arXiv:2304.06525v1 [math.RT] 13 Apr 2023

抛物线型（φ,Γ_K）-模族

SHANXIAO HUANG

Abstract. 令 p 为素数， K 为一个 p-进局部域。我们研究准 de Rham（φ,Γ_K）-模的叠，即至多经特征扭曲后为 de Rham 的（φ,Γ_K）-模。这些对象用于构造并研究所谓的抛物线型簇，它们参数化某种类型的准 de Rham（φ,Γ_K）-模的逐次扩张，是对 [BHS17a],[BHS17b] 的三角簇的推广。在自守侧，我们构造相对特征簇，并通过证明“经典点”的稠密性，证明它们之间存在某些局部-整体相容态射。

Contents

1. 引言 2 2. 拟 de Rham (φ,Γ_K)-模的叠 6 2.1. Weil-Deligne 表示的分解 6 2.2. Weil-Deligne 表示上的滤过 11 2.3. (φ,Γ_K)-模族的构造 14 2.4. 拟 de Rham (φ,Γ_K)-模 24 3. 全局抛物线型 (φ,Γ_K)-模 29 3.1 参数空间 29 3.2 参数空间的正则轨 35 3.3 精化抛物线型簇 37 3.4 抛物线型簇 49 4. 特征簇的应用 53 4.1 记号与设定 54 4.2 将 Hecke 作用扩展到 Bernstein 中心 3 604.3 特征簇的构造 63 4.4 经典点 65 4.5 经典点的稠密性及其应用 70 附录 A. Sen 多项式的一些计算 79 附录 B. 伯恩斯坦中心 83 参考文献 87

1. Introduction

设 p 为一个素数， K 为 $\mathbb{Q}_p$的有限域扩张。本文的主要目的是定义精化抛物线型簇和抛物线型簇，它们是三角化簇的推广，并证明 [BHS17a] 和 [BHS17b]中的一些平行结果。更确切地说，我们固定一个带有分拆$n = n_1 + \cdots + n_l$的整数 n，并对每个$i \in \{1,\ldots,l\}$指定一个维数为 n_i、惯性群 I_K的类型 τ_i。精化抛物线型簇和抛物线型簇是某些刚性空间的两种不同紧化；这些刚性空间参数化带有滤过的 (φ,Γ_K)- 模，其中对于 $i=1$， ....., l，第 i 个分次部分在特征扭曲意义下是 τ_i 型的 de Rham 对象（并满足一些额外条件）。我们比较精化抛物线型簇与抛物线型簇，并研究它们的几何性质。此外，在自守侧，我们修改了 [Loe17] 中 Loeffler 的方案，构造与给定抛物线型簇对应的海克特征簇。此类特征簇的点参数化某个 Hecke 代数的 p-进超收敛特征形式（定义见同上），其 v 分量是某个素位 $v|p$处 $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_l$ 的 Bernstein 中心。随后，我们比较海克特征簇与抛物线型簇。为进一步阐明研究动机，我们简要回顾 [KPX14], [BC09a] 中关于三角化簇的一些结果。

设 C 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限域扩张，且 $|\mathrm{Hom}(K,C)| = [K\colon \mathbb{Q}_p]$。记$\mathcal{R}_{K,\,C}$为 K 上的相对 Robba 环，见例如 [KPX14，定义 2.2.2]。给定一个连续特征 $\delta\colon K^\times \to C^\times$，可以将一个秩一 (φ,Γ_K)-模$\mathcal{R}(\delta)$ 附加到 $\mathcal{R}_{K,\,C}$ 上。实际上，逆命题也成立（[KPX14，引理 6.2.13]）。具体而言，设 D 是 $\mathcal{R}_{K,\,C}$ 上秩为一的 (φ,Γ_K)-模。那么存在唯一的连续特征 $\delta\colon K^\times \to C^\times$ 使得

$$D \cong \mathcal{R}(\delta).$$

令 $\delta_i\colon K^\times \to C^\times$ 为 $i=1,\ldots,n$ 的连续特征。若一个秩为 n 的 φ,Γ_K-模 D，定义在 $\mathcal{R}_{K,C}$ 上，存在一个滤过，则称其为参数为 $(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ 的三角型模（[定义 6.3.1]同上）。

$$0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_n = D \tag{1}$$

由 D 的 (φ,Γ_K)-子模给出，并且 D_i/D_{i-1} 是一个秩一 (φ,Γ_K)-模；对于 $i=1,\ldots,n$，它同构于 $\mathcal{R}(\delta_i)$。换言之，一个三角型 (φ,Γ_K)-模 D 可以看作 $(\delta_1\ldots,\delta_n)$ 的逐次扩张。

现在记 G_K :=Gal$(\overline{K}/K)$ 为 K 的绝对伽罗瓦群，并记 k_C 为 C 的剩余域。固定一个连续表示 $\bar{r}\colon G_K \to \mathrm{GL}_n(k_C)$，并令 $R^{\square}_{\bar{r}}$ 为 $\bar{r}$ 的带框局部变形环（一个剩余域为 k_C 的局部完备诺特 $\mathcal{O}_C$-代数）。我们记 $\mathfrak{X}_{\bar{r}} := (\mathrm{Spf}\, R^{\square}_{\bar{r}})^{\mathrm{rig}}$ 为与形式概形 $\mathrm{Spf}R^{\square}_{\bar{r}}$ 相关的刚性 C-空间，则 C-点的 $\mathfrak{X}_{\bar{r}}$ 参数化了将 $\bar{r}$ 提升到 $\mathcal{O}_C$ 的提升。令 $\mathcal{T}_K := K^\times$ 为 $K^\times$的连续特征所构成的刚性 C-空间。三角化簇 $X_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 定义为既约刚性 C-空间，它是 $\mathfrak{X}_{\bar{r}} \times \mathcal{T}_K^n$ 中下列集合的 Zariski 闭包：

$$U_{\mathrm{tri}}(\bar{r}) := \{(r,\delta) \in \mathfrak{X}_{\bar{r}} \times (\mathcal{T}_K^n)_{\mathrm{reg}} \mid \mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(r) \text{ is trianguline with parameter } \delta\},$$

其中 $(\mathcal{T}_K^n)_{\mathrm{reg}}$ 是出于某种技术原因定义的 $\mathcal{T}_K^n$ 的一个扎里斯基开子空间，而 $\mathrm{D}^\dagger$ 刚性(r) 表示附属于 r 的 (φ,Γ_K)-模，由 Berger 在[Ber02] 中构造。

一个重要事实是，若 r 是晶体表示，那么与之关联的 (φ,Γ_K)-模 $\mathrm{D}^{\dagger}_{\text{刚性}}(r)$ 是三角型的（[BC09a，命题 2.4.1 和评注 2.4.3]）。事实上，Bella¨ıche 和 Chenevier 证明，对于晶体表示 r，关联的 (φ,Γ_K)-模 $\mathrm{D}^{\dagger}_{\text{刚性}}(r)$ 的由 (φ,Γ_K)-子模构成的滤过集，与关联的滤过 φ-模 $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(r)$ 的由子滤过 φ-模构成的滤过集之间存在自然双射，其中 $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(-)$ 是 Fontaine 函子，即 p-进 Hodge 理论中的晶体周期函子。于是可以看出，或许在扩大 C 后，可以选取 $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(-)$ 的一个基，使得在该基下，与 φ 作用对应的矩阵是上三角矩阵，这意味着 $\mathrm{D}^{\dagger}_{\text{刚性}}(r)$ 是三角型的（这就是这类 (φ,Γ_K)-模被称为三角型模的原因）。因此，对于一个非常一般的晶体表示 r（附带一些额外数据），可以将其视为三角化簇 $X_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 中的一个点。

在这篇文章中，我们希望将这一方法推广到 de Rham 表示的情形，并定义抛物线型簇。设 $r: G_K \to \mathrm{GL}_n(C)$ 是一个 de Rham 表示。假设 r 在某个伽罗瓦扩张 L/K 上限制为半稳定表示 G_L（回顾一下，de Rham 表示 r 是 de Rham 的，当且仅当它是潜在半稳定的 [Ber02, Cor 5.22]），并令 $\mathrm{D}_{\mathrm{st},L}(r)$ 为其对应的滤过 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模，该模由 Colmez 和 Fontaine 定义（例如参见 [CF00],[Ber02]）。根据 [Ber04, Cor III.2.5], ，我们对 de Rham 表示有与 [BC09a, Rmk 2.4.3] 类似的结果，即 $\mathrm{D}_{\mathrm{st},L}(r)$ 的由滤过子 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模构成的滤过集合，自然双射于 $\mathrm{D}^{\dagger}\ \mathrm{rig}(r)$ 的由 (φ,Γ_K)-子模构成的滤过集合；后者由全忠实函子 D_K 诱导（定义见 2.3，亦见 [Ber04, Def II.2.4]）。因此，(φ,Γ_K)-模 $D:=\mathrm{D}^{\dagger}\ \mathrm{rig}(r)$ 具有一个滤过

$$0=D_0\subset D_1\subset\cdots\subset D_l=D$$

由 (φ,Γ_K)-子模给出，使得滤过的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 $\mathrm{D}_K^{-1}(D_i/D_{i-1})$ 对于 $i=1,\ldots,l$ 都是不可约的。

上述讨论促使我们给出以下定义。若存在一个不可约滤过的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 M 以及一个连续特征 $\delta: K^\times\to C^\times$，使得.....，则称 $\mathcal{R}_K$ 上的 (φ,Γ_K)-模 D，C 是拟 de Rham 不可约的。

$$D\cong\mathbf{D}_K(M_i)\otimes_{\mathcal{R}_{K,C}}\mathcal{R}(\delta_i).$$

若 D 具有一个滤过，则称 $\mathcal{R}_K$ 上的 (φ,Γ_K)-模 D，C 为抛物线型模。

$$0=D_0\subset D_1\subset\cdots\subset D_l=D$$

该滤过由 (φ,Γ_K)-子模给出，且每个分次分量 D_i/D_{i-1} 都是拟 de Rham 不可约的（并称 D 的参数为 $(D_1,D_2/D_1,\ldots,D_l/D_{l-1})$）。因此，若 r 是 de Rham 表示，则 $\mathrm{D}^{\dagger}_{\ \mathrm{rig}}(r)$ 是抛物线型的。接下来我们希望按如下方式进行：给定一个抛物子群 $\mathcal{P}\subset\mathrm{GL}_n$，我们希望参数化具有类型为 $\mathcal{P}$ 的滤过且各分次部分均为拟 de Rham 不可约的秩 n 的 (φ,Γ_K)-模。

但要定义这样的“抛物线型簇”，我们仍有一个问题需要解决。与三角化簇不同，参数空间（即对分次分量进行参数化的空间）的定义尚不明确。一种方法是计算具有如下性质的不可约准 de Rham（φ，Γ_K）-模的模空间 $\mathcal{Z}$（见第 3.1 节）（并附带一些额外的平凡化数据）：

$$\mathcal{Z}(E):=\{\text{quasi-deRham irreducible }(\varphi,\Gamma_K)\text{-module }D\text{ over }\mathcal{R}_{K,E}\}$$

对每个 E/C 有限域扩张（对于一点 $x\in\mathcal{Z}(E)$，记 $\mathcal{R}(x)$为相应的(φ,Γ_K)-模），并用它来定义“抛物线型簇”。更

确切地说，固定一个分拆 $n:=n_1+\cdots+n_l$，并固定$\mathcal{Z}$ 的一个连通分支 $\mathcal{S}_i$，其中 $\mathcal{S}_i$ 中对象的秩为 n_i；再固定一个连续表示$\bar{r}$： $G_K\to \mathrm{GL}_n(k_C)$。我们将精细抛物线簇 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$定义为既约刚性 C-空间，它是下列集合在$\mathfrak{X}_{\bar{r}}\times\mathcal{S}$ 中的 Zariski 闭包：

$$U_{\mathrm{par}}(\bar{r}):=\{(r,x)\in\mathfrak{X}_{\bar{r}}\times\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}\mid \mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(r)\text{ is paraboline with parameter }x\},$$

其中 $\mathcal{S}:=\mathcal{S}_1\times\cdots\times\mathcal{S}_l$ 且 $\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}\subset\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{S}$的一个扎里斯基开子空间，原因与三角型情形中的技术原因类似。下面的定理（见定理 3.28）描述了精细抛物线簇 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的几何，它是 [BHS17b, 定理 2.6] 的对应结果。

定理 1.1。

(1) 刚性空间 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 是等维的，其维数为

$$[K:\mathbb{Q}_p](\frac{n(n-1)}{2}+l)+n^2;$$

(2) 集合 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 是 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中的扎里斯基开子空间，因此它在 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中也扎里斯基稠密；(3) 刚性空间 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 是光滑的。

