arXiv:2304.06487v1 [cs.NE] 11 Apr 2023

将循环神经网络视为电网络：一种形式化方法

Mariano Caruso[1], 2[0000−0002−7455−1193]
和 Cecilia Jarne[3], 4[0000−0002−3917−920X]

[1] 自由软件研究与发展基金会+，FIDESOL[2] 格拉纳达大学理学院，西班牙
mcaruso@fidesol.org[3] 基尔梅斯国立大学 UNQ——科学与技术系[4] CONICET
cecilia.jarne@unq.edu.ar

摘要。 自 20 世纪 80 年代以来，特别是随着 Hopfield 模型的提出，循环神经网络（RNN）成为备受关注的研究课题。早期的神经网络研究由仅包含少数神经元的简单系统构成，这些系统通常通过模拟电子电路进行仿真。从方程到电路的转换是直接进行的，既没有论证，也没有后续的形式化处理。本文展示了一种形式化推导模拟电路与神经网络等价关系的方法，并将这两个系统之间的联系形式化。我们还说明了这些电网络必须满足哪些性质。我们可以确信，以电路形式表示的系统在数学上等价于描述该网络的方程。

关键词： 循环神经网络 · 电网络 · 形式化。

1 引言

在 20 世纪 80 年代，尤其是 Hopfield 模型问世之后，循环神经网络成为备受关注的研究主题。特别是后来 Funahashi、Nakamura 和 Kurita 的研究 [5,6,9], ，使得神经网络能够与动力系统的描述联系起来，这一研究领域才开始发展成为一个独立的领域。关于神经网络是通用逼近器（即能够逼近任意连续函数），已有大量论文。证明表明，神经网络可以逼近任意连续函数 [12,13]。给定一个 n–维动力系统，其任意有限时间内的轨迹，都可以通过连续时间循环神经网络输出单元的内部状态近似实现；该网络包含 $n-$ 个输出单元、若干隐藏单元，并采用适当的初始条件 [6]。直到过去十年，随着当前计算算法、新硬件以及神经网络理论的发展，利用这类网络在自然语言、动力系统、神经科学和时间序列分析等相关领域才取得了巨大进展 [17,7]。

然而，受当时可用硬件的限制，最初的神经网络研究采用的都是仅包含少数神经元的简单系统，通常通过模拟电子电路进行仿真。当时的大多数研究都是直接将方程转换为电路，没有采用太多形式化方法。主要原因在于，研究目标是展示这些电路如何有效地构成原始的神经网络，同时注意到模拟电路可以对这些系统进行仿真。研究人员考察了网络参数变化时系统的行为。如今，电子学领域的一些研究延续了这一思路，通过电路仿真或模拟电路综合，研究仅含少数神经元的系统性质。一个例子是向混沌系统的转变 [1,16]。

另一方面，专用电路应用于另一个领域，即神经形态工程 [10,11], ，它也称为神经形态计算。这种技术利用包含电子模拟电路的超大规模集成（VLSI）系统，来模拟与神经系统相关的神经生物学架构。任何使用物理人工神经元进行计算的设备都称为神经形态计算机。近年来，神经形态一词被用于描述模拟、数字、混合模式模拟/数字 VLSI（以及软件系统），这些系统实现了用于理解感知、运动控制或多感觉整合的神经系统模型。在硬件层面，神经形态计算通过氧化物基忆阻器、自旋电子存储器、阈值开关和晶体管实现。基于软件的脉冲神经网络神经形态系统可以使用误差反向传播进行训练，例如借助基于 Python 的框架。这些系统的训练算法仍然复杂，且网络参数难以控制。

受这些进展以及文献中关于形式化方面的空白所启发，本文展示了如何在形式上获得模拟电路与神经网络之间的等价性，并将这两个系统之间的联系形式化。我们还展示了这些电网络必须满足的性质。据我们所知，文献中尚未明确给出这些内容。分析的目标是解释线性网络的情形，即传递函数为恒等函数时的情况。这一情形之所以值得关注，是因为它已在多项研究中得到使用，同时也因为它常被用于将非线性系统近似为一阶系统 [15,14]。

