，都有$W\left(e_q\right) \in \mathbb{R}_{>0}$，因此

$$m := \max_{e_q \in \mathscr{E}_G} W\left(e_q\right) \in \mathbb{R}_{>0}$$

由于边集 $\mathscr{E}_G$ 有限，因此定义良好。给定最大权重 m，可以定义新的边权函数 W

$$\overline{W}:\ \mathscr{E}_G \longrightarrow (0,1] \qquad e_q = \left\{v_i, v_j\right\} \longmapsto \frac{W\left(e_q\right)}{m} = \frac{W\left(\left\{v_i, v_j\right\}\right)}{m}, \tag{78}$$

其中 $W(e_q)\, m \in (0,1]$ 对所有边 $e_q \in \mathscr{E}_G$ 均成立，因为满足以下性质：

- $W\left(e_q\right), m > 0 \quad \Longrightarrow \quad \overline{W}\left(e_q\right) = \frac{W\left(e_q\right)}{m} > 0$
- $W\left(e_q\right) \leq m \quad \Longrightarrow \quad \overline{W}\left(e_q\right) = \frac{W\left(e_q\right)}{m} \leq \frac{m}{m} = 1$

因此，可以对任意边或弧权重函数 W 进行归一化，使其映射到 $(0,1]$ 中的值。

□

下面的注记表明，无向正规图$NG = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_G)$中的边数和有向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G)$ 中的弧数均不超过N^2, ，这使得实边函数或弧函数空间可以与维数至多为N^2的希尔伯特空间相关联。

注释 5.13 (普通图中的边数或弧数)。
如注记 *(1.5)* 所述，假设每条边或弧至多出现一次。结合性质 $\mathscr{E}_G \subseteq \left\{\left\{v_i, v_j\right\} \,\middle|\, v_i, v_j \in \mathscr{V}\right\}$，即每个顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 至多与所有其他顶点 $v_j \in \mathscr{V} \setminus \{v_i\}$ 相连，可得无向正规图 $NG = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_G)$ 中边的数量受到以下限制：

$$|\mathscr{E}_G| \leq |\mathscr{V}| \cdot |\mathscr{V}| = N^2. \tag{79}$$

类似地，有向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G)$ 中弧的数量受到以下限制：

$$|\mathscr{A}_G| \leq |\mathscr{V}| \cdot |\mathscr{V}| = N^2 \tag{80}$$

因为 $\mathscr{A}_G \subseteq \left\{\left(v_i, v_j\right) \,\middle|\, v_i, v_j \in \mathscr{V}\right\} = \mathscr{V} \times \mathscr{V}$，这意味着每个顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 至多与所有其他顶点 $v_j \in \mathscr{V} \setminus \{v_i\}$ 相连两次：一次作为 $\left(v_i, v_j\right)$ 中的输出顶点，一次作为 $\left(v_j, v_i\right)$ 中的输入顶点。

通过将所有边函数的定义域从 $\mathscr{E}_G$ 扩展至 $\left\{\left\{v_i, v_j\right\} \,\middle|\, v_i, v_j \in \mathscr{V}\right\}$，并通过设定$F\left(\left\{v_i, v_j\right\}\right) = 0$（对于任意边 $\left\{v_i,\ v_j\right\} \notin \mathscr{E}_G$）以及 $F\left(\left(v_i, v_j\right)\right) = 0$（对于任意弧 $\left(v_i,\ v_j\right) \notin \mathscr{A}_G$），将所有弧函数的定义域从 $\mathscr{A}_G$ 扩展至 $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$，所有实值边函数或弧函数构成的空间可以视为一个 ^{2} 维希尔伯特空间。

定义 5.14 (实值边函数 $\mathscr{H}(\mathscr{E}_G)$ 和实值弧函数 $\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 的空间)。

无向正规图 $NG = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_G, W)$ 的实边函数空间 F 给出为

$$\mathscr{H}(\mathscr{E}_G) = \{F \mid F:\ \mathscr{E}_G \longrightarrow \mathbb{R}\} \tag{81}$$

及相应的内积

$$\langle F, G\rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{E}_G)} = \sum_{e_q \in \mathscr{E}_G} W_I\left(e_q\right)^{\beta} F\left(e_q\right) G\left(e_q\right) \tag{82}$$

对于任意两个实值边函数 F,$G \in \mathscr{H}(\mathscr{E}_G)$ 和参数 $\beta \in \mathbb{R}$。类似地，在有向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, W)$的情形下，实值弧函数空间定义为

$$\mathscr{H}(\mathscr{A}_G) = \{F \mid F:\ \mathscr{A}_G \longrightarrow \mathbb{R}\} \tag{83}$$

与相应的内积搭配

$$\langle F, G\rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)} = \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} W_I\left(a_q\right)^{\beta} F\left(a_q\right) G\left(a_q\right) \tag{84}$$

对于任意两个实值弧函数 F,$G \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 和参数 $\beta \in \mathbb{R}$。

$\left(Note:\ W_I\left(e_q\right)^{\beta} = \left(W_I\left(e_q\right)\right)^{\beta}\ and\ W_I\left(a_q\right)^{\beta} = \left(W_I\left(a_q\right)\right)^{\beta}\right)$

注记 5.15 (实边与弧函数内积的参数选择)。

选择 $\beta = 1$，对所有边 $e_q \in \mathscr{E}_G$ 取 $W\left(e_q\right) \equiv \frac{1}{2}$，对所有弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$ 取 $W\left(a_q\right) \equiv \frac{1}{2}$，即可得到实边函数内积的通常定义（*[4]* 中的第 *2418* 页：$\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 上的内积）。

$$\langle F, G\rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{E}_G)} = \frac{1}{2} \sum_{e_q \in \mathscr{E}_G} F\left(e_q\right) G\left(e_q\right) \tag{85}$$

对于任意两个实值边函数 F,$G \in \mathscr{H}(\mathscr{E}_G)$。类似地，可以得到实值弧函数内积的通常定义。

$$\langle F, G\rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)} = \frac{1}{2} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} F\left(a_q\right) G\left(a_q\right) \tag{86}$$

对于任意两个实值弧函数 F,$G \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$。

此外，还可以定义实边函数和实弧函数的绝对值与 $\mathscr{L}^p$-范数，这些定义在后续章节中是必需的。

定义 5.16 （实边函数和实弧函数空间上的绝对值与 $\mathscr{L}^p$-范数）。

绝对值和 $\mathscr{L}^p$-范数既可以定义在实值边函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{E}_G)$ 上，也可以定义在实值弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 上：

1) 对于边 $e_q \in \mathscr{E}_G$ 上的实值边函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{E}_G)$，其绝对值定义为

$$\begin{aligned} &|\cdot|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &F(e_q) \longmapsto \left|F(e_q)\right| = \begin{cases} F(e_q) & F(e_q) \geq 0 \\ -F(e_q) & otherwise \end{cases} \end{aligned} \tag{87}$$

边函数 $|(F|)$ 的 $\mathscr{L}^p$-范数定义为

$$\begin{aligned} &||\cdot||_p: \mathscr{H}(\mathscr{E}_G) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &F \longmapsto ||F||_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\sum_{e_q \in \mathscr{E}_G} \left|F(e_q)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \max_{e_q \in \mathscr{E}_G}\left(\left|F(e_q)\right|\right) & p = \infty \end{cases}. \end{aligned} \tag{88}$$

2）类似地，对于弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$ 上的实值弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$，其绝对值定义为

$$\begin{aligned} &|\cdot|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &F(a_q) \longmapsto \left|F(a_q)\right| = \begin{cases} F(a_q) & F(a_q) \geq 0 \\ -F(a_q) & otherwise \end{cases} \end{aligned} \tag{89}$$

弧函数 F 的 $\mathscr{L}^p$-范数定义为

$$\begin{aligned} &||\cdot||_p: \mathscr{H}(\mathscr{A}_G) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &F \longmapsto ||F||_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} \left|F(a_q)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \max_{a_q \in \mathscr{A}_G}\left(\left|F(a_q)\right|\right) & p = \infty \end{cases}. \end{aligned} \tag{90}$$

为简化较复杂公式中的符号表示，从现在起，所有双括号均替换为单括号。

注记 5.17 (弧记号的简化)。
为简化起见，从现在起省略弧函数中的双括号。

$$F((v_i, v_j)) \longleftarrow F(v_i, v_j)$$

对于有向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G)$ 的每条弧 $(v_i, v_j) \in \mathscr{A}_G$。

6 有向正规图上的梯度算子和伴随算子

利用顶点函数和边函数或弧函数的定义，可以将连续情形中的标准微分算子扩展到带顶点权重函数w 和弧权函数 W的加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$的离散情形。

因此，本节介绍加权定向正规图上的梯度与伴随算子，这些算子是后续定义散度、拉普拉斯算子和 p-拉普拉斯算子所必需的。第 (6.1) 小节定义了顶点梯度算子和弧梯度算子，并介绍了它们的特定性质；这些性质与连续情形中梯度的常见性质相符。接下来，第 (6.2) 小节基于前面定义的顶点梯度和弧梯度，推导出相应的顶点伴随算子和弧伴随算子。在这两个小节中，定义的选取方式确保它们与 [4] 中定义的顶点梯度和顶点伴随算子相符。

6.1 有向正规图上的梯度算子

对于加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$，梯度算子既可以定义在所有顶点的集合 $\mathcal{V}$ 上，也可以定义在所有弧的集合 $\mathcal{A}_G$ 上。

定义 6.1（顶点梯度算子 ∇_v）。
对于加权有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$，顶点梯度算子$\nabla_v$ 定义为

$$\nabla_v : \mathscr{H}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathcal{A}_G) \qquad f \longmapsto \nabla_v f \tag{91}$$

定义为顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathcal{V})$ 沿弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G$的加权差分是

$$\nabla_v f : \mathcal{A}_G \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a_q = (v_i, v_j) \longmapsto \nabla_v f(a_q) =$$

$$W_G(v_i, v_j)^{\gamma} \left(w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon} f(v_j) - w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{\eta} f(v_i) \right). \tag{92}$$

注记 6.2 (顶点梯度算子的参数选择).
通过选择 $\alpha = 0, \gamma = 2, \epsilon = \frac{1}{2} = 0$ 和 $\eta = 0$，可得到所有弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G$ 的顶点梯度通常定义（*[4]*中的第 *2418* 页：加权差分）：

$$\nabla_v f(a_q) = \nabla_v f(v_i, v_j) = \sqrt{W_G(v_i, v_j)} \left(f(v_j) - f(v_i) \right). \tag{93}$$

加权差分 $\nabla_v f$ 与连续情形下的梯度具有相似性质。

定理 6.3（顶点梯度算子性质）。
加权定向正规图 $OG=(\mathcal{V},\mathcal{A}_G,w,W)$ 上的顶点函数 $f\in\mathcal{H}(\mathcal{V})$ 的加权差分满足以下性质：

1）常值顶点函数的梯度等于零：
$f(v_i)\equiv f^{-}\in\mathbb{R}$ 对于所有顶点 $v_i\in\mathcal{V}$ 和 $w_I(v_k)^{\alpha}w_G(v_k)^{\epsilon}=w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\eta}$，对于所有弧 $a_q=(v_j,v_k)\in\mathcal{A}_G \implies \nabla_v f(a_q)=0$ 对于所有弧 $a_q=(v_j,v_k)\in\mathcal{A}_G$

2) 反对称性：
对称弧权函数 W_G *and* $\epsilon=\eta \implies \nabla_v f(a_q)=-\nabla_v f(\tilde{a}_q)$ 适用于所有弧 $a_q\in\mathcal{A}_G$（及其对应的弧 $\tilde{a}_q\in\widetilde{\mathcal{A}_G}$，该弧属于定义 *(1.7)* 中方向反转后的图 $\widetilde{OG}$）

证明。
给定加权有向正规图 $f\in\mathcal{H}(\mathcal{V})$ $OG=(\mathcal{V},\mathcal{A}_G,w$ 上的顶点函数 $W)$，则有：

1) 对所有顶点 $f(v_i)\equiv f\in\mathbb{R}$ $v_i\in\mathcal{V}$ 以及 $w_I(v_k)^{\alpha}w_G(v_k)^{\epsilon}=w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\eta}$，若对所有弧 $a_q=(v_j,v_k)\in\mathcal{A}_G$ 均成立，则：

$$\begin{aligned}\nabla_v f(a_q)&=W_G(v_j,v_k)^{\gamma}\left(w_I(v_k)^{\alpha}w_G(v_k)^{\epsilon}f(v_k)-w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\eta}f(v_j)\right)\\&=W_G(v_j,v_k)^{\gamma}\left(w_I(v_k)^{\alpha}w_G(v_k)^{\epsilon}\overline{f}-w_I(v_k)^{\alpha}w_G(v_k)^{\epsilon}\overline{f}\right)\\&=W_G(v_j,v_k)^{\gamma}\cdot 0\\&=0\end{aligned}$$

其中，最后一个等式成立，是因为弧权重函数 W_G 是一个实值函数，因此其映射结果为有限值。

2) W_G 为对称弧权函数且 $\epsilon=\eta$ 成立，这意味着对于每条弧 $a_q=(v_i,v_j)\in\mathcal{A}_G$：

$$\begin{aligned}\nabla_v f(a_q)&=\nabla_v f(v_i,v_j)\\&=W_G(v_i,v_j)^{\gamma}\left(w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\epsilon}f(v_j)-w_I(v_i)^{\alpha}w_G(v_i)^{\eta}f(v_i)\right)\\&=-W_G(v_i,v_j)^{\gamma}\left(w_I(v_i)^{\alpha}w_G(v_i)^{\eta}f(v_i)-w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\epsilon}f(v_j)\right)\\&=-W_G(v_i,v_j)^{\gamma}\left(w_I(v_i)^{\alpha}w_G(v_i)^{\epsilon}f(v_i)-w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\eta}f(v_j)\right)\\&=-W_G(v_j,v_i)^{\gamma}\left(w_I(v_i)^{\alpha}w_G(v_i)^{\epsilon}f(v_i)-w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\eta}f(v_j)\right)\\&=-\nabla_v f(v_j,v_i)=-\nabla_v f(\tilde{a}_q)\end{aligned}$$

其中，从第四行到第五行的等式是利用弧权函数W_G的对称性得到的。

□

类似于顶点梯度算子 ∇_v，可以在弧函数的定义域上定义一个线性梯度算子 $\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$。

定义 6.4(弧梯度算子 ∇_a)。
对于加权定向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, w, W)$，弧梯度算子$\nabla_a$ 定义为

$$\nabla_a : \mathscr{H}(\mathscr{A}_G) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{V}) \qquad F \longmapsto \nabla_a F \tag{94}$$

弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 在顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 处的加权差分为

$$\nabla_a F : \mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v_i \longmapsto \nabla_a F(v_i) =$$
$$w_G(v_i)^{\zeta} \sum_{a_q \in .\mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{\theta} F(a_q). \tag{95}$$

注记 6.5 (弧梯度算子的参数选择)。
选择β 对所有弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$、$\zeta = 2$ 以及 $\theta = 0$，省略度函数 $\deg_{in}(v_i)$ 和 $\deg_{out}(v_i)$ 后，对所有顶点 $v_i \in \mathscr{V}$，可得到所有顶点 $v_i \in \mathscr{V}$的弧梯度的简化定义：

$$\nabla_a F(v_i) = \frac{\sqrt{w_G(v_i)}}{2} \sum_{a_q \in .\mathscr{A}_G} \left(\delta_{in}(v_i, a_q) - \delta_{out}(v_i, a_q) \right) F(a_q). \tag{96}$$

与顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$的加权差分 $\nabla_v f$类似，弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 的加权差分 $\nabla_a F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 与连续情形中的梯度相比，也具有类似的性质。

定理 6.6 (弧梯度算子性质)。
加权定向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, w, W)$上的弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 的加权差分满足以下性质：

1）常数弧函数的梯度等于零：

$$F(a_q) \equiv \overline{F} \in \mathbb{R} \text{ and } W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{\theta} \equiv \overline{W} \in \mathbb{R} \text{ for all arcs } a_q \in \mathscr{A}_G$$
$$\Longrightarrow \quad \nabla_a F(v_i) = 0 \text{ for all vertices } v_i \in \mathscr{V}$$

2）反对称性：
对称弧权函数 W_I 和 W_G，且 $F\left(a_q\right)=F\left(\tilde{a}_q\right)$ 对所有弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$ 均成立，$\tilde{a}_q \in \mathscr{A}_G$

$\Longrightarrow \quad \nabla_a F\left(v_i\right)=-\nabla_{\tilde{a}} F\left(v_i\right)$ 对所有顶点 $v_i \in \mathscr{V}$（均成立，其中 $\nabla_{\tilde{a}} F$ 是应用于反转后的方向 $\overleftarrow{OG}$）对应图上的弧梯度

证明。
给定加权定向正规图 $F \in \mathscr{H}\left(\mathscr{A}_G\right)$ $OG=(\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, w$ 上的弧函数，以及 $W)$，则有：

1) 对所有弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$，若 $F\left(a_q\right) \equiv F \in \mathbb{R}$ 且 $W_I\left(a_q\right)^\beta W_G\left(a_q\right)^\theta \equiv W \in \mathbb{R}$，则对所有顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 均有：

$$
\begin{aligned}
\nabla_a F\left(v_i\right) &= w_G\left(v_i\right)^\zeta \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G}\left(\frac{\delta_{in}\left(v_i, a_q\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)}-\frac{\delta_{out}\left(v_i, a_q\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)}\right) W_I\left(a_q\right)^\beta W_G\left(a_q\right)^\theta F\left(a_q\right) \\
&= w_G\left(v_i\right)^\zeta \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G}\left(\frac{\delta_{in}\left(v_i, a_q\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)}-\frac{\delta_{out}\left(v_i, a_q\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)}\right) \overline{W}\ \overline{F} \\
&= w_G\left(v_i\right)^\zeta\left(\sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} \frac{\delta_{in}\left(v_i, a_q\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)}-\sum_{a_r \in \mathscr{A}_G} \frac{\delta_{out}\left(v_i, a_r\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)}\right) \overline{W}\ \overline{F} \\
&= w_G\left(v_i\right)^\zeta\left(\frac{\sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} \delta_{in}\left(v_i, a_q\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)}-\frac{\sum_{a_r \in \mathscr{A}_G} \delta_{out}\left(v_i, a_r\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)}\right) \overline{W}\ \overline{F} \\
&= w_G\left(v_i\right)^\zeta\left(\frac{\deg_{in}\left(v_i\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)}-\frac{\deg_{out}\left(v_i\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)}\right) \overline{W}\ \overline{F} \\
&= w_G\left(v_i\right)^\zeta \cdot 0 \cdot \overline{W}\ \overline{F} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

最后一个等式成立，是因为顶点权重函数 w_G 是实值函数，因此映射到有限值。

2) W_I 和 W_G 为对称弧权函数，且 $F\left(a_q\right)=F\left(\tilde{a}_q\right)$ 对所有弧 $\overleftarrow{a}_q \in \mathscr{A}_G, \tilde{a}_q \in \mathscr{A}_G$ 成立，则对所有顶点 $v_i \in \mathscr{V}$：

$$\begin{aligned}\nabla_a F(v_i) &= w_G(v_i)^{\zeta} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{\theta} F(a_q) \\ &= -w_G(v_i)^{\zeta} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} - \frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{\theta} F(a_q) \\ &= -w_G(v_i)^{\zeta} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} - \frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} \right) W_I(\widetilde{a_q})^{\beta} W_G(\widetilde{a_q})^{\theta} F(\widetilde{a_q}) \\ &= -w_G(v_i)^{\zeta} \sum_{\widetilde{a_q} \in \widetilde{\mathscr{A}_G}} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, \widetilde{a_q})}{\widetilde{\deg_{in}}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, \widetilde{a_q})}{\widetilde{\deg_{out}}(v_i)} \right) W_I(\widetilde{a_q})^{\beta} W_G(\widetilde{a_q})^{\theta} F(\widetilde{a_q}) \\ &= -\nabla_{\widetilde{a}} F(v_i)\end{aligned}$$

第二行到第三行的等式是利用弧权函数W_I和W_G的对称性得到的，而第三行到第四行的改写成立，是因为对于所有顶点$v_i \in \mathscr{V}$，$\delta_{out}(v_i,a_q) = \delta_{in}(v_i, \widetilde{a}_q)$以及$\delta_{in}(v_i,a_q) = \delta_{out}(v_i, \widetilde{a}_q)$，这是因为交换任意弧$a_q \in \mathscr{A}_G$的输出顶点和输入顶点即可得到$\widetilde{a}_q \in \widetilde{\mathscr{A}_G}$。

此外，从$OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G)$切换到$\widetilde{OG} = (\mathscr{V}$时，$\deg_{out}(v_i)$变为$\deg_{in}(v_i)$；相应地，对于所有顶点$v_i \in \mathscr{V}$，$\deg_{in}(v_i)$变为$\deg_{out}(v_i)$。

□

6.2 有向正规图上的伴随算子

在加权定向正规图$OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, w、W)$上，伴随算子$\nabla^*{}_v$和$\nabla^*{}_a$是加权梯度算子$\nabla_v$和$\nabla_a$关于定义在$\mathscr{H}(\mathscr{V})$和$\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$上的内积的对偶对应。因此，对于所有顶点函数$f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$以及所有弧函数$G \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$，伴随算子满足以下等式：

$$\langle G, \nabla_v f \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)} = \langle f, \nabla_v^* G \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{V})} \tag{97}$$

$$\langle f, \nabla_a G \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{V})} = \langle G, \nabla_a^* f \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)} \tag{98}$$

根据顶点伴随算子$\nabla^*{}_v$和弧伴随算子$\nabla^*{}_a$的定义，之后可以定义顶点和弧的拉普拉斯算子及p-拉普拉斯算子。

定义 6.7（顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$）。

对于具有对称弧权函数 W_I 和 W_G的加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$，其顶点伴随算子$\nabla^*{}_v$ 定义如下：

$$\nabla_v^* : \mathcal{H}(\mathcal{A}_G) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{V}) \qquad F \longmapsto \nabla_v^* F \tag{99}$$

将弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$ 在顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 处的加权伴随定义为

$$\nabla_v^* F : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v_i \longmapsto \nabla_v^* F(v_i) =$$
$$\sum_{v_j \in \mathcal{V}} \left(\delta(v_j, v_i) w_G(v_i)^{\epsilon} F(v_j, v_i) - \delta(v_i, v_j) w_G(v_i)^{\eta} F(v_i, v_j)\right) W_I(v_i, v_j)^{\beta} W_G(v_i, v_j)^{\gamma}. \tag{100}$$

注记 6.8 （顶点伴随算子的参数选择）。

使用前面定义的参数选择 $\beta = 1, \gamma = 2, \epsilon = 0$ 和 $\eta = 1$，并结合 $\mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$ 中内积所给出的所有弧$a_q \in \mathcal{A}_G$对应的 $W_I(a_q) \equiv \frac{1}{2}$，得到所有顶点 $v_i \in \mathcal{V}$对应的顶点伴随算子的通常定义（*[4]*第 *2419* 页：伴随算子 $\mathcal{G}^*{}_w$）：

$$\nabla_v^* F(v_i) = \frac{1}{2} \sum_{v_j \in \mathcal{V}} \left(\delta(v_j, v_i) F(v_j, v_i) - \delta(v_i, v_j) F(v_i, v_j)\right) \sqrt{W(v_i, v_j)}. \tag{101}$$