然而，出于两个原因，我们有必要考虑对“抛物线簇”的另一种合理定义。事实上，若 $z_1=(r,x_1,\dots,x_l)$ 和 $z_2=(r,y_1,\dots,y_l)$ 是 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中的两个点，具有相同的底层伽罗瓦表示 r，且对每个 i 都有 $\mathcal{R}(x_i)[1/t]\cong\mathcal{R}(y_i)[1/t]$，则 $z_1=z_2$（即对任意 i，都有 $x_i=y_i$）。根据函子 D_K 的构造，在 de Rham (φ,Γ_K)- 模层面取 t 的逆，对应于忘掉相关滤过的滤过型 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模的滤过。令 $\mathcal{T}_i$ 为由 $\Gamma(\mathcal{T}_i,\mathcal{O}_{\mathcal{T}_i})\cong\Gamma(\mathcal{S}_i,\mathcal{O}_{\mathcal{S}_i})$ 刻画的 Stein 空间，并记

$$\mathrm{pr}_i:\mathcal{S}_i\to\mathcal{T}_i$$

是 $i=1$、…、l 的典范投影。于是根据定义

$$\mathcal{S}_i\cong\mathcal{T}_i\times\mathrm{Flag}_i,$$

这里，Flag_i 是一个旗簇，用于编码有关滤过的信息，而 pr_i 是到第一因子的投影。由上文的讨论可知（见第 3.1 小节），若 $z_1=(r,(x_i)_i)$ 和 $z_2=(r,(y_i)_i)$ 是 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中具有相同 r 的两个点，且对每个 i 都有 $\mathrm{pr}_i(x_i)=\mathrm{pr}_i(y_i)$，则 $z_1=z_2$（此时我们可以说 z_1 是参数为 $(\mathrm{pr}_1(x_1)\dots,\mathrm{pr}_l(x_l))$ 的抛物线型）。因此，诱导投影 $(\mathcal{T}:=\mathcal{T}_1\times\cdots\times\mathcal{T}_l)$

$$\Xi:\mathfrak{X}_{\bar{r}}\times\mathcal{S}\to\mathfrak{X}_{\bar{r}}\times\mathcal{T}$$

限制在 U_{par} 上是单射，这表明 $\mathcal{T}$ 也可能是参数空间的另一个值得考虑的候选。我们将 U_{par} 在 Ξ 下的像记为 V_{par}，并将抛物线簇 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 定义为 $\mathfrak{X}_{\bar{r}}\times\mathcal{T}$ 中 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的 Zariski 闭包所成的既约刚性空间。我们证明以下关键的比较定理（见注 3.37）；特别地，这意味着集合 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})\cong V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的几何性质是内在的，不依赖于环境空间。

定理 1.2。映射

$$\Xi:X_{\mathrm{par}}(\bar{r})\to Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$$

是真双有理且满射，并具有以下性质： $\Xi^{-1}(V_{\mathrm{par}}(\bar{r}))=U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 且 $\Xi|_{U_{\mathrm{par}}(\bar{r})}$ 是到 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$上的同构。

我们可以推导出 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 与定理 1.1 中类似的几何性质：

(1) 刚性空间 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$是维数为

$$[K:\mathbb{Q}_p](\frac{n(n-1)}{2}+l)+n^2;$$

(2) 集合 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 在 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中是扎里斯基开集，因此它在$Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中也扎里斯基稠密；(3) 刚性空间 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 是光滑的。

定义抛物线簇 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$的另一个原因，是为了将它与自守侧相应的海克特征簇 $D(V)$ 进行比较（见构造 4.14 中对 $D(V)$ 的定义），后者推广了 [BHS17a], BHS17b]中的结果。粗略地说， $D(V)$ 是根据以下设定，由 Loeffler 在 [Loe17] 中的工作构造的特征簇（作了一些修改，因为我们考虑的海克代数比同上文献中的更大）。我们固定某个 CM 对 (F,F^+) 对应的酉群$\mathcal{G}$、$\mathcal{G}\times_{F^+}F_p^+$的一个抛物子群 $\mathcal{P}$、一个权 W（即 $\mathcal{G}(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$ 的一个不可约代数表示），以及 $\mathcal{M}$ 的一个超尖点伯恩斯坦分支 $[\sigma]$ ；其中 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{G}\times_{F^+}F_p^+$ 的莱维子群（而 V 是由 W 和 σ 诱导的 $\mathcal{M}(F_p^+)$ 的一个极大紧子群的表示，见第 4.1 小节）。然后 $D(V)$ 插值自守表示上的海克特征值

$$\pi:=\otimes_v'\pi_v$$

对于权为 W 的酉 $\mathcal{G}$，其在 p 处的局部分量（通过局部朗兰兹对应）对应于由不可约 Weil-Deligne 表示的直和，而这些表示的类型与固定的 Bernstein 连通分支 $[\sigma]$ 所对应的类型相同。显然，$\mathcal{T}$ 是用于此目的的更合适的“抛物线型簇”参数空间：在这一设置中，特征簇的“参数空间”对 Hecke 特征值进行参数化，即对函数进行参数化，因此它应当是一个 Stein 空间（也就是说，它必须由其整体截面所控制）。此外，局部朗兰兹对应赋予 π_v 的是一个 Weil-Deligne 表示，而非带滤过的 Weil-Deligne 表示（或等价地，带滤过的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模）；这也说明了为什么在比较抛物线型簇与特征簇时，参数空间应当忘却有关滤过的信息。根据构造，$D(V)$ 是一个约化闭刚性子空间

$$\mathfrak{X}_{\bar{\rho}}\times\prod_{v\in S_p}\mathcal{T}_v$$

其中，$\bar{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)\to$一般线性群$_n(k_C)$是某个绝对不可约表示，$\mathfrak{X}_{\bar{\rho}}:=(\mathrm{Spf}(R_{\bar{\rho},S}))^{\mathrm{rig}}$是关于$R_{\bar{\rho},S}$的完备局部 $\mathcal{O}_C$-代数，其剩余域为 k_C，并对$\bar{\rho}$ 的形变函子 ρ 进行概形表示，且满足某些额外条件； S_p 是 F 中整除 p 的有限处集合，而 $\mathcal{T}_v$ 是关于 $\bar{\rho}_v:=\bar{\rho}|_{G_{F_{\tilde{v}}}}$ ($\tilde{v}$ 是 F 中整除 v的一个素位)的抛物线簇 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{\rho}_v)$的参数空间。于是，可以将经典自守形式 f（满足某些额外技术条件）视为此类特征簇中的一个点 $z=(\rho,(x_v)_{v\in S_p})$，使得伽罗瓦表示$\rho:\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)\to$一般线性群$_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$在 $G_{F_{\tilde{v}}}$上的限制，在 F 中每个整除 p 的素位 v 处均为参数为 x_v的抛物线型（参见定理4.36的第一部分）。接着，我们证明经典点的稠密性定理（参见定理 4.33；经典点的定义见定义4.17）。

定理1.3。$D(V)$中的支配、非常正则、经典、非临界点集合是扎里斯基稠密的。

上述定理的一个非常重要的应用是，我们可以构造一个从特征簇 $D(V)$ 到抛物线簇 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的态射，即（参见定理 4.36）：

推论 1.4。自然映射

$$\mathfrak{X}_{\bar{\rho}} \times \prod_{v\in S_p} \mathcal{T}_v \to \prod(\mathfrak{X}_{\bar{\rho}_v} \times \mathcal{T}_v)$$
$$(\rho,(x_v)_v) \mapsto (\rho|_{G_{F_{\tilde{v}}}}, j'_v(x_v))_v$$

通过限制诱导出一个映射

$$D(V) \to \prod_{v\in S_p} Y_{\mathrm{par}}(\bar{\rho}_v),$$

这里， j'_v 是由特征扭曲诱导的 $\mathcal{T}_v$ 同构（定义见第 4.5 小节）。

最后，我们指出，在 [BD21], 中，Christophe Breuil 和 Yiwen Ding 证明了一些结果，与注 3.37 的第二部分（即对 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的几何的描述）、命题 4.22 和定理 4.36 中的结果相对应。

致谢。

我谨向我的导师 Eugen Hellmann 表达谢意，感谢他在整个项目中给予我的指导；同时也感谢德国研究联合会（DFG）卓越战略 EXC 2044-390685587“明斯特数学 M¨：动力学—几何—结构”以及德国研究联合会（DFG）CRC 1442“几何：变形与刚性”提供的支持。

记号与约定。

在整篇文章中，我们固定一个 p 素数。

对于任意 E 上的局部域，记 G_E 为 E的绝对伽罗瓦群，记W_E 为 E的魏尔群，记 I_E 为 G_E 的惯性群，并记 k_E为 E 的剩余域，其基数为 q_E。对于任意 E' 在 E 上的伽罗瓦扩张，记 $G_{E'/E}$:=Gal(E'/E)；并记 $E_0 := W(k_E)[1/p]$ （即 E的最大非分歧子域）。我们将局部阿廷映射 Art： $W_E^{\mathrm{ab}} \to E^\times$ 规范化为满足 Art(Fr^{-1}) $= \varpi_E$，其中 Fr^{-1} 为几何弗罗贝尼乌斯（即其在剩余域上的诱导作用为 $x \mapsto x^{1/q_E}$），而 ϖ_E 是 E中的某个一致化子。

We denote $\mathbb{Z}_+^d := \{(k_1 \le \cdots \le k_d) \in \mathbb{Z}^d\}$ and $\mathbb{Z}_{++}^d := \{(k_1 < \cdots < k_d) \in \mathbb{Z}^d\}$.

本文将定义许多由带有一些额外结构的模（或向量空间）构成的对象。为方便起见，在没有歧义时，我们用该模（或向量空间）的记号表示相应对象。对于作用在某个对象上的群，我们也简略地用该群中元素的记号表示相应的作用。

2. Stack of Quasi-deRham (φ,Γ_K)-modules

在本节中，我们固定一个 p-adic 局部域 K。字母 L 始终表示 K 上的某个有限伽罗瓦扩张，而字母 C 始终表示 $\mathbb{Q}_p$ 上的一个域。

2.1. Weil-Deligne 表示的分解。在本小节及其下一小节中，我们假设 C 是代数闭域，并令 A 表示某个 C-代数。记 $q := q_K$ 为 K 的剩余域的基数，并记 $I := I_K$ 为 K 的惯性群。

定义 2.1. K 上、取值于 A 的 Weil-Deligne 表示 (V,ϱ,N)（简称 WD 表示）由一个有限生成的投射 A-模 V、一个群同态 ϱ（从 W_K 到 $\mathrm{Aut}_A(V)$），且在某个开子群 $I_L\subseteq W_L\subseteq W_K$ 上平凡，其中 $I_L\subseteq W_L\subseteq W_K$ 对某个有限域扩张 L over K 而言；在此情形下，我们称 ϱ 在 L 上非分歧，并进一步称 V 为 ϱ-非分歧，如果 ϱ 在 K 上非分歧），以及一个 A-线性端同态 N（作用于 V）组成，并满足对任意 g 属于 W_K，都有 $q^{\|g\|_K}gN=Ng$。这里，群同态 $\|\cdot\|_K\colon W_K\to\mathbb{Z}$ 由 $\bar{g}\colon\overline{\mathbb{F}}_p\to\overline{\mathbb{F}}_p$, $x\mapsto x^{q^{-\|g\|_K}}$ 唯一确定。

此外，Weil-Deligne 表示之间的态射 $\alpha\colon(V,\varrho,N)\to(V',\varrho',N')$ 是一个 A-同态 $\alpha\colon V\to V'$，满足 $\alpha\circ N=N'\circ\alpha$，并且对任意 $g\in W_K$，$\alpha\circ\varrho(g)=\varrho'(g)\circ\alpha$，我们将态射集合记为 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{WD}}(V_1,V_2)$。

注 2.2. 回顾一下，对于 Weil-Deligne 表示 (V,ϱ,N)，通常称 V 非分歧，若 $N=0$ 且 $\varrho|_{I_K}$ 平凡。因此，我们使用名称 ϱ-非分歧来区分这些不同的定义（实际上，本文中我们绝不会称 V 非分歧）。

定义 2.3. 令 $\mathfrak{W}^{L/K,\,d}$ 表示定义在 C-概形上的群胚纤维范畴，它将 A 赋予由 K 上的秩为 d 的 Weil-Deligne 表示 (V,ϱ,N) 组成的群胚，其中 ϱ 在 L上非分歧。

引理 2.4. 设 V 是 A上的 K 的一个 WD 表示，则其作为 A上的 I-表示有如下分解:

$$V=\bigoplus_{\tau}V_\tau,$$

这里 τ遍历 C 上的不可约光滑 I-表示的所有同构类，而 $V_\tau\cong\tau\otimes_C U_\tau$ 是某个有限生成投射 A-模 U_τ。此外，每个 V_τ 在 N作用下稳定（但一般不在 W_K作用下稳定）。

证明. 由于 ϱ 在 I 上的限制通过 I的某个有限商群 I/H 分解，因此 ϱ 可视为 I/H的一个表示。此外，V可视为一个带有线性 (I/H) 作用的 C-向量空间。因此我们得到这样的分解。

为了证明 V_τ 是一个 A-模，可以将 V_τ 改写为自然单射的像:

$$\begin{aligned} i_\tau:\tau\otimes_C\mathrm{Hom}_I(\tau,V)&\hookrightarrow V\\ v\otimes f&\mapsto f(v)\end{aligned}$$