2 符号与动力学

我们有一组 $n-$人工神经元，每个神经元都有一个称为活动的动态量，用函数 $h_i : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{H} \subseteq \mathbb{R}$ 表示，其中 $i \in I_n$，且 $\mathrm{T} \subseteq \mathbb{R}$ 是临时标签的集合。我们将使用以下紧凑记号表示离散集 n 自然数 $I_n = \{1, \cdots, n\} \subset \mathbb{N}$。我们可以将这些函数 n 排列成一个列向量 $\boldsymbol{h} = (h_1, \cdots, h_i, \cdots, h_n)^{\mathrm{t}}$，其中 t表示矩阵转置。向量 $\boldsymbol{h}$ 表示网络（由 n 个神经元组成）在时刻 t的活动状态 。另一方面，

存在一系列 m 输入函数， $x_k : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}$ ，其中 $k \in I_m$，它们可以排列成一个列向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_m)^{\mathrm{t}}$。对于循环神经网络（RNN），活动向量 $\boldsymbol{h}$ 满足：

$$\dot{\boldsymbol{h}}(t) = -\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{h}(t) + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{h}(t) + \widetilde{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{x}(t)), \tag{1}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{h}}$ 表示通常意义上相对于时间的全导数。对角矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 包含各神经元突触后模式的特征时间（τ_k、$k \in I_n$）的倒数， $\boldsymbol{\lambda}^{-1} = diag$（$\tau_1$、 $\cdots$、 τ_k、 $\cdots$、 τ_n）。当神经网络完全断开连接时，无论是内部$\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ 还是外部 $\widetilde{\boldsymbol{w}} = \mathbf{0}$，网络中每个神经元 h_k 的活动都会以指数形式衰减，其特征时间由 τ_k给出。矩阵 $\boldsymbol{w}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{w}}$ 分别是 $n \times n$ 和 $n \times m$。矩阵元素 $\boldsymbol{w}$、 w_{ij}包含突触连接，类似于 $\widetilde{\boldsymbol{w}}$、 $\boldsymbol{\sigma}$ ： $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个激活向量场。严格来说，这些场的像通常位于某个紧集内，因为神经元的激活具有饱和行为；典型的例子包括双曲正切函数、逻辑函数等，它们满足 $\boldsymbol{\sigma}(000) = \mathbf{0}$ （因为活动不能瞬间恢复，也就是说，激活一个活动为零的神经元所得的结果为零）。此外，它的每个分量都是通过应用单个非线性函数 σ 来定义的： $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$。也就是说，给定一个向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$，其分量表示为 $\boldsymbol{\xi}$=（ξ_1、 $\cdots$、 ξ_n），则必须 $\boldsymbol{\sigma}$（$\boldsymbol{\xi}$） =（（（σ（ξ_1） $\cdots$、 σ（ξ_n））），一如既往。网络的活动状态由（1）决定，并通过 $\boldsymbol{w}$所描述的它们之间的相互作用进行更新，同时外部信号 $\boldsymbol{x}$ 根据 $\widetilde{\boldsymbol{w}}$作用于神经元的活动，并结合某个初始条件。我们可以将（1）简洁地写为：

$$\dot{\boldsymbol{h}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{h}(t), \boldsymbol{x}(t)). \tag{2}$$

为了说明系统模型的行为，可以对这个微分方程进行两种处理：离散化和线性化。第一种处理可通过算法计算模型。第二种处理则能让我们清楚地找到一个线性电网络，以捕捉循环神经网络的所有动态特性。这两种处理的顺序不会影响结果；换句话说，它们的应用顺序彼此独立。直观上，我们可以预见这一结果，因为每种处理分别作用于式（2）的不同部分：离散化作用于左侧的微分算子，而线性化则作用于右侧的激活函数。