以下定理证明，关于顶点梯度而言，顶点伴随算子是良定义的。

定理 6.9 (顶点梯度 ∇_v 与顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$)。

对于加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$，其对称弧权函数 W_I 和 W_G，顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$ 满足等式

$$\langle G, \nabla_v f \rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{A}_G)} = \langle f, \nabla_v^* G \rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{V})} \tag{102}$$

对于所有顶点函数 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$ 和所有弧函数 $G \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$。

证明。

给定一个加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$，其弧权函数 W_I 和 W_G为对称弧权函数，顶点函数 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$ 和弧函数 $G \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$，根据 $\mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$中的内积定义和 ∇_v 中的顶点梯度算子，可得：

$$\begin{aligned}\langle G, \nabla_v f\rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)} &= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} W_I\left(a_q\right)^\beta G\left(a_q\right) \nabla_v f\left(a_q\right) \\ &= \sum_{a_q=\left(v_i, v_j\right) \in \mathscr{A}_G} W_I\left(a_q\right)^\beta G\left(a_q\right) W_G\left(a_q\right)^\gamma \\ &\quad \left(w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^\epsilon f\left(v_j\right) - w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^\eta f\left(v_i\right)\right) \\ &= \sum_{a_q=\left(v_i, v_j\right) \in \mathscr{A}_G} W_I\left(a_q\right)^\beta W_G\left(a_q\right)^\gamma G\left(a_q\right) \\ &\quad \left(w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^\epsilon f\left(v_j\right) - w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^\eta f\left(v_i\right)\right)\end{aligned}$$

对所有弧 $a_q = \left(v_i, v_j\right) \in \mathscr{A}_G$ 求和，等价于先对所有顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 求和，再对所有顶点 $v_j \in \mathscr{V}$ 求和，并包含 $\delta\left(v_i, v_j\right)$:

$$\begin{aligned}&= \sum_{v_i \in \mathscr{V}} \sum_{v_j \in \mathscr{V}} \delta\left(v_i, v_j\right) W_I\left(v_i, v_j\right)^\beta W_G\left(v_i, v_j\right)^\gamma G\left(v_i, v_j\right) \\ &\quad \left(w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^\epsilon f\left(v_j\right) - w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^\eta f\left(v_i\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v_i \in \mathscr{V}} \sum_{v_j \in \mathscr{V}} \delta\left(v_i, v_j\right) W_I\left(v_i, v_j\right)^\beta W_G\left(v_i, v_j\right)^\gamma G\left(v_i, v_j\right) \\ &\quad \left(w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^\epsilon f\left(v_j\right) - w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^\eta f\left(v_i\right)\right) + \\ &\quad \delta\left(v_j, v_i\right) W_I\left(v_j, v_i\right)^\beta W_G\left(v_j, v_i\right)^\gamma G\left(v_j, v_i\right) \\ &\quad \left(w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^\epsilon f\left(v_i\right) - w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^\eta f\left(v_j\right)\right)\end{aligned}$$

利用弧权函数 W_I 和 W_G 的对称性可得:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \sum_{v_i \in \mathscr{V}} \sum_{v_j \in \mathscr{V}} \left(\delta\left(v_i, v_j\right) w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^\epsilon G\left(v_i, v_j\right) f\left(v_j\right) - \right. \\ &\quad \delta\left(v_i, v_j\right) w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^\eta G\left(v_i, v_j\right) f\left(v_i\right) + \\ &\quad \delta\left(v_j, v_i\right) w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^\epsilon G\left(v_j, v_i\right) f\left(v_i\right) - \\ &\quad \left.\delta\left(v_j, v_i\right) w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^\eta G\left(v_j, v_i\right) f\left(v_j\right)\right) W_I\left(v_i, v_j\right)^\beta W_G\left(v_i, v_j\right)^\gamma \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v_i \in \mathscr{V}} \sum_{v_j \in \mathscr{V}} \left(\delta\left(v_j, v_i\right) w_G\left(v_i\right)^\epsilon G\left(v_j, v_i\right) - \delta\left(v_i, v_j\right) w_G\left(v_i\right)^\eta G\left(v_i, v_j\right)\right) \\ &\quad W_I\left(v_i, v_j\right)^\beta W_G\left(v_i, v_j\right)^\gamma w_I\left(v_i\right)^\alpha f\left(v_i\right) + \\ &\quad \left(\delta\left(v_i, v_j\right) w_G\left(v_j\right)^\epsilon G\left(v_i, v_j\right) - \delta\left(v_j, v_i\right) w_G\left(v_j\right)^\eta G\left(v_j, v_i\right)\right) \\ &\quad W_I\left(v_i, v_j\right)^\beta W_G\left(v_i, v_j\right)^\gamma w_I\left(v_j\right)^\alpha f\left(v_j\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\sum_{v_j\in\mathcal{V}}\left(\delta\left(v_j,v_i\right)w_G\left(v_i\right)^{\epsilon}G\left(v_j,v_i\right)-\delta\left(v_i,v_j\right)w_G\left(v_i\right)^{\eta}G\left(v_i,v_j\right)\right)$$
$$W_I\left(v_i,v_j\right)^{\beta}W_G\left(v_i,v_j\right)^{\gamma}w_I\left(v_i\right)^{\alpha}f\left(v_i\right)+$$
$$\left(\delta\left(v_i,v_j\right)w_G\left(v_j\right)^{\epsilon}G\left(v_i,v_j\right)-\delta\left(v_j,v_i\right)w_G\left(v_j\right)^{\eta}G\left(v_j,v_i\right)\right)$$
$$W_I\left(v_j,v_i\right)^{\beta}W_G\left(v_j,v_i\right)^{\gamma}w_I\left(v_j\right)^{\alpha}f\left(v_j\right)$$

由于双重求和中的每个顶点组合都会出现两次：一次按顺序 $(v_k、v_l)$，另一次按顺序 $(v_l、v_k)$，其中 $v_k、v_l\in\mathcal{V}$，因此可以消去第二个加数以及 $\frac{1}{2}$ 因子。此外，利用全体顶点函数空间 $\mathcal{H}(\mathcal{V})$ 上的内积和顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$ 的定义，可得如下结果：

$$= \frac{1}{2}\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\sum_{v_j\in\mathcal{V}}\left(\delta\left(v_j,v_i\right)w_G\left(v_i\right)^{\epsilon}G\left(v_j,v_i\right)-\delta\left(v_i,v_j\right)w_G\left(v_i\right)^{\eta}G\left(v_i,v_j\right)\right)$$
$$W_I\left(v_i,v_j\right)^{\beta}W_G\left(v_i,v_j\right)^{\gamma}w_I\left(v_i\right)^{\alpha}f\left(v_i\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{v_i\in\mathcal{V}}w_I\left(v_i\right)^{\alpha}f\left(v_i\right)\sum_{v_j\in\mathcal{V}}\left(\delta\left(v_j,v_i\right)w_G\left(v_i\right)^{\epsilon}G\left(v_j,v_i\right)-\delta\left(v_i,v_j\right)w_G\left(v_i\right)^{\eta}G\left(v_i,v_j\right)\right)$$
$$W_I\left(v_i,v_j\right)^{\beta}W_G\left(v_i,v_j\right)^{\gamma}$$
$$= \sum_{v_i\in\mathcal{V}}w_I\left(v_i\right)^{\alpha}f\left(v_i\right)\nabla_v^*G\left(v_i\right)=\left\langle f,\nabla_v^*G\right\rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{V})}$$

因此，采用所提出的顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$ 的定义，对于所有顶点函数 $f\in\mathcal{H}(\mathcal{V})$ 和所有弧函数 $G\in\mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$，等式 $\langle G,\nabla_v f\rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{A}_G)}=\langle f,\nabla^*{}_v G\rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{V})}$ 均成立。

□

类似于针对弧函数 $F\in\mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$ 的顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$，可以基于弧梯度算子 ∇_a 定义针对顶点函数 $f\in\mathcal{H}(\mathcal{V})$ 的弧伴随算子 $\nabla^*{}_a$。

定义 6.10(弧伴随算子 $\nabla^*{}_a$)。
对于加权有向正规图 $OG=(\mathcal{V},\mathcal{A}_G,w,W)$，弧伴随算子 $\nabla^*{}_a$ 定义为

$$\nabla_a^*:\ \mathcal{H}(\mathcal{V})\longrightarrow\mathcal{H}(\mathcal{A}_G)\qquad f\longmapsto\nabla_a^*f \tag{103}$$

顶点函数 $f\in\mathcal{H}(\mathcal{V})$ 在弧 $a_q=\left(v_i,v_j\right)\in\mathcal{A}_G$ 处的加权伴随由下式给出

$$\nabla_a^*f:\ \mathcal{A}_G\longrightarrow\mathbb{R}\qquad a_q=\left(v_i,v_j\right)\longmapsto\nabla_a^*f\left(a_q\right)=$$
$$W_G\left(v_i,v_j\right)^{\theta}\left(\frac{w_I\left(v_j\right)^{\alpha}w_G\left(v_j\right)^{\zeta}}{\deg_{in}\left(v_j\right)}f\left(v_j\right)-\frac{w_I\left(v_i\right)^{\alpha}w_G\left(v_i\right)^{\zeta}}{\deg_{out}\left(v_i\right)}f\left(v_i\right)\right). \tag{104}$$

注记 6.11 (弧伴随算子的参数选择)。

使用前述参数选择 $\alpha=0,\zeta=2,\theta=0$，并省略所有顶点 $v_i,v_j\in\mathcal{V}$ 的度函数 $\deg_{in}(v_j)$ 和 $\deg_{out}(v_i)$，可得到简化的弧伴随算子定义；该定义与简化后的弧梯度 ∇_a 相匹配，适用于所有弧 $a_q=(v_i,v_j)\in\mathcal{A}_G$:

$$\nabla_a^* f(a_q)=\nabla_a^* f(v_i,v_j)=\sqrt{w_G(v_j)}f(v_j)-\sqrt{w_G(v_i)}f(v_i). \tag{105}$$

与顶点伴随算子和顶点梯度的情形一样，以下定理证明，关于内积，弧伴随算子是弧梯度定义良好的对偶对应算子。

定理 6.12 (关联弧梯度 ∇_a 与弧伴随算子 $\nabla^*{}_a$)。

对于加权有向正规图 $OG=(\mathcal{V},\mathcal{A}_G,w,W)$，弧伴随算子 $\nabla^*{}_a$满足等式

$$\langle f,\nabla_a G\rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{V})}=\langle G,\nabla_a^* f\rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{A}_G)} \tag{106}$$

对于所有顶点函数 $f\in\mathcal{H}(\mathcal{V})$ 和所有弧函数 $G\in\mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$均成立。

证明。

给定一个加权定向正规图 $OG=(\mathcal{V},\mathcal{A}_G,w、W)$、一个顶点函数 $f\in\mathcal{H}(\mathcal{V})$ 以及一个弧函数 $G\in\mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$，根据 $\mathcal{H}(\mathcal{V})$ 中的内积定义和 ∇_a 中的弧梯度算子，可得:

$$\begin{aligned}
\langle f,\nabla_a G\rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{V})}&=\sum_{v_i\in\mathcal{V}} w_I(v_i)^\alpha f(v_i)\nabla_a G(v_i)\\
&=\sum_{v_i\in\mathcal{V}} w_I(v_i)^\alpha f(v_i)\\
&\quad w_G(v_i)^\zeta\sum_{a_q\in\mathcal{A}_G}\left(\frac{\delta_{in}(v_i,a_q)}{\deg_{in}(v_i)}-\frac{\delta_{out}(v_i,a_q)}{\deg_{out}(v_i)}\right)W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\theta G(a_q)\\
&=\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\sum_{a_q\in\mathcal{A}_G}\left(\frac{\delta_{in}(v_i,a_q)}{\deg_{in}(v_i)}-\frac{\delta_{out}(v_i,a_q)}{\deg_{out}(v_i)}\right)\\
&\quad W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\theta w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\zeta f(v_i)G(a_q)
\end{aligned}$$

交换两个求和的次序，并将每条弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$ 写作 $a_q = (v_j, v_k)$，得到：

$$= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} \sum_{v_i \in \mathscr{V}} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{\theta} w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{\zeta} f(v_i) G(a_q)$$

$$= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} W_I(a_q)^{\beta} G(a_q) W_G(a_q)^{\theta} \sum_{v_i \in \mathscr{V}} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} \right) w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{\zeta} f(v_i)$$

$$= \sum_{a_q = (v_j, v_k) \in \mathscr{A}_G} W_I(v_j, v_k)^{\beta} G(v_j, v_k) W_G(v_j, v_k)^{\theta} \left(\frac{w_I(v_k)^{\alpha} w_G(v_k)^{\zeta}}{\deg_{in}(v_k)} f(v_k) - \frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\zeta}}{\deg_{out}(v_j)} f(v_j) \right)$$

根据弧函数空间 $\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$上的内积以及弧伴随算子$\nabla^*{}_a$ 的定义，可得：

$$= \sum_{a_q = (v_j, v_k) \in \mathscr{A}_G} W_I(v_j, v_k)^{\beta} G(v_j, v_k) \nabla_a^* f(v_j, v_k)$$

$$= \langle G, \nabla_a^* f \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)}$$

因此，根据所引入的弧伴随算子定义 $\nabla^*{}_a$，等式 $\langle f, \nabla_a G \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{V})} = \langle G, \nabla^*{}_a f \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)}$对所有顶点函数$f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$和所有弧函数$G \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$均成立。

□

7 有向普通图上的散度与拉普拉斯算子

在连续情形下，顶点伴随算子和弧伴随算子可根据它们之间的关系，用于计算顶点散度和弧散度。随后，顶点散度和弧散度，以及顶点梯度和弧梯度，是定义顶点拉普拉斯算子、弧拉普拉斯算子、顶点p- 拉普拉斯算子和弧p-拉普拉斯算子所必需的。

因此，第（7.1）小节给出了顶点散度和弧散度的定义。此外，第（7.2）小节基于前述定义推导出顶点拉普拉斯算子和弧拉普拉斯算子；第（7.3）小节则利用先前定义的顶点梯度、顶点散度、弧梯度和弧散度，引入顶点p-拉普拉斯算子和弧p-拉普拉斯算子。

7.1 有向正规图上的散度算子

基于连续情形中潜在的等价关系

$$\mathrm{div}_v = -\nabla_v^* \tag{107}$$

$$\mathrm{div}_a = -\nabla_a^* \tag{108}$$

可以定义作用于弧函数$F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 的顶点散度算子 div_v，以及作用于顶点函数$f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$ 的弧散度算子 div_a。

定义 7.1(顶点散度算子 $\mathbf{div}_v$)。

对于具有对称弧权函数 W_I 和 W_G 的加权定向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, w, W)$，顶点散度算子 div_v 定义为

$$div_v : \mathscr{H}(\mathscr{A}_G) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{V}) \qquad F \longmapsto div_v F \tag{109}$$

其中，弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 在顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 处的加权散度定义为

$$div_v : \mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v_i \longmapsto div_v(F)(v_i) = -\nabla_v^* F(v_i) =$$
$$\sum_{v_j \in \mathscr{V}} \left(\delta(v_i, v_j) w_G(v_i)^{\eta} F(v_i, v_j) - \delta(v_j, v_i) w_G(v_i)^{\epsilon} F(v_j, v_i)\right) W_I(v_i, v_j)^{\beta} W_G(v_i, v_j)^{\gamma}. \tag{110}$$

注记 7.2 (**顶点散度算子的参数选择**)。

使用注记 *(6.8)* 中的参数 $\beta = 1, \gamma = 2, \epsilon = 0$ 和 $\eta = 0$，以及内积中 $\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 的 $W_I(a_q) \equiv \frac{1}{2}$，对所有弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$ 进行计算，得到所有顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 的顶点散度通常定义（*[4]* 第 *2419* 页：散度算子 D_w）：

$$div_v(F)(v_i) = \frac{1}{2}\sum_{v_j \in \mathscr{V}} \left(\delta(v_i, v_j) F(v_i, v_j) - \delta(v_j, v_i) F(v_j, v_i)\right) \sqrt{W_G(v_i, v_j)}. \tag{111}$$

弧散度的定义方式与顶点散度相同，但它基于弧伴随算子而非顶点伴随算子。

定义 7.3（**弧散度算子 $\mathbf{div}_a$**）。

对于加权定向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, w, W)$，弧散度算子 div_a 定义为

$$div_a: \mathscr{H}(\mathscr{V}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{A}_G) \qquad f \longmapsto div_a f \tag{112}$$

顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$ 在弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathscr{A}_G$ 处的加权散度定义为

$$div_a: \mathscr{A}_G \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a_q = (v_i, v_j) \longmapsto div_a(f)(a_q) = -\nabla_a^* f(a_q) =$$

$$W_G(v_i, v_j)^{\theta} \left(\frac{w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{\zeta}}{\deg_{out}(v_i)} f(v_i) - \frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\zeta}}{\deg_{in}(v_j)} f(v_j) \right). \tag{113}$$

注记 7.4 (**弧散度算子的参数选择**)。

再次使用注记 *(6.11)* 中的参数 $\alpha = 0, \zeta = 2, \theta = 0$，并省略所有顶点 $v_i, v_j \in \mathscr{V}$ 的度函数 $\deg_{in}(v_j)$ 和 $\deg_{out}(v_i)$，可得到简化后的弧散度定义；对于所有弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathscr{A}_G$，该定义也与简化后的弧梯度 ∇_a 相符：

$$div_a(f)(a_q) = div_a(f)(v_i, v_j) = \sqrt{w_G(v_i)} f(v_i) - \sqrt{w_G(v_j)} f(v_j). \tag{114}$$

7.2 有向正规图上的拉普拉斯算子

与散度算子的情形一样，拉普拉斯算子既可以基于连续情形中的关系为顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 定义，也可以为弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$ 定义。

$$\Delta_v f = \mathrm{div}_v(\nabla_v f) \tag{115}$$

$$\Delta_a F = \mathrm{div}_a(\nabla_a F) \tag{116}$$

对于任意顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$ 和任意弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$。

定义 7.5(顶点拉普拉斯算子 Δ_v)。

对于加权定向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, w, W)$，其对称弧权函数为 W_I 和 W_G，顶点拉普拉斯算子 Δ_v 定义如下

$$\Delta_v : \mathscr{H}(\mathscr{V}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{V}) \qquad f \longmapsto \Delta_v f \tag{117}$$

其中，顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$ 在顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 处的加权拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_v : \mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v_i \longmapsto \Delta_v f(v_i) =$$
$$\sum_{v_j \in \mathscr{V}} \Big(\big(\delta(v_i, v_j) w_G(v_i)^{\eta} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon} + \delta(v_j, v_i) w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\eta} w_G(v_i)^{\epsilon} \big) f(v_j) -$$
$$\big(\delta(v_i, v_j) w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{2\eta} + \delta(v_j, v_i) w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{2\epsilon} \big) f(v_i) \Big)$$
$$W_I(v_i, v_j)^{\beta} W_G(v_i, v_j)^{2\gamma}. \tag{118}$$

注记 7.6(顶点拉普拉斯算子参数选择)。

将前述参数 $\alpha = 0$、$\beta = 1$、$\gamma = 2$、$\epsilon = 0$ 和 $\eta = 0$ 与 $\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 中对所有弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$ 定义的内积中的 $W_I(a_q)^{\beta} \equiv \frac{1}{2}$ 结合起来，便得到所有顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 的顶点拉普拉斯算子的通常定义（*[4]*第 *2421* 页：经典非归一化拉普拉斯算子）：

$$\Delta_v f(v_i) = \frac{1}{2} \sum_{v_j \in \mathscr{V}} \big(\delta(v_i, v_j) + \delta(v_j, v_i) \big) W_G(v_i, v_j) \big(f(v_j) - f(v_i) \big). \tag{119}$$

以下定理证明，基于顶点梯度和顶点散度的定义，顶点拉普拉斯算子是良定义的。

定理 7.7 (连接顶点散度 $\mathbf{div}_v$、顶点梯度 ∇_v 和顶点拉普拉斯算子 Δ_v)。

在加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$ 上，若弧权函数 W_I 和 W_G对称，则顶点拉普拉斯算子 Δ_v 满足等式

$$\Delta_v f = div_v(\nabla_v f) \tag{120}$$

对所有顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathcal{V})$均成立。

证明。
给定一个加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$ 其弧权函数 W_I 和 W_G 对称，且有一个顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathcal{V})$，则根据顶点散度算子 div_v 和顶点梯度算子 ∇_v 的定义，对于所有顶点 $v_i \in \mathcal{V}$，可得:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_v(\nabla_v f)(v_i) = &\sum_{v_j \in \mathcal{V}} \left(\delta(v_i, v_j) w_G(v_i)^\eta \nabla_v f(v_i, v_j) - \delta(v_j, v_i) w_G(v_i)^\epsilon \nabla_v f(v_j, v_i)\right) \\
&W_I(v_i, v_j)^\beta W_G(v_i, v_j)^\gamma \\
= &\sum_{v_j \in \mathcal{V}} \left(\delta(v_i, v_j) w_G(v_i)^\eta W_G(v_i, v_j)^\gamma \right. \\
&\left(w_I(v_j)^\alpha w_G(v_j)^\epsilon f(v_j) - w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\eta f(v_i)\right) - \\
&\delta(v_j, v_i) w_G(v_i)^\epsilon W_G(v_j, v_i)^\gamma \\
&\left.\left(w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\epsilon f(v_i) - w_I(v_j)^\alpha w_G(v_j)^\eta f(v_j)\right)\right) \\
&W_I(v_i, v_j)^\beta W_G(v_i, v_j)^\gamma
\end{aligned}$$