并注意到 $\mathrm{Hom}_I(\tau,V)$ 的自然 A-模结构由下式定义:

$$r(f)(v):=rf(v)$$

对于任意 $f\in\mathrm{Hom}_I(\tau,V)$，该结构与 V 的 A-模结构相容。因此，V_τ 是 V 的一个 A-子模（V_τ 是投射的，因为它是 V 的一个直和项）。

此外，若令 $N(f)(v):=N(f(v))$，则对于任意 $g\in I$，有

$$N(f)(g(v))=N\circ f\circ g(v)=N\circ g\circ f(v)=g\circ N\circ f(v).$$

因此 $N(f)\in\mathrm{Hom}_I(\tau,V)$。这定义了 $\mathrm{Hom}_I(\tau,V)$ 的一个 N-结构，使得自然单射 $\tau\otimes\mathrm{Hom}_I(\tau,V)\hookrightarrow V$是 N-等变的。

由此可知，对于任意 $v\in V_\tau$，它都可以表示为 $\sum f_t(v_t)$（其中 $t\in T$指标集 T 为有限集，且有 $f_t\in\mathrm{Hom}_I(\tau,V)$ 和 $v_t\in\tau$），均有

$$N(v)=\sum_{t\in T}N(f_t)(v_t).$$

因此， $N(v)$ 属于 V_τ，这意味着 $V_\tau$is N-稳定。 □

引理 2.5. 设 (V,τ) 是 C 上 I 的一个不可约光滑表示。并设

$$W_\tau=\{g\in W_K|g^{-1}\tau g\sim\tau\}$$

然后 $W_\tau/I\cong\mathbb{Z}$。在相差一个标量的意义下， τ 唯一地延拓为W_τ 的一个光滑表示 $\tilde{\tau}$（也就是说，在选定某个作为 W_τ/I生成元的 $g\in W_\tau$ 之后，所有可能的 $\tilde{\tau}$（g）的选择都只相差一个标量）。

证明。要证明 $W_\tau/I\cong\mathbb{Z}$，我们只需证明 $W_\tau\neq I$ as $W_K/I\cong\mathbb{Z}$。

令 $n:=[I:\ker\tau]$。那么对于任意元素 $g\in W_K\setminus I$，$g^{n!}$ 的共轭作用在 $I/\ker\tau$ 上是平凡的，因此 $g^{n!}\in W_\tau$。

可以选取 $g\in W_\tau$，使其为 W_τ/I 的生成元。于是存在某个 $A\in GL(V)$，使得对任意 $h\in I$， $\tau(g^{-1}hg)=A^{-1}\tau(g)A$。由于 τ 不可约，这样的 A 在相差一个标量的意义下唯一。因此，在相差一个标量的意义下，可以通过要求 $\tilde{\tau}(g)=A$，将 τ 唯一延拓到 W_τ。□

注 2.6. 从现在起，对于每个定义在 C 上、取值于 I 的不可约光滑表示 τ，固定一个到 W_τ 的扩张 $\tilde{\tau}$。记 $e_\tau:=[W_K:W_\tau]$，并记 K_τ 为 K 的唯一非分歧扩张，其次数为。容易看出 $W_\tau=W_{K_\tau}$（即 W_τ 是 K_τ 的魏尔群）。

对于定义在 A 上、取值于 K 的任意 Weil-Deligne 表示（V,ϱ,N），根据上述讨论，可以通过如下定义，将 $\mathrm{Hom}_I(\tilde{\tau},V)$ 视为定义在 R 上、取值于 K_τ 的 Weil-Deligne 表示： $g(f):=g\cdot f\cdot g^{-1}$，以及对任意 $g\in W_\tau$， $N(f):=N\cdot f$，并且 $f\in\mathrm{Hom}_I(\tilde{\tau},V)$。它确实是一个 Weil-Deligne 表示，因为

$$N\circ g(f)=N\circ g\circ f\circ g^{-1}=q^{\|g\|_K}g\circ N\circ f\circ g^{-1}=q_{K_\tau}^{\|g\|_{K_\tau}}g\circ N(f)$$

（此处 q_{K_τ} 是 K_τ 的基数，并注意 $q^{\|g\|_K}=q_{K_\tau}^{\|g\|_{K_\tau}}$）。此外，$\mathrm{Hom}_I(\tilde{\tau},V)$是 ϱ-非分歧的，因为它限制在 $I_{K_\tau}=I$上是平凡的。

若将 $\tilde{\tau}$ 视为 K_τ 上取值于 C的 WD 表示，则该单射（在引理 2.4 的证明中，这正是同一个映射，因为左边是同一个向量空间）

$$i_\tau:\tilde{\tau}\otimes_C\mathrm{Hom}_I(\tilde{\tau},V)\hookrightarrow V$$

是 K_τ 上取值于 A的 WD 表示之间的态射。

引理2.7。设 τ 是 I 上取值于 C的光滑不可约表示。令（V,ϱ,N）是 K_τ上取值于 A的 Weil-Deligne 表示，且 V是 ϱ-非分歧的。典范映射

$$\begin{aligned}h:V&\to\mathrm{Hom}_I(\tilde{\tau},\tilde{\tau}\otimes_C V)\\ v&\mapsto(w\mapsto w\otimes v)\end{aligned}$$

是 K_τ的 Weil-Deligne 表示之间的同构。

证明。由于 $\tilde{\tau}$ 是一个有限维向量空间，因此

$$\mathrm{Hom}_I(\tilde{\tau},\tilde{\tau}\otimes_C V)\cong(\mathrm{Hom}_C(\tilde{\tau},\tilde{\tau}\otimes_C V))^I\cong(\mathrm{Hom}_C(\tilde{\tau},\tilde{\tau})\otimes_C V)^I.$$

注意， I 在 V上平凡作用，因此

$$(\mathrm{Hom}_C(\widetilde{\tau},\widetilde{\tau})\otimes_C V)^I \cong (\mathrm{Hom}_C(\widetilde{\tau},\widetilde{\tau}))^I \otimes_C V \cong (\mathrm{Hom}_I(\widetilde{\tau},\widetilde{\tau})\otimes_C V)\cong V.$$

可以验证，上述同构与典范映射 h 一致，从而完成证明。□

从现在起，对于每个 I 在 C 上的不可约光滑表示的 W_K-共轭类 $[\tau]$，我们选取并固定该共轭类的一个代表元 τ，并将 Ω 记为所有 W_K-共轭类 $[\tau]$对应的 τ 的集合。并令

$$\Omega_L := \{\tau\in\Omega \mid \tau|_{I_L} \text{ is trivial}\}.$$

命题 2.8. 设 V 是 A上的 Weil-Deligne 表示。那么存在一个典范同构

$$V\cong\bigoplus_{\tau\in\Omega}\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}\otimes_C \mathrm{Hom}_I(\widetilde{\tau},V))$$

K 在 R上的 Weil-Deligne 表示】【。

此外，若我们将 K_τ 的 WD 表示 $\mathrm{Hom}_I(\widetilde{\tau},V)$ 记为 $V(\widetilde{\tau})$，那么对于 K 的任意两个 WD 表示 V_1、V_2，有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{WD}}(V_1,V_2)=\bigoplus_{\tau\in\Omega}\mathrm{Hom}_{\mathrm{WD}}(V_1(\widetilde{\tau}),V_2(\widetilde{\tau}))$$

证明。根据注 2.6 中的讨论，有 $i_\tau\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{WD}}(\widetilde{\tau}\otimes_C\mathrm{Hom}_I(\widetilde{\tau},V)\ V|_{W_\tau})$。应用 $(-)|_{W_\tau}$ 的左伴随函子 $\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}$，可得如下 WD 表示的态射:

$$\begin{aligned}\iota_\tau : \mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}\otimes_C \mathrm{Hom}_I(\widetilde{\tau},V)) &\to V\\ g\otimes v\otimes f &\mapsto g\circ f(v).\end{aligned}$$

对于任意 τ和 $g\in G$，用 τ^g 表示同一空间，但其 I-作用由g 扭曲而来；也就是说，对于任意 $v\in\tau$和 $h\in W_\tau$，令 $h(v^g):=g^{-1}hg(v)$（这里 v^g 表示与 v 相同的元素，但带有扭曲的 W_τ-作用）。我们定义

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_I(\tau,V)&\to\mathrm{Hom}_I(\tau^g,V)\\ f&\mapsto f^g:=(v^g\mapsto g\circ f(v))\end{aligned}$$

f^g确实是 $\mathrm{Hom}_I(\tau^g,V)$ 中的一个元素，因为

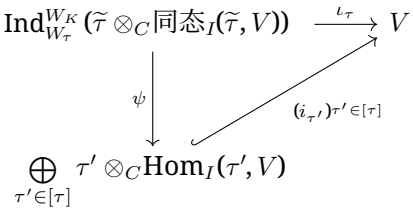
$$h^{-1}f^gh(v^g)=h^{-1}f^g(g^{-1}hg(v))=g(g^{-1}h^{-1}g)f(g^{-1}hg)(v)=gf(v)=f^g(v^g)$$

对于任意的 $v\in\tau$ 和 $h\in I$。显然，可以直接构造该映射的逆映射，因此该映射是双射。接下来考虑映射

$$\begin{aligned}\psi : \mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}\otimes_C \mathrm{Hom}_I(\widetilde{\tau},V)) &\to \bigoplus_{\tau'\in[\tau]}\tau'\otimes_C\mathrm{Hom}_I(\tau',V)\\ g\otimes v\otimes f&\mapsto v^g\otimes f^g.\end{aligned}$$

注意，若我们选取 W_K/W_τ 的一组代表元 $\{g_1,\dots,g_{e_\tau}\}$，则上述映射右侧为 $\bigoplus\ \tau^{g_i}\otimes_C\mathrm{Hom}_I(\tau^{g_i},V)$。由此可知， ψ 是集合之间的一个$1\le i\le e_\tau$双射。

令 $\tau\in\Omega$，注意以下图表：



交换图如下，使得

$$((i_{\tau'})_{\tau'})\circ\psi(g\otimes v\otimes f)=i_{\tau^g}(v^g\otimes f^g)=g\circ f(v)=\iota_\tau(g\otimes v\otimes f).$$

因此，ι_τ 是单射，其像为 $\bigoplus_{\tau'\in[\tau]} V_{\tau'}$。由引理 2.4 可知，映射

$$\iota=(\iota_\tau)_{\tau\in\Omega}:\bigoplus_{\tau\in\Omega}\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}\otimes_C\mathrm{Hom}_I(\widetilde{\tau},V))\to V$$

是一个同构。

对于“此外”部分，考虑该函子。

$$\mathcal{F}_\tau:\{\text{WD 表示的 } W_K\}\to\{\varrho\text{–非分歧 WD 表示的 } W_\tau\}$$
$$V\to\mathcal{F}_\tau(V):=V(\widetilde{\tau})$$

并令 $\mathcal{F}:=\bigoplus_{\tau\in\Omega}\mathcal{F}_\tau$。我们断言该函子

$$\mathcal{G}:(U_\tau)_{\tau\in\Omega}\mapsto\bigoplus_{\tau\in\Omega}\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}\otimes_C U_\tau)$$

是 $\mathcal{F}$ 的逆，其中 U_τ 是 W_τ 的 ϱ-非分歧 WD 表示。实际上，我们证明的内容表明 $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}\cong\mathrm{id}$。注意，对任意 τ，

$$\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}\otimes_C U_\tau)\cong\bigoplus_{g\in W_K/W_\tau}\widetilde{\tau}^g\otimes_C U_\tau$$

作为 K_τ 上的 WD 表示。并且对任意 $\tau'\ncong\tau\in\Omega$ 或 $g\in W_K\setminus W_\tau$，

$$\mathrm{Hom}_I(\widetilde{\tau},(\widetilde{\tau}')^g\otimes_C U_\tau)=0,$$

根据 W_τ 的定义，作为 $\tau\ncong(\tau')^g$。结合引理2.7的结论，对于任意光滑不可约的 I-表示 τ_0，自然映射

$$U_{\tau_0}\to\mathrm{Hom}_I(\widetilde{\tau}_0,\bigoplus_{\tau\in\Omega}\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}\otimes_C U_\tau))$$
$$v\mapsto(w\mapsto w\otimes v)$$

是一个双射。这意味着我们有自然同构 $\mathrm{id}\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$。我们得出结论，$\mathcal{F}$ 是范畴等价，因此

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{WD}}(V_1,V_2)=\bigoplus_{\tau\in\Omega}\mathrm{Hom}_{\mathrm{WD}}(V_1(\widetilde{\tau}),V_2(\widetilde{\tau}))$$

□

定理 2.9. 对于任意的复数域 τ 上 C的不可约光滑表示 I，记d_τ 为其底层向量空间的维数。则存在一个同构

$$\Theta:\mathfrak{W}^{L/K,d}\xrightarrow{\sim}\coprod_{\{(n_\tau)_{\tau\in\Omega_L}|\star\}}\prod_{\tau\in\Omega_L}\mathfrak{W}^{K_\tau/K_\tau,n_\tau}$$

作为 C-群胚，这里的指标集中的 $\star$-条件是

$$\sum_{\tau\in\Omega_L} n_\tau d_\tau e_\tau = d.$$

证明。设 A 是一个连通的 C-代数，并且 (V,ϱ,N) 是 $\mathfrak{W}^{L/K,d}(A)$ 中的一个 Weil-Deligne 表示。那么，根据上面的命题，映射 $\Theta(V):=(\mathrm{Hom}_I(\widetilde{\tau},V))_{\tau\in\Omega_L}$ 给出了所需的同构。□