3 线性化过程

由于 $\boldsymbol{F}$的非线性特征完全存在于 $\boldsymbol{\sigma}$中，线性化是一个涉及激活场以及神经元活动本身（即我们感兴趣的激活对象）的过程。在这个激活场 $\boldsymbol{\sigma}$中，现在让我们考察 σ 中的每个函数： $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，并假设

$\sigma(\xi)$在 $\xi = 0$处 k–次可微。根据泰勒定理，存在一个函数余项 $R_k(\xi)$，使我们可以写成

$$\sigma(\xi) = \sigma(0) + \big(d_\xi \sigma(\xi)|_{\xi=0}\big)\xi + \cdots + \big(d_\xi^{(k)} \sigma(\xi)|_{\xi=0}\big)\xi^k + R_k(\xi)\xi^k. \tag{3}$$

激活函数 σ 通常选择其切线在 $\xi = 0$处的斜率等于1，也就是说，原点附近的激活函数类似于恒等函数，让我们记住 $\sigma(0) = 0$。利用这一切，并且当 ξ 足够小时，我们可以近似 $\sigma(\xi) \simeq \xi$。局部线性近似也构成了分析更复杂的非线性动力系统行为的重要组成部分 [4]。这一过程对于神经元活动较低的**状态**是有效的。我们并不是说线性近似**仅**在这种状态下有效，而只是指出，在这种状态下，神经元活动的强度非常弱，因此存在一种能够证明线性近似合理性的形式化过程。事实上，这种近似也用于时间较长的情况。我们理解，这一现象的原因可以从微分方程中得到证明，并且可以合理地假设，长期来看神经元不会饱和。所谓长期，是指随着时间推移，矩阵 $\boldsymbol{A}$ （其可对角化）要么所有特征值的实部都小于 0（这就是所谓的渐近稳定性），要么总可以认为，神经元的激活函数——它获取每个神经元活动信号的加权和——会准备好整个状态。无论如何，神经元活动的最终归宿都是终止的；热力学第二定律进一步保证了这一点，即每个实体在某个时刻都会具有非常微弱的神经元活动。这样，在进行线性化后，我们将得到 $\boldsymbol{F}(((\boldsymbol{h}(t)\ \boldsymbol{x}(t)))) \simeq -\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{h}(t) + \boldsymbol{w}\,\boldsymbol{h}(t) + \widetilde{\boldsymbol{w}}\,\boldsymbol{x}(t)$，于是微分方程（2）呈现为

$$\dot{\boldsymbol{h}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{h}(t) + \widetilde{\boldsymbol{w}}\,\boldsymbol{x}(t), \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\lambda}$。我们感兴趣的是研究每个神经元的活动$\{h_k\}_{k\in I_n}$，它受到由互连产生的两种相互作用的影响：神经元间连接由权重矩阵 $\boldsymbol{w}$ 给出，此外还有一系列外部激励 $\boldsymbol{x}$ 通过 $\widetilde{\boldsymbol{w}}$ 矩阵影响每个神经元。线性系统尤其引人关注，因为它们的渐近行为可以根据 $\boldsymbol{A}$ [4]的特征值和特征向量来理解。

4 电网络

我们将把（1）所描述的系统，特别是其线性化形式（4），与一个电网络对应起来。电网络（EN）被理解为一个有向图的组合，其中每条弧都关联有两个随时间变化的函数：电流和电压；这些函数由基尔霍夫定律以及由表示该电网络的图和相互连接的电气元件所产生的弧关系联系起来，例如电阻器、电感器、电容器等。 [2]。每当使用节点法、回路或节点对 [2] 来求得网络的动力学时，就会得到一阶线性微分方程组