利用弧权函数 W 的对称性，并重新排列求和项，可得顶点拉普拉斯算子的定义:

$$\begin{aligned}
= &\sum_{v_j \in \mathcal{V}} \left(\delta(v_i, v_j) w_G(v_i)^\eta \left(w_I(v_j)^\alpha w_G(v_j)^\epsilon f(v_j) - w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\eta f(v_i)\right) - \right. \\
&\left. \delta(v_j, v_i) w_G(v_i)^\epsilon \left(w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\epsilon f(v_i) - w_I(v_j)^\alpha w_G(v_j)^\eta f(v_j)\right)\right) \\
&W_I(v_i, v_j)^\beta W_G(v_i, v_j)^{2\gamma} \\
= &\sum_{v_j \in \mathcal{V}} \left(\delta(v_i, v_j) w_G(v_i)^\eta w_I(v_j)^\alpha w_G(v_j)^\epsilon f(v_j) - \right. \\
&\delta(v_i, v_j) w_G(v_i)^\eta w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\eta f(v_i) - \delta(v_j, v_i) w_G(v_i)^\epsilon w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\epsilon f(v_i) + \\
&\left.\delta(v_j, v_i) w_G(v_i)^\epsilon w_I(v_j)^\alpha w_G(v_j)^\eta f(v_j)\right) W_I(v_i, v_j)^\beta W_G(v_i, v_j)^{2\gamma}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{v_j \in \mathcal{V}} \Big(\big(\delta(v_i, v_j) w_G(v_i)^{\eta} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon} + \delta(v_j, v_i) w_G(v_i)^{\epsilon} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\eta} \big) f(v_j) - \\
&\quad \big(\delta(v_i, v_j) w_G(v_i)^{\eta} w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{\eta} + \delta(v_j, v_i) w_G(v_i)^{\epsilon} w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{\epsilon} \big) f(v_i) \big) \\
&\quad W_I(v_i, v_j)^{\beta} W_G(v_i, v_j)^{2\gamma} \\
&= \sum_{v_j \in \mathcal{V}} \Big(\big(\delta(v_i, v_j) w_G(v_i)^{\eta} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon} + \delta(v_j, v_i) w_G(v_i)^{\epsilon} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\eta} \big) f(v_j) - \\
&\quad \big(\delta(v_i, v_j) w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{2\eta} + \delta(v_j, v_i) w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{2\epsilon} \big) f(v_i) \big) \\
&\quad W_I(v_i, v_j)^{\beta} W_G(v_i, v_j)^{2\gamma} \\
&= \Delta_v f(v_i)
\end{aligned}
$$

因此，根据所给出的顶点梯度 ∇_v、顶点散度 div_v 和顶点拉普拉斯算子 Δ_v 的定义，对于所有顶点 顶点$_i \in \mathcal{V}$ 以及所有顶点函数 函数 $\in \mathcal{H}(\mathcal{V})$，等式 $\Delta_v f(v_i) = \mathrm{div}_v(\nabla_v f)(v_i)$ 均成立。

□

弧也可以定义拉普拉斯算子$a_q \in \mathcal{A}_G$，方法是使用弧梯度和弧散度。

定义 7.8 (弧拉普拉斯算子 Δ_a)。
对于加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$，弧拉普拉斯算子$\Delta_a$ 定义为

$$\Delta_a : \mathcal{H}(\mathcal{A}_G) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{A}_G) \qquad F \longmapsto \Delta_a F \tag{121}$$

弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$ 在弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G$上的加权拉普拉斯算子定义为

$$
\begin{aligned}
&\Delta_a : \mathcal{A}_G \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a_q = (v_i, v_j) \longmapsto \Delta_a F(a_q) = \\
&W_G(v_i, v_j)^{\theta} \left(\frac{w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{2\zeta}}{\deg_{out}(v_i)} \sum_{a_r \in \mathcal{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_r)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_r)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_r)^{\beta} W_G(a_r)^{\theta} F(a_r) \right. \\
&\left. - \frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{2\zeta}}{\deg_{in}(v_j)} \sum_{a_s \in \mathcal{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_j, a_s)}{\deg_{in}(v_j)} - \frac{\delta_{out}(v_j, a_s)}{\deg_{out}(v_j)} \right) W_I(a_s)^{\beta} W_G(a_s)^{\theta} F(a_s) \right).
\end{aligned} \tag{122}
$$

注记 7.9（**弧拉普拉斯算子的参数选择**）。

采用先前的参数选择 $\alpha = 0, \beta = 1, \zeta = 2, \theta = 0$，并从 $\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 的内积中省略 $\deg_{in}(v_i)$ 和 $\deg_{out}(v_i)$（对所有顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 以及所有弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$ 均如此），且令 $W_I(a_q) \equiv \frac{1}{2}$，即可得到所有弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathscr{A}_G$ 的弧拉普拉斯算子的简化定义：

$$\Delta_a F(a_q) = \Delta_a F(v_i, v_j) =$$

$$\frac{w_G(v_i)}{2} \sum_{a_r \in \mathscr{A}_G} (\delta_{in}(v_i, a_r) - \delta_{out}(v_i, a_r)) F(a_r) -$$

$$\frac{w_G(v_j)}{2} \sum_{a_s \in \mathscr{A}_G} (\delta_{in}(v_j, a_s) - \delta_{out}(v_j, a_s)) F(a_s). \tag{123}$$

下面的定理证明，基于前面引入的弧梯度和弧散度，弧拉普拉斯算子的定义是良定义的。

定理 7.10（**连接弧散度 $\mathbf{div}_a$、弧梯度 ∇_a 与弧拉普拉斯算子 Δ_a**）。

在加权定向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, w, W)$ 上，弧拉普拉斯算子 Δ_a 满足等式

$$\Delta_a F = div_a(\nabla_a F) \tag{124}$$

对所有弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 均成立。

证明。

给定一个加权定向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, w, W)$ 以及一个弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$，根据弧散度算子 div_a 和弧梯度算子 ∇_a 的定义，对于所有弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathscr{A}_G$，可得：

$$\mathrm{div}_a(\nabla_a F)(v_i, v_j) = W_G(v_i, v_j)^{\theta}$$

$$\left(\frac{w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{\zeta}}{\deg_{out}(v_i)} \nabla_a F(v_i) - \frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\zeta}}{\deg_{in}(v_j)} \nabla_a F(v_j) \right)$$

$$= W_G(v_i, v_j)^{\theta} \left(\frac{w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{\zeta}}{\deg_{out}(v_i)} w_G(v_i)^{\zeta} \right.$$

$$\sum_{a_r \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_r)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_r)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_r)^{\beta} W_G(a_r)^{\theta} F(a_r) -$$

$$\left. \frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\zeta}}{\deg_{in}(v_j)} w(v_j)^{\zeta} \sum_{a_s \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_j, a_s)}{\deg_{in}(v_j)} - \frac{\delta_{out}(v_j, a_s)}{\deg_{out}(v_j)} \right) W_I(a_s)^{\beta} W_G(a_s)^{\theta} F(a_s) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= W_G\left(v_i, v_j\right)^\theta \left(\frac{w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^{2\zeta}}{\deg_{out}\left(v_i\right)} \right. \\
&\quad \sum_{a_r \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_i, a_r\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_i, a_r\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)} \right) W_I\left(a_r\right)^\beta W_G\left(a_r\right)^\theta F\left(a_r\right) - \\
&\quad \left. \frac{w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^{2\zeta}}{\deg_{in}\left(v_j\right)} \sum_{a_s \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_j, a_s\right)}{\deg_{in}\left(v_j\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_j, a_s\right)}{\deg_{out}\left(v_j\right)} \right) W_I\left(a_s\right)^\beta W_G\left(a_s\right)^\theta F\left(a_s\right) \right) \\
&= \Delta_a F\left(v_i, v_j\right)
\end{aligned}
$$

因此，借助前面引入的弧梯度 ∇_a、弧散度 div_a 和弧拉普拉斯算子 Δ_a 的定义，对于所有弧 $F\left(a_q\right) =$ 以及所有弧函数 $a_q \in \mathscr{A}_G$，等式 $\Delta_a F\left(a_q\right) = \mathrm{div}_a\left(\nabla_a F\right)\left(a_q\right)$ 均成立。

□

7.3 有向正规图上的p-拉普拉斯算子

有向正规图上的加权p-拉普拉斯算子基于连续情形定义，适用于所有$p \in (1, \infty)$，旨在满足以下两个等式

$$\Delta_v^p f = \mathrm{div}_v\left(\left|\nabla_v f\right|^{p-2} \nabla_v f\right) \tag{125}$$

$$\Delta_a^p F = \mathrm{div}_a\left(\left|\nabla_a F\right|^{p-2} \nabla_a F\right) \tag{126}$$

对于任意顶点函数$f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$和任意弧函数$F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$。

定义 7.11 (**顶点 p-拉普拉斯算子** $\Delta^p{}_v$)。

对于带有对称弧权函数 W 的加权定向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, w, W)$，顶点 p-拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_v$ 定义如下：

$$\Delta_v^p : \mathscr{H}(\mathscr{V}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{V}) \qquad f \longmapsto \Delta_v^p f \tag{127}$$

顶点函数$f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$ 在顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 处的加权 p-拉普拉斯算子定义为：

$$
\begin{aligned}
&\Delta_v^p : \mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v_i \longmapsto \Delta_v^p f\left(v_i\right) = \\
&\sum_{v_j \in \mathscr{V}} \left(\delta\left(v_i, v_j\right) \left| w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^\epsilon f\left(v_j\right) - w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^\eta f\left(v_i\right) \right|^{p-2} \right. \\
&\left(w_G\left(v_i\right)^\eta w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^\epsilon f\left(v_j\right) - w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^{2\eta} f\left(v_i\right) \right) \\
&- \delta\left(v_j, v_i\right) \left| w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^\epsilon f\left(v_i\right) - w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^\eta f\left(v_j\right) \right|^{p-2} \\
&\left. \left(w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^{2\epsilon} f\left(v_i\right) - w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^\eta w_G\left(v_i\right)^\epsilon f\left(v_j\right) \right) \right) W_I\left(v_i, v_j\right)^\beta W_G\left(v_i, v_j\right)^{p\gamma}.
\end{aligned} \tag{128}
$$

注记 7.12 (顶点 p-拉普拉斯算子的参数选择)。

此前定义的参数选择 $\alpha=0$、$\beta=1$、$\gamma=2$、$\epsilon=0$ 和 $\eta=0$，以及对于所有弧 $a_q\in\mathscr{A}_G$，来自 $\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 中内积的 $W_I(a_q)\equiv\frac{1}{2}$，共同导出了适用于所有顶点 $v_i\in\mathscr{V}$ 的顶点 p-拉普拉斯算子的通常定义（*[4]* 第 *2421* 页：各向异性图 p-拉普拉斯算子）：

$$\Delta_v^p f(v_i)=\frac{1}{2}\sum_{v_j\in\mathscr{V}}\left(\delta(v_i,v_j)+\delta(v_j,v_i)\right)W_G(v_i,v_j)^{\frac{p}{2}}\left|f(v_j)-f(v_i)\right|^{p-2}\left(f(v_j)-f(v_i)\right). \quad (129)$$

下面的定理证明，对于普通图，顶点的 p-拉普拉斯算子 $_i\in\mathscr{V}$ 关于顶点梯度和顶点散度是良定义的。

定理 7.13 (连接顶点散度 div_v、顶点梯度 ∇_v 和顶点p-拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_v$)。

在加权定向正规图 $OG=(\mathscr{V},\mathscr{A}_G,w,W)$ 上，若弧权函数 W_I 和 W_G 对称，则顶点 p-拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_v$ 满足等式

$$\Delta_v^p f=div_v\left(|\nabla_v f|^{p-2}\nabla_v f\right) \quad (130)$$

对所有顶点函数 $f\in\mathscr{H}(\mathscr{V})$ 均成立。

证明。

给定一个加权定向正规图 $OG=(\mathscr{V},\mathscr{A}_G,w、W)$，其具有对称弧权函数 W_I 和 W_G 以及一个顶点函数 $f\in\mathscr{H}(\mathscr{V})$，则根据顶点散度算子 div_v 和顶点梯度算子 ∇_v 的定义，可得对于所有顶点 $v_i\in\mathscr{V}$，以下结论成立：

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_v\left(|\nabla_v f|^{p-2}\nabla_v f\right)(v_i)=&\sum_{v_j\in\mathscr{V}}\Big(\delta(v_i,v_j)w_G(v_i)^{\eta}\left|\nabla_v f(v_i,v_j)\right|^{p-2}\nabla_v f(v_i,v_j)-\\&\delta(v_j,v_i)w_G(v_i)^{\epsilon}\left|\nabla_v f(v_j,v_i)\right|^{p-2}\nabla_v f(v_j,v_i)\Big)\\&W_I(v_i,v_j)^{\beta}W_G(v_i,v_j)^{\gamma}\\=\sum_{v_j\in\mathscr{V}}\Big(&\delta(v_i,v_j)w_G(v_i)^{\eta}\\&\left|W_G(v_i,v_j)^{\gamma}\left(w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\epsilon}f(v_j)-w_I(v_i)^{\alpha}w_G(v_i)^{\eta}f(v_i)\right)\right|^{p-2}\\&W_G(v_i,v_j)^{\gamma}\left(w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\epsilon}f(v_j)-w_I(v_i)^{\alpha}w_G(v_i)^{\eta}f(v_i)\right)-\\&\delta(v_j,v_i)w_G(v_i)^{\epsilon}\left|W_G(v_j,v_i)^{\gamma}\left(w_I(v_i)^{\alpha}w_G(v_i)^{\epsilon}f(v_i)-w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\eta}f(v_j)\right)\right|^{p-2}\\&W_G(v_j,v_i)^{\gamma}\left(w_I(v_i)^{\alpha}w_G(v_i)^{\epsilon}f(v_i)-w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\eta}f(v_j)\right)\Big)W_I(v_i,v_j)^{\beta}W_G(v_i,v_j)^{\gamma}\end{aligned}$$

利用弧权函数的对称性和非负性，W_I 和 W_G 导出了顶点 p-拉普拉斯算子定义：

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{v_j \in \mathcal{V}} \Big(\delta\left(v_i, v_j\right) w_G\left(v_i\right)^{\eta} \left| w_I\left(v_j\right)^{\alpha} w_G\left(v_j\right)^{\epsilon} f\left(v_j\right) - w_I\left(v_i\right)^{\alpha} w_G\left(v_i\right)^{\eta} f\left(v_i\right) \right|^{p-2} \\
&\quad \left(w_I\left(v_j\right)^{\alpha} w_G\left(v_j\right)^{\epsilon} f\left(v_j\right) - w_I\left(v_i\right)^{\alpha} w_G\left(v_i\right)^{\eta} f\left(v_i\right) \right) - \\
&\quad \delta\left(v_j, v_i\right) w_G\left(v_i\right)^{\epsilon} \left| w_I\left(v_i\right)^{\alpha} w_G\left(v_i\right)^{\epsilon} f\left(v_i\right) - w_I\left(v_j\right)^{\alpha} w_G\left(v_j\right)^{\eta} f\left(v_j\right) \right|^{p-2} \\
&\quad \left(w_I\left(v_i\right)^{\alpha} w_G\left(v_i\right)^{\epsilon} f\left(v_i\right) - w_I\left(v_j\right)^{\alpha} w_G\left(v_j\right)^{\eta} f\left(v_j\right) \right) \Big) W_I\left(v_i, v_j\right)^{\beta} W_G\left(v_i, v_j\right)^{2\gamma+\gamma(p-2)} \\
&= \sum_{v_j \in \mathcal{V}} \Big(\delta\left(v_i, v_j\right) \left| w_I\left(v_j\right)^{\alpha} w_G\left(v_j\right)^{\epsilon} f\left(v_j\right) - w_I\left(v_i\right)^{\alpha} w_G\left(v_i\right)^{\eta} f\left(v_i\right) \right|^{p-2} \\
&\quad \left(w_G\left(v_i\right)^{\eta} w_I\left(v_j\right)^{\alpha} w_G\left(v_j\right)^{\epsilon} f\left(v_j\right) - w_I\left(v_i\right)^{\alpha} w_G\left(v_i\right)^{2\eta} f\left(v_i\right) \right) - \\
&\quad \delta\left(v_j, v_i\right) \left| w_I\left(v_i\right)^{\alpha} w_G\left(v_i\right)^{\epsilon} f\left(v_i\right) - w_I\left(v_j\right)^{\alpha} w_G\left(v_j\right)^{\eta} f\left(v_j\right) \right|^{p-2} \\
&\quad \left(w_I\left(v_i\right)^{\alpha} w_G\left(v_i\right)^{2\epsilon} f\left(v_i\right) - w_I\left(v_j\right)^{\alpha} w_G\left(v_j\right)^{\eta} w_G\left(v_i\right)^{\epsilon} f\left(v_j\right) \right) \Big) W_I\left(v_i, v_j\right)^{\beta} W_G\left(v_i, v_j\right)^{p\gamma} \\
&= \Delta_v^p f\left(v_i\right)
\end{aligned}
$$

因此，根据顶点梯度 ∇_v、顶点散度 div_v 和顶点p-拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_v$ 的定义，等式 $\Delta^p{}_v f\left(v_i\right) = \mathrm{div}_v\left(\left|\nabla_v f\right|^{p-2} \nabla_v f\right)\left(v_i\right)$ 对所有顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 以及所有顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathcal{V})$ 均成立。

□

利用弧梯度和弧散度，也可以为弧 p-拉普拉斯算子定义 $a_q \in \mathscr{A}_G$。

定义 7.14 (弧 p-拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_a$)。
对于加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_G, w, W)$，弧 p-拉普拉斯算子$\Delta^p{}_a$ 定义为

$$
\Delta_a^p : \mathscr{H}(\mathscr{A}_G) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{A}_G) \qquad F \longmapsto \Delta_a^p F \tag{131}
$$

其中，弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$ 在弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathscr{A}_G$上的加权 p-拉普拉斯算子由 b 给出 $g\ g \qquad y$

$$\Delta_a^p : \mathscr{A}_G \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a_q = (v_i, v_j) \longmapsto \Delta_a^p F(a_q) =$$

$$W_G(v_i, v_j)^\theta \left(\frac{w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^{p\zeta}}{\deg_{out}(v_i)} \right.$$

$$\left| \sum_{a_r \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_r)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_r)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_r)^\beta W_G(a_r)^\theta F(a_r) \right|^{p-2}$$

$$\sum_{a_s \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_s)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_s)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_s)^\beta W_G(a_s)^\theta F(a_s) -$$

$$\frac{w_I(v_j)^\alpha w_G(v_j)^{p\zeta}}{\deg_{in}(v_j)} \left| \sum_{a_t \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_j, a_t)}{\deg_{in}(v_j)} - \frac{\delta_{out}(v_j, a_t)}{\deg_{out}(v_j)} \right) W_I(a_t)^\beta W_G(a_t)^\theta F(a_t) \right|^{p-2}$$

$$\left. \sum_{a_u \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_j, a_u)}{\deg_{in}(v_j)} - \frac{\delta_{out}(v_j, a_u)}{\deg_{out}(v_j)} \right) W_I(a_u)^\beta W_G(a_u)^\theta F(a_u) \right). \tag{132}$$

注记 7.15 (弧 p-拉普拉斯算子的参数选择)。

取前述参数 $\alpha = 0$、$\beta = 1$、$\zeta = 2$、$\theta = 0$；同时排除度函数 $\deg_{in}(v_i)$ 和 $\deg_{out}(v_i)$（对所有顶点 $v_i \in \mathscr{V}$），并令内积中的 $W_I(a_q) \equiv \frac{1}{2}$ 对所有弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$ 均成立，则对于所有弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathscr{V}$，弧 p-拉普拉斯算子可简化为：

$$\Delta_a^p F(a_q) = \Delta_a^p F(v_i, v_j) =$$

$$\frac{w_G(v_i)^{\frac{p}{2}}}{2^{p-1}} \left| \sum_{a_r \in \mathscr{A}_G} (\delta_{in}(v_i, a_r) - \delta_{out}(v_i, a_r)) F(a_r) \right|^{p-2}$$

$$\sum_{a_s \in \mathscr{A}_G} (\delta_{in}(v_i, a_s) - \delta_{out}(v_i, a_s)) F(a_s) -$$

$$\frac{w_G(v_j)^{\frac{p}{2}}}{2^{p-1}} \left| \sum_{a_t \in \mathscr{A}_G} (\delta_{in}(v_j, a_t) - \delta_{out}(v_j, a_t)) F(a_t) \right|^{p-2}$$

$$\sum_{a_u \in \mathscr{A}_G} (\delta_{in}(v_j, a_u) - \delta_{out}(v_j, a_u)) F(a_u). \tag{133}$$

下面的定理利用普通图的弧梯度和弧散度证明弧p-拉普拉斯算子是定义良好的。

定理 7.16(连接弧散度 $\mathbf{div}_a$、弧梯度 ∇_a 和弧p-拉普拉斯算子$\Delta^p{}_a$)。

在加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$ 上，弧 p-拉普拉斯算子$\Delta^p{}_a$ 满足等式

$$\Delta_a^p F = div_a\left(|\nabla_a F|^{p-2}\nabla_a F\right) \tag{134}$$

对所有弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$ 均成立。

证明。
给定一个加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$ 以及一个弧函数$F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$，根据弧散度算子 div_a 和弧梯度算子 ∇_a 的定义，对所有弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G$，有:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}_a\left(|\nabla_a F|^{p-2}\nabla_a F\right)(v_i, v_j) = W_G(v_i, v_j)^{\theta}\left(\frac{w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{\zeta}}{\deg_{out}(v_i)}|\nabla_a F(v_i)|^{p-2}\nabla_a F(v_i) - \right.\\
&\qquad\left.\frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\zeta}}{\deg_{in}(v_j)}\left|\nabla_a F(v_j)\right|^{p-2}\nabla_a F(v_j)\right)\\
&= W_G(v_i, v_j)^{\theta}\left(\frac{w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{\zeta}}{\deg_{out}(v_i)}\right.\\
&\quad\left|w_G(v_i)^{\zeta}\sum_{a_r\in\mathcal{A}_G}\left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_r)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_r)}{\deg_{out}(v_i)}\right)W_I(a_r)^{\beta} W_G(a_r)^{\theta} F(a_r)\right|^{p-2}\\
&\quad w_G(v_i)^{\zeta}\sum_{a_s\in\mathcal{A}_G}\left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_s)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_s)}{\deg_{out}(v_i)}\right)W_I(a_s)^{\beta} W_G(a_s)^{\theta} F(a_s) -\\
&\quad\frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\zeta}}{\deg_{in}(v_j)}\\
&\quad\left|w_G(v_j)^{\zeta}\sum_{a_t\in\mathcal{A}_G}\left(\frac{\delta_{in}(v_j, a_t)}{\deg_{in}(v_j)} - \frac{\delta_{out}(v_j, a_t)}{\deg_{out}(v_j)}\right)W_I(a_t)^{\beta} W_G(a_t)^{\theta} F(a_t)\right|^{p-2}\\
&\quad\left. w_G(v_j)^{\zeta}\sum_{a_u\in\mathcal{A}_G}\left(\frac{\delta_{in}(v_j, a_u)}{\deg_{in}(v_j)} - \frac{\delta_{out}(v_j, a_u)}{\deg_{out}(v_j)}\right)W_I(a_u)^{\beta} W_G(a_u)^{\theta} F(a_u)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= W_G\left(v_i, v_j\right)^\theta \left(\frac{w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^{2\zeta+\zeta(p-2)}}{\deg_{out}\left(v_i\right)} \right. \\
&\quad \left| \sum_{a_r \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_i, a_r\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_i, a_r\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)} \right) W_I\left(a_r\right)^\beta W_G\left(a_r\right)^\theta F\left(a_r\right) \right|^{p-2} \\
&\quad \sum_{a_s \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_i, a_s\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_i, a_s\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)} \right) W_I\left(a_s\right)^\beta W_G\left(a_s\right)^\theta F\left(a_s\right) - \\
&\quad \left. \frac{w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^{2\zeta+\zeta(p-2)}}{\deg_{in}\left(v_i\right)} \right. \\
&\quad \left| \sum_{a_t \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_j, a_t\right)}{\deg_{in}\left(v_j\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_j, a_t\right)}{\deg_{out}\left(v_j\right)} \right) W_I\left(a_t\right)^\beta W_G\left(a_t\right)^\theta F\left(a_t\right) \right|^{p-2} \\
&\quad \left. \sum_{a_u \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_j, a_u\right)}{\deg_{in}\left(v_j\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_j, a_u\right)}{\deg_{out}\left(v_j\right)} \right) W_I\left(a_u\right)^\beta W_G\left(a_u\right)^\theta F\left(a_u\right) \right) \\
&= W_G\left(v_i, v_j\right)^\theta \left(\frac{w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^{p\zeta}}{\deg_{out}\left(v_i\right)} \right. \\
&\quad \left| \sum_{a_r \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_i, a_r\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_i, a_r\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)} \right) W_I\left(a_r\right)^\beta W_G\left(a_r\right)^\theta F\left(a_r\right) \right|^{p-2} \\
&\quad \sum_{a_s \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_i, a_s\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_i, a_s\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)} \right) W_I\left(a_s\right)^\beta W_G\left(a_s\right)^\theta F\left(a_s\right) - \\
&\quad \left. \frac{w_I\left(v_j\right)^\alpha w_G\left(v_j\right)^{p\zeta}}{\deg_{in}\left(v_i\right)} \right. \\
&\quad \left| \sum_{a_t \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_j, a_t\right)}{\deg_{in}\left(v_j\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_j, a_t\right)}{\deg_{out}\left(v_j\right)} \right) W_I\left(a_t\right)^\beta W_G\left(a_t\right)^\theta F\left(a_t\right) \right|^{p-2} \\
&\quad \left. \sum_{a_u \in \mathscr{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_j, a_u\right)}{\deg_{in}\left(v_j\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_j, a_u\right)}{\deg_{out}\left(v_j\right)} \right) W_I\left(a_u\right)^\beta W_G\left(a_u\right)^\theta F\left(a_u\right) \right) \\
&= \Delta_a^p F\left(v_i, v_j\right)
\end{aligned}
$$