注记 2.10。沿用 [HH13，定理 3.2]，中的记号，我们可以看到 $\mathfrak{W}^{K/K,d}$ 同构于 $[P_{K_0,d}/\mathrm{Res}^{K_0/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{d,K_0})]\otimes_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Spec}(C)$。因此它是一个维数为 0 的 Artin 叠，进而 $\mathfrak{W}^{L/K,d}$ 也是如此。

2.2. Weil-Deligne 表示上的滤过。众所周知，[BS07] 表明 (φ,N,G_K)-模的范畴等价于 K 的 Weil-Deligne 表示范畴。现在我们想要对带滤过的 (φ,N,G_K)-模所构成的叠作出恰当的描述（见下文定义）。为此，我们通过在 Weil-Deligne 表示上赋予一些滤过结构，将这一结果推广到带滤过的 (φ,N,G_K)-模范畴；这是因为我们已将 Weil-Deligne 表示叠分解为平凡惯性类型的 Weil-Deligne 表示叠，而这些叠等价于 (φ,N)-模叠，后者在 [HH13] 中已有深入研究。

定义 2.11. 设 E 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的一个域扩张。

(a) A 上的局部自由 E-模 M 是一个有限生成的 $(E\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)$-模，它在 $\mathrm{Spec}A$ 上扎里斯基局部地是 $E\otimes_{\mathbb{Q}_p}A$ 上的自由模。(b) A 上的滤过局部自由 E-模 $(M,\mathcal{F}^\bullet)$ 由一个 A 上的 E-自由模 M 及其上的一个递减、分离且穷尽的 $(E\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)$-子模 $\mathbb{Z}$-滤过 $\mathcal{F}^\bullet$ 组成，其中 $\mathrm{gr}^i_{\mathcal{F}}M:=\mathcal{F}^iM/\mathcal{F}^{i+1}M$ 是局部自由的 A-模。滤过 E-自由模之间的态射 $\alpha:(M,\mathcal{F}^\bullet)\to(M',\mathcal{F}^\bullet)$ 是一个 $(E\otimes_{\mathbb{Q}_p}R)$-同态 $\alpha:M\to M'$，满足对任意 $i\in\mathbb{Z}$，$\alpha(\mathcal{F}^iM)\subseteq\widetilde{\mathcal{F}}^iM'$。

(c) 一个 A 上的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 (M,φ_M,N,γ) 由一个 R 上的 L_0-自由模 M、一个 Frobenius 线性映射 $\varphi_M:M\to M$、一个 $(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)$-线性映射 $N:M\to M$，以及一个群同态 $\gamma:G_{L/K}\to\mathrm{Aut}_A(M)$ 组成，使得

(1) $\gamma(g)((l\otimes 1)\cdot m)=(g(l)\otimes 1)\cdot g(m)$，(2) φ_M 是双射，(3) $N\circ\varphi_M=p\cdot\varphi_M\circ N$，(4) 对任意 $g\in G_{L/K}$，$N\circ\gamma(g)=\gamma(g)\circ N$。若 $L=K$，则简称 M 为 A 上的 (φ,N)-模

t.

$(\varphi,N,G_{L/K})$-模的态射 $\alpha:(M,\varphi_M,N,\gamma)\to(M',\varphi_{M'},N',\gamma')$ 是一个 $(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)$-同态 $\alpha:M\to M'$，满足

(1) $\alpha\circ\varphi_M=\varphi_{M'}\circ\alpha$，(2) $\alpha\circ N=N'\circ\alpha$，

(3) $\alpha\circ\gamma(g)=\gamma'(g)\circ\alpha$ 对于任意 $g\in G_{L/K}$。

(d) A上的滤过 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 $(M,\mathcal{F}^\bullet)$ 由一个 A 上的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 M 以及一个A 上的滤过局部自由 L-模 $(M_L,\mathcal{F}^\bullet)$ 构成（这里 $M_L:=M\otimes_{L_0}L$），使得对于任意 $g\in G_{L/K}$和 $i\in\mathbb{Z}$，$g(\mathcal{F}^iM_L)\subseteq(\mathcal{F}^iM_L)$。

若 $L=K$，我们简称 M 为 A 上的滤过 (φ,N)-模。

一个态射 $(M,\mathcal{F}^\bullet)\to(M',\mathcal{F}^\bullet)$ 是指 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模之间的一个态射，是指满足 $(\alpha\otimes\mathrm{id}_L)(\mathcal{F}^iM_L)\subseteq\mathcal{F}^iM'_L$ 的 $(\varphi,N,G_{L/K})$- 模态射。

定义 2.12. 我们在 C-概形上定义以下群胚纤维化范畴：

(1) 用 $\mathbf{M}^K$ 表示如下范畴：将 A 映到局部自由 K-模的群胚；(2) 用 $\mathbf{FM}^K$ 表示如下范畴：将 A 映到局部自由 K-模的群胚；(3) 用 $\mathfrak{M}_0^{L/K}$ 表示如下范畴：将 A 映到 $(\varphi,N,G_{L/K})$- 模的群胚；(4) 用 $\mathfrak{M}^{L/K}$ 表示如下范畴：将 A 映到滤过的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模的群胚。

注 2.13. 若在上述任一记号上添加上标 d（例如 $\mathbf{M}^{K,\,d}$），则表示秩为 d 的对象构成的全忠实子群胚。本文中的其他群胚也遵循这一约定，含义显然。

引理 2.14. 设 E 是一个域，且 E'、E'' 是 E 的有限域扩张，并满足 $|\mathrm{Hom}_E(E',E'')|=[E':E]$。设 A 是一个 E''-代数，且 M 是一个 $(E'\otimes_E A)$-模。

(1) 那么环同态：

$$E'\otimes_E A\to\prod_{\eta\in\mathrm{Hom}_E(E',E'')}A,\ a\otimes b\mapsto(\eta(a)b)_\eta$$

是一个同构。

(2) 令 e_η 表示$\prod_{\eta\in\mathrm{Hom}_E(E',E'')}$ E'' 中的唯一元素，该元素在第 η 个坐标处等于 1，并在其他坐标处为零。于是有典范分解：

$$M\cong\prod_{\eta\in\mathrm{Hom}_E(E',E'')}M_\eta(:=e_\eta M).$$

特别地，令 $\eta\in\mathrm{Hom}_E(E'E'')$。映射的复合

$$e_\eta M\hookrightarrow M\twoheadrightarrow M\otimes_{(E'\otimes_E A),\eta\otimes\mathrm{id}}A$$

是 $(E'\otimes_E A)$-模的一个同构。

证明。

（1）注意，条件 $[E':E]=\#\,\mathrm{Hom}_E(E',E'')$ 蕴含 E'/E 是可分域扩张。因此，根据本原元定理，存在一个元素$x\in E'$ 使得 $E'=E(x)$。

如果我们选取 $\{1,x,\dots,x^{n-1}\}$ 作为 E-基 E'（注意，这也是一个 A-基 $E'\otimes_E A$），并选取 $\{e_\eta\}_{\eta\in\mathrm{Hom}_E(E',E'')}$ 作为 A-基 $\prod$ A，那么$_{\eta\in\mathrm{Hom}_E(E',E'')}$ 上述环同态在这两个基下对应矩阵$B:=(\eta(x^i))_{i,\ \eta}$。然后，通过直接计算，

$$\det(B^TB)=\prod_{\eta\neq\eta'}(\eta(x)-\eta'(x)),$$

由于 x 是可分元素，因此它不等于零。因此，上述环同态是同构。

（2）引理的第二部分由以下同构得出：

$$M\cong M\otimes_{(E'\otimes_E A)}(\prod_{\eta\in\mathrm{Hom}_E(E',E'')}A)\cong\prod_{\eta\in\mathrm{Hom}_E(E',E'')}(M\otimes_{(E'\otimes_E E''),\eta\otimes\mathrm{id}}A).$$

注意，$M\otimes_{(E'\otimes_E A)\ \eta\otimes\mathrm{id}}E''$ 根据定义恰好等于 $e_\eta M$。

□

设 E,E',E'',A 与上面的引理设定相同。对于一个 $(E'\otimes_E A)$-模M，我们总将 M_η 记为 M 的子模 $e_\eta M$。

固定一个嵌入 $\eta_0:\ L_0\hookrightarrow C$。由 BS07 命题 4.1], ，有一个群胚同构

$$F:\mathfrak{M}_0^{L/K,d}\to\mathfrak{W}^{L/K,d},(M,\varphi_M,N_M,\gamma)\mapsto(V,\varrho,N_V),$$

其中 $V=M_{\eta_0}$, $N_V=N_M|_V$ 和 ϱ 由 φ_M 和 γ 确定。

定理 2.15。有一个群胚同构:

$$\mathrm{FWD}:\mathrm{FM}^{K,d}\times_{\mathrm{M}^{K,d},P}\mathfrak{W}^{L/K,d}\to\mathfrak{M}^{L/K,d},$$

此处 $\mathrm{FM}^{K,d}\to\mathrm{M}^{K,d}$ 是自然遗忘函子，而态射

$$P:\mathfrak{W}^{L/K,d}\to\mathrm{M}^{K,d}$$

由 $V\to V\otimes_{\mathbb{Q}_p}K$ 定义。

证明。考虑该态射。

$$P':\mathfrak{M}_0^{L/K,d}\to\mathrm{M}^{\mathrm{K,d}}$$
$$(M,\varphi_M,N,\gamma)\mapsto M_K:=(M\otimes_{L_0}L)^{G_{L/K}}.$$

注意，由伽罗瓦下降，我们有如下同构:

$$\mathrm{FM}^{K,d}\times_{\mathrm{M}^{K,d}}\mathfrak{M}_0^{L/K,d}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{M}^{L/K,d}$$
$$((D,\mathcal{F}^\bullet),(M,\varphi_M,N,\gamma),\alpha:D\xrightarrow{\sim}M_K)\mapsto(M,\varphi_M,N,\gamma,\widetilde{\mathcal{F}}^\bullet),$$

这里 $\widetilde{\mathcal{F}}^iM_L:=\alpha(\mathcal{F}^iD)\otimes_K L$。因此，只需构造一个典范同构 $P\circ F\xrightarrow{\sim}P'$，即 $M_{\eta_0}\otimes_{\mathbb{Q}_p}K$ 与 $(M_L)^{G_{L/K}}$ 典范同构。

选择 $\widetilde{\eta}_0$ 的 $L_0\to C$ 的 η_0 的一个提升。注意，存在典范同构$M_L\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)\ \widetilde{\eta}_0\otimes1}A=(M\otimes_{(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A))\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)\ \widetilde{\eta}_0\otimes1}A\cong M\otimes_{(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)\ \eta_0\otimes1}A$，它是 A-模。考虑以下图表。

$$\begin{array}{ccccc}
M_{\eta_0} & \hookrightarrow & M & \twoheadrightarrow & M\otimes_{(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A),\eta_0\otimes1}A \\
\downarrow{\scriptstyle f_\eta} & & \downarrow & & \downarrow\cong \\
M_{L,\widetilde{\eta}_0} & \hookrightarrow & M_L & \twoheadrightarrow & M_L\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A),\widetilde{\eta}_0\otimes1}A.
\end{array}$$

由于两行中的水平箭头复合以及最右侧的竖直映射都是同构，因此存在一个唯一的典范映射。

$$f_\eta:M_{\eta_0}\to M_{L,\widetilde{\eta}_0}$$

使得整个图表交换，并且 f_η 是 A-模的一个同构。因此，只需证明 $M_{L,\widetilde{\eta}_0}\otimes_{\mathbb{Q}_p}K$ 与 $(M_L)^{G_{L/K}}$ 作为 $(K\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)$-模是典范同构的。

由伽罗瓦下降可得一个典范同构。

$$(M_L)^{G_{L/K}}\otimes_K L\xrightarrow{\sim}M_L.$$

注意，映射 $A\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\to A,\ a\otimes b\mapsto\widetilde{\eta}_0(b)\cdot a$ 在 $e_{\widetilde{\eta}_0}(A\otimes_{\mathbb{Q}_p}L)$ 上的限制是一个双射（根据引理 2.14(2)）。因此，我们有一个典范同构。

$$e_{\widetilde{\eta}_0}(A\otimes_{\mathbb{Q}_p}L)\otimes_{\mathbb{Q}_p}K\xrightarrow{\sim}A\otimes_{\mathbb{Q}_p}K$$

将两边与 $(M_L)^{G_{L/K}}$ 在 $A\otimes_{\mathbb{Q}_p}K$ 上作张量积后，左边为

$$\begin{aligned}(M_L)^{G_{L/K}}\otimes_{A\otimes_{\mathbb{Q}_p}K}e_{\widetilde{\eta}_0}(A\otimes_{\mathbb{Q}_p}L)\otimes_{\mathbb{Q}_p}K&\cong e_{\widetilde{\eta}_0}((M_L)^{G_{L/K}}\otimes_K L)\otimes_{\mathbb{Q}_p}K\\&\cong e_{\widetilde{\eta}_0}M_L\otimes_{\mathbb{Q}_p}K\\&\cong M_{L,\widetilde{\eta}_0}\otimes_{\mathbb{Q}_p}K,\end{aligned}$$

且右边是$(M_L)^{G_{L/K}}$。于是结论得证。 □

注 2.16.