或者将得到积分微分方程。为了能够使用这些方法，必须了解电网络的整体情况，即构成电网络的元件及其排列和互连方式。由于我们没有这些信息，解必须建立在一个一般电路之上，也就是说，不考虑其图或各条弧上的元件。因此，在找到一个特定网络及其弧上的元件之前，无法应用任何网络分析方法。要解决这个表面上的循环问题，所需的不是对一个电路进行分析，而是对给定优选族中的所有电路进行综合。这类要求可以根据其他假设来确定，我们将在下文中介绍。

我们旨在区分或识别电网络中的广义坐标，使方程 (4) 得以满足。由于该方程有 n 个自由度，因此我们在网络中区分出 n 个局部区域，可在其中测量电压或电流。这些区域称为端口：一对允许与周围环境交换能量、且具有给定端口电压和端口电流的端子。由此可知，这样一个电网络具有 n 个已明确识别的独立端口。我们提出的通用结构是一个由 $\{\mathcal{N}_k\}_{k\in I_n}$个二端元件组成的电网络，这些元件也称为单–端口网络，并通过一个 n–端口相互作用网络 $\mathcal{N}$ [2,3]互连。我们看到，每个单–端口网络都会引入一个端口–电压或端口–电流，它将对应于坐标 h_k，即 (4) 中的 $\boldsymbol{h}$，见图 1。由于 $\boldsymbol{w}$ 与时间–无关，电网的动力学必须在时间平移下保持不变，这意味着网络的这一部分不包含内部电源。事实上，通过观察 (4)，我们可以得出结论，这类电源与激励信号 $\boldsymbol{x}$完全对应。每个二端元件（或 one–端口网络）以及外部激励 $\boldsymbol{x}$都将具有各自的初始条件；相互作用网络 $\mathcal{N}$中初始包含的能量可以非零。由此，多–端口网络理论可以完美地用于综合 $\mathcal{N}$，将其构造为一个有源电网络 [2]。在这种情况下，可以定义 $\mathcal{N}$的传递矩阵函数，即某些输出信号的拉普拉斯变换与某些输入信号的拉普拉斯变换之比。根据所选取的输入信号和输出信号，可分为四种通用表示：传输表示、阻抗表示、导纳表示或混合表示。需要注意，$\mathcal{N}$的混合表示这一最后一种情形不适用；否则，不同端口的输入和输出信号（电压和电流）就会混在一起，从而失去每个网络 $\{\mathcal{N}_k\}_{k\in I_n}$分别且仅表示 (4) 中所述坐标之一的可能性。因此，我们关注的是 n–端口网络 $\mathcal{N}$的传输表示、阻抗表示或导纳表示。能量最初由单–端口网络列表 $\{\mathcal{N}_k\}_{k\in I_n}$提供。电网络相应的动力学由适当应用基尔霍夫定律来定义，这些定律考虑了网络的拓扑结构，示意图见图 1。我们已经指出，广义坐标将是列表 $\{\mathcal{N}_k\}_{k\in I_n}$中各个 n 网络的端口电压或端口电流。因此，n–端口网络 $\mathcal{N}$起到相互作用的作用，因为它在物理上将各二端元件网络互连起来。

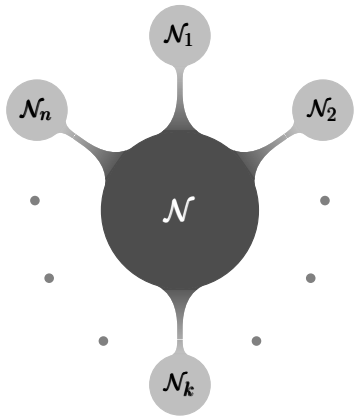

图 1。 存在 n 偶极子网络，记作 $\{\mathcal{N}_k\}_{k\in I_n}$，通过一个相互作用 网络 $\mathcal{N}$互联。

因此，无相互作用的情形对应于断开 $\mathcal{N}$ 网络。在循环神经网络中，这种无相互作用情形对应于权重矩阵满足 $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$，且外部激励 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 或其权重矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{w}} = \mathbf{0}$也满足相应条件；因此，根据 (4)，对于给定的 $\lambda_k\in\mathbb{R}$，每个神经元的活动信号为 $h_k(t)=\alpha_k e^{-\lambda_k t}$。换言之，神经元彼此看不到 对方。从数学上说，这是因为演化方程 (4) 的形式为

$$\dot{\boldsymbol{h}}(t) = -\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{h}(t), \tag{5}$$