因此，对于所有弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$以及所有弧函数 $F \in \mathscr{H}\left(\mathscr{A}_G\right)$，使用所给出的弧梯度 ∇_a、弧散度 div_a和弧p-拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_a$ 的定义时，等式 $\Delta^p{}_a F\left(a_q\right) = \mathrm{div}_a\left(\left|\nabla_a F\right|^{p-2} \nabla_a F\right)\left(a_q\right)$成立。

□

8 超图上的函数

由于超图是普通图的一种有效推广，以下各节旨在将此前针对普通图定义的所有概念推广到超图情形。与普通图一样，对于无向超图 NH 或有向超图 OH，既可以在其顶点集 $\mathcal{V}$ 上定义实值函数，也可以在其超边集 $\mathcal{E}_H$ 或超弧集 $\mathcal{A}_H$ 上定义实值函数。

因此，本节将第 (5) 节的定义和概念扩展到超图，从小节 (8.1) 中的顶点函数开始。本小节介绍了超图的顶点权重函数，并将所有顶点函数的空间定义为一个希尔伯特空间，同时给出了顶点函数对应的内积、绝对值和 $\mathcal{L}^p$-范数。

随后，小节 (8.2) 介绍了无向超图上的超边函数和有向超图上的超弧函数，以便不仅编码有关数据点 $v_1, v_2, \ldots v_N$ 之间成对连接的更多信息，还编码有关数据点任意子集之间关系的信息。此外，文中还定义了超边和超弧权重函数，并分析了它们的对称性。与前一小节一样，文中也将所有超边函数或超弧函数构成的空间定义为希尔伯特空间，并给出了相应的内积、绝对值和$\mathcal{L}^p$-范数。

8.1 顶点函数

由于普通图和超图上的顶点函数定义在同一个顶点集 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots v_N\}$ 上，因此这里只简要介绍超图对应的实值顶点函数定义和注记。

定义 8.1 (**实值顶点函数** f)。
实值顶点函数 f 定义在无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$ 或有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$ 的顶点 $\mathcal{V}$ 的定义域上：

$$f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v_i \longmapsto f(v_i). \tag{135}$$

实顶点函数的一个重要示例是顶点权重函数，它为每个顶点$v_i \in \mathcal{V}$赋予一个正权重。

定义 8.2(顶点权重函数 w).
顶点权重函数 w 可以用相同的方式定义于无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$和有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$:

$$w: \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \qquad v_i \longmapsto w(v_i) \tag{136}$$

一个无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$ 或一个有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$，连同一个顶点权重函数 w，可以表示为 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H, w)$ 或 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, w)$。

注 8.3 (顶点权函数 w_I 和 w_G)。
加权有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, w)$的不同顶点权重函数 w 将用于实值顶点函数空间的内积，以及顶点梯度和超弧梯度的定义。因此，不同的下标将再次表明，顶点权重函数究竟来源于内积 w_I 还是梯度定义 w_G。

无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$或有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$上的实值顶点函数的其他重要示例包括定义 (3.11) 中先前引入的顶点度函数 deg、$\deg_{out}$ 和 $\deg_{in}$ 。

由于假设顶点数 $|\mathcal{V}| = N \in \mathbb{N}$ 有限，因此可以将所有实顶点函数 f 的空间与一个 N–维希尔伯特空间相关联。

定义 8.4 (实值顶点函数空间 $\mathscr{H}(\mathcal{V})$).
实值顶点函数 f 的空间定义为:

$$\mathscr{H}(\mathcal{V}) = \{f \mid f: \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}\} \tag{137}$$

以及对应的内积:

$$\langle f, g \rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{V})} = \sum_{v_i \in \mathcal{V}} w_I(v_i)^{\alpha} f(v_i) g(v_i) \tag{138}$$

对于任意两个实值顶点函数 f、$g \in \mathscr{H}(\mathcal{V})$ 和参数 $\alpha \in \mathbb{R}$。

注 8.5 (实顶点函数内积的参数选择).
选择 $\alpha = 0$ 后，实值顶点函数的内积定义得以简化；对于任意两个实值顶点函数 f、$g \in \mathscr{H}(\mathcal{V})$，该定义与普通图上实值顶点函数的常见内积 *(5.5)* 相符:

$$\langle f, g \rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{V})} = \sum_{v_i \in \mathcal{V}} f(v_i) g(v_i). \tag{139}$$

先前在（5.6）中关于普通图上实顶点函数的绝对值和 $\mathscr{L}^p$-范数的定义可以推广，以便同样适用于超图上的实顶点函数。

定义 8.6 (实数顶点函数空间上的绝对值和 $\mathscr{L}^p$-范数)。

对于一个 实值顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathcal{V})$ 在顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 处，绝对值由以下给出 *y:*

$$|\cdot|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$f(v_i) \longmapsto |f(v_i)| = \begin{cases} f(v_i) & f(v_i) \geq 0 \\ -f(v_i) & otherwise \end{cases}. \tag{140}$$

此外，实值顶点函数 f 的 $\mathscr{L}^p$ 范数 $\in \mathscr{H}(\mathcal{V})$ 定义为:

$$||\cdot||_p: \mathscr{H}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$f \longmapsto ||f||_p = \begin{cases} \left(\sum_{v_i \in \mathcal{V}} |f(v_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \max_{v_i \in \mathcal{V}} (|f(v_i)|) & p = \infty \end{cases}. \tag{141}$$

8.2 超边与超弧函数

为了描述两个或多个顶点之间的关系，可以使用无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$ 中的超边，或使用有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$ 中的超弧。关于此类连接的更多信息，可以通过定义在超边集 $\mathcal{E}_H$ 上的超边函数，或定义在超弧集 $\mathcal{A}_H$ 上的超弧函数进行编码。

定义 8.7 (实值超边函数或超弧函数 F)。
实值超边函数或超弧函数 F 定义在无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$ 的超边 $\mathcal{E}_H$ 的定义域上，或定义在有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$ 的超弧 $\mathcal{A}_H$ 的定义域上。

$$F: \mathcal{E}_H \longrightarrow \mathbb{R} \qquad e_q \longmapsto F\left(e_q\right), \tag{142}$$

或者在有向超图的情况下

$$F: \mathcal{A}_H \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a_q \longmapsto F\left(a_q\right). \tag{143}$$

由于超边中顶点的顺序无关紧要，任何实超边函数总是对称的。

注记 8.8 (实值超边函数的对称性)。
对于无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$，超边函数 $F: \mathcal{E}_H \longrightarrow \mathbb{R}$ 始终是对称的，因为超边没有方向 (注意：超边内顶点的任何置换都描述同一个超边。)。

实超弧函数 $F: \mathcal{A}_H \longrightarrow \mathbb{R}$ 通常不满足这一性质，因此不能假设对于所有超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 和 $\tilde{a}_q \in \widetilde{\mathcal{A}_H}$，$F(a_q) = F(\tilde{a}_q)$ 都成立，尤其是因为 $a_q = \left(a^{out}{}_q, a^{in}{}_q\right) \in \mathcal{A}_H$ 并不意味着 $\tilde{a}_q = \left(a^{in}{}_q, a^{out}{}_q\right) \in \mathcal{A}_H$。

对于实值超边函数或超弧函数空间上的内积，以及有向超图上的加权梯度，超边权函数和超弧权重函数的定义是必要的

定义 8.9 (超边或超弧权函数 W)。
对于无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$ 和有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$，均可定义超边或超弧权重函数 W:

1) 对于无向超图 NH，其超边权重函数 W 定义为:

$$W: \mathcal{E}_H \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \qquad e_q \longmapsto W(e_q). \tag{144}$$

2）类似地，对于有向超图 OH，权函数 W 定义在所有超弧 $\mathcal{A}_H$ 的定义域上，而不是所有超边 $\mathcal{E}_H$ 的定义域上:

$$W: \mathcal{A}_H \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \qquad a_q \longmapsto W(a_q). \tag{145}$$

配有超边权函数 W 的无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$，或配有超弧权函数 W 的有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H)$，分别称为加权无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H, W)$ 或加权有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, W)$。

注记 8.10 （超弧权重函数 W_I 和 W_G）。
加权定向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, W)$ 中的不同超弧权重函数 W 将用于实超弧函数空间的内积，以及顶点和超弧梯度的定义。因此，下标将标明超弧权重函数是来自内积 W_I 还是来自梯度定义 W_G。

如前所述，实超弧函数不一定是对称的，因此，有向正规图上的超弧权重函数 W 具有对称性是一种特殊性质。

定义 8.11 (对称超弧权函数)。
若有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_H)$ 上的超弧权重函数 W 对称，则称其为对称的；若对所有超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，均满足：

$$W\left(a_q\right) = W\left(\widetilde{a_q}\right) \tag{146}$$

其中 $\widetilde{a}_q = \left(a^{in}{}_q, a^{out}{}_q\right) \in \widetilde{\mathscr{A}_H}$ 来自定义 *(2.6)* 中方向切换后的有向超图。

注意：这一性质要么需要将超弧权重函数 W 的定义域从 $\mathscr{A}_H$ 扩展到 $\mathscr{A}_H \cup \mathscr{A}_H$，要么需要一个具有性质 $\mathscr{A}_H = \mathscr{A}_H$ 的有向超图；由此可推出，对于所有超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，$\widetilde{a}_q \in \mathscr{A}_H$ 也成立。

每个超边或超弧权函数都可以重新缩放，使其映射值均小于或等于 1。

T定理 8.12 (超边或超弧权函数的归一化).
每个超边或超弧权函数 W 都可以归一化，使其映射到 $(0,1]$ 中的值，而不是 $\mathbb{R}_{>0}$。

证明。
以下证明中的所有论证均适用于无向超图*NH* 和有向超图 *OH*，因为论证中并未用到超边或超弧的方向以及权函数 W 的对称性。因此，不失一般性，假设 W 定义在无向超图 *NH*的超边集 $\mathscr{E}_H$ 上。

对于每条超边$e_q \in \mathscr{E}_H$，都有$W\left(e_q\right) \in \mathbb{R}_{>0}$；由于超边集 $\mathscr{E}_H$ 是有限的，以下最大值是良定义的：

$$m := \max_{e_q \in \mathscr{E}_H} W\left(e_q\right) \in \mathbb{R}_{>0}.$$

利用最大权重m，可以定义一个新的超边权函数$\overline{W}$：

$$\overline{W}: \mathscr{E}_H \longrightarrow (0,1] \qquad e_q \longmapsto \frac{W\left(e_q\right)}{m} \tag{147}$$

其中，对于所有超边$W(e_q)\, m \in (0,1]\, e_q \in \mathscr{E}_H$，该结论成立，因为：

- $W\left(e_q\right), m > 0 \implies \overline{W}\left(e_q\right) = \frac{W\left(e_q\right)}{m} > 0$
- $W\left(e_q\right) \leq m \implies \overline{W}\left(e_q\right) = \frac{W\left(e_q\right)}{m} \leq 1$

因此，可以对任意超边或超弧权重函数W 进行归一化，使其映射到 $(0,1]$。

□

下面的定理证明，非有向超图$NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$中的超边数以及有向超图$OH = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_H)$中的超弧数均受$N_N$限制。因此，实值超边函数或超弧函数的空间可以用至多为N_N维的希尔伯特空间来描述。

定理 8.13 (超图中超边或超弧的数量)。
假设超边或超弧不会重复出现，正如注记（*2.5*）中所述，无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$ 中超边的数量受到以下限制：

$$|\mathcal{E}_H| \leq N^N \tag{148}$$

并且，有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_H)$ 中的超弧数量也受到限制。

$$|\mathscr{A}_H| \leq N^N \tag{149}$$

其中 $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 是顶点集 $\mathcal{V}$的基数。

证明。
给定一个无向超图 $NH = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_H)$，至多有：

- $\left(\begin{array}{c} N \\ 2 \end{array} \right) = \frac{N!}{2!(N-2)!} \leq \frac{N!}{(N-2)!} = N \cdot (N-1)$ hyperedges connecting 2 vertices
- $\left(\begin{array}{c} N \\ 3 \end{array} \right) = \frac{N!}{3!(N-3)!} \leq \frac{N!}{(N-3)!} = N \cdot (N-1) \cdot (N-2)$ hyperedges connecting 3 vertices

  $\dots$
- $\left(\begin{array}{c} N \\ N \end{array} \right) = \frac{N!}{N!(N-N)!} \leq \frac{N!}{(N-N)!} = N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 1$ hyperedges connecting N vertices

因此，以下估计成立：

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}_H| \leq & \left(\begin{array}{c} N \\ 2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} N \\ 3 \end{array} \right) + \cdots + \left(\begin{array}{c} N \\ N \end{array} \right) \\
& \leq N \cdot (N-1) + N \cdot (N-1) \cdot (N-2) + \cdots + N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 1 \\
& \leq N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 1 + N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 1 + \cdots + N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 1 \\
& \leq (N-1) N! \leq (N-1) N^{(N-1)} \leq N^N
\end{aligned}$$

类似地，给定一个有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_H)$，最多有：

- $2^2 \binom{N}{2} = 2^2 \frac{N!}{2!(N-2)!}$ hyperarcs connecting 2 vertices
- $2^3 \binom{N}{3} = 2^3 \frac{N!}{3!(N-3)!}$ hyperarcs connecting 3 vertices

  ...
- $2^N \binom{N}{N} = 2^N \frac{N!}{N!(N-N)!}$ hyperarcs connecting N vertices

与无向超图相比，还必须考虑输入顶点和输出顶点之间的区别。因此，对于$k \in \{2, 3, \ldots, N\}$，需要引入乘法因子 2^k，因为对于这k个顶点中的每一个，都有两种可能性：成为输出顶点或输入顶点。

对顶点数N使用数学归纳法，以证明：$\sum_{k=2}^{N} 2^k \frac{N!}{k!(N-k)!} \leq N^N$进而证明 $|\mathscr{A}_H| \leq N^N$

理论基础情形 $N = 1$ 的证明如下：

$$N = 1 \implies |A_H| = 0 \implies |A_H| = 0 \leq 1 = N^N$$

此外，数学归纳法的基础情形$N = 2$ 由以下内容证明：

$$\sum_{k=2}^{N} 2^k \frac{N!}{k!\,(N-k)!} = 2^2 \frac{2!}{2!0!} = 4 \leq 2^2 = N^N$$

现在假设归纳假设为：

$$\sum_{k=2}^{N} 2^k \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \leq N^N$$

并且对某个$N \geq 2$成立。接下来的推导和论证表明，在归纳假设下，该不等式对$N+1$也成立。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N+1} 2^k \frac{(N+1)!}{k!\,(N+1-k)!} &= 2^{N+1} \frac{(N+1)!}{(N+1)!0!} + \sum_{k=2}^{N} 2^k \frac{(N+1)!}{k!\,(N+1-k)!} \\
&= 2^{N+1} + (N+1) \sum_{k=2}^{N} 2^k \frac{N!}{k!\,(N+1-k)!} \\
&\leq 2^{N+1} + (N+1) \sum_{k=2}^{N} 2^k \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \\
&\overset{\text{IH}}{\leq} 2^{N+1} + (N+1) N^N
\end{aligned}$$

使用 $(N+1)^{N+1}>0$ 可得:

$\sum_{k=2}^{N+1} 2^k \frac{(N+1)!}{k!(N+1-k)!} \overset{!}{\leq} (N+1)^{N+1} \quad \Longleftarrow \quad 2^{N+1}+(N+1)N^N \leq (N+1)^{N+1} \quad \Longleftrightarrow$
$\frac{2^{N+1}+(N+1)N^N}{(N+1)^{N+1}} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{2}{N+1}\right)^{N+1}+\left(\frac{N}{N+1}\right)^N \leq 1$

为了证明最后一个不等式，辅助函数

$$h_1:\ \mathbb{R}_{\geq 2} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto h_1(x)=\left(\frac{2}{x+1}\right)^{x+1}$$

$$h_2:\ \mathbb{R}_{\geq 2} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto h_2(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$$

定义这些是为了说明:
$h_1(2)+h_2(2) \leq 1$ 且 $h_1'(x)$，$h_2'(x) \leq 0$ 对所有 $x \geq 2$ 成立，由此可得: $\left(\frac{2}{N+1}\right)^{N+1}+\left(\frac{N}{N+1}\right)^N \leq 1$ 对所有 $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

- $h_1(2)+h_2(2)=\left(\frac{2}{2+1}\right)^{2+1}+\left(\frac{2}{2+1}\right)^2=\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{20}{27} \leq 1$
- $h_1'(x)=\left(\frac{2}{x+1}\right)^{x+1}\left(\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)-1\right) \leq \left(\frac{2}{x+1}\right)^{x+1}(\ln(1)-1)=-\left(\frac{2}{x+1}\right)^{x+1} \leq 0$
- $h_2'(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1}\right) \overset{!}{\leq} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1} \leq 0$
  Wh此处 f 或 $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1}$ 的 rule ad: t th t
  1) $\ln\left(\frac{2}{2+1}\right)+\frac{1}{2+1} \leq -0.05 \leq 0$
  2) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)+\frac{1}{x+1}\right)=\ln(1)+0=0$
  3) $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2} \overset{!}{\geq} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2} \quad \Longleftrightarrow$
  $(x+1)^2 \geq x(x+1)+x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+2x+1 \geq x^2+2x \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \geq 0$
  因此，对于 $x \geq 2$，等式 $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1} \leq 0$ 成立。

这证明了归纳步骤，从而得到了超图中超弧数量的上界 $|\mathscr{A}_H|$:

$\left(\frac{2}{N+1}\right)^{N+1}+\left(\frac{N}{N+1}\right)^N \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=2}^{N+1} 2^k \frac{(N+1)!}{k!(N+1-k)!} \leq (N+1)^{N+1} \quad \Longrightarrow \quad |\mathscr{A}_H| \leq N^N$

□

通过将所有实超边函数的定义域从 $\mathscr{E}_H$ 扩展到所有可行超边的集合 $2^{\mathscr{V}} \setminus \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \ldots \{v_N\}\}$，并类似地将所有超弧函数的定义域从 $\mathscr{A}_H$ 扩展到所有可行超弧的集合 $\left\{\left(a^{out}q, a^{in}q\right) \middle| a^{out}q, a^{in}q \in 2^{\mathscr{V}} \setminus \{\emptyset\}\right.$，同时令任意超边 $e_q \notin \mathscr{E}_H$ 或任意超弧 $a_q \notin \mathscr{A}_H$ 均满足 $F(e_q)=F(a_q)=0$，则所有实值超边函数或超弧函数构成的空间可视为一个至多为 N N —维的希尔伯特空间。

定义 8.14 (实超边函数 $\mathscr{H}(\mathscr{E}_H)$ 或超弧函数$\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$的空间)。

无向超图 $NH = (\mathscr{V}, \mathscr{E}_H, W)$ 的实超边函数空间 F 定义为

$$\mathscr{H}(\mathscr{E}_H) = \{F \mid F: \mathscr{E}_H \longrightarrow \mathbb{R}\} \tag{150}$$

与相应的内积搭配

$$\langle F, G\rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{E}_H)} = \sum_{e_q \in \mathscr{E}_H} W_I\left(e_q\right)^{\beta} F\left(e_q\right) G\left(e_q\right) \tag{151}$$

对于任意两个实超边函数 F、$G \in \mathscr{H}(\mathscr{E}_H)$ 以及参数 $\beta \in \mathbb{R}$。类似地，对于有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H, W)$，实超弧函数空间定义为

$$\mathscr{H}(\mathscr{A}_H) = \{F \mid F: \mathscr{A}_H \longrightarrow \mathbb{R}\} \tag{152}$$

及相应的内积

$$\langle F, G\rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)} = \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} W_I\left(a_q\right)^{\beta} F\left(a_q\right) G\left(a_q\right) \tag{153}$$

对于任意两个实超弧函数 F、$G \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$ 和参数 $\beta \in \mathbb{R}$。

注记 8.15 （实值超边函数或超弧函数内积的参数选择）。

通过选择 $\beta = 1$，$W_I\left(e_q\right) \equiv_2 1$ 对所有边 $e_q \in \mathscr{E}_H$ 以及 $W_I\left(a_q\right) \equiv_2 1$ 对所有弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$，实值超边函数或超弧函数空间上的内积可以简化，从而使其符合普通图情形（*5.15*）的定义，对于任意两个实值超边函数 F，$G \in \mathscr{H}(\mathscr{E}_H)$:

$$\langle F, G\rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{E}_H)} = \frac{1}{2} \sum_{e_q \in \mathscr{E}_H} F\left(e_q\right) G\left(e_q\right) \tag{154}$$

对于任意两个实超弧函数 F，$G \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$，同理:

$$\langle F, G\rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)} = \frac{1}{2} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} F\left(a_q\right) G\left(a_q\right). \tag{155}$$

前文对正规图上实边函数和实弧函数的绝对值与 $\mathscr{L}^p$-范数的定义（见 (5.16)）可以推广，使其也适用于超图情形下的超边函数与超弧函数。

定义 8.16 (实超边函数与超弧函数空间上的绝对值和 $\mathscr{L}^p$-范数)。

实超边函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{E}_H)$ 和实超弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$ 均可定义绝对值和 $\mathscr{L}^p$-范数:

1) 对于超图边 $|(e|)_q \in \mathscr{E}_H$ 上的实超边函数 $|(F|) \in \mathscr{H}(\mathscr{E}_H)$，其绝对值定义为:

$$
\begin{aligned}
&|\cdot|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\
&F\left(e_q\right) \longmapsto \left|F\left(e_q\right)\right| = \begin{cases} F\left(e_q\right) & F\left(e_q\right) \geq 0 \\ -F\left(e_q\right) & otherwise \end{cases} .
\end{aligned} \tag{156}
$$

超边函数 F 的 $\mathscr{L}^p$-范数为:

$$
\begin{aligned}
&||\cdot||_p: \mathscr{H}(\mathscr{E}_H) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\
&F \longmapsto ||F||_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\sum_{e_q \in \mathscr{E}_H} \left|F\left(e_q\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \max_{e_q \in \mathscr{E}_H}\left(\left|F\left(e_q\right)\right|\right) & p = \infty \end{cases} .
\end{aligned} \tag{157}
$$

2) 类似地，对于超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$ 上的实超弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$，其绝对值定义为:

$$
\begin{aligned}
&|\cdot|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\
&F\left(a_q\right) \longmapsto \left|F\left(a_q\right)\right| = \begin{cases} F\left(a_q\right) & F\left(a_q\right) \geq 0 \\ -F\left(a_q\right) & otherwise \end{cases} .
\end{aligned} \tag{158}
$$

超弧函数 F 的 $\mathscr{L}^p$-范数定义为:

$$
\begin{aligned}
&||\cdot||_p: \mathscr{H}(\mathscr{A}_H) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\
&F \longmapsto ||F||_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left|F\left(a_q\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \max_{a_q \in \mathscr{A}_H}\left(\left|F\left(a_q\right)\right|\right) & p = \infty \end{cases} .
\end{aligned} \tag{159}
$$

9 有向超图上的梯度和伴随算子

有向正规图的加权梯度算子和加权伴随算子的定义可以推广到有向超图的情形，适用于顶点和超弧。在有向超图上使用梯度和伴随算子，进而可以得到合理的拉普拉斯算子和 p-拉普拉斯算子定义。

本节介绍加权有向超图上的梯度与伴随算子，这些定义与第（6）节中加权定向正规图的定义相符。第（9.1）小节定义了顶点梯度算子和超弧梯度算子，并介绍了它们的具体性质。此外，第（9.2）小节基于先前定义的顶点梯度和超弧梯度，推导出顶点伴随算子和超弧伴随算子。两个小节还都包含证明，说明将超图上的梯度与伴随算子定义应用于普通图时，会得到第（6）节中的普通图定义。

9.1 有向超图上的梯度算子

如前所述，梯度算子既可以定义在所有顶点的集合 $\mathcal{V}$ 上，也可以定义在所有超弧的集合 $\mathcal{A}_H$ 上。

定义 9.1（顶点梯度算子 ∇_v）。
对于加权有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, w, W)$，顶点梯度算子 ∇_v 定义为

$$\nabla_v : \mathscr{H}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathcal{A}_H) \qquad f \longmapsto \nabla_v f \tag{160}$$

其中，顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathcal{V})$ 在超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 上的加权差分定义为

$$\nabla_v f : \mathcal{A}_H \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a_q \longmapsto \nabla_v f\left(a_q\right) =$$

$$W_G\left(a_q\right)^\gamma \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \left(\delta_{in}\left(v_i, a_q\right) \frac{w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\epsilon}{\left|a_q^{in}\right|} - \delta_{out}\left(v_i, a_q\right) \frac{w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\eta}{\left|a_q^{out}\right|} \right) f(v_i). \tag{161}$$

顶点梯度满足梯度的两个预期性质，即反对称性，以及常函数的梯度等于零。

定理 9.2 (顶点梯度算子性质)。
加权有向超图 $OH=(\mathcal{V},\mathcal{A}_H,w,W)$上顶点函数$f\in\mathcal{H}(\mathcal{V})$ 的加权差分满足以下性质：

1) 常值顶点函数的梯度等于零：
$f(v_i)\equiv f\in\mathbb{R}$ 对所有顶点 $v_i\in\mathcal{V}$和 $w_I(v_k)^{\alpha}w_G(v_k)^{\epsilon}=w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\eta}$ 对所有顶点组合 $v_j,v_k\in\mathcal{V}$其中 $v_j\in a^{out}{}_q$ 且 $v_k\in a^{in}{}_q$ 对于一条超弧 $a_q\in\mathcal{A}_H$
$\Longrightarrow$ $\nabla_v f(a_q)=0$ 对所有超弧 $a_q\in\mathcal{A}_H$

2）反对称性：
对称超弧权函数 W_G 和 $\epsilon=\eta$
$\Longrightarrow$ $\nabla_v f(a_q)=-\nabla_v f(\tilde{a}_q)$ 对于所有超弧 $a_q\in\mathcal{A}_H$（及其对应的超弧 $\tilde{a}_q\in\mathcal{A}_H$（定义（*2.6*）中方向反转后的超图 OH 中））

证明。
给定加权有向超图$f\in\mathcal{H}(\mathcal{V})$ 上的实值顶点函数 $OH=(\mathcal{V},\mathcal{A}_H,w,W)$，则有：

1) 对于所有顶点组合 $w_I(v_k)^{\alpha}w_G(v_k)^{\epsilon}=w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\eta}$，若$v_j,v_k\in\mathcal{V}$满足$v_j\in a^{out}{}_q$ 且$v_k\in a^{in}{}_q$ 对某条超弧$a_q\in\mathcal{A}_H$ 成立，则存在常数$w_{a_q}\in\mathbb{R}_{>0}$ 使得：

$$w_I(v_k)^{\alpha}w_G(v_k)^{\epsilon}=(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\eta}=:w_{a_q}$$

因此，结合附加性质$f(v_i)\equiv f\in\mathbb{R}$（对所有顶点$v_i\in\mathcal{V}$均成立），可得：

$$\begin{aligned}\nabla_v f(a_q)&=W_G(a_q)^{\gamma}\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\left(\delta_{in}(v_i,a_q)\frac{w_I(v_i)^{\alpha}w_G(v_i)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}-\right.\\&\left.\delta_{out}(v_i,a_q)\frac{w_I(v_i)^{\alpha}w_G(v_i)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}\right)f(v_i)\\&=W_G(a_q)^{\gamma}\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\left(\delta_{in}(v_i,a_q)\frac{w_{a_q}}{\left|a_q^{in}\right|}-\delta_{out}(v_i,a_q)\frac{w_{a_q}}{\left|a_q^{out}\right|}\right)\overline{f}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= W_G\left(a_q\right)^{\gamma}\left(\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\delta_{in}\left(v_i,a_q\right)\frac{w_{a_q}}{\left|a_q^{in}\right|}-\sum_{v_j\in\mathcal{V}}\delta_{out}\left(v_j,a_q\right)\frac{w_{a_q}}{\left|a_q^{out}\right|}\right)\overline{f}\\
&= W_G\left(a_q\right)^{\gamma}\left(\frac{w_{a_q}}{\left|a_q^{in}\right|}\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\delta_{in}\left(v_i,a_q\right)-\frac{w_{a_q}}{\left|a_q^{out}\right|}\sum_{v_j\in\mathcal{V}}\delta_{out}\left(v_j,a_q\right)\right)\overline{f}\\
&= W_G\left(a_q\right)^{\gamma}\left(\frac{w_{a_q}}{\left|a_q^{in}\right|}\left|a_q^{in}\right|-\frac{w_{a_q}}{\left|a_q^{out}\right|}\left|a_q^{out}\right|\right)\overline{f}\\
&= W_G\left(a_q\right)^{\gamma}\cdot 0\cdot\overline{f}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

最后一个等式之所以成立，是因为超弧权重函数W_G是一个实值函数，因此其映射结果为有限值。

2) W_G为对称超弧权函数，且满足 $\epsilon=\eta$，这意味着对于每条超弧 $a_q\in\mathcal{A}_H$，以下结论成立：

$$
\begin{aligned}
\nabla_v f\left(a_q\right) &= W_G\left(a_q\right)^{\gamma}\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\left(\delta_{in}\left(v_i,a_q\right)\frac{w_I\left(v_i\right)^{\alpha}w_G\left(v_i\right)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}-\right.\\
&\qquad\left.\delta_{out}\left(v_i,a_q\right)\frac{w_I\left(v_i\right)^{\alpha}w_G\left(v_i\right)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}\right)f\left(v_i\right)\\
&= -W_G\left(a_q\right)^{\gamma}\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\left(\delta_{out}\left(v_i,a_q\right)\frac{w_I\left(v_i\right)^{\alpha}w_G\left(v_i\right)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}-\delta_{in}\left(v_i,a_q\right)\frac{w_I\left(v_i\right)^{\alpha}w_G\left(v_i\right)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}\right)f\left(v_i\right)\\
&= -W_G\left(a_q\right)^{\gamma}\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\left(\delta_{out}\left(v_i,a_q\right)\frac{w_I\left(v_i\right)^{\alpha}w_G\left(v_i\right)^{\epsilon}}{\left|a_q^{out}\right|}-\delta_{in}\left(v_i,a_q\right)\frac{w_I\left(v_i\right)^{\alpha}w_G\left(v_i\right)^{\eta}}{\left|a_q^{in}\right|}\right)f\left(v_i\right)\\
&= -W_G\left(\widetilde{a_q}\right)^{\gamma}\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\left(\delta_{out}\left(v_i,a_q\right)\frac{w_I\left(v_i\right)^{\alpha}w_G\left(v_i\right)^{\epsilon}}{\left|a_q^{out}\right|}-\delta_{in}\left(v_i,a_q\right)\frac{w_I\left(v_i\right)^{\alpha}w_G\left(v_i\right)^{\eta}}{\left|a_q^{in}\right|}\right)f\left(v_i\right)\\
&= -W_G\left(\widetilde{a_q}\right)^{\gamma}\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\left(\delta_{in}\left(v_i,\widetilde{a_q}\right)\frac{w_I\left(v_i\right)^{\alpha}w_G\left(v_i\right)^{\epsilon}}{\left|\widetilde{a_q^{in}}\right|}-\delta_{out}\left(v_i,\widetilde{a_q}\right)\frac{w_I\left(v_i\right)^{\alpha}w_G\left(v_i\right)^{\eta}}{\left|\widetilde{a_q^{out}}\right|}\right)f\left(v_i\right)\\
&= -\nabla_v f\left(\widetilde{a_q}\right)
\end{aligned}
$$

其中倒数第二个等式由 $\delta_{out}\left(v_i、a_q\right)=\delta_{in}\left(v_i、\ \sim a_q\right)、\delta_{in}\left(v_i、a_q\right)=\delta_{out}\left(v_i、\sim a_q\right)、\left|a^{out}{}_q\right|=\left|a_q^{in}\right|$ 和 $\left|a^{in}{}_q\right|=\left|a_q^{out}\right|$ 得出，因为交换超弧 $a_q \in \mathscr{A}_G$ 的输出顶点和输入顶点，即可得到方向反转后的超弧 $\frown$ 反转后的方向 $\sim a_q \in \mathscr{A}_G$。

□

定理（4.1）表明，每个有向正规图都是有向超图的一个特例。因此，超图的顶点梯度算子也可应用于普通图，从而推广了普通图的顶点梯度算子。

定理 9.3（超图的顶点梯度算子是普通图情形的推广）。

给定一个加权定向正规图 $OG=(\mathscr{V},\mathscr{A}_G,w,\ W)$ 和一个顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$，则加权有向超图的顶点梯度算子 ∇_v 与定义（*6.1*）中的普通图顶点梯度算子相同。

证明。
给定一个加权定向正规图 $OG=(\mathscr{V},\mathscr{A}_G,w,\ W)$ 以及一个顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$，将加权有向超图的顶点梯度算子 ∇_v 应用于任意一条弧 $a_q=\left(v_i,\ v_j\right)\in\mathscr{A}_G$ 可得：

$$
\begin{aligned}
\nabla_v f\left(a_q\right) &= \nabla_v f\left(v_i,v_j\right)\\
&= W_G\left(v_i,v_j\right)^{\gamma}\\
&\quad \sum_{v_k\in\mathscr{V}}\left(\delta_{in}\left(v_k,a_q\right)\frac{w_I\left(v_k\right)^{\alpha}w_G\left(v_k\right)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}-\delta_{out}\left(v_k,a_q\right)\frac{w_I\left(v_k\right)^{\alpha}w_G\left(v_k\right)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}\right)f\left(v_k\right)\\
&= W_G\left(v_i,v_j\right)^{\gamma}\\
&\quad \sum_{v_k\in\left\{v_i,v_j\right\}}\left(\delta_{in}\left(v_k,a_q\right)w_I\left(v_k\right)^{\alpha}w_G\left(v_k\right)^{\epsilon}-\delta_{out}\left(v_k,a_q\right)w_I\left(v_k\right)^{\alpha}w_G\left(v_k\right)^{\eta}\right)f\left(v_k\right)\\
&= W_G\left(v_i,v_j\right)^{\gamma}\left(w_I\left(v_j\right)^{\alpha}w_G\left(v_j\right)^{\epsilon}f\left(v_j\right)-w_I\left(v_i\right)^{\alpha}w_G\left(v_i\right)^{\eta}f\left(v_i\right)\right)
\end{aligned}
$$

这些改写基于以下性质：对于任意弧 $a^{out}{}_q=\{v_i\}$ 和 $a^{in}{}_q=\left\{v_j\right\}a_q=\left(v_i、\ v_j\right)\in\mathscr{A}_G$，这意味着 $\left|a^{in}{}_q\right|=\left|a^{out}{}_q\right|=1$ 以及 $\delta_{in}\left(v_j,a_q\right)=\delta_{out}\left(v_i,a_q\right)=1$。

因此，超图的顶点梯度算子 ∇_v 是普通图情形的一种有效推广。

□

与顶点梯度算子 ∇_v 类似，可以在超弧函数 $\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$ 的定义域上定义一个线性梯度算子。

定义 9.4(超弧梯度算子 ∇_a)。
对于加权有向超图 $OH=(\mathscr{V},\mathscr{A}_H,w,W)$，超弧梯度算子$\nabla_a$ 定义为

$$\nabla_a:\ \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)\longrightarrow\mathscr{H}(\mathscr{V})\qquad F\longmapsto\nabla_a F \tag{162}$$

超弧函数 $F\in\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$ 在顶点 $v_i\in\mathscr{V}$ 处的加权差分定义为

$$\nabla_a F:\ \mathscr{V}\longrightarrow\mathbb{R}\qquad v_i\longmapsto\nabla_a F(v_i)=$$
$$w_G(v_i)^{\zeta}\sum_{a_q\in\mathscr{A}_H}\left(\frac{\delta_{in}(v_i,a_q)}{\deg_{in}(v_i)}-\frac{\delta_{out}(v_i,a_q)}{\deg_{out}(v_i)}\right)W_I(a_q)^{\beta}W_G(a_q)^{\theta}F(a_q). \tag{163}$$

超弧梯度还满足预期的反对称性，且常函数的梯度等于零。

定理 9.5 (超弧梯度算子性质)。
加权有向超图 $OH=(\mathscr{V},\mathscr{A}_H,w,W)$上的超弧函数 $F\in\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$ 的加权差分满足以下性质：

1) 常数超弧函数的梯度等于零：

$F(a_q)\equiv\overline{F}\in\mathbb{R}$ *and* $W_I(a_q)^{\beta}W_G(a_q)^{\theta}\equiv\overline{W}\in\mathbb{R}$ *for all arcs* $a_q\in\mathscr{A}_G$
$\Longrightarrow\quad\nabla_a F(v_i)=0$ *for all vertices* $v_i\in\mathscr{V}$

2) 反对称性：
对称超弧权函数 W_I 和 W_G 以及 $F(a_q)=F(\tilde{a}_q)$ 对所有超-弧 $a_q\in\mathscr{A}_H$、$\tilde{a}_q\in\mathscr{A}_H$均成立

$\Longrightarrow\quad\nabla_a F(v_i)=-\nabla_{\tilde{a}}F(v_i)$ 对所有顶点 $v_i\in\mathscr{V}$ (均成立，其中 $\nabla_{\tilde{a}}F$ 是将超弧梯度应用于方向反转后的超图 $\widetilde{OH}$)所得

证明。
给定加权有向超图 $OH=(\mathscr{V},\mathscr{A}_H,w$ 上的实超弧函数 $F\in\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$，$W$)，则有：

1) 对(每个$_q$)$\equiv$超弧 $\in\mathbb{R}$，且对$_I$(每个$_q$)$^{\beta}$超弧$_G$(都$_q$)$^{\theta}\equiv$有 $\in\mathbb{R}$超弧 $a_q\in\mathscr{A}_H$，则对每个顶点 $v_i\in\mathscr{V}$，都有：

$$\begin{aligned}\nabla_a F(v_i) &= w_G(v_i)^{\zeta} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{\theta} F(a_q) \\ &= w_G(v_i)^{\zeta} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} \right) \overline{W}\ \overline{F} \\ &= w_G(v_i)^{\zeta} \left(\sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} - \sum_{a_r \in \mathscr{A}_H} \frac{\delta_{out}(v_i, a_r)}{\deg_{out}(v_i)} \right) \overline{W}\ \overline{F} \\ &= w(v_i)^{\zeta} \\ &\quad \left(\frac{1}{\deg_{in}(v_i)} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \delta_{in}(v_i, a_q) - \frac{1}{\deg_{out}(v_i)} \sum_{a_r \in \mathscr{A}_H} \delta_{out}(v_i, a_r) \right) \overline{W}\ \overline{F} \\ &= w_G(v_i)^{\zeta} \left(\frac{1}{\deg_{in}(v_i)} \deg_{in}(v_i) - \frac{1}{\deg_{out}(v_i)} \deg_{out}(v_i) \right) \overline{W}\ \overline{F} \\ &= w_G(v_i)^{\zeta} \cdot 0 \cdot \overline{W}\ \overline{F} \\ &= 0\end{aligned}$$

最后一个等式是可行的，因为顶点权重函数w_G是实值函数，因此映射到有限值。

2) W_I和W_G为对称超弧权函数，且$F(a_q) = F(\tilde{a}_q)$对$\widetilde{\ }$所有超弧$a_q \in \mathscr{A}_H$、$\tilde{a}_q \in \mathscr{A}_H$均成立，这意味着对所有顶点$v_i \in \mathscr{V}$：

$$\begin{aligned}\nabla_a F(v_i) &= w_G(v_i)^{\zeta} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{\theta} F(a_q) \\ &= -w_G(v_i)^{\zeta} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} - \frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{\theta} F(a_q) \\ &= -w_G(v_i)^{\zeta} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} - \frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} \right) W_I(\widetilde{a_q})^{\beta} W_G(\widetilde{a_q})^{\theta} F(\widetilde{a_q}) \\ &= -w_G(v_i)^{\zeta} \sum_{\widetilde{a_q} \in \widetilde{\mathscr{A}_H}} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, \widetilde{a_q})}{\widetilde{\deg_{in}}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, \widetilde{a_q})}{\widetilde{\deg_{out}}(v_i)} \right) W_I(\widetilde{a_q})^{\beta} W_G(\widetilde{a_q})^{\theta} F(\widetilde{a_q}) \\ &= -\nabla_{\tilde{a}} F(v_i)\end{aligned}$$

从第二行到第三行的等式基于超弧权函数W_I和W_G的对称性；从第三行到第四行的改写则源于以下事实：对于所有顶点$v_i \in \mathscr{V}$，$\delta_{out}(v_i, a_q) = \delta_{in}(v_i, \tilde{a}_q)$和$\delta_{in}(v_i, a_q) = \delta_{out}(v_i, \tilde{a}_q)$。此外，考虑方向反转后的超图时，$\deg v_i)$变为$\deg v_i)$，而$\deg v_i)$变为$\deg v_i)$。

□

有向超图的超弧梯度算子也可应用于有向正规图的弧。下述定理表明，此时超弧梯度算子会推广弧梯度算子。

定理 9.6 （超弧梯度算子是弧梯度算子的推广）。

给定一个加权有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$ 以及一个弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$，则加权有向超图的超弧梯度算子 ∇_a 与定义（6.4）中的普通图弧梯度算子一致。

证明。
给定一个加权有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w、W)$ 以及一个弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$，将加权有向超图的超弧梯度算子 ∇_a 应用于任意顶点 $v_i \in \mathcal{V}$，便得到弧梯度算子的定义：

$$\nabla_a F(v_i) = w_G(v_i)^{\zeta} \sum_{a_q \in \mathcal{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{\theta} F(a_q).$$

因此，超图的超弧梯度算子 ∇_a 是普通图弧梯度算子的有效推广。

□

9.2 有向超图上的伴随算子

对于加权有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, w, W)$，加权伴随算子 $\nabla^*{}_v$ 和 $\nabla^*{}_a$ 被定义为加权梯度算子的对偶对应算子∇_v 和 ∇_a，并且再次满足以下等式，其中所有顶点函数 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$和所有超弧函数 $G \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_H)$均适用：

$$\langle G, \nabla_v f \rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{A}_H)} = \langle f, \nabla_v^* G \rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{V})} \tag{164}$$

$$\langle f, \nabla_a G \rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{V})} = \langle G, \nabla_a^* f \rangle_{\mathcal{H}(\mathcal{A}_H)} \tag{165}$$

随后利用顶点伴随算子和超弧伴随算子，为顶点和超弧引入拉普拉斯算子及p-拉普拉斯算子。

定义 9.7（顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$）。

对于加权有向超图 $OH=(\mathcal{V},\mathscr{A}_H,w,W)$，其具有对称超弧权函数 W_I 和 W_G，顶点伴随算子$\nabla^*{}_v$ 定义为

$$\nabla_v^*:\ \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)\longrightarrow\mathscr{H}(\mathcal{V})\qquad F\longmapsto\nabla_v^*F \tag{166}$$

顶点 $v_i\in\mathcal{V}$ 处超弧函数 $F\in\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$ 的加权伴随算子定义如下:

$$\nabla_v^*F:\ \mathcal{V}\longrightarrow\mathbb{R}\qquad v_i\longmapsto\nabla_v^*F(v_i)=$$

$$\sum_{a_q\in\mathscr{A}_H}\left(\delta_{in}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}-\delta_{out}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}\right)W_I(a_q)^{\beta}W_G(a_q)^{\gamma}F(a_q). \tag{167}$$

将超图的顶点伴随算子应用于普通图上的弧函数，得到普通图的顶点伴随算子。

定理 9.8（超图的顶点伴随算子是普通图情形的推广）。

给定一个加权有向正规图 $OG=(\mathcal{V},\mathscr{A}_G,w,W)$，其弧权函数 W_I 和 W_G 对称，且有一个弧函数 $F\in\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$，那么加权有向超图的顶点伴随算子$\nabla^*{}_v$ 与定义（6.7）中的普通图顶点伴随算子一致。