(1) 假设 A 是连通的。对于任意秩为 d 的 A 上的局部自由 K-模 M，根据引理 2.14，$M\cong\prod_{\eta:K\hookrightarrow C}M_\eta$ 以及 M_η 的 $(K\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)$-子模 M' 的集合与 M_η 的 M'_η 子模系组成的集合之间存在双射。此外，M_η 是 A 上有限秩的局部自由模。因此，在 M 上给定一个滤过，等价于给出由局部自由 A 子模构成的 $\{M_\eta\}_\eta$ 上递减、分离且完备的 $\mathbb{Z}$ 滤过系。因此，对于任意 $(M,\mathcal{F}^\bullet)\in \mathrm{FM}^{K,\,d}$ 以及每个 $\eta\in\mathrm{Hom}(K,C)$，都存在唯一的非递减整数序列 d

$$(k_{\eta,1}\le\cdots\le k_{\eta,d})\in\mathbb{Z}_+^d$$

使得

$$\mathrm{rank}(\mathrm{gr}^i_{\mathcal{F}}M_\eta)=|\{m|k_{\eta_i}=m\}|$$

我们称 $\mathrm{wt}_\eta(M):=(k_{\eta,1}\le\cdots\le k_{\eta,d})$ 为 M 的 η-滤过权。

(2) 用叠的语言来说，根据定义，$\mathrm{M}^{K,d}=\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}_p}[\mathrm{Spec}(C)/\mathrm{GL}_{d,C}]$，其中 $\mathrm{Res}^{K/\mathbb{Q}_p}$ 表示韦伊限制。该观察意味着

$$\mathrm{M}^{K,d}\cong\coprod_{\eta:K\hookrightarrow C}[\mathrm{Spec}(C)/\mathrm{GL}_{d,C}]$$

作为一个 C-叠。类似地，对于滤过权重数据 $(\mathrm{wt}_\eta)_\eta$，若我们将$P_{\mathrm{wt}_\eta,C}$ 记为类型为 wt_η 的分块上三角矩阵的 C-旗簇（即 $P_{\mathrm{wt}_\eta,C}$的大小为 $(n_1,\ldots,n_l)$，其中某个 n 的分拆为 $(n_1,\ldots,n_l)$，且 $k_{\eta,s}<k_{\eta,s+1}$ 当且仅当对于某个 i 有 $s=n_1+\cdots+n_i$），并将 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}_\eta}:=[\mathrm{GL}_{d,C}/P_{\mathrm{wt}_\eta,C}]$记为类型为 wt_η 的旗簇，则这一观察也意味着

$$\mathrm{FM}^{K,d}\cong\coprod_{(\mathrm{wt}_\eta)_\eta}\prod_{\eta:K\hookrightarrow C}[\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}_\eta}/\mathrm{GL}_{d,C}],$$

这里 $(\mathrm{wt}_\eta)_\eta$ 遍历所有滤过权。此外，遗忘函子

$$\begin{aligned}\mathrm{FM}^{K,d}&\to\mathrm{M}^{K,d}\\(M,\mathcal{F}^\bullet)&\mapsto M\end{aligned}$$

由 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}_\eta}\to\mathrm{Spec}(C)$ 诱导。因此，该态射是光滑的，其纤维是旗簇乘积的并集。

推论 2.17. 群胚 $\mathfrak{M}^{L/K,\,d}$ 是一个 Artin 叠。

证明。它由注记 2.10、注 2.16 和定理 2.15 得出。 □

2.3. (φ,Γ_K)-模族的构造。在本小节中，我们固定 C 一个有限域扩张，使得 $|\mathrm{Hom}(L,C)|=[L:\mathbb{Q}_p]$。

在 [Ber04], Berger 构造了一个全忠实函子，将 $\mathbb{Q}_p$ 上滤过的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模范畴映到 $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 上的 (φ,Γ_K)-模范畴（见下文定义）。本小节将这一结果推广到由刚性空间参数化的这些对象族。首先，简要回顾一下关于 Robba 环的一些基本记号（见 [Ber04]）：

设 E 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的有限域扩张（在本小节中， $E=K$ 或 L），并设 $(\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 中 p^n 次单位根的一个相容系（即 $(\varepsilon^{(n)})^p=\varepsilon^{(n-1)}$）。记 $E_n:=E(\varepsilon^{(n)})$ 为 $n\geq 1$，并记 $E_\infty:=\cup_{n\geq 1}E_n$。记 $H_E:=G_{E_\infty}$，并记 $\Gamma_E:=G_E/H_E$。

令 e_E 为 $E_\infty/(E_0)_\infty$ 的分歧次数（这里 E_0 是 E的最大非分歧子域）。对于任意 $s\geq r$，我们定义

$$\mathcal{R}_E^{[r,s]}:=\{f(X_E)\in(E_\infty)_0[\![X_E^{\pm 1}]\!]|\ f(x)\text{ converges }\forall x\text{ with }\frac{1}{e_E s}\leq \mathrm{val}(x)\leq\frac{1}{e_E r}\}$$

以及 $\mathcal{R}_E^r:=\cap_{s\geq r}\mathcal{R}_E^{[r,s]}$ （$(E_\infty)_0$ 是 E_∞的最大非分歧子域）。按照惯例，我们记 $\mathcal{R}_E^{[r,\infty]}:=\mathcal{R}_E^r$。当 $s\neq\infty$时，环 $\mathcal{R}_E^{[r,s]}$ 是诺特的；否则不是（注意，这里的 $\mathcal{R}_E^{[r,s]}$ 定义源自 [Ber04], ，而 [KPX14] 中的类似记号定义了一个类似的环，但区间按因子e_E进行了缩放）。

本小节将定义若干符号中包含区间 $[r,s]$的环和函子。它们的定义取决于 $\mathcal{R}_E^{[r,s]}$。除非另有明确说明，按照惯例，当这些记号中出现区间 $[r,s]$ 时，我们允许 $s=\infty$ （但不允许 r），并分别通过将定义中的 $\mathcal{R}_E^{[r,s]}$ 替换为 $\mathcal{R}_E^r$ 来定义它们。

$\mathcal{R}_E^{[r,s]}$ 上存在相容的 Γ_E-作用，以及相容的单射 Frobenius 同态 $\varphi:\mathcal{R}_E^{[r,s]}\to\mathcal{R}_E^{[pr,ps]}$。我们定义 Robba 环

$$\mathcal{R}_E:=\bigcup_{r>0}\mathcal{R}_E^r$$

随后赋予其一个连续的 $((\varphi,\Gamma_E))$-作用。在每个 $\mathcal{R}_E^{[r,s]}$ 中，都有一个特殊元素 t，使得 $\varphi(t)=pt$，且 $\gamma(t)=\chi(\gamma)t$（这里 $\chi:\Gamma_E\to\mathbb{Z}_p^\times$ 是圆分特征）。对于任意 $s\geq p^{n-1}(p-1)\geq r\geq r(E)$，我们都有一个单射 $\iota_n:\mathcal{R}_E^{[r,s]}\to E_n[\![t_n]\!]$，满足 $t\mapsto t_n/p^n$。这里，$r(E)$ 是一个依赖于 E 的正实数。

此外，令 $\log X$ 为一个形式变量，我们通过以下方式将 φ、Γ_E 作用扩展到 $\mathcal{R}_E[\log X]$上。

$$\varphi(\log X):=p\log X+\log(\varphi(X)/X^p),$$

and

$$\gamma(\log X):=\log X+\log(\varphi(X)/X).$$

（我们还通过相同的公式将 Γ_E-作用扩展到 $\mathcal{R}_E^{[r,s]}[\log X]$ 上。）我们将映射 ι_n 在 $\mathcal{R}_E^{[r,s]}[\log X]$ 上扩展为

$$\iota_n(\log X)=\log(\varepsilon^{(n)}\cdot\exp(t_n/p^n)-1).$$

对于 $?\in\{[s,r],r,\emptyset\}$，我们定义 N 为 $\mathcal{R}_E^?[\log X]$ 上唯一的 $\mathcal{R}_E^?$-导子，使得

$$N(\log X)=-p/(p-1).$$

.

我们也在类似的设置下为任意仿射 C-代数 A 定义相对 Robba 环（更多详情请参见 [KPX14, 第 2]节）。例如，我们设

$$\mathcal{R}_{K,A}^{[s,r]}:=\mathcal{R}_E^{[s,r]}\hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}A\text{ and }\mathcal{R}_{E,A}^r:=\bigcap_{0<s\leq r}\mathcal{R}_{E,A}^r\text{ and }\mathcal{R}_{E,A}:=\bigcap_{r>0}\mathcal{R}_{K,A}^r.$$

令 $E_{n,\ A}:=A\otimes_{\mathbb{Q}_p}E_n$，我们还有一个单射 $\iota_n:\mathcal{R}^r_{E,\ A}\to E_{n,\ A}[\![t_n]\!]$，它由从 $\mathbb{Q}_p$ 到 A 的基变换诱导。若 X 是一个刚性 C-空间，则相对 Robba 环$\mathcal{R}^?_{K,\ A}$（其中 $?\in\{[s,r],r,\emptyset\}$）粘合为 X上的一个 Robba 环层。

注 2.18. 这里列出本小节所需的一些关于 Robba 环的事实：

(1) 以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{R}_E^{[r,s]} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathcal{R}_E^{[pr,ps]}\\ \downarrow{\scriptstyle \iota_n} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{n+1}}\\ E_n[\![t_n]\!] & \xhookrightarrow{t_n\mapsto t_{n+1}} & E_{n+1}[\![t_{n+1}]\!]\end{array}$$

(2) 设 L/K 是 p-进局部域的有限伽罗瓦扩张。$\mathcal{R}_L^{[r,s]}$ 上有一个自然的 G_K作用，以及一个自然的单射环同态：$\mathcal{R}_K^{[r,s]}\hookrightarrow\mathcal{R}_L^{[r,s]}$，使得

(a) $H_L\subset H_K$ 在 $\mathcal{R}_L^{[r,s]}$ 上的作用是平凡的，而 Γ_L 作用由同构 $\Gamma_L\cong(G_L/H_L)\subseteq(G_K/H_L)$ 诱导。(b) $\mathcal{R}_L^{[r,s]}$ 自然是一个有限的 $'$非分歧 $\mathcal{R}_K^{[r,s]}$ 代数，其秩为 $[H_K:H_L]$，且 $(\mathcal{R}_L^{[r,s]})^{H_K/H_L}\cong\mathcal{R}_K^{[r,s]}$，使得 Γ_K 在 $\mathcal{R}_K^{[r,s]}$ 上的作用由同构 $\Gamma_K\cong G_K/H_K$ 诱导。

(3) 设 h 为正整数，n 为整数，且 $p^{n-1}(p-1)\in[r,s]$。存在一个元素 $t_{n,h}\in\mathcal{R}_E^{[r,s]}$ 使得

$$\iota_m(t_{n,h})=\begin{cases}1\ (\mathrm{mod}\ t_n^h) & m=n\\ 0\ (\mathrm{mod}\ t_m^h) & m\neq n\end{cases}$$

(4) 自然映射

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_E^{[r,s]}&\to\prod_{\{n|p^{n-1}(p-1)\in[r,s]\}}E_n[\![t_n]\!]\\ x&\mapsto(\iota_n(x))_n\end{aligned}$$

induces an isomorphism $\varprojlim_h(\mathcal{R}_E^{[r,s]}/t^h\mathcal{R}_E^{[r,s]})\cong\prod_{\{n|p^{n-1}(p-1)\in[r,s]\}}E_n[\![t_n]\!]$.