并且由于矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 是对角矩阵，方程组是非耦合的，神经元的活动取决于其初始条件以及按特征时间矩阵呈指数衰减的行为。

为了直接与网络综合方法的结果进行比较，我们对上述线性微分方程（5）应用拉普拉斯变换（L），并取 $\boldsymbol{h}(t)$ 的 $k-$ 分量，记作 $h_k(t)$，于是 $H_k(s)=h_k(0)/(s+\lambda_k)$，其中 $H_k(s)=\mathrm{L}(((h_k(t))))^{(s)}$，且 $\boldsymbol{\lambda} = diag(\cdots,\lambda_k,\cdots)$ 是一个非负矩阵。注意，每个 $H_k(s)$ 都被视为一个单端口 $R_k\|C_k$ 并联或单端口 $R_k\boxplus L_k$ 串联的特征函数 [2], ，这两种电路互为对偶。将 (≙) 与方程（4）对应起来，可得：$\lambda_k^{-1}\triangleq R_kC_k$ 和 $h_k\triangleq v_k$，或 $\lambda_k^{-1}\triangleq R_k/L_k$ 和 $h_k\triangleq i_k$。需要指出的是，在每种情况下，所选变量对其所有元件都是相同的：并联情形为电压，串联情形为电流。图 2 概述了这一情况。请注意，图 2 中的电压源 $v_k(0)$ 和电流源 $i_k(0)$ 不仅表示初始条件，也说明初始能量储存在电抗元件中。从电磁学的角度看，电容器 C_k 上的初始电势差对应于储存的电能 $\frac{1}{2}C_kv_k^2(0)$；而电感器 L_k 中的初始电流对应于储存的磁能 $\frac{1}{2}L_ki_k^2(0)$。也就是说，两种电抗元件都是初始能量的来源，因此分别提供各自情形下的初始条件。

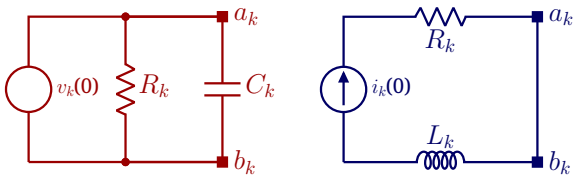

图2. 每个 $\mathcal{N}_k$ 在非相互作用情形下的替代网络，即列表$\{\mathcal{N}_k\}_{k\in I_n}$ 中的端子偶极网络及其初始激励，取决于所选信号：电压 v_k （左侧和红色）或电流 i_k （右侧和蓝色），用于描述坐标 h_k （4）。

如前所述，神经元活动向量 $\boldsymbol{h}$ 各分量之间的相互作用，源于神经元之间由内部权重矩阵 $\boldsymbol{w}$ 调节的内部连接，以及由外部激励 $\boldsymbol{x}$ 和外部权重矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{w}}$ 调节的外部连接。为了在线性情形下建立循环神经网络与电网络之间的对应关系，我们需要连接相互作用网络 $\mathcal{N}$，以便将其与矩阵 $\boldsymbol{w}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{w}}$ 以及外部激励 $\boldsymbol{x}$ 对应起来。