证明。
给定一个加权定向正规图 $OG=(\mathcal{V},\mathscr{A}_G,w,W)$，其弧权函数 W_I 和 W_G 对称，并配有弧函数 $F\in\mathscr{H}(\mathscr{A}_G)$，那么对任意顶点 $v_i\in\mathcal{V}$ 应用加权有向超图的顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$，可得:

$$\begin{aligned}\nabla_v^*F(v_i)&=\sum_{a_q\in\mathscr{A}_G}\left(\delta_{in}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}-\delta_{out}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}\right)W_I(a_q)^{\beta}W_G(a_q)^{\gamma}F(a_q)\\&=\sum_{a_q\in\mathscr{A}_G}\left(\delta_{in}(v_i,a_q)w_G(v_i)^{\epsilon}-\delta_{out}(v_i,a_q)w_G(v_i)^{\eta}\right)W_I(a_q)^{\beta}W_G(a_q)^{\gamma}F(a_q)\\&=\sum_{a_q\in\mathscr{A}_G}\delta_{in}(v_i,a_q)w_G(v_i)^{\epsilon}W_I(a_q)^{\beta}W_G(a_q)^{\gamma}F(a_q)-\\&\quad\delta_{out}(v_i,a_q)w_G(v_i)^{\eta}W_I(a_q)^{\beta}W_G(a_q)^{\gamma}F(a_q)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{v_j \in \mathcal{V}} \delta\left(v_j, v_i\right) w_G\left(v_i\right)^{\epsilon} W_I\left(v_j, v_i\right)^{\beta} W_G\left(v_j, v_i\right)^{\gamma} F\left(v_j, v_i\right) - \\
&\quad \delta\left(v_i, v_j\right) w_G\left(v_i\right)^{\eta} W_I\left(v_i, v_j\right)^{\beta} W_G\left(v_i, v_j\right)^{\gamma} F\left(v_i, v_j\right) \\
&= \sum_{v_j \in \mathcal{V}} \left(\delta\left(v_j, v_i\right) w_G\left(v_i\right)^{\epsilon} F\left(v_j, v_i\right) - \delta\left(v_i, v_j\right) w_G\left(v_i\right)^{\eta} F\left(v_i, v_j\right)\right) \\
&\quad W_I\left(v_i, v_j\right)^{\beta} W_G\left(v_i, v_j\right)^{\gamma}
\end{aligned}
$$

这些改写基于以下性质：对于任意弧 $\mathrm{a}_q = \left(\mathrm{v}_j \text{ 和顶点 } \mathrm{v}_k\right) \in \mathscr{A}_G$，$\mathrm{a}^{out}\ \mathrm{q} = \left\{\mathrm{v}_j\right\}$ 且 $\mathrm{a}^{in}\ \mathrm{q} = \{\mathrm{v}_k\}$，这意味着 $\left|\mathrm{a}^{in}\ \mathrm{q}\right| = \left|\mathrm{a}^{out}\ \mathrm{q}\right| = 1$。此外，还利用了这样一个事实：对所有弧 $\mathrm{a}_q \in \mathscr{A}_G$ 求和且只考虑满足 $\delta_{in}\left(\mathrm{v}_i、\ \mathrm{a}_q\right) = 1$ 或 $\delta_{out}\left(\mathrm{v}_i、\ \mathrm{a}_q\right) = 1$ 的弧，与对所有顶点 $\mathrm{v}_j \in \mathcal{V}$ 求和且只考虑满足 $\delta\left(\mathrm{v}_j、\ \mathrm{v}_i\right) = 1$ 或 $\delta\left(\mathrm{v}_i、\ \mathrm{v}_j\right) = 1$ 的顶点，结果相同。最后一个等式成立，是因为弧权函数 W_I 和 W_G 具有对称性。

因此，超图的顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$ 是普通图情形的有效推广。

□

下面的定理证明，顶点伴随算子是超图上顶点梯度定义的正确对偶对应算子。

定理 9.9 (顶点梯度 ∇_v 与顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$)。

对于具有对称超弧权函数 W_I 和 W_G的加权有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_H, w, W)$，顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$ 满足以下等式

$$
\langle G, \nabla_v f \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)} = \langle f, \nabla_v^* G \rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{V})} \tag{168}
$$

对于所有顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathcal{V})$ 和所有超弧函数 $G \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$。

证明。

给定一个加权有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathscr{A}_H, w、\ W)$及其对称超弧权函数 W_I 和 W_G，以及一个顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathcal{V})$ 和一个超弧函数$G \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$，利用 $\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$的内积和 ∇_v 顶点梯度算子的定义，可得：

$$\langle G, \nabla_v f \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)} = \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} W_I(a_q)^\beta G(a_q) \nabla_v f(a_q)$$
$$= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} W_I(a_q)^\beta G(a_q) W_G(a_q)^\gamma$$
$$\sum_{v_i \in \mathscr{V}} \left(\delta_{in}(v_i, a_q) \frac{w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\epsilon}{\left|a_q^{in}\right|} - \delta_{out}(v_i, a_q) \frac{w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\eta}{\left|a_q^{out}\right|} \right) f(v_i)$$
$$= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \sum_{v_i \in \mathscr{V}} W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\gamma G(a_q)$$
$$\left(\delta_{in}(v_i, a_q) \frac{w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\epsilon}{\left|a_q^{in}\right|} - \delta_{out}(v_i, a_q) \frac{w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\eta}{\left|a_q^{out}\right|} \right) f(v_i)$$

由于超弧集合 $\mathscr{A}_H$ 和顶点集合 $\mathscr{V}$ 均假设为有限集，因此可以交换求和次序：

$$= \sum_{v_i \in \mathscr{V}} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\gamma G(a_q)$$
$$\left(\delta_{in}(v_i, a_q) \frac{w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\epsilon}{\left|a_q^{in}\right|} - \delta_{out}(v_i, a_q) \frac{w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\eta}{\left|a_q^{out}\right|} \right) f(v_i)$$
$$= \sum_{v_i \in \mathscr{V}} f(v_i) \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\delta_{in}(v_i, a_q) \frac{w(v_i)^{\alpha+\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|} - \delta_{out}(v_i, a_q) \frac{w(v_i)^{\alpha+\eta}}{\left|a_q^{out}\right|} \right)$$
$$W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\gamma G(a_q)$$

根据顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$ 的定义以及 $\mathscr{H}(\mathscr{V})$ 的内积定义，可得：

$$= \sum_{v_i \in \mathscr{V}} w_I(v_i)^\alpha f(v_i)$$
$$\sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\delta_{in}(v_i, a_q) \frac{w_G(v_i)^\epsilon}{\left|a_q^{in}\right|} - \delta_{out}(v_i, a_q) \frac{w_G(v_i)^\eta}{\left|a_q^{out}\right|} \right) W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\gamma G(a_q)$$
$$= \sum_{v_i \in \mathscr{V}} w_I(v_i)^\alpha f(v_i) \nabla_v^* G(a_q) = \langle f, \nabla_v^* G \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{V})}$$

因此，根据前面对顶点伴随算子 $\nabla^*{}_v$ 的定义，对于所有顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$ 和所有超弧函数 $G \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$，等式 $\langle G, \nabla_v f \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)} = \langle f, \nabla^*{}_v G \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{V})}$ 均成立。

□

类似于针对超弧函数 v ∇^* 的顶点伴随算子，针对顶点函数 a ∇^* 的超弧伴随算子可以基于超弧梯度算子 ∇_a 来定义。

定义 9.10（超弧伴随算子 $\nabla^*{}_a$）。
对于加权有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, w, W)$，超弧伴随算子$\nabla^*{}_a$ 定义为

$$\nabla_a^*: \mathcal{H}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{A}_H) \qquad f \longmapsto \nabla_a^* f \tag{169}$$

其中，顶点函数 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$ 在超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 处的加权伴随定义为

$$\nabla_a^* f: \mathcal{A}_H \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a_q \longmapsto \nabla_a^* f(a_q) =$$
$$W_G(a_q)^\theta \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} \right) w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\zeta f(v_i). \tag{170}$$

将超图的超弧伴随算子用于普通图时，得到的就是普通图的弧伴随算子定义。

定理 9.11 （超弧伴随算子：弧伴随算子的推广）。

给定加权有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$ 以及顶点函数 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$，则加权有向超图的超弧伴随算子 $\nabla^*{}_a$ 与定义 *(6.10)* 中普通图的弧伴随算子相吻合。

证明。
给定一个加权有向普通图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$ 以及一个顶点函数 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$，将加权有向超图的超弧伴随算子 $\nabla^*{}_a$ 作用于任意弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G$，即可定义弧伴随算子:

$$\begin{aligned}
\nabla_a^* f(a_q) &= \nabla_a^* f(v_i, v_j) \\
&= W_G(v_i, v_j)^\theta \sum_{v_k \in \mathcal{V}} \left(\frac{\delta_{in}(v_k, a_q)}{\deg_{in}(v_k)} - \frac{\delta_{out}(v_k, a_q)}{\deg_{out}(v_k)} \right) w_I(v_k)^\alpha w_G(v_k)^\zeta f(v_k) \\
&= W_G(v_i, v_j)^\theta \sum_{v_k \in \{v_i, v_j\}} \left(\frac{\delta_{in}(v_k, a_q)}{\deg_{in}(v_k)} w_I(v_k)^\alpha w_G(v_k)^\zeta f(v_k) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\delta_{out}(v_k, a_q)}{\deg_{out}(v_k)} w_I(v_k)^\alpha w_G(v_k)^\zeta f(v_k) \right) \\
&= W_G(v_i, v_j)^\theta \left(\frac{w_I(v_j)^\alpha w_G(v_j)^\zeta}{\deg_{in}(v_j)} f(v_j) - \frac{w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\zeta}{\deg_{out}(v_i)} f(v_i) \right)
\end{aligned}$$

此重新表述基于以下性质：对于任意弧$a^{out}{}_q=\{v_i\}$ 和$a^{in}{}_q=\{v_j\}$，其中$a_q=(v_i、v_j)\in\mathscr{A}_G$，这意味着 $\delta_{in}(v_j,\ a_q)=\delta_{out}(v_i,a_q)=1$。

因此，超图的超弧伴随算子 $\nabla^*{}_a$ 是普通图弧伴随算子的一种有效推广。

□

下面的定理证明了相对于超弧梯度而言，超弧伴随算子是良定义的。

定理 9.12 （超弧梯度 ∇_a 与超弧伴随算子 $\nabla^*{}_a$的联系 ）.
对于加权有向超图 $OH=(\mathscr{V},\mathscr{A}_H,w,\ W)$，超弧伴随算子$\nabla^*{}_a$ 满足等式

$$\langle f,\nabla_a G\rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{V})}=\langle G,\nabla_a^* f\rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)} \tag{171}$$

对于所有顶点函数$f\in\mathscr{H}(\mathscr{V})$ 以及所有超弧函数 $G\in\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$均成立。

证明。
给定加权有向超图 $OH=(\mathscr{V},\mathscr{A}_H,w、W)$，顶点函数$f\in\mathscr{H}(\mathscr{V})$ 和超弧函数 $G\in\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$，根据 $\mathscr{H}(\mathscr{V})$ 中的内积和 ∇_a 中的超弧梯度算子的定义，可得：

$$\begin{aligned}\langle f,\nabla_a G\rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{V})}&=\sum_{v_i\in\mathscr{V}} w_I(v_i)^\alpha f(v_i)\nabla_a G(v_i)\\&=\sum_{v_i\in\mathscr{V}} w_I(v_i)^\alpha f(v_i)\\&\quad w_G(v_i)^\zeta\sum_{a_q\in\mathscr{A}_H}\left(\frac{\delta_{in}(v_i,a_q)}{\deg_{in}(v_i)}-\frac{\delta_{out}(v_i,a_q)}{\deg_{out}(v_i)}\right)W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\theta G(a_q)\\&=\sum_{v_i\in\mathscr{V}}\sum_{a_q\in\mathscr{A}_H}\left(\frac{\delta_{in}(v_i,a_q)}{\deg_{in}(v_i)}-\frac{\delta_{out}(v_i,a_q)}{\deg_{out}(v_i)}\right)w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\zeta\\&\quad W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\theta f(v_i)G(a_q)\end{aligned}$$

交换这两个求和是可行的，因为假设所有顶点 $\mathscr{V}$ 构成的集合和所有超弧 $\mathscr{A}_H$ 构成的集合都是有限的，由此得到：

$$=\sum_{a_q\in\mathscr{A}_H}\sum_{v_i\in\mathscr{V}}\left(\frac{\delta_{in}(v_i,a_q)}{\deg_{in}(v_i)}-\frac{\delta_{out}(v_i,a_q)}{\deg_{out}(v_i)}\right)w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\zeta W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\theta f(v_i)G(a_q)$$

$$=\sum_{a_q\in\mathscr{A}_H} W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\theta G(a_q)\sum_{v_i\in\mathscr{V}}\left(\frac{\delta_{in}(v_i,a_q)}{\deg_{in}(v_i)}-\frac{\delta_{out}(v_i,a_q)}{\deg_{out}(v_i)}\right)w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\zeta f(v_i)$$

使用全体实值超弧函数$\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$空间上的内积定义以及超弧伴随算子 $\nabla^*{}_a$，可得如下结果：

$$= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} W_I\left(a_q\right)^\beta G\left(a_q\right) W_G\left(a_q\right)^\theta \sum_{v_i \in \mathscr{V}} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_i, a_q\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_i, a_q\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)} \right) w_I\left(v_i\right)^\alpha w_G\left(v_i\right)^\zeta f\left(v_i\right)$$

$$= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} W_I\left(a_q\right)^\beta G\left(a_q\right) \nabla_a^* f\left(a_q\right) = \langle G, \nabla_a^* f \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)}$$

因此，根据所提出的超弧伴随算子$\nabla^*{}_a$的定义，对于所有顶点函数$f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$和所有超弧函数$G \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$，等式 $\langle f, \nabla_a G \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{V})} = \langle G, \nabla^*{}_a f \rangle_{\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)}$ 均成立。

□

10 有向超图上的散度与拉普拉斯算子

以下一节首先使用顶点梯度、顶点伴随算子、超弧梯度和超弧伴随算子，计算有向超图的顶点散度和超弧散度，参见第 10.1 小节。这些概念是后续定义所必需的。

在小节（10.2）中，利用顶点散度和超弧散度，引入了作用于顶点的拉普拉斯算子和作用于超弧的拉普拉斯算子。此外，本小节还证明了由此得到的超图上的拉普拉斯算子是普通图情形的有效推广。

小节（10.3）利用前文给出的定义，推导出顶点p-拉普拉斯算子和超弧p-拉普拉斯算子。此外，本小节还证明，所给出的p-拉普拉斯算子在选取特定参数时与 [7], 中引入的定义一致。

10.1 有向超图上的散度算子

与有向正规图的情形一样，基于连续情形中的等价关系，可以定义作用于超弧函数$F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$ 的顶点散度算子 div_v，以及作用于顶点函数$f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$ 的超弧散度算子 div_a：

$$\mathrm{div}_v = -\nabla_v^* \tag{172}$$

$$\mathrm{div}_a = -\nabla_a^* \tag{173}$$

定义 10.1(顶点散度算子 $\mathbf{div}_v$).
对于具有对称超弧权函数 W_I 和 W_G的加权有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H, w, W)$，顶点散度算子 div_v 定义为

$$div_v : \mathscr{H}(\mathscr{A}_H) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{V}) \qquad F \longmapsto div_v F \tag{174}$$

其中，超弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$ 在顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 处的加权散度定义为

$$div_v : \mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v_i \longmapsto div_v(F)(v_i) = -\nabla_v^* F(v_i) =$$

$$\sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \frac{w_G(v_i)^\eta}{\left|a_q^{out}\right|} - \delta_{in}(v_i, a_q) \frac{w_G(v_i)^\epsilon}{\left|a_q^{in}\right|} \right) W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\gamma F(a_q). \tag{175}$$

正如定理 (9.8) 所证明的，超图的顶点伴随算子是普通图顶点伴随算子的有效推广，因此超图的顶点散度也是普通图情形的有效推广。

注记10.2 （顶点散度算子作为超图对普通图情形的推广）。

给定一个加权有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$，其对称弧权函数为 W_I 和 W_G，以及一个弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$，则加权有向超图的顶点散度算子 div_v 与定义 *(7.1)* 中普通图的顶点散度算子一致。

超弧散度的定义方式与顶点散度相同，但依据的是超弧伴随算子，而非顶点伴随算子。

定义 10.3（超弧散度算子 $\mathbf{div}_a$）。
对于加权有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, w, W)$，顶点散度算子 div_v 定义如下：

$$div_a : \mathcal{H}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{A}_H) \qquad f \longmapsto div_a f \tag{176}$$

顶点函数 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$ 在超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 处的加权散度由 b 给出

$$y$$

$$div_a : \mathcal{A}_H \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a_q \longmapsto div_a(f)\left(a_q\right) = -\nabla_a^* f\left(a_q\right) =$$

$$W_G\left(a_q\right)^\theta \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \left(\frac{\delta_{out}\left(v_i, a_q\right)}{\deg_{out}(v_i)} - \frac{\delta_{in}\left(v_i, a_q\right)}{\deg_{in}(v_i)} \right) w_I(v_i)^\alpha \, w_G(v_i)^\zeta \, f(v_i). \tag{177}$$

定理 (9.11) 证明了，超图的超弧伴随算子是普通图的弧伴随算子的有效推广，因此超图的超弧散度也是普通图情形的有效推广。

注记 10.4 （超图的超弧散度算子是普通图情形的推广）。

给定一个加权有向普通图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$ 以及一个顶点函数 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$，则加权有向超图的超弧散度算子 div_a 与定义（*7.3*）中普通图的弧散度算子一致。

10.2 有向超图上的拉普拉斯算子

有向超图的顶点拉普拉斯算子和超弧拉普拉斯算子都基于连续情形中的关系

$$\Delta_v f = \mathrm{div}_v(\nabla_v f) \tag{178}$$

$$\Delta_a F = \mathrm{div}_a(\nabla_a F) \tag{179}$$

对于任意顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$ 和任意超弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$。

定义 10.5（**顶点拉普拉斯算子** Δ_v）。

对于加权有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H, w, W)$，其对称超弧权函数为 W_I 和 W_G，顶点拉普拉斯算子 Δ_v 定义为

$$\Delta_v : \mathscr{H}(\mathscr{V}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{V}) \qquad f \longmapsto \Delta_v f \tag{180}$$

其中，顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$ 在顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 处的加权拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_v : \mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v_i \longmapsto \Delta_v f(v_i) =$$

$$\sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \frac{w_G(v_i)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|} - \delta_{in}(v_i, a_q) \frac{w_G(v_i)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{2\gamma}$$

$$\sum_{v_j \in \mathscr{V}} \left(\delta_{in}(v_j, a_q) \frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|} - \delta_{out}(v_j, a_q) \frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|} \right) f(v_j) \tag{181}$$

下面的定理证明，将超图的顶点拉普拉斯算子应用于普通图上的顶点函数，得到的结果就是普通图的顶点拉普拉斯算子。

定理 10.6 (**超图的顶点拉普拉斯算子是普通图情形的推广**).

给定一个加权有向普通图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, w, W)$，其具有对称弧权函数 W_I 和 W_G 以及一个顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$，那么加权有向超图的顶点拉普拉斯算子 Δ_v 与定义 *(7.5)* 中普通图的顶点拉普拉斯算子相一致。

证明。

给定一个有向正规图 $OG = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_G, w, W)$ 具有对称弧权函数 W_I 和 W_G，以及顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$，则将用于加权有向超图的拉普拉斯梯度算子 Δ_v 应用于任意顶点 $v_i \in \mathscr{V}$，结果为:

$$\Delta_v f(v_i) = \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \frac{w_G(v_i)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|} - \delta_{in}(v_i, a_q) \frac{w_G(v_i)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{2\gamma}$$

$$\sum_{v_j \in \mathscr{V}} \left(\delta_{in}(v_j, a_q) \frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|} - \delta_{out}(v_j, a_q) \frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|} \right) f(v_j)$$

$$= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) w_G(v_i)^{\eta} - \delta_{in}(v_i, a_q) w_G(v_i)^{\epsilon} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{2\gamma}$$

$$\sum_{v_j \in \mathscr{V}} \left(\delta_{in}(v_j, a_q) w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon} - \delta_{out}(v_j, a_q) w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\eta} \right) f(v_j)$$

$$= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} \sum_{v_j \in \mathscr{V}} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) w_G(v_i)^{\eta} - \delta_{in}(v_i, a_q) w_G(v_i)^{\epsilon} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{2\gamma}$$

$$\left(\delta_{in}(v_j, a_q) w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon} - \delta_{out}(v_j, a_q) w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\eta} \right) f(v_j)$$

$$= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} \sum_{v_j \in \mathscr{V}} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_j, a_q) w_G(v_i)^{\eta} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon} - \right.$$

$$\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_j, a_q) w_G(v_i)^{\eta} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\eta} -$$

$$\delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_j, a_q) w_G(v_i)^{\epsilon} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon} +$$

$$\left. \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_j, a_q) w_G(v_i)^{\epsilon} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\eta} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{2\gamma} f(v_j)$$

此重述基于性质 $\mathrm{a}^{out}\,\mathrm{q} = \{\mathrm{v}_k\}$ 和 $\mathrm{a}^{in}\,\mathrm{q} = \{\mathrm{v}_l\}$，对任意弧 $\mathrm{a}_q = (\mathrm{v}_k, \mathrm{v}_l) \in \mathscr{A}_G$ 均成立，这意味着 $\left|\mathrm{a}^{in}\,\mathrm{q}\right| = \left|\mathrm{a}^{out}\,\mathrm{q}\right| = 1$。因此，不可能有 $\mathrm{v}_i \in \mathscr{V}$ 和 $\mathrm{v}_j \in \mathscr{V} \setminus \{\mathrm{v}_i\}$ 同时是任意弧 $\mathrm{a}_q \in \mathscr{A}_G$ 的输出顶点或输入顶点，由此得到如下结论：

$$= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} \left(-\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_q) w_G(v_i)^{\eta} w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{\eta} - \right.$$

$$\delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_q) w_G(v_i)^{\epsilon} w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{\epsilon} \Big) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{2\gamma} f(v_i) +$$

$$\sum_{v_j \in \mathscr{V} \setminus \{v_i\}} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_j, a_q) w_G(v_i)^{\eta} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon} + \right.$$

$$\left. \delta_{out}(v_j, a_q) \delta_{in}(v_i, a_q) w_G(v_i)^{\epsilon} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\eta} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{2\gamma} f(v_j)$$

$$= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_G} \left(-\delta_{out}(v_i, a_q) w_i(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{2\eta} - \delta_{in}(v_i, a_q) w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{2\epsilon} \right)$$

$$W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{2\gamma} f(v_i) +$$

$$\sum_{v_j \in \mathscr{V} \setminus \{v_i\}} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_j, a_q) w_G(v_i)^{\eta} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon} + \right.$$

$$\left. \delta_{out}(v_j, a_q) \delta_{in}(v_i, a_q) w_G(v_i)^{\epsilon} w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\eta} \right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{2\gamma} f(v_j)$$