证明。

(1) 这由 ι_n 的构造可得，见 [CC99]。(2) 这由 [FO, 推论 5.46] 可得。(3) 这由 [Ber04，引理 I.2.1] 可得。
(4) 这由 [Ber04，命题 I.2.2] 可得。

□

在本小节的其余部分中，我们始终用 A 表示一个仿紧 C-代数。

本小节的主要目标是将一个在 A 上的过滤 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模（秩为 d）与一个在 $\mathcal{R}_{K,A}$ 上的 (φ,Γ_K)-模（秩为 d）关联起来，其定义如下：

定义 2.19. [KPX14，定义 2.2.12]

(1) 在 $\mathcal{R}^r_{K,A}$ 上的一个（秩为 d 的）(φ,Γ_K)-模 $(D^r,\varphi_{D^r},\Gamma_K)$，由一个有限生成且投射的 $\mathcal{R}^r_{K,A}$-模 D^r （秩为 d）连同一个半线性Γ_K-作用和一个 φ-线性映射构成

$$\varphi_{D^r}: D^r \to D^{pr} := D^r \otimes_{\mathcal{R}^r_{K,A}} \mathcal{R}^{pr}_{K,A}$$

使得线性化映射 $1\otimes\varphi_{D^r}: \mathcal{R}^{pr}_{K,A}\otimes_{\varphi,\mathcal{R}^r_{K,A}} D^r \to D^{pr}$ 是一个双射，并且φ_{D^r} 与 Γ_K-作用相交换。

(2) $\mathcal{R}_K$ 上的 (φ,Γ_K)-模 (D,φ_D,Γ_K)（秩为 d）是某个 $r\geq r(L)$ 的 $\mathcal{R}^r_{K,A}$ 上的 (φ,Γ_K)-模 D^r 的基变换到 $\mathcal{R}_{K,A}$ 所得的模。

令 M 为一个配备 Frobenius 线性双射的 $(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)$-模

$$\varphi_M: M\to M,$$

以及 M_L 上的递减滤过:$= M\otimes_{L_0} L$

$$\mathcal{F}^\bullet M_L = (\cdots\supseteq \mathcal{F}^{i-1}M_L\supseteq \mathcal{F}^i M_L\supseteq \mathcal{F}^{i+1}M_L\supseteq\cdots)$$

由 $(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)$-子模给出。

那么，同构

$$M\otimes_{L_0} L\to M\otimes_{L_0,\varphi^{-n}} L$$
$$x\otimes a\mapsto \varphi^n_M(x)\otimes a$$

由 $(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)$-模诱导出 $M\otimes_{L_0,\varphi^{-n}}L$ 上的递减滤过，该滤过来自 $M\otimes_{L_0}L$。我们将带有此递减滤过结构的模 $M\otimes_{L_0,\varphi^{-n}}L$ 记作 $\varphi^n(M_L)$。

我们还定义 $L_{n,A}((t_n))$ 上的 $\mathbb{Z}$-滤过，定义如下:

$$\mathcal{F}^i L_{n,A}((t_n)) := t_n^i L_{n,A}[\![t_n]\!].$$

定义 2.20. 设 r,s 为正实数（或 $s=\infty$），且 n 为满足以下条件的正整数:

$$r(L)\leq r\leq p^{n-1}(p-1)\leq s.$$

设 M 是一个秩为 d、定义在 A 上的带滤过的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 M，定义

$$\mathbf{D}_0^{[r,s]}(M) := (\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}[\log X]\otimes_{(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)} M)^{N=0},$$

and

$$\Lambda^n_L(M) := \mathcal{F}^0(L_{n,A}((t_n))\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}\varphi^n(M_L))$$

（对于两个滤过模 M_1,M_2，我们定义 $\mathcal{F}^i(M_1\otimes M_2) := \sum_{p+q=i}\mathcal{F}^pM_1\otimes\mathcal{F}^qM_2$）。

因此，$\mathbf{D}_0^{[r,s]}(-)$（分别地，$\Lambda^n_L(-)$）是从 A 上的滤过（φ，N，$G_{L/K}$）模范畴到 $\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}$-模范畴（分别地，$L_{n,A}[\![t_n]\!]$-模范畴）的函子，因为 Hom 集上的映射是显然的。

注 2.21. 设 r、s、n、M取上述设定。

(1) $\mathbf{D}_0^{[r,s]}(M)$ 是秩为 d 的平坦 $\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}$-模。

(2) Th自然 l morphism

$$\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}[\log X]\otimes_{\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}}\mathbf{D}_0^{[r,s]}(M)\to\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}[\log X]\otimes_{(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}M$$

$\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}[,\log X]$-模的同构。

特别地，自然态射

$$L_{n,A}[\![t_n]\!]\otimes_{\iota_n,\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}}\mathbf{D}_0^{[r,s]}(M)\to L_{n,A}[\![t_n]\!]\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}M_L$$

是一个同构。

（3）在 Spec(A) 上的扎里斯基局部范围内，$L_{n,\ A}[\![t_n]\!]$-模 $\Lambda_{n,\ L}(M)$ 是秩为d的自由模。特别地，$\Lambda_{n,\ L}(M)$ 是秩为 d 的有限生成投射 $L_{n,\ A}[\![t_n]\!]$-模。

证明。

（1）不妨设 M 是秩为 d 的自由（$L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A$）-模。

选取 M 的一个（$L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A$）-基（$m_1,\ldots,m_d$）。对于任意 $1\leq i\leq d$，令

$$e_i:=\sum_{k=0}^{\infty}((p-1)/p)^k(\log X)^kN^k(m_i).$$

由于 N 是幂零的，每个 e_i 都有良好定义。

注意，任意 $x\in\mathcal{R}^{[r,s]}_{L\ A}[\log X]\otimes_{(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}M$ 都有如下唯一展开式：

$$x=\sum_{0\leq k\ll\infty}(\log X)^kx_k$$

其中 $x_k\in\mathcal{R}^{[r,s]}_{L\ ,A}\otimes_{(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}M$。由于 $\mathcal{R}^{[r,s]}_{L\ ,A}\otimes_{(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}M$ 是以 $(m_1,\ldots,m_d)$ 为基的自由 $\mathcal{R}^{[r,s]}_{L\ A}$-模，故可将 $x_0=a_1m_1+\cdots+a_dm_d$ 唯一地写成 $a_i\in\mathcal{R}^{[r,s]}_{L\ A}$。根据直接计算，$N(x)=0$ 当且仅当 $x=a_1e_1+\cdots+a_de_d$，这意味着 $(e_1,\ldots,e_d)$ 是 $\mathbf{D}_0^{[r,s]}(M)$ 的 $\mathcal{R}^{[r,s]}_{L\ A}$-基。

(2) 设 $(m_1,\ldots,m_d)$ 和 $(e_1,\ldots,e_d)$ 为上述证明中的记号。设 B_N 为 $\mathrm{Max}_{d\times d}(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)$ 中相对于基 $(m_1,\ldots,m_d)$ 对应于 N 的幂零矩阵。则有

$$(e_1,\ldots,e_d)=(m_1,\ldots,m_d)\left(\sum_{k=0}^{\infty}((p-1)/p)^k(\log X)^kB_N^k\right).$$

那么，我们的断言由以下事实可得：

$$\sum_{k=0}^{\infty}((p-1)/p)^k(\log X)^kB_N^k$$

在 $\mathcal{R}^{[r,s]}_{L\ A}[\log\ X]$ 中可逆（写作 $B:=\sum_{k=1}^{\infty}((p-1)/p)^k(\log X)^kB_N^k$，其中该元素是幂零的，则 $(1+B)(1+B+B^2+\cdots)=1$），特别地

$$\begin{aligned}
&L_{n,A}[\![t_n]\!]\otimes_{\iota_n,\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}}\mathbf{D}_0^{[r,s]}(M)\\
\cong&L_{n,A}[\![t_n]\!]\otimes_{\iota_n,\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}[\log X]}\left(\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}[\log X]\otimes_{\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}}\mathbf{D}_0^{[r,s]}(M)\right)\\
\cong&L_{n,A}[\![t_n]\!]\otimes_{\iota_n,\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}[\log X]}\left(\mathcal{R}^{[r,s]}_{L,A}[\log X]\otimes_{(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}M\right)\\
\cong&L_{n,A}[\![t_n]\!]\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}M_L
\end{aligned}$$

(3) 我们可以假设，对于 $i\in\mathbb{Z}$，每个 $\mathcal{F}^iM_L$ 都是一个自由 A-模。更确切地说，考虑由引理 2.14(2) 给出的分解：

$$\mathcal{F}^i(M_L)=\bigoplus_{\eta\in\mathrm{Hom}(L,C)}\left(\mathcal{F}^i(M_L)\right)_\eta$$

对所有 $i\in\mathbb{Z}$ 均成立。于是每个 $\left(\mathcal{F}^i(M_L)\right)_\eta$ 都是自由 A-模，并且有如下递减滤过 $(M_L)_\eta$：

$$\cdots\supseteq\left(\mathcal{F}^{i-1}(M_L)\right)_\eta\supseteq\left(\mathcal{F}^i(M_L)\right)_\eta\supseteq\left(\mathcal{F}^{i+1}(M_L)\right)_\eta\supseteq\cdots$$

令 $(m_{\eta,\ 1},\ \ldots,\ m_{\eta,\ d})$ 为 $(M_L)_\eta$ 的一组基，该基与滤过 $(\mathcal{F}^\bullet M_L)_\eta$ 相容（即若 $\left(\mathcal{F}^i M_L\right)_\eta$ 的秩为 $d_{\eta,\ i}$，则对所有 i，$(m_{\eta,\ 1},\ \ldots,\ m_{\eta,\ d_{\eta,\ i}})$ 是 $\mathcal{F}^i(M_L)$ 的一组基）。对每个 $1 \leq i \leq d$，记 $k_{\eta,\ i}$ 为满足下式的唯一整数

$$m_{\eta,i} \in \left(\mathcal{F}^i M_L\right)_\eta \text{ and } m_{\eta,i} \notin \left(\mathcal{F}^{i+1} M_L\right)_\eta.$$

于是可以发现

$$\left((t_n^{-k_{\eta,1}} \otimes \varphi_M^n(m_{\eta,1}))_\eta, \ldots, (t_n^{-k_{\eta,d}} \otimes \varphi_M^n(m_{\eta,d}))_\eta\right)$$

是 $\Lambda_L^n(M)$ 的一个 $L_{n,A}[\![t_n]\!]$-基。

□

设 $s \geq r$ 为正实数（或 $s=\infty$），满足 $r \geq r(L)$。设 M 为 A 上秩为 d 的带滤过 $(\varphi, N, G_{L/K})$-模 M。设 h 为满足下式的正整数

$$\mathcal{F}^h(M_L) = 0 \text{ and } \mathcal{F}^{-h}(M_L) = M_L.$$

根据定义，有

$$t_n^h \Lambda_L^n(M) \subseteq L_{n,A}[\![t_n]\!] \otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p} A)} M_L \subseteq t_n^{-h} \Lambda_L^n(M).$$

因此，$\Lambda_L^n(M)[1/t_n] \cong L_{n,A}((t_n)) \otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p} A)} M_L$ 根据注记 2.21(2)，存在典范同构（也记作 ι_n）

$$\iota_n : \mathbf{D}_0^{[r,s]}(M)[1/t] \otimes_{\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]}[1/t],\iota_n} L_{n,A}((t_n)) \xrightarrow{\sim} \Lambda_L^n(M)[1/t_n]$$

对于所有满足 $r \leq p^{(n-1)}(p-1) \leq s$ 的 n。

定义 2.22。我们定义

$$\mathbf{D}_L^{[r,s]}(M) := \{x \in \mathbf{D}_0^{[r,s]}(M)[1/t] \mid \iota_n(x) \in \Lambda_L^n(M),\ \forall n \text{ with } p^{n-1}(p-1) \in [r,s]\},$$

此外，注意到 G_K/H_L 在 $\mathcal{R}_{L\ R}^{[s,r]}[\log X, 1/t] \otimes_{(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p} A)} M$ 上半线性作用，该作用由 M 上的 $G_{L/K}$-作用通过以下公式诱导（注意到 $G_{L/K}$ 是 G_K/H_L 的一个商）

$$g(a \otimes m) \to g(a) \otimes g(x).$$

容易看出，子空间 $\mathbf{D}_L^{[r,s]}(M) \subset \mathcal{R}_{L\ R}^{[r,s]}[\log X, 1/t] \otimes_{(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p} A)} M$ 在 (G_K/H_L)-作用下稳定，因为 M 上的 $G_{L/K}$-作用与 N-作用可交换，并且与滤过相容。

于是我们定义

$$\mathbf{D}_K^{[r,s]}(M) := \left(\mathbf{D}_L^{[r,s]}(M)\right)^{H_K/H_L},$$

它是一个带有 Γ_K-作用的 $\mathcal{R}_{K\ A}^{[r,s]}$-模。

因此，$\mathbf{D}_L^{[r,s]}(-)$（分别地，$\mathbf{D}_K^{[r,s]}(-)$）是从 A 上的滤化（φ、N、$G_{L/K}$）-模范畴到带有半线性G_K/H_L-作用的 $\mathcal{R}_{L\ A}^{[r,s]}$-模范畴（分别地，带有半线性 Γ_K-作用的 $\mathcal{R}_{K\ A}^{[r,s]}$-模范畴）的函子，因为 Hom 集上的映射是显然的。

为简单起见，我们记作

$$\mathbf{D}_0^r(-) := \mathbf{D}_0^{[r,\infty]}(-) \text{ and } \mathbf{D}_L^r(-) := \mathbf{D}_L^{[r,\infty]}(-) \text{ and } \mathbf{D}_K^r(-) := \mathbf{D}_K^{[r,\infty]}(-).$$

在本小节余下部分中，我们始终用 M 表示一个秩为 d 的、定义在 A 上的过滤 $(\varphi, N, G_{L/K})$-模。

设 R 是一个环， M 是一个 R-模。若元素 $f\in R$ 使 M 不含 f-挠，则称模 M 是 f-正则的。在证明下面的命题之前，我们先简要回顾 Beauville-Laszlo 定理（证明见 [BL95] ）。

ˆ 定理 2.23. 设 R 为一个环，设 f 是 A 中的一个非零因子，设 R 为 R 关于 f- 进拓扑的完备化。我们将 R_f （分别将 R_f ）记为分式 $R[1/f]$ （分别为 $R[1/f]$）的环。假设给定：