我们声称，对于由（4）调节的给定循环神经网络，存在两个电路：⫴-并联和 ⊞-串联网络。二者互为对偶，并能再现（5）所提出的动力学。

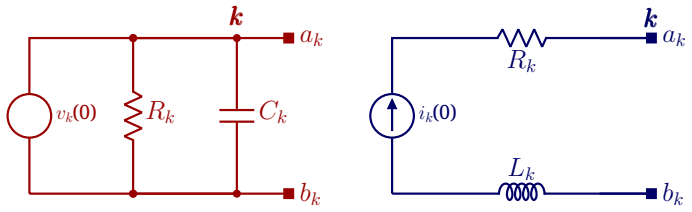

图 3. 的备选网络 $\mathcal{N}_k$，即列表中的一个端口偶极子网络 $\{\mathcal{N}_k\}_{k\in I_n}$及其初始激励，取决于选择哪种信号：现在作为坐标的是端口−电压 v_k (左侧且为 红色) 或端口−电流 i_k (右侧且为 蓝色) h_k （4）。

请注意，图 2 和图 3 中每个子网络的根本区别在于：对于并联（串联）情形，共通信号 v_k (i_k) 会传递至网络 $\mathcal{N}$；因此，每对端子（a_k， b_k）的排列都旨在确保这一效果。要完成图 1 中整个网络的电气配置，每对端子（a_k， b_k）构成一个端口，该端口连接到 $\mathcal{N}$ 的 k−端口。根据选择用电压还是电流来描述，你需要为相关的 $\mathcal{N}$ 网络采用导纳表示或阻抗表示。

为便于讨论，我们选择列表 $\{\mathcal{N}_k\}_{k\in I_n}$ 中每个子网络的并联网络 和端口–电压作为广义坐标， $\boldsymbol{v}=(v_1,\ \cdots,\ v_k,\ \cdots,\ v_n)$ ，如图 3 左侧所示。对于每个 $k\in I_n$，子网络 $\mathcal{N}_k$ 是一个 $R_k\|C_k$ 串联电路，并连接到图 1 所示网络 $\mathcal{N}$ 的 k–端口。k–节点构成由端子对（a_k， b_k）给出的 k–端口，在此 k–节点应用基尔霍夫第一定律: $i_{C_k}+i_{R_k}-i_k=0$，利用 $i_{R_k}=v_k/R_k$ 和 $i_{C_k}=C_k d_t v_k$，因此 $C_k\dot{v}_k\ (t)\ +R_k^{-1}v_k\ (t)\ -i_k\ (t)\ =0$。进行拉普拉斯变换（L）后，得到 $C_k sV_k\ (s)\ -C_k v_k\ (0)\ +R_k^{-1}V_k\ (s)\ -I_k\ (s)\ =0$。最后一个方程可以表示为矩阵形式

$$s\boldsymbol{V}(s)-\boldsymbol{v}(0)+\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{V}(s)-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}(s)=\boldsymbol{0},\tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{C}=diag(C_1,\cdots,C_n)$ 和 $\boldsymbol{R}=diag(R_1,\cdots,R_n)$，矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=(\boldsymbol{RC})^{-1}$包含各个 $R_k\|C_k$ 子网络特征时间的倒数。这样一来，问题就归结为按照 [2] 电路理论综合 $\mathcal{N}$ 网络，以获得端口电流 i_k与端口电压 v_k之间的关系。如果循环神经网络没有外部激励，那么 EN 的综合 $\mathcal{N}$ 可用于表示 $\boldsymbol{I}(s)\ =\boldsymbol{Y}(s)\boldsymbol{V}(s)$；我们采用了 $\mathcal{N}$ 的导纳表示。应用逆拉普拉斯（L^{-1}）变换，得到时域方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t)+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{C}^{-1}\mathcal{L}^{-1}[\boldsymbol{Y}(s)\boldsymbol{V}(s)](t)=\boldsymbol{0}.\tag{7}$$