此外，对所有包含顶点 v_i 的弧 $\mathrm{a}_q \in \mathscr{A}_G$ 求和，其中 v_i 可以是输出顶点，也可以是输入顶点（，无论是 $\delta_{out}(\mathrm{v}_i,\mathrm{a}_q)=1$ 还是 $\delta_{in}(\mathrm{v}_i,\mathrm{a}_q)=1$）；再对所有属于这类弧 a_q（的顶点 $\mathrm{v}_j \in \mathscr{V}$ 求和，无论是 $\delta_{in}(\mathrm{v}_j,\mathrm{a}_q)=1$ 还是 $\delta_{out}(\mathrm{v}_j,\mathrm{a}_q)=1$），这等同于对所有顶点 $\mathrm{v}_j \in \mathscr{V}$ 求和，并检查弧 $(\mathrm{v}_i,\mathrm{v}_j) \in \mathscr{A}_G$ 或弧 $(\mathrm{v}_j,\mathrm{v}_i) \in \mathscr{A}_G$：

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{v_j \in \mathscr{V}} \Big(-\delta(v_i,v_j)\, w_I(v_i)^{\alpha}\, w_G(v_i)^{2\eta}\, W_I(v_i,v_j)^{\beta}\, W_G(v_i,v_j)^{2\gamma} - \\
&\quad \delta(v_j,v_i)\, w_I(v_i)^{\alpha}\, w_G(v_i)^{2\epsilon}\, W_I(v_j,v_i)^{\beta}\, W_G(v_j,v_i)^{2\gamma} \Big) f(v_i) + \\
&\quad \sum_{v_j \in \mathscr{V} \setminus \{v_i\}} \Big(\delta(v_i,v_j)\, w_G(v_i)^{\eta}\, w_I(v_j)^{\alpha}\, w_G(v_j)^{\epsilon}\, W_I(v_i,v_j)^{\beta}\, W_G(v_i,v_j)^{2\gamma} + \\
&\quad \delta(v_j,v_i)\, w_I(v_j)^{\alpha}\, w_G(v_j)^{\eta}\, w_G(v_i)^{\epsilon}\, W_I(v_j,v_i)^{\beta}\, W_G(v_j,v_i)^{2\gamma} \Big) f(v_j) \\
&= \sum_{v_j \in \mathscr{V}} \big(-\delta(v_i,v_j)\, w_I(v_i)^{\alpha}\, w_G(v_i)^{2\eta} - \delta(v_j,v_i)\, w_I(v_i)^{\alpha}\, w_G(v_i)^{2\epsilon} \big) \\
&\quad W_I(v_i,v_j)^{\beta}\, W_G(v_i,v_j)^{2\gamma} f(v_i) + \\
&\quad \big(\delta(v_i,v_j)\, w_G(v_i)^{\eta}\, w_I(v_j)^{\alpha}\, w_G(v_j)^{\epsilon} + \delta(v_j,v_i)\, w_I(v_j)^{\alpha}\, w_G(v_j)^{\eta}\, w_G(v_i)^{\epsilon} \big) \\
&\quad W_I(v_i,v_j)^{\beta}\, W_G(v_i,v_j)^{2\gamma} f(v_j) \\
&= \sum_{v_j \in \mathscr{V}} \Big(\big(\delta(v_i,v_j)\, w_G(v_i)^{\eta}\, w_I(v_j)^{\alpha}\, w_G(v_j)^{\epsilon} + \delta(v_j,v_i)\, w_I(v_j)^{\alpha}\, w_G(v_j)^{\eta}\, w_G(v_i)^{\epsilon} \big) f(v_j) - \\
&\quad \big(\delta(v_i,v_j)\, w_I(v_i)^{\alpha}\, w_G(v_i)^{2\eta} + \delta(v_j,v_i)\, w_I(v_i)^{\alpha}\, w_G(v_i)^{2\epsilon} \big) f(v_i) \Big) \\
&\quad W_I(v_i,v_j)^{\beta}\, W_G(v_i,v_j)^{2\gamma}
\end{aligned}
$$

因此，超图的顶点拉普拉斯算子 Δ_v 是普通图情形的一种有效推广。

□

下面的定理证明了，通过使用前面在超图上引入的顶点梯度和顶点散度，我们定义的顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 拉普拉斯算子是良定义的。

定理 10.7 (连接顶点散度 $\mathbf{div}_v$、顶点梯度 ∇_v 和顶点拉普拉斯算子 Δ_v)。

在加权有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H, w, W)$ 中，具有对称超弧权函数 W_I 和 W_G，顶点拉普拉斯算子 Δ_v 满足等式

$$\Delta_v f = div_v(\nabla_v f) \tag{182}$$

对于所有顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$。

证明。
给定一个加权有向超图 $OH=(\mathcal{V},\mathscr{A}_H,w、W)$，其具有对称超弧权函数 W_I 和 W_G，以及一个顶点函数 $f\in\mathscr{H}(\mathcal{V})$，根据顶点散度算子 div_v 和顶点梯度算子 ∇_v的定义，可得对所有顶点 $v_i\in\mathcal{V}$均有：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}_v(\nabla_v f)(v_i)=\sum_{a_q\in\mathscr{A}_H}\left(\delta_{out}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^\eta}{\left|a_q^{out}\right|}-\delta_{in}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^\epsilon}{\left|a_q^{in}\right|}\right)\\
&\qquad W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\gamma\nabla_v f(a_q)\\
&=\sum_{a_q\in\mathscr{A}_H}\left(\delta_{out}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^\eta}{\left|a_q^{out}\right|}-\delta_{in}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^\epsilon}{\left|a_q^{in}\right|}\right)W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^\gamma\\
&\quad W_G(a_q)^\gamma\sum_{v_j\in\mathcal{V}}\left(\delta_{in}(v_j,a_q)\frac{w_I(v_j)^\alpha w_G(v_j)^\epsilon}{\left|a_q^{in}\right|}-\delta_{out}(v_j,a_q)\frac{w_I(v_j)^\alpha w_G(v_j)^\eta}{\left|a_q^{out}\right|}\right)f(v_j)\\
&=\sum_{a_q\in\mathscr{A}_H}\left(\delta_{out}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^\eta}{\left|a_q^{out}\right|}-\delta_{in}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^\epsilon}{\left|a_q^{in}\right|}\right)W_I(a_q)^\beta W_G(a_q)^{2\gamma}\\
&\quad\sum_{v_j\in\mathcal{V}}\left(\delta_{in}(v_j,a_q)\frac{w_I(v_j)^\alpha w_G(v_j)^\epsilon}{\left|a_q^{in}\right|}-\delta_{out}(v_j,a_q)\frac{w_I(v_j)^\alpha w_G(v_j)^\eta}{\left|a_q^{out}\right|}\right)f(v_j)\\
&=\Delta_v f(v_i)
\end{aligned}$$

因此，根据前面引入的顶点梯度 ∇_v、顶点散度 div_v和顶点拉普拉斯算子 Δ_v的定义，等式 $\Delta_v f(v_i)=\mathrm{div}_v(\nabla_v f)(v_i)$对所有顶点 $v_i\in\mathcal{V}$以及所有顶点函数 $f\in\mathscr{H}(\mathcal{V})$均成立。

□

定义 10.8 (超弧拉普拉斯算子 Δ_a)。
对于加权有向超图 $OH=(\mathcal{V},\mathscr{A}_H,w,W)$，超弧拉普拉斯算子 Δ_a 定义为

$$\Delta_a:\ \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)\longrightarrow\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)\qquad F\longmapsto\Delta_a F \tag{183}$$

其中，超弧函数 $F\in\mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$ 在超弧 $a_q\in\mathscr{A}_H$处的加权拉普拉斯算子由 b 给出

$$\begin{aligned}
&y\\
&\Delta_a:\ \mathscr{A}_H\longrightarrow\mathbb{R}\qquad a_q\longmapsto\Delta_a F(a_q)=\\
&W_G(a_q)^\theta\sum_{v_i\in\mathcal{V}}\left(\frac{\delta_{out}(v_i,a_q)}{\deg_{out}(v_i)}-\frac{\delta_{in}(v_i,a_q)}{\deg_{in}(v_i)}\right)w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^{2\zeta}\\
&\sum_{a_r\in\mathscr{A}_H}\left(\frac{\delta_{in}(v_i,a_r)}{\deg_{in}(v_i)}-\frac{\delta_{out}(v_i,a_r)}{\deg_{out}(v_i)}\right)W_I(a_r)^\beta W_G(a_r)^\theta F(a_r).
\end{aligned}\tag{184}$$

由于有向超图的超弧拉普拉斯算子可应用于有向正规图的弧，下面的定理表明，超弧拉普拉斯算子与有向正规图的弧拉普拉斯算子的定义相符。

定理 10.9（**超弧拉普拉斯算子是弧拉普拉斯算子的推广**）。

给定一个加权有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w, W)$ 和一个弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$，则加权有向超图的超弧拉普拉斯算子 Δ_a 与定义（7.8）中普通图的弧拉普拉斯算子相同。

证明。
给定一个有向正规图 $OG = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_G, w、W)$ 以及一个弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_G)$，将加权有向超图的超弧拉普拉斯算子 ∇_a 作用于弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G$，即可得到弧拉普拉斯算子的定义：

$$
\begin{aligned}
\Delta_a F(a_q) &= \Delta_a F(v_i, v_j) \\
&= W_G(v_i, v_j)^{\theta} \sum_{v_k \in \mathcal{V}} \left(\frac{\delta_{out}(v_k, a_q)}{\deg_{out}(v_k)} - \frac{\delta_{in}(v_k, a_q)}{\deg_{in}(v_k)} \right) w_I(v_k)^{\alpha} w_G(v_k)^{2\zeta} \\
&\quad \sum_{a_r \in \mathcal{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_k, a_r)}{\deg_{in}(v_k)} - \frac{\delta_{out}(v_k, a_r)}{\deg_{out}(v_k)} \right) W_I(a_r)^{\beta} W_G(a_r)^{\theta} F(a_r) \\
&= W_G(v_i, v_j)^{\theta} \sum_{v_k \in \{v_i, v_j\}} \left(\frac{\delta_{out}(v_k, a_q)}{\deg_{out}(v_k)} - \frac{\delta_{in}(v_k, a_q)}{\deg_{in}(v_k)} \right) w_I(v_k)^{\alpha} w_G(v_k)^{2\zeta} \\
&\quad \sum_{a_r \in \mathcal{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_k, a_r)}{\deg_{in}(v_k)} - \frac{\delta_{out}(v_k, a_r)}{\deg_{out}(v_k)} \right) W_I(a_r)^{\beta} W_G(a_r)^{\theta} F(a_r) \\
&= W_G(v_i, v_j)^{\theta} \left(\frac{w_I(v_i)^{\alpha} w_G(v_i)^{2\zeta}}{\deg_{out}(v_i)} \right. \\
&\quad \sum_{a_r \in \mathcal{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_r)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_r)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_s)^{\beta} W_G(a_s)^{\theta} F(a_r) - \\
&\quad \frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{2\zeta}}{\deg_{in}(v_j)} \\
&\quad \left. \sum_{a_s \in \mathcal{A}_G} \left(\frac{\delta_{in}(v_j, a_s)}{\deg_{in}(v_j)} - \frac{\delta_{out}(v_j, a_s)}{\deg_{out}(v_j)} \right) W_I(a_s)^{\beta} W_G(a_s)^{\theta} F(a_s) \right)
\end{aligned}
$$

这种重新表述基于以下性质：对于每条弧 $a_q = (v_i, v_j) \in \mathcal{A}_G$，都有 $a^{out}{}_q = \{v_i\}$ 和 $a^{in}{}_q = \{v_j\}$，这直接意味着 $\delta_{out}(v_i, a_q) = 1$ 以及 $\delta_{in}(v_j, a_q) = 1$。

因此，超图的超弧拉普拉斯算子 Δ_a 是正规图弧拉普拉斯算子的有效推广。

□

以下定理基于已给出的超弧梯度和超弧散度定义，证明超弧拉普拉斯算子是良定义的。

定理 10.10 (连接超弧散度 $\mathbf{div}_a$、超弧梯度 ∇_a 和超弧拉普拉斯算子 Δ_a)。

在加权有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, w, W)$ 上，超弧拉普拉斯算子 Δ_a 满足以下等式

$$\Delta_a F = div_a(\nabla_a F) \tag{185}$$

对于所有超弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_H)$。

证明。
给定一个加权有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, w、W)$ 以及一个超弧函数$F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_H)$，根据超弧散度算子 div_a 和超弧梯度算子 ∇_a 的定义，对于所有超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$，可得:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}_a(\nabla_a F)(a_q) = W_G(a_q)^\theta \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \left(\frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} - \frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} \right) w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\zeta \nabla_a F(v_i) \\
&= W_G(a_q)^\theta \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \left(\frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} - \frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} \right) w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\zeta w_G(v_i)^\zeta \\
&\quad \sum_{a_r \in \mathcal{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_r)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_r)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_r)^\beta W_G(a_r)^\theta F(a_r) \\
&= W_G(a_q)^\theta \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \left(\frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} - \frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} \right) w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^{2\zeta} \\
&\quad \sum_{a_r \in \mathcal{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_r)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_r)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_r)^\beta W_G(a_r)^\theta F(a_r) \\
&= \Delta_a F(a_q)
\end{aligned}$$

因此，根据所提出的超弧梯度 ∇_a、超弧散度 div_a 和超弧拉普拉斯算子 Δ_a 的定义，等式 $\Delta_a F(a_q) = \mathrm{div}_a(\nabla_a F)(a_q)$ 对所有超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 以及所有超弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_H)$ 均成立。

□

10.3 有向超图上的p-拉普拉斯算子

加权p-拉普拉斯算子的定义扩展了连续情形下的算子，这意味着对于所有$p \in (1,\infty)$，以下条件都必须成立：

$$\Delta_v^p f = \mathrm{div}_v\left(|\nabla_v f|^{p-2}\nabla_v f\right) \tag{186}$$

$$\Delta_a^p F = \mathrm{div}_a\left(|\nabla_a F|^{p-2}\nabla_a F\right) \tag{187}$$

对于任意顶点函数$f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$和任意超弧函数$F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$。

定义 10.11(顶点p-拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_v$)。

对于加权有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H, w, W)$，其具有对称超弧权函数 W_I 和 W_G，顶点 p- 拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_v$ 定义为

$$\Delta_v^p : \mathscr{H}(\mathscr{V}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{V}) \qquad f \longmapsto \Delta_v^p f \tag{188}$$

顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$ 在顶点 $v_i \in \mathscr{V}$ 处的加权 p-拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_v^p : \mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v_i \longmapsto \Delta_v^p f(v_i) =$$

$$\sum_{a_q \in \mathscr{A}_H}\left(\delta_{out}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|} - \delta_{in}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}\right) W_I(a_q)^{\beta} W_G(a_q)^{p\gamma}$$

$$\left|\sum_{v_j \in \mathscr{V}}\left(\delta_{in}(v_j,a_q)\frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|} - \delta_{out}(v_j,a_q)\frac{w_I(v_j)^{\alpha} w_G(v_j)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}\right) f(v_j)\right|^{p-2}$$

$$\sum_{v_k \in \mathscr{V}}\left(\delta_{in}(v_k,a_q)\frac{w_I(v_k)^{\alpha} w_G(v_k)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|} - \delta_{out}(v_k,a_q)\frac{w_I(v_k)^{\alpha} w_G(v_k)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}\right) f(v_k). \tag{189}$$

定理 10.12 (顶点 p-拉普拉斯算子的参数选择)。
文献 *[7]* 中引入了顶点 p-拉普拉斯算子的简化定义，采用本学位论文的记号，可将其写为：

$$\Delta_p f(v_i) = \frac{1}{\deg(v_i)} \sum_{\substack{a_q \in \mathscr{A}_H:\ \delta_{out}(v_i,a_q)=1 \\ or\ \delta_{in}(v_i,a_q)=1}} \left| \sum_{v_j \in a_q^{in}} f(v_j) - \sum_{v_j \in a_q^{out}} f(v_j) \right|^{p-2}$$

$$\left(\sum_{v_k \in \mathscr{V}} \left(\delta_{out}(v_i,a_q)\delta_{out}(v_k,a_q) + \delta_{in}(v_i,a_q)\delta_{in}(v_k,a_q) \right) f(v_k) - \right.$$

$$\left. \sum_{v_k \in \mathscr{V}} \left(\delta_{out}(v_i,a_q)\delta_{in}(v_k,a_q) + \delta_{in}(v_i,a_q)\delta_{out}(v_k,a_q) \right) f(v_k) \right) \tag{190}$$

对于任意顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$ 以及所有顶点 $v_i \in \mathscr{V}$。

除非 v_i、$v_k \in a^{out} q$ 或 v_i、$v_k \in a^{in} q$，否则因子 $\left(\delta_{out}(v_i、a_q)\delta_{out}(v_k、a_q) + \delta_{in}(v_i、a_q)\delta_{in}(v_k、a_q)\right)$ 始终等于零，这意味着顶点 v_i 和 v_k 是同向有向的。类似地，因子 $\left(\delta_{out}(v_i、a_q)\delta_{in}(v_k、a_q) + \delta_{in}(v_i、a_q)\delta_{out}(v_k、a_q)\right)$ 确保仅考虑相对于顶点 v_i 反向的顶点 $v_k \in \mathscr{V}$，因此 $v_i \in a^{out} q$、$v_k \in a^{in} q$ 或 $v_i \in a^{in} q$、$v_k \in a^{out} q$。

因此，将顶点 p-拉普拉斯算子的参数 $\Delta^{p}{}_{v}$ 选择为 $\alpha = 0$、$\beta = 0$、$\gamma = 0$、$\epsilon = 0$ 和 $\eta = 0$，同时排除 $\left| a_q^{out} \right|$ 和 $\left| a_q^{in} \right|$ 乘法因子，并在顶点伴随算子和顶点散度中加入新的 $-\frac{1}{\deg(v_i)}$ 因子，就得到了 *[7]* 中介绍的简化顶点 p-拉普拉斯算子。

此外，将这些参数选择应用于顶点梯度、顶点伴随算子和顶点散度，可得：

- $\nabla_v f(a_q) = \sum_{v_i \in \mathscr{V}} \left(\delta_{in}(v_i,a_q) - \delta_{out}(v_i,a_q) \right) f(v_i)$
- $\nabla_v^* F(v_i) = -\frac{1}{\deg(v_i)} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\delta_{in}(v_i,a_q) - \delta_{out}(v_i,a_q) \right) F(a_q)$
- $div_v(F)(v_i) = -\frac{1}{\deg(v_i)} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i,a_q) - \delta_{in}(v_i,a_q) \right) F(a_q)$

对于任意顶点函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$、任意超弧函数 $f \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$，以及所有超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$ 和所有顶点 $v_i \in \mathscr{V}$。

证明。
给定一个有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, w、W)$，其超弧权函数 W_I 和 W_G 为对称函数，且有一个顶点函数 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$，应用所述参数选择，去除 $\left|a_q^{out}\right|$ 和 $\left|a_q^{in}\right|$ 乘法因子，并在顶点散度中加入新的 $-\frac{1}{\deg(v_i)}$ 因子，可得如下结果：

$$\begin{aligned}
\Delta_p f(v_i) = & -\frac{1}{\deg(v_i)} \sum_{a_q \in \mathcal{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) - \delta_{in}(v_i, a_q)\right) \\
& \left| \sum_{v_j \in \mathcal{V}} \left(\delta_{in}(v_j, a_q) - \delta_{out}(v_j, a_q)\right) f(v_j) \right|^{p-2} \\
& \sum_{v_k \in \mathcal{V}} \left(\delta_{in}(v_k, a_q) - \delta_{out}(v_k, a_q)\right) f(v_k) \\
= & -\frac{1}{\deg(v_i)} \sum_{a_q \in \mathcal{A}_H} \left| \sum_{v_j \in a_q^{in}} f(v_j) - \sum_{v_j \in a_q^{out}} f(v_j) \right|^{p-2} \\
& \sum_{v_k \in \mathcal{V}} \left(\delta_{out}(v_i, a_q)\delta_{in}(v_k, a_q) - \delta_{out}(v_i, a_q)\delta_{out}(v_k, a_q) - \right. \\
& \left. \delta_{in}(v_i, a_q)\delta_{in}(v_k, a_q) + \delta_{in}(v_i, a_q)\delta_{out}(v_k, a_q)\right) f(v_k) \\
= & -\frac{1}{\deg(v_i)} \sum_{a_q \in \mathcal{A}_H} \left| \sum_{v_j \in a_q^{in}} f(v_j) - \sum_{v_j \in a_q^{out}} f(v_j) \right|^{p-2} \\
& \sum_{v_k \in \mathcal{V}} \left(-\delta_{out}(v_i, a_q)\delta_{out}(v_k, a_q) - \delta_{in}(v_i, a_q)\delta_{in}(v_k, a_q) + \right. \\
& \left. \delta_{out}(v_i, a_q)\delta_{in}(v_k, a_q) + \delta_{in}(v_i, a_q)\delta_{out}(v_k, a_q)\right) f(v_k)
\end{aligned}$$

将负号从开头移到最后一个括号前，并根据顶点v_i和v_k在超弧a^q中是同向还是反向，对最后一个括号中的项进行排序，即可得到简化后的顶点p-拉普拉斯算子定义：

$$\begin{aligned}
= & \frac{1}{\deg(v_i)} \sum_{a_q \in \mathcal{A}_H} \left| \sum_{v_j \in a_q^{in}} f(v_j) - \sum_{v_j \in a_q^{out}} f(v_j) \right|^{p-2} \\
& \sum_{v_k \in \mathcal{V}} \left(\delta_{out}(v_i, a_q)\delta_{out}(v_k, a_q) + \delta_{in}(v_i, a_q)\delta_{in}(v_k, a_q) - \right. \\
& \left. \delta_{out}(v_i, a_q)\delta_{in}(v_k, a_q) - \delta_{in}(v_i, a_q)\delta_{out}(v_k, a_q)\right) f(v_k)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\deg(v_i)} \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left| \sum_{v_j \in a_q^{in}} f(v_j) - \sum_{v_j \in a_q^{out}} f(v_j) \right|^{p-2}$$
$$\left(\sum_{v_k \in \mathscr{V}} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_k, a_q) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_k, a_q) \right) f(v_k) - \right.$$
$$\left. \sum_{v_k \in \mathscr{V}} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_k, a_q) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_k, a_q) \right) f(v_k) \right)$$
$$= \frac{1}{\deg(v_i)} \sum_{\substack{a_q \in \mathscr{A}_H: \ \delta_{out}(v_i, a_q)=1 \\ \text{or } \delta_{in}(v_i, a_q)=1}} \left| \sum_{v_j \in a_q^{in}} f(v_j) - \sum_{v_j \in a_q^{out}} f(v_j) \right|^{p-2}$$
$$\left(\sum_{v_k \in \mathscr{V}} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_k, a_q) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_k, a_q) \right) f(v_k) - \right.$$
$$\left. \sum_{v_k \in \mathscr{V}} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_k, a_q) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_k, a_q) \right) f(v_k) \right)$$