(1) 一个 R_f-模 M_1；ˆ (2) 一个 f-正则 R-模 M_2；ˆˆ

(3) 一个 R_f-线性同构 $\gamma\colon R\otimes_R M_1\to M_2\otimes_R R_f$。

那么，存在一个 f-正则 R-模 M，以及同构 $\alpha\colon M\otimes_R R_f\to M_1$ˆ 和 $\beta\colon R\otimes_R M\to M_2$，使得 γ 是.....的复合。

$$\hat{R}\otimes_R M_1\xrightarrow{1\otimes\alpha^{-1}}\hat{R}\otimes_R M\otimes_R R_f\xrightarrow{\beta\otimes 1}M_2\otimes_R R_f.$$

三元组 (M,α,β) 在唯一同构意义下唯一确定。

如果 M_1 和 M_2 是有限生成的（分别地，平坦的，分别地，投射且有限生成的），那么 M 具有相同的性质。

注 2.24. 我们上面定义的所有函子（即 $\mathrm{D}_0^{[r,s]}$ (–)、 Λ_L^n(–)、$\mathrm{D}_L^{[r,s]}$ (–) 和 $\mathrm{D}_K^{[r,s]}$ (–)）都与沿任意仿射 C-代数态射 $A\to A'$ 的基变换相容。对于 $\mathrm{D}_0^{[r,s]}$ (–) 和 Λ_L^n(–)，这一点显然成立。对于 $\mathrm{D}_L^{[r,s]}$ (–)，这由 Beauville-Laszlo 定理以及下述命题的第 (1) 部分推出。因此，基变换性质对于 $\mathrm{D}_K^{[r,s]}$ (–) 也成立。

命题 2.25. 设 $s\geq r$ 为正实数（或 $s=\infty$），且 $r\geq r(L)$。

(1) n是一个正整数，使得

$$r\leq p^{n-1}(p-1)\leq s.$$

自然映射

$$\mathbf{D}_L^{[r,s]}(M)\otimes_{\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]},\iota_n}L_{n,A}[\![t_n]\!]\to\Lambda_L^n(M)$$

是 $p^{n-1}(p-1)\in[r,s]$ 的同构。

(2) 令 r',s' 为正实数（或 $s'=\infty$），使得 $r\leq r'\leq s'\leq s$，自然映射

$$\mathbf{D}_L^{[r,s]}\otimes_{\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]}}\mathcal{R}_{L,A}^{[r',s']}\to\mathbf{D}_L^{[r',s']}(M)\tag{2}$$

是 $\mathcal{R}_{L\ A}^{[r',s']}$-模的同构。

(3) $\mathrm{D}_L^{[r,s]}(M)$ 是秩为 d 的平坦 $\mathcal{R}_{L\ A}^{[r,s]}$-模。

自然映射

$$\mathbf{D}_K^r(M)\otimes_{\mathcal{R}_{K,A}^r}\mathcal{R}_{L,A}^r\to\mathbf{D}_L^r(M)$$

是 $\mathcal{R}_{L\ A}^r$-模的同构。

In particular, $\mathbf{D}_K^r(M)$ is a projective $\mathcal{R}_{K,A}^r$-module of rank d.

证明。

(1) 设 h 是一个正整数，使得 $\mathcal{F}^h(M_L)=0$，这意味着

$$\mathbf{D}_L^{[r,s]}(M)\subseteq 1/t^{-h}\mathbf{D}_0^{[r,s]}(M).$$

由注记 2.21(2) 可知

$$\mathbf{D}_L^{[r,s]}(M)\otimes_{\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]},\iota_n} L_{n,A}[\![t_n]\!]\subseteq L_{n,A}[\![t_n]\!]\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)} M_L.$$

因此，$\mathrm{D}_L^{[r,s]}(M)\otimes_{\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]},\iota_n} L_{n,A}[\![t_n]\!]$ 是 t_n-进完备的。

根据定义，映射

$$\mathbf{D}_L^{[r,s]}(M)\otimes_{\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]},\iota_n} L_{n,A}[\![t_n]\!]\to\Lambda_L^n(M)$$

是单射。由于两边都是 t_n-进完备的，只需证明对所有充分大的 h，自然映射

$$\mathbf{D}_L^{[r,s]}(M)\otimes_{\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]},\iota_n} L_{n,A}[\![t_n]\!]\to\Lambda_L^n(M)/(t_n^h\Lambda_L^n(M))$$

是满射。

我们可以假设 h 足够大，使得

$$\mathcal{F}^h(M_L)=0 \text{ and } \mathcal{F}^{-h}(M_L)=M_L.$$

根据定义，有

$$t_n^h\Lambda_L^n(M)\subseteq L_{n,A}[\![t_n]\!]\otimes_{\iota_n,\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]}}\mathbf{D}_0^{[r,s]}(M)\subseteq t_n^{-h}\Lambda_L^n(M)$$

因此，对于任意 $x\in\Lambda_L^n(M)$，存在某个 $y\in t^{-h}\mathrm{D}_0^{[r,s]}(M)$，使得 $\iota_n(y)\in t_n^h\Lambda_L^n(M)$。令 $z=t_{n,3h}y$。则有

$$\iota_n(z)-\iota_n(y)\in t^{2h}L_{n,A}[\![t_n]\!]\otimes_{\iota_n,\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]}}\mathbf{D}_0^{[r,s]}(M)\subseteq t_n^h\Lambda_L^n(M)$$

and

$$\iota_m(z)\in t^{2h}L_{m,A}[\![t_m]\!]\otimes_{\iota_n,\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]}}\mathbf{D}_0^{[r,s]}(M)\subseteq t_n^h\Lambda_L^m(M)\subseteq\Lambda_L^m(M)$$

对于 $m\neq n$，这意味着 $z\in\mathrm{D}_L^{[r,s]}(M)$。

因此，自然映射

$$\mathbf{D}_L^{[r,s]}(M)\otimes_{\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]},\iota_n} L_{n,A}[\![t_n]\!]\to\Lambda_L^n(M)/(t_n^h\Lambda_L^n(M))$$

是满射。

(2)+(3) $\mathrm{D}_L^{[r,s]}(M)[1/t]$ 模是有限生成的投射模，其秩为d，作为 $\mathrm{D}_L^{[r,s]}(M)[1/t]\cong\mathrm{D}_0^{[r,s]}(M)[1/t]$。因此，将 t 反演后，映射 (2) 是同构

$$\mathbf{D}_0^{[r,s]}\otimes_{\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]}}\mathcal{R}_{L,A}^{[r',s']}\cong\mathbf{D}_0^{[r',s']}(M)$$

（注意，N 在 $\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]}[\log X]$ 上的作用是 $\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]}$-线性的（在 $\mathcal{R}_{L,A}^{[r',s']}[\log X]$ 上的作用则是 $\mathcal{R}_{L,A}^{[r',s']}$-线性的），且 $\mathrm{D}_L^{[r,s]}(M)[1/t]$ 是秩为 d 的有限生成投射模。

另一方面，由注 2.18(4) 和上面的断言 (1)，可得

$$\begin{aligned}&\mathbf{D}_L^{[r,s]}(M)\otimes_{\mathcal{R}_L[r,s]}\varprojlim_h(\mathcal{R}_L[r,s]/t^h\mathcal{R}_L[r,s])\\ \cong&\prod_{\{n|p^{n-1}(p-1)\in[r,s]\}}\mathbf{D}_L^{[r,s]}(M)\otimes_{\mathcal{R}_{L,A}[r,s],\iota_n}L_{n,A}[\![t_n]\!]\\ \cong&\prod_{\{n|p^{n-1}(p-1)\in[r,s]\}}\Lambda_{n,L}(M).\end{aligned}$$

然后，由注 2.21(3) 的证明，在 Spec(A) 上局部地（使得对每个 $i\in\mathbb{Z}$， $\mathcal{F}^iM_L$ 都是自由的），$\Lambda_{n,\ L}(M)$ 是秩为 d 的自由模。因此，取 t-完备化后，映射 (2) 是一个同构，并且

$$\mathbf{D}_L^{[r,s]}(M)\otimes_{\mathcal{R}_L[r,s]}\varprojlim_h(\mathcal{R}_L[r,s]/t^h\mathcal{R}_L[r,s])$$

是有限生成的秩为 d 的投射模。因此，断言 (2) 和 (3) 可由 Beauville-Laszlo 定理推出（注意，该定理不需要任何诺特条件，因此我们的断言尤其适用于 $s=\infty$）。

(4) 根据注 2.18(2)， $\mathcal{R}_{L\ A}^{[r,s]}$ ，$\mathcal{R}_{L\ A}^{[r,s]}$ 是 ′的 étale Galois 扩张，Galois 群为 H_K/H_L。由伽罗瓦下降可知，$\mathrm{D}_K^{[r,s]}(M)=(\mathrm{D}_L^{[r,s]}(M))^{H_K/H_L}$ 是有限生成的投射模。

□

设 M 为 A 上的一个滤过的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模，我们定义如下 $\mathcal{R}_{L,A}^r$-模之间的 φ-线性映射：

$$\begin{aligned}\varphi:\mathcal{R}_{L,A}^r[\log X]\otimes_{\mathcal{R}_{L,A}^r}M&\to\mathcal{R}_{L,A}^{pr}[\log X]\otimes_{\mathcal{R}_{L,A}^r}M\\ a\otimes m&\mapsto\varphi(a)\otimes\varphi_M(m).\end{aligned}$$

容易验证，等式 $N\circ\varphi=p\varphi\circ N$ 也成立。因此，这个 φ-作用可以限制在它们的 N-不变子空间上。也就是说，诱导的 φ-线性映射 $\varphi:\mathrm{D}_0^r(M)\to\mathrm{D}_0^{pr}(M)$ 是良定义的。

此外，注 2.21(3) 的证明表明，自然映射

$$\begin{aligned}\varphi_n:L_{n,A}(\!(t_n)\!)\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}\varphi^n(M_L)&\to L_{n+1,A}(\!(t_{n+1})\!)\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}\varphi^{n+1}(M_L)\\ a\otimes m&\mapsto a\otimes\varphi(m)\end{aligned}$$

诱导出一个良定义的映射 $\varphi_n:\Lambda_L^n(M)\to\Lambda_L^{n+1}(M)$。事实上，2.20(3) 的证明也表明，映射

$$\begin{aligned}\varphi_n:L_{n+1,A}[\![t_{n+1}]\!]\otimes_{L_{n,A}[\![t_n]\!]}\Lambda_L^n(M)&\xrightarrow{\sim}\Lambda_L^{n+1}(M)\\ a\otimes m&\mapsto a\varphi(m)\end{aligned}$$

是 $L_{n+1,A}[\![t_{n+1}]\!]$-格之间的同构。注意，2.20(2) 与注 2.18(1) 结合起来，意味着下面的图表

$$\begin{array}{ccc}L_{n,A}(\!(t_n)\!)\otimes_{\iota_n,\mathcal{R}_{L,A}^r[1/t]}\mathbf{D}_0^r(M)[1/t] & \xrightarrow[\iota_n]{\sim} & L_{n,A}(\!(t_n)\!)\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}\varphi^n(M_L)\\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_n}\\ L_{n,A}(\!(t_{n+1})\!)\otimes_{\iota_{n+1},\mathcal{R}_{L,A}^{pr}[1/t]}\mathbf{D}_0^{pr}(M)[1/t] & \xrightarrow[\iota_{n+1}]{\sim} & L_{n,A}(\!(t_{n+1})\!)\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}\varphi^{n+1}(M_L)\end{array}$$

是交换的。这意味着，对于满足 $\iota_n(x)\in\Lambda_L^n(M)$ 的元素 $x\in\mathrm{D}_0^r(M)[1/t]$，有 $\iota_{n+1}(\varphi(x))$ 属于 $\iota_n(x)\in\Lambda_L^{n+1}(M)$。也就是说，存在一个良定义的 φ-线性映射 $\mathcal{R}_{L,A}^r$-模之间的映射：

$$\varphi:\mathbf{D}_L^r(M)\to\mathbf{D}_L^{pr}(M).$$

此外，由定义可容易验证，映射 $\varphi:\mathrm{D}_L^r(M)\to\mathrm{D}_L^{pr}(M)$ 与 (G_K/H_L)-作用相容，因为 φ_M 在 M 上的作用与 $G_{L/K}$-作用相容，且 φ 在 $\mathcal{R}_{L,A}^r$ 上的作用也与 G_K/H_L-作用相容。因此，对两边取 H_K/H_L-不变量后，得到一个良定义的 φ-线性映射

$$\varphi:\mathbf{D}_K^r(M)\to\mathbf{D}_K^{pr}(M),$$

与 Γ_K 作用交换的。

定义 2.26. 设 M 为一个滤过的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模。对于任意 $r\geq r(L)$，我们定义 Γ_K-相容的 φ-线性映射

$$\varphi:\mathbf{D}_K^r(M)\to\mathbf{D}_K^{pr}(M)$$

如上所述。

命题 2.27. 设 M 是 A 上秩为 d 的滤过 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模。对于任意 $r\geq r(L)$，映射

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{K,A}^{pr}\otimes_{\varphi,\mathcal{R}_{K,A}^r}\mathbf{D}_K^r(M)&\to\mathbf{D}_K^{pr}(M)\\ a\otimes x&\to a\cdot\varphi(x)\end{aligned}$$