$\boldsymbol{Y}(s)$ 的矩阵元素是有理函数，即 s 中多项式的商。方程 (7) 具有式 (4) 的形式的充要条件是 $\boldsymbol{Y}(s)\ =\boldsymbol{\alpha}$，其中由 电导 构成的常数矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 可使用 [3] 中介绍的通用方法进行综合。矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 的对称性不受限制；换言之，如果我们要考虑不一定对称的 $\boldsymbol{\alpha}$ ，那么网络 $\mathcal{N}$ 就称为非互易网络。这意味着它可以使用 回转器 [3] 进行综合。比较方程 (7) 和 (4)，得到对应关系 $\boldsymbol{w}\hat{}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=:\Omega\Omega\Omega$。

如果我们考虑包含外部激励$\boldsymbol{x}$ 的循环神经网络的完整描述，那么必须通过 $\boldsymbol{I}\ (s)\ =\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{V}\ (s)\ +\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{U}\ (s)$ 综合电网络 $\mathcal{N}$，其中 $\boldsymbol{U}\ (s)=\mathrm{L}[\boldsymbol{u}\ (t)\ ]\ (s)$ 和 $\boldsymbol{u}\ (t)\ =(u_1,\ \cdots,\ u_m)$ 是电压源，它们~充当外部激励 $\boldsymbol{x}$；在这种情况下，权重矩阵 $\tilde{\boldsymbol{w}}\hat{}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\beta}=:\ \Omega\Omega\Omega$。

对网络 $\mathcal{N}$ 的阻抗表示也可以重复类似的过程，只需交换以下量：将电压换成电流，将电感换成电容，将电导换成电阻，从而得到与（4）相同的方程，此时广义坐标为端口–电流 $\boldsymbol{i}$。

我们所描述的过程可以概括为以下步骤:

1. 提出连接到网络 $\mathcal{N}$ 的 n 子网络 $\{\mathcal{N}_k\}_{k\in I_n}$ 的一般拓扑结构，希望能够将循环神经网络中的每个人工神经元与 $\{\mathcal{N}\}_{k\in I_n}$ 的一个子网络关联起来。2. 确定两个系统中不存在相互作用的情形，在这种情况下，两个系统分别是循环神经网络和 EN。

3. 寻找一种两者共有且能够代表子晶格的动态量 $\mathcal{N}_k$ ，该子晶格对应于 h_k。注意，这种动态量需要具有共性和代表性，才能捕捉 $\mathcal{N}_k$ 中的共享特征，并能够将每个 $\mathcal{N}_k$ 的动力学与每个 h_k 的动力学对应起来。

4. 在考虑相互作用的情况下，每个 $\mathcal{N}_k$ 的这一共同且具有代表性的信息必须传递到 $\mathcal{N}$。这可以通过将电势差（v_k）、流经电弧 a_k 和 b_k 的电流（v_k），或 a_k 与 b_k 之间的电流（通过预先打开这些端子）传递到 $\mathcal{N}$ 的 $k-$门来实现。

电网络的动态遵循微分方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{v}(t) + \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}\,\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{0}, \tag{8}$$

我们总结了正在研究的 RRN (4) 和~电网络 (8) 类的元素识别： $\boldsymbol{h}\hat{}=\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\lambda}\hat{}=\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\omega}\hat{}=\Omega\Omega\Omega$, $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{}=\Omega\Omega\Omega$ 和 $\boldsymbol{x}\hat{}=\boldsymbol{u}$。

对于非线性情况，其中激活函数 σ 发挥着至关重要的作用，因此我们必须考虑在 $\mathcal{N}$中使用带反馈的非线性放大器综合方法。

5 讨论

众所周知，给定 $n-$维动力系统的任意有限时间轨迹，都可以由一个具有 n个输出单元的连续时间循环神经网络的输出单元内部状态近似实现。基于这一思想，以及过去十年的进展（包括电流计算算法、新型硬件和神经网络理论），我们在自然语言、动力系统、神经科学和时间序列分析等相关领域取得了巨大进展。