第一项求和的变化（——不再对所有超弧$a_q \in \mathscr{A}_H$求和，而是改为对所有满足 $\delta_{out}(v_i、a_q) = 1$ 或 $\delta_{in}(v_i、a_q) = 1$）的超弧$a_q \in \mathscr{A}_H$求和——并没有实质性改变，因为最后一个大括号已经确保只考虑满足$v_i \in a^{out}{}_q$或$v_i \in a^{in}{}_q$的超弧a_q；否则，大括号中的值就等于零。

总之，这个证明表明，所提出的顶点 p-拉普拉斯算子定义 $\Delta^p{}_v$ 与 [7] 中的顶点 p-拉普拉斯定义相容。

□

以下定理证明，基于顶点梯度和顶点散度的定义，超图上的顶点 p-拉普拉斯算子是良定义的。

定理 10.13 (连接顶点散度 $\mathbf{div}_v$、顶点梯度 ∇_v 和顶点p-拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_v$)。

对于一个加权有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H, w, W)$，其具有对称超弧权函数 W_I 和 W_G，顶点 p-拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_v$ 满足等式

$$\Delta_v^p f = div_v \left(|\nabla_v f|^{p-2} \nabla_v f \right) \tag{191}$$

对于所有顶点函数$f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$。

证明。
给定一个加权有向超图 $OH=(\mathcal{V},\mathcal{A}_H,w、W)$，其对称超弧权函数为 W_I 和 W_G，且顶点函数为 $f\in\mathcal{H}(\mathcal{V})$，则顶点散度算子 div_v 和顶点梯度算子 ∇_v 的定义可得，对所有顶点 $v_i\in\mathcal{V}$：

$$\mathrm{div}_v\left(|\nabla_v f|^{p-2}\nabla_v f\right)(v_i)=\sum_{a_q\in\mathcal{A}_H}\left(\delta_{out}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}-\delta_{in}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}\right)$$
$$W_I(a_q)^{\beta}W_G(a_q)^{\gamma}\left|\nabla_v f(a_q)\right|^{p-2}\nabla_v f(a_q)$$
$$=\sum_{a_q\in\mathcal{A}_H}\left(\delta_{out}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}-\delta_{in}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}\right)W_I(a_q)^{\beta}W_G(a_q)^{\gamma}$$
$$\left|W_G(a_q)^{\gamma}\sum_{v_j\in\mathcal{V}}\left(\delta_{in}(v_j,a_q)\frac{w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}-\delta_{out}(v_j,a_q)\frac{w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}\right)f(v_j)\right|^{p-2}$$
$$W_G(a_q)^{\gamma}\sum_{v_k\in\mathcal{V}}\left(\delta_{in}(v_k,a_q)\frac{w_I(v_k)^{\alpha}w_G(v_k)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}-\delta_{out}(v_k,a_q)\frac{w_I(v_k)^{\alpha}w_G(v_k)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}\right)f(v_k)$$

由于超弧权重函数W_G 映射到正值，以下重述成立，并由此得出顶点p-拉普拉斯算子的定义：

$$=\sum_{a_q\in\mathcal{A}_H}\left(\delta_{out}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}-\delta_{in}(v_i,a_q)\frac{w_G(v_i)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}\right)W_I(a_q)^{\beta}W_G(a_q)^{2\gamma+\gamma(p-2)}$$
$$\left|\sum_{v_j\in\mathcal{V}}\left(\delta_{in}(v_j,a_q)\frac{w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}-\delta_{out}(v_j,a_q)\frac{w_I(v_j)^{\alpha}w_G(v_j)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}\right)f(v_j)\right|^{p-2}$$
$$\sum_{v_k\in\mathcal{V}}\left(\delta_{in}(v_k,a_q)\frac{w_I(v_k)^{\alpha}w_G(v_k)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|}-\delta_{out}(v_k,a_q)\frac{w_I(v_k)^{\alpha}w_G(v_k)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|}\right)f(v_k)$$

$$= \sum_{a_q \in \mathscr{A}_H} \left(\delta_{out}\left(v_i, a_q\right) \frac{w_G\left(v_i\right)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|} - \delta_{in}\left(v_i, a_q\right) \frac{w_G\left(v_i\right)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|} \right) W_I\left(a_q\right)^{\beta} W_G\left(a_q\right)^{p\gamma}$$
$$\left| \sum_{v_j \in \mathscr{V}} \left(\delta_{in}\left(v_j, a_q\right) \frac{w_I\left(v_j\right)^{\alpha} w_G\left(v_j\right)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|} - \delta_{out}\left(v_j, a_q\right) \frac{w_I\left(v_j\right)^{\alpha} w_G\left(v_j\right)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|} \right) f\left(v_j\right) \right|^{p-2}$$
$$\sum_{v_k \in \mathscr{V}} \left(\delta_{in}\left(v_k, a_q\right) \frac{w_I\left(v_k\right)^{\alpha} w_G\left(v_k\right)^{\epsilon}}{\left|a_q^{in}\right|} - \delta_{out}\left(v_k, a_q\right) \frac{w_I\left(v_k\right)^{\alpha} w_G\left(v_k\right)^{\eta}}{\left|a_q^{out}\right|} \right) f\left(v_k\right)$$
$$= \Delta_v^p f\left(v_i\right)$$

因此，利用前面引入的顶点梯度 ∇_v、顶点散度 div_v 以及顶点p-拉普拉斯算子 $\Delta^{p}{}_{v}$ 的定义，可以证明等式$\Delta^{p}{}_{v} f\left(v_i\right) = \mathrm{div}_v\left(\left|\nabla_v f\right|^{p-2} \nabla_v f\right)\left(v_i\right)$ 对所有顶点$v_i \in \mathscr{V}$和所有顶点函数$f \in \mathscr{H}(\mathscr{V})$均成立。

□

定义 10.14 （超弧 p-拉普拉斯算子 $\Delta^{p}{}_{a}$）。
对于加权有向超图 $OH = (\mathscr{V}, \mathscr{A}_H, w, W)$，超弧 p-拉普拉斯算子 $\Delta^{p}{}_{a}$ 定义为

$$\Delta_a^p : \mathscr{H}(\mathscr{A}_H) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{A}_H) \qquad F \longmapsto \Delta_a^p F \tag{192}$$

超弧函数 $F \in \mathscr{H}(\mathscr{A}_H)$ 在超弧 $a_q \in \mathscr{A}_H$上的加权 p-拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_a^p : \mathscr{A}_H \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a_q \longmapsto \Delta_a^p F\left(a_q\right) =$$
$$W_G\left(a_q\right)^{\theta} \sum_{v_i \in \mathscr{V}} \left(\frac{\delta_{out}\left(v_i, a_q\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)} - \frac{\delta_{in}\left(v_i, a_q\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)} \right) w_I\left(v_i\right)^{\alpha} w_G\left(v_i\right)^{2\zeta}$$
$$\left| \sum_{a_r \in \mathscr{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_i, a_r\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_i, a_r\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)} \right) W_I\left(a_r\right)^{\beta} W_G\left(a_r\right)^{\theta} F\left(a_r\right) \right|^{p-2}$$
$$\sum_{a_s \in \mathscr{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}\left(v_i, a_s\right)}{\deg_{in}\left(v_i\right)} - \frac{\delta_{out}\left(v_i, a_s\right)}{\deg_{out}\left(v_i\right)} \right) W_I\left(a_s\right)^{\beta} W_G\left(a_s\right)^{\theta} F\left(a_s\right). \tag{193}$$

定理 10.15（超弧 p-拉普拉斯算子的参数选择）。
文献 *[7]* 将超弧 p-拉普拉斯算子的简化定义引入为超边 p-拉普拉斯算子。采用本学位论文的记号，可将其写为

$$\Delta_p F(a_q) = \sum_{\substack{v_i \in \mathcal{V}: \\ v_i \in a_q^{out} \cup a_q^{in}}} \frac{1}{\deg(v_i)} \left| \sum_{a_r \in \mathcal{A}_H} \delta_{in}(v_i, a_r) F(a_r) - \sum_{a_r \in \mathcal{A}_H} \delta_{out}(v_i, a_r) F(a_r) \right|^{p-2}$$
$$\left(\sum_{a_s \in \mathcal{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_s) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_s) \right) F(a_s) - \right.$$
$$\left. \sum_{a_s \in \mathcal{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_s) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_s) \right) F(a_s) \right) \tag{194}$$

对于任意超弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_H)$ 以及所有超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$。

因子 $\left(\delta_{out}(v_i, a_q)\delta_{out}(v_i, a_s) + \delta_{in}(v_i, a_q)\delta_{in}(v_i, a_s)\right)$ 确保只考虑超弧 $a_s \in \mathcal{A}_H$；其中，顶点 v_i 在两条超弧 a_q 和 a_s 中要么都是输出顶点，要么都是输入顶点，因此 a_q 和 a_s 相对于顶点 v_i具有相同的方向。类似地，因子 $\left(\delta_{out}(v_i, a_q)\delta_{in}(v_k, a_q) + \delta_{in}(v_i, a_q)\delta_{out}(v_k, a_q)\right)$ 仅当超弧 a_q 和 a_s 相对于顶点 v_i的方向相反时才非零；这意味着 $v_i \in a^{out} q$，$v_i \in a^{in} s$ 或 $v_i \in a^{in} q$，$v_i \in a^{out} s$。

因此，将超弧 p-拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_a$ 的参数选为 $\alpha = 0$、$\beta = 0$、$\zeta = 0$ 和 $\theta = 0$，同时排除 $^1{}_{\deg_{out}(v_i)}$ 和 $^1{}_{\deg_{in}(v_i)}$ 乘法因子，~~并在超弧伴随算子和超~~弧散度的求和中引入一个新的 $-\ {}^1{}_{\deg(v_i)}$ ~~因子，~~ 从而得到 *[7]*中定义的简化超弧 p-拉普拉斯算子。

此外，将这些参数选择应用于超弧梯度、超弧伴随算子和超弧散度，可得：

- $\nabla_a F(v_i) = \sum_{a_q \in \mathcal{A}_H} \left(\delta_{in}(v_i, a_q) - \delta_{out}(v_i, a_q)\right) F(a_q)$
- $\nabla_a^* f(a_q) = -\sum_{v_i \in \mathcal{V}} \frac{1}{\deg(v_i)} \left(\delta_{in}(v_i, a_q) - \delta_{out}(v_i, a_q)\right) f(v_i)$
- $div_a(f)(a_q) = -\sum_{v_i \in \mathcal{V}} \frac{1}{\deg(v_i)} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) - \delta_{in}(v_i, a_q)\right) f(v_i)$

对于任意顶点函数 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$、任意超弧函数 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_H)$，以及所有超弧 $a_q \in \mathcal{A}_H$ 和所有顶点 $v_i \in \mathcal{V}$。

证明。
给定一个有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, w、 W)$（其对称超弧权函数为 W_I 和 W_G），以及一个超弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_H)$，采用所述参数选择，去除 $^1\deg_{out}(v_i)$ 和 $^1\deg_{in}(v_i)$ 这两个乘法因子，并在超弧散度中加入新的 $-\ ^1\deg(v_i)$ 因子，可得如下结果：

$$\begin{aligned}
\Delta_p f(v_i) = & -\sum_{v_i \in \mathcal{V}} \frac{1}{\deg(v_i)} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) - \delta_{in}(v_i, a_q)\right) \\
& \left| \sum_{a_r \in .\mathcal{A}_H} \left(\delta_{in}(v_i, a_r) - \delta_{out}(v_i, a_r)\right) F(a_r) \right|^{p-2} \\
& \sum_{a_s \in .\mathcal{A}_H} \left(\delta_{in}(v_i, a_s) - \delta_{out}(v_i, a_s)\right) F(a_s) \\
= & -\sum_{v_i \in \mathcal{V}} \frac{1}{\deg(v_i)} \left| \sum_{a_r \in .\mathcal{A}_H} \delta_{in}(v_i, a_r) F(a_r) - \sum_{a_r \in .\mathcal{A}_H} \delta_{out}(v_i, a_r) F(a_r) \right|^{p-2} \\
& \sum_{a_s \in .\mathcal{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_s) - \delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_s) - \right. \\
& \left. \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_s) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_s)\right) F(a_s) \\
= & -\sum_{v_i \in \mathcal{V}} \frac{1}{\deg(v_i)} \left| \sum_{a_r \in .\mathcal{A}_H} \delta_{in}(v_i, a_r) F(a_r) - \sum_{a_r \in .\mathcal{A}_H} \delta_{out}(v_i, a_r) F(a_r) \right|^{p-2} \\
& \sum_{a_s \in .\mathcal{A}_H} \left(-\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_s) - \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_s) + \right. \\
& \left. \delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_s) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_s)\right) F(a_s)
\end{aligned}$$

将负号从前面移至最后一个括号，并根据超弧 a_q 和 a_s 相对于顶点 v_i 的方向是相同还是相反，对最后一个括号进行整理，从而得到简化后的超弧 p-拉普拉斯算子的定义：

$$\begin{aligned}
= & \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \frac{1}{\deg(v_i)} \left| \sum_{a_r \in .\mathcal{A}_H} \delta_{in}(v_i, a_r) F(a_r) - \sum_{a_r \in .\mathcal{A}_H} \delta_{out}(v_i, a_r) F(a_r) \right|^{p-2} \\
& \sum_{a_s \in .\mathcal{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_s) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_s) - \right. \\
& \left. \delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_s) - \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_s)\right) F(a_s)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \frac{1}{\deg(v_i)} \left| \sum_{a_r \in \mathcal{A}_H} \delta_{in}(v_i, a_r) F(a_r) - \sum_{a_r \in \mathcal{A}_H} \delta_{out}(v_i, a_r) F(a_r) \right|^{p-2}$$
$$\sum_{a_s \in \mathcal{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_s) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_s) \right) F(a_s) -$$
$$\sum_{a_s \in \mathcal{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_s) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_s) \right) F(a_s)$$

$$= \sum_{\substack{v_i \in \mathcal{V}: \\ v_i \in a_q^{out} \cup a_q^{in}}} \frac{1}{\deg(v_i)} \left| \sum_{a_r \in \mathcal{A}_H} \delta_{in}(v_i, a_r) F(a_r) - \sum_{a_r \in \mathcal{A}_H} \delta_{out}(v_i, a_r) F(a_r) \right|^{p-2}$$
$$\sum_{a_s \in \mathcal{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_s) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_s) \right) F(a_s) -$$
$$\sum_{a_s \in \mathcal{A}_H} \left(\delta_{out}(v_i, a_q) \delta_{in}(v_i, a_s) + \delta_{in}(v_i, a_q) \delta_{out}(v_i, a_s) \right) F(a_s)$$

第一个求和中将 $\left($改为不再对所有顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 求和，而是对所有满足 $v_i \in a^{out}{}_q \cup a^{in}{}_q$ $\right)$ 的顶点 $v_i \in \mathcal{V}$ 求和，这并没有实质性的变化，因为最后一个大括号已经确保只考虑满足 $v_i \in a^{out}{}_q$ 或 $v_i \in a^{in}{}_q$ 的顶点 v_i，否则大括号的值将为零。

此证明表明，先前引入的超弧p-拉普拉斯算子定义 $\Delta^p{}_a$ 与 [7] 中的超弧p-拉普拉斯算子定义相容。

□

下述定理证明，关于超弧梯度和超弧散度，超弧的p-拉普拉斯算子$a_q \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_H)$ 是定义良好的。

定理 10.16 (超弧散度 $\mathbf{div}_a$、超弧梯度 ∇_a 与超弧p-拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_a$)。

在加权有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, w, W)$ 上，超弧 p-拉普拉斯算子 $\Delta^p{}_a$ 满足等式

$$\Delta_a^p F = div_a \left(|\nabla_a F|^{p-2} \nabla_a F \right) \tag{195}$$

对于所有超弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_H)$。

证明。
给定加权有向超图 $OH = (\mathcal{V}, \mathcal{A}_H, w、 W)$ 以及超弧函数$F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_H)$，根据超弧散度算子 div_a 和超弧梯度算子 ∇_a 的定义，可得对所有超弧$a_q \in \mathcal{A}_H$均有：

$$\mathrm{div}_a\left(|\nabla_a F|^{p-2}\nabla_a F\right)(v_i, v_j) = W_G(a_q)^\theta \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \left(\frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} - \frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} \right)$$

$$w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\zeta |\nabla_a F(v_i)|^{p-2} \nabla_a F(v_i)$$

$$= W_G(a_q)^\theta \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \left(\frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} - \frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} \right) w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^\zeta$$

$$\left| w_G(v_i)^\zeta \sum_{a_r \in \mathcal{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_r)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_r)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_r)^\beta W_G(a_r)^\theta F(a_r) \right|^{p-2}$$

$$w_G(v_i)^\zeta \sum_{a_s \in \mathcal{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_s)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_s)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_s)^\beta W_G(a_s)^\theta F(a_s)$$

由于顶点权重函数w_G 仅映射到正值，以下公式成立，并最终得出超弧p-拉普拉斯算子的定义：

$$= W_G(a_q)^\theta \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \left(\frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} - \frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} \right) w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^{2\zeta+\zeta(p-2)}$$

$$\left| \sum_{a_r \in \mathcal{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_r)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_r)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_r)^\beta W_G(a_r)^\theta F(a_r) \right|^{p-2}$$

$$\sum_{a_s \in \mathcal{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_s)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_s)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_s)^\beta W_G(a_s)^\theta F(a_s)$$

$$= W_G(a_q)^\theta \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \left(\frac{\delta_{out}(v_i, a_q)}{\deg_{out}(v_i)} - \frac{\delta_{in}(v_i, a_q)}{\deg_{in}(v_i)} \right) w_I(v_i)^\alpha w_G(v_i)^{p\zeta}$$

$$\left| \sum_{a_r \in \mathcal{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_r)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_r)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_r)^\beta W_G(a_r)^\theta F(a_r) \right|^{p-2}$$

$$\sum_{a_s \in \mathcal{A}_H} \left(\frac{\delta_{in}(v_i, a_s)}{\deg_{in}(v_i)} - \frac{\delta_{out}(v_i, a_s)}{\deg_{out}(v_i)} \right) W_I(a_s)^\beta W_G(a_s)^\theta F(a_s)$$

$$= \Delta_a^p F(a_q)$$

因此，等式 $\Delta^p{}_a F(a_q) = \mathrm{div}_a\left(|\nabla_a F|^{p-2}\nabla_a F\right)(a_q)$对于所有超弧$a_q \in \mathcal{A}_H$ 以及所有超弧函数 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{A}_H)$均成立，这里使用了超弧梯度 ∇_a、超弧散度 div_a 以及超弧 p-拉普拉斯算子$\Delta^p{}_a$的定义。

□

11 结论

本学位论文最重要的贡献可概括为以下五点：

- 第（2）节：
  提出两种邻接张量：一种非唯一版本，其维数与无向超图邻接张量相同；另一种唯一版本，其维数更大)，适用于有向超图。这一构思受到了 [13]中无向普通图邻接张量的启发。

- 第（4）节：
  证明每个普通图都是一种超图，并对二部正规图表示以及以完全子图表示普通图的方法进行批判性分析。这些方法曾在 [9] 和 [14], 中被简要提及，但未作详细探讨。

- 第（6）节和第（7）节：
  将 [4] 的有向正规图上的顶点梯度、伴随算子和p-拉普拉斯算子推广到包含更多参数和权函数，并为普通图定义相应的弧梯度、伴随算子和p-拉普拉斯算子。

- 第（8）节和第（9）节：
  将普通图上的顶点梯度与伴随算子以及弧梯度与伴随算子，推广为超图上的顶点梯度与伴随算子以及超弧梯度与伴随算子。

- 第（10）节：
  将 [7] 中的顶点p-拉普拉斯算子和超弧p-拉普拉斯算子推广到包含更多参数和权函数，并使其与普通图情形的定义相符。

(注：如果某个定义、定理、注记、引理、推论或示例未引用任何来源，则本学位论文的作者对其内容负责，并且未能找到有关该内容的任何既有出版物。)

尽管这篇学位论文已经相当长，但仍有许多主题尚未涉及，例如确定一项应用，并为这些算子选择合适的参数和权函数，或者对广义顶点与（超）弧 1-拉普拉斯算子进行谱分析。遗憾的是，无法在这篇学位论文中纳入更多内容，但与此同时，这也为未来的研究与探索提供了可能性。

参考文献

[1] ASRATIAN, Armen S.；DENLEY, Tristan M.；HÄGGKVIST, Roland：二部图及其应用。第131卷。剑桥大学出版社，1998年[2] AUGUSTSON, J. G.；MINKER, Jack：一些图论聚类技术的分析。载于：*ACM*期刊（*JACM*）17（1970年），第4期，第571–588页[3] BANG-JENSEN, Jørgen；GUTIN, Gregory：基本术语、符号及结果。载于：有向图类。施普林格，2018年，第1–34页[4] ELMOATAZ, Abderrahim；TOUTAIN, Matthieu；TENBRINCK, Daniel：图上的 p-拉普拉斯算子与无穷拉普拉斯算子及其在图像与数据处理中的应用。载于：*SIAM*影像科学期刊8（2015年），第4期，第2412–2451页[5] IJIRI, Yuji：关于关联矩阵的广义逆。载于：工业与应用数学学会期刊13（1965年），第3期，第827–836页[6] JEURISSEN, R. H.：图的关联矩阵与标记。载于：组合理论期刊*B*辑30（1981年），第3期，第290–301页[7] JOST, Jürgen；MULAS, Raffaella；ZHANG, Dong：有向超图的 p-拉普拉斯算子。载于：越南数学杂志（2021），10月。http://dx.doi.org/10.1007/s10013-021-00525-4。– 数字对象标识符 10.1007/s10013–021–00525–4。– ISSN 2305–2228[8] JOST, Jürgen；MULAS, Raffaella：化学反应网络的超图拉普拉斯算子。载于：数学进展351（2019年），第870–896页[9] MORI, Ryuhei；WATANABE, Osamu：具有超线性数量超边的随机超图上的剥离算法。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:1506.00718*（2015年）[10] MULAS, Raffaella；KUEHN, Christian；BÖHLE, Tobias；JOST, Jürgen：超图上的随机游走与拉普拉斯算子：它们何时一致？载于：离散应用数学317（2022年），第26–41页[11] SINGH, Harmanjit；SHARMA, Richa：邻接矩阵与邻接表在图论中的作用。载于：国际计算机与技术期刊3（2012年），第1期，第179–183页[12] WILLIAMSON, S.Gill；BENDER, Edward A.：列表、决策与图。（2010年）[13] ZHANG, Songyang；DING, Zhi；CUI, Shuguang：超图信号处理导论：理论基础与实际应用。载于：*IEEE*物联网期刊7（2019年），第1期，第639–660页[14] ZHOU, Dengyong；HUANG, Jiayuan；SCHÖLKOPF, Bernhard：基于超图的学习：聚类、分类与嵌入。载于：神经信息处理系统进展19（2006年）