尽管这看起来可能是一个不必要的步骤，但能够将从一开始就直接使用的基本联系形式化并建立基础，使我们能够在这一过程中进一步了解系统。这样，我们便能将所使用的电路类型置于具体语境中，并识别循环网络的特征和参数。

我们还进行了一项综述，使我们能够介绍循环神经网络领域的当前技术水平。我们可以进行模拟，准确呈现与这些系统相关的现象。我们现在有信心认为，这种表示在数学上等价于描述该网络的方程。

6 Conclusions and FutureWork

鉴于本研究旨在将过去30年间实现的这种等价关系形式化，本文的目标便是构建相应的形式体系。我们提出了一套分为4个步骤的流程，用于识别电网络中的元素与方程中的元素之间的对应关系，而该方程

表示循环神经网络。我们认为，未来的研究可以探讨如何纳入神经网络必须满足的特定条件，例如戴尔定律，或其他源于生物学起源的约束，以及这些条件如何影响用于模拟网络的电路参数。

致谢 本研究得到了 FIDESOL、CONICET 和 UNQ 的支持。

参考文献

1. Ansari, M.S., Rahman, S.A.：用于求解线性方程组的基于 Dvcc 的非线性反馈神经电路。《电路、系统与信号处理》**30**(5), 1029–1045（2011 年 10 月） 2. Balabanian, N., Bickart, T.A.：《线性网络理论：分析、性质、设计与综合》。Weber Systems（1982） 3. Carlin, H., 等：《网络理论：互易与非互易电路导论》。Prentice-Hall 电气工程丛书，Prentice-Hall（1964） 4. Duncker, L., Sahani, M.：流形上的动力学：从神经群体记录中识别计算动力学活动。《神经生物学当前观点》**70**, 163–170（2021），计算神经科学 5. Funahashi, K.：神经网络对连续映射的近似实现。《神经网络》**2**(3), 183–192（1989） 6. Funahashi, K., Nakamura, Y.：连续时间循环神经网络对动力系统的近似。《神经网络》**6**(6), 801–806（1993） 7. Gerstner, W., Sprekeler, H., Deco, G.：神经科学中的理论与模拟。《科学》**338**(6103), 60–65（2012） 8. Hopfield, J.J.：具有分级响应的神经元具有与双态神经元类似的集体计算特性。《美国国家科学院院刊》**81**(10), 3088–3092（1984） 9. Kurita, N., Funahashi, K.：关于 Hopfield 神经网络与平均场理论。《神经网络》**9**(9), 1531–1540（1996） 10. Mead, C.：神经形态电子系统。《IEEE 会议录》**78**(10), 1629–1636（1990） 11. Monroe, D.：神经形态计算即将迎来（真正的）黄金时代。《ACM 通讯》**57**(6), 13–15（2014 年 6 月） 12. Schäfer, A.M., 等：循环神经网络是通用逼近器。载于：人工神经网络——ICANN 2006。第 632–640 页。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡（2006） 13. Siegelmann, H.T., 等：关于神经网络的计算能力。载于：第五届计算学习理论年度研讨会论文集。第 440–449 页。COLT ’92，计算机协会，美国纽约州纽约（1992） 14. Sussillo, D.：神经电路作为计算动力系统。《神经生物学当前观点》**25**, 156–163（2014），理论与计算神经科学 15. Sussillo, D., Barak, O.：打开黑箱：高维循环神经网络中的低维动力学。《神经计算》**25**(3), 626–649（2013） 16. Tabekoueng Njitacke, Z., Kengne, J., Fotsin, H.B.：四维 Hopfield 神经网络中多稳态与簇发振荡的共存。《电路、系统与信号处理》**39**(7), 3424–3444（2020 年 7 月） 17. Trischler, A.P., D’Eleuterio, G.M.：用于动力系统仿真的循环神经网络综合。《神经网络》**80**, 67–78（2016）