是一个同构。特别地，$\mathrm{D}_K^r(M)$ 是 $\mathcal{R}_{K,\ A}^r$ 上的一个秩为d的 (φ,Γ_K)-模。

证明。注意，$\mathcal{R}_{L\ ,A}^{pr}$ 在$\mathcal{R}_{K\ ,A}^{pr}$上忠实平坦。由命题 2.25(4)，我们可以在两边应用张量函子 $\mathcal{R}_{L\ ,A}^{pr}\otimes_{\mathcal{R}_{K\ ,A}^{pr}}(-)$，从而归结为证明该映射】【。

(3)
$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{L,A}^{pr}\otimes_{\varphi,\mathcal{R}_{L,A}^r}\mathbf{D}_L^r(M)&\to\mathbf{D}_L^{pr}(M)\\ a\otimes x&\to a\varphi(x)\end{aligned}$$

是一个同构。根据 Beauville–Laszlo 定理，只需证明，在分别将 t 取逆并进行 t-进完备化后，映射 (3) 是一个同构。

将 t 取逆后，有 $\mathrm{D}_L^r(M)[1/t]\cong\mathrm{D}_0^r(M)[1/t]$。我们可以假设 M 是一个自由的 $(L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)$-模。然后，根据注 2.21(1) 的证明，可以明确写出一个基，并看出映射 $\mathcal{R}_{L\ ,A}^{pr}\otimes_{\varphi,\mathcal{R}_{L,A}^r}\mathrm{D}_0^r(M)[1/t]\to\mathrm{D}_0^{pr}(M)[1/t]$ 是一个同构。

至于取 t-完备化，证明与命题 2.25(2) 中的证明类似，并利用映射这一事实。

$$\begin{aligned}\varphi_n:L_{n+1,A}[\![t_{n+1}]\!]\otimes_{L_{n,A}[\![t_n]\!]}\Lambda_L^n(M)&\xrightarrow{\sim}\Lambda_L^{n+1}(M)\\ a\otimes m&\mapsto a\cdot\varphi(m)\end{aligned}$$

是一个同构。 □

定义 2.28. 设 M 为一个秩为 d 的滤过（φ，N，$G_{L/K}$）-模。选取某个 $r\geq r$（L），我们定义

$$\mathbf{D}_K(M):=\mathbf{D}_K^r(M)\otimes_{\mathcal{R}_{K,A}^r}\mathcal{R}_{K,A}.$$

称 $\mathcal{R}_{K,A}$ 上的秩为 d 的 (φ,Γ_K)-模 $\mathrm{D}_K(M)$ 为与 M 相关联的 (φ,Γ_K)-模（根据命题 2.25(2)，该定义良定，且不依赖于 r 的选择）。

注 2.29. 现在，$\mathrm{D}_K(-)$ 是从 A 上的滤过 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模范畴到 $\mathcal{R}_{K,\ A}$ 上的 (φ,Γ_K)-模范畴的良定义函子。当$A=\mathbb{Q}_p$时，函子 $\mathrm{D}_K(-)$ 正是 [Ber04，定义 II.2.4] 中定义的函子。下面的定理是同上 [定理 II.2.6] 的平行结果。

定理 2.30. 函子 $M\mapsto\mathrm{D}_K(M)$ 是从 A 上（秩为 d）的滤过 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模范畴到 $\mathcal{R}_{K,\ A}$ 上（秩为 d）的 (φ,Γ_K)-模范畴的忠实正合函子，并且与张量积可交换。

此外，对于 A 上任意两个过滤的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 M_1 和 M_2，若 f 是 $\mathrm{Hom}(M_1,M_2)$ 中的一个元素，且 $\mathrm{D}_K(f)$ 是一个同构，则 f 也是同构。

证明。为证明该定理的第一部分，只需验证函子 $\mathrm{D}_0^r(-)$ 和 $\Lambda_L^n(-)$ 是忠实正合的，并且与张量积可交换。然后应用 Beauville-Laszlo 定理和伽罗瓦下降，证明 $\mathrm{D}_K^r(-)$ 忠实正合且与张量积可交换。因此 $\mathrm{D}_K^r(-)$ 也具有这些性质，因为 $\mathcal{R}_{K,A}\to\mathcal{R}_{K,A}$ 是平坦的。我们省略细节，因为这些技巧在前面的证明中已多次使用。

对于此外的部分，根据 [KPX14, Lem 2.2.9]，对某个 r，$\mathrm{D}_K^r(f)\in\mathrm{Hom}_{\varphi,\Gamma_K}(\mathrm{D}_K^r(M_1),\mathrm{D}_K^r(M_2))$ 是一个同构。注意

$$\mathbf{D}_K^r(M_i)\otimes_{\mathcal{R}_{K,A}^{[r,s]}}\mathcal{R}_{L,A}^{[r,s]}\cong\mathbf{D}_L^r(M_i)$$

对于 $i=1,2$，我们只需证明 $\mathrm{D}_L^r(f)$ 是同构蕴含 f 是同构。

由于 $\mathrm{D}_L^r(M_i)[1/t]\cong\mathrm{D}_0^r(M_i)[1/t]$，若忽略它们的滤过结构，则 $f\colon M_1\to M_2$ 是 $(\varphi,N,G_{L/K})$- 模的同构（注意，函子 $\mathrm{D}_0^r(-)$ 与滤过结构无关，且 $\mathrm{D}_0^r(-)[1/t]$ 是忠实且正合的）。另一方面，假设对某个$i\in\mathbb{Z}$，$f|_{\mathcal{F}^iM_1,L}$ 不是同构。于是，诱导映射 $\Lambda_L^n(f)\colon\Lambda_L^n(M_1)\hookrightarrow\Lambda_L^n(M_2)$ 是严格单射。这与根据命题 2.25(1)，$\mathrm{D}_L^r(f)$ 是同构这一假设矛盾。

□

注 2.31. 如果将仿射代数 C 替换为某个刚性空间 C，那么相应地，$\mathrm{D}_K(-)$ 可以自动理解为从 X 上的滤过 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模层范畴（秩为 d）到 $\mathcal{R}_{K,A}$ 上的 (φ,Γ_K)-模层范畴（秩为 d）的函子，并且满足与定理 2.30 类似的性质。

2.4. 准 de Rham (φ,Γ_K)-模。本小节中，我们希望研究准 de Rham (φ,Γ_K)-模的群胚（见下文的定义）。本文中，所有特征均假定为连续的。

我们固定 ϖ K 的一个一致化子。我们固定 C 某个有限于 $\mathbb{Q}_p$ 的域，使得$|\mathrm{Hom}(L,C)|=[L\colon\mathbb{Q}_p]$，并且始终将 A 记作某个仿射 C-代数。对于 φ,Γ_K-模 D（定义在 $\mathcal{R}_{K,A}$ 上），我们记其为

$$D^\vee:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{K,A}}(D,\mathcal{R}_{K,A})$$

庞加莱对偶，它是一个与 D 秩相同的 (φ,Γ_K)-模。

从现在起，简记函子 D_K 为 D。我们在第 2.2 节中构造的叠（例如 $\mathfrak{M}^{L/K,d}$）均视为刚性 C-叠，其在刚性 C-空间上以群胚为纤维化对象。可以验证，所有定义和陈述在这一设定下均自动成立。

定义 2.32. 若存在一个滤过的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 M，其上为 A，以及一个特征 $\delta\colon K^\times\to A^\times$，使得 $D\cong\mathrm{D}(M)(\delta):=\mathrm{D}(M)\otimes_{\mathcal{R}_{K,A}}\mathcal{R}_{K,A}(\delta)$，则称一个 (φ,Γ_K)-模 D 上为 $\mathcal{R}_{K,A}$ 是准 de Rham 的。这里 $\mathcal{R}_{K,A}(\delta)$ 是与 δ 相关联的自由秩一 (φ,Γ_K)-模。精确定义请参见 [KPX14, 构造 6.2.4]。

注 2.33. 对于特征 $\delta\colon K^\times\to A^\times$，有 $(\mathcal{R}_{K,A}(\delta))^\vee\cong\mathcal{R}_{K,A}(\delta^{-1})$.

定义 2.34. 令 $\mathcal{Z}^{L/K}$ 表示刚性 C-空间范畴上的准 de Rham (φ,Γ_K)-模的群胚。

定义 2.35. 令 $\mathcal{T}_K$ 表示 $K^\times$的特征的模空间刚性 C-空间，并令 $\mathcal{W}_K$ 表示 $\mathcal{O}_K^\times$ 的特征的模空间刚性 C-空间。

注 2.36. 回想一下，特征 $\delta\colon K^\times \to R^\times$ 称为

(1) 代数的，如果

$$\delta(a) = \prod_{\eta: K\hookrightarrow C} \eta(a)^{k_\eta}$$

对于某个 $k_\eta \in \mathbb{Z}$ （在此情形下，我们也将这样的特征记为 $\delta_{\underline{k}}$ for$\underline{k} := (k_\eta)_{\eta:K\hookrightarrow C}$），

（2）若 kerδ 在 $K^\times$中是开的，则称其为光滑特征；（3）若对于某个光滑特征 δ_{sm} 和某个代数特征 δ_{alg}，有 $\delta = \delta_{\mathrm{sm}} \cdot \delta_{\mathrm{alg}}$，则称其为 de Rham 特征。显然，若 δ 是 de Rham 特征，则这样的分解是唯一的。我们称 δ_{sm} 为 δ 的光滑部分，称 δ_{alg} 为 δ 的代数部分。

从现在起，对于一个 de Rham 特征 $\delta\colon K^\times \to A^\times$，我们总是将 δ 的光滑部分（分别地，代数部分）记为 δ_{sm} （分别为 δ_{alg}）。

注 2.37。

(1) 根据局部类域论，我们有典范同构：$W_K^{\mathrm{ab}} \cong K^\times$。因此，将特征 δ 限制 H 到 W_K 的某个子群上是有意义的。(2) 令 $\delta: K^\times \to A^\times$ 为一个特征。假设 δ 是 de Rham 的，并且限制在 I_L 上的光滑部分 δ_{sm} （我们通过单射 $I_L \hookrightarrow W_L \hookrightarrow W_K$将 I_L 视为 W_K 的一个开子群）是平凡的，并假设对于某个 $\underline{k} \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(K,C)}$有 $\delta_{\mathrm{alg}} = \delta_{\underline{k}}$。那么我们将 M($\delta$) 定义为 A上的唯一自由秩一滤过 ($\varphi, N, G_{L/K}$)-模，使得 M(δ) 的 η-滤过权为 $-\underline{k}$，且 ($\varphi, N, G_{L/K}$)-模结构是与秩一 Weil–Deligne 表示 $\delta_{\mathrm{sm}}: W_K^{\mathrm{ab}} \cong K^\times \to A^\times$相关联的结构，该表示由 [BS07, 命题 4.1] 构造。

然后，与 [KPX14, Const 6.2.4]，中的构造进行比较，可以直接验证

$$\mathbf{D}(\mathbf{M}(\delta)) \cong \mathcal{R}_{K,R}(\delta).$$

此外，对于任意这样的两个特征 δ_1, δ_2，都有 M($\delta_1 \cdot \delta_2$) = M(δ_2)$\otimes$M(δ_1)。

对于一个滤过的($\varphi, N, G_{L/K}$)-模 M（定义在 A 上）以及一个特征 $\delta\colon K^\times \to A^\times$，我们记为

$$M(\delta) := M \otimes_{L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} A} \mathbf{M}(\delta).$$

特别地，我们有 D(M(δ)) $\cong$D(M) $\otimes_{\mathcal{R}_{K,A}} \mathcal{R}_{K,A}$($\delta$)。

（3）反过来，对于任意一个在 A 上秩为一的自由滤过 ($\varphi, N, G_{L/K}$)-模 M，都存在某个 de Rham 特征 $\delta\colon K^\times \to A^\times$，其光滑部分 δ_{sm} 在 I_L 上是平凡的，使得根据 BS07，命题 4.1]，D(M) $\cong \mathcal{R}_{K,R}$(δ) [（尽管在该命题的陈述中，A 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的一个有限域，但如果允许 A 是任意 C- 代数，证明仍然自动成立）。

引理 2.38. 设 R 是一个交换环，且 M_i 是 R-模，其中 $i = 1$分别为 2、3，并存在一个单射 $f\colon M_1 \otimes_R M_2 \hookrightarrow M_3$。假设 M_2 是有限生成投射的，则诱导映射

$$\widetilde{f}: M_1 \to \mathrm{Hom}_R(M_2, M_3), a \mapsto (b \mapsto f(a \otimes b))$$

是单射。

证明。对于任意 $a \in$ker f，有 $f(a \otimes b) = 0$（因此 $a \otimes b = 0$），对任意 $b \in M_2$均如此。由于 M_2 是忠实平坦的，可得 $a = 0$。□

推论 2.39. 设 $\delta_i\colon K^\times \to A^\times$是特征，且 M_i是 A 上关于 $i = 1$、2 的过滤 (φ, $N, G_{L/K}$)-模。假设 D(M_1)(δ_1) = D(M_2)(δ_2)。设 $\delta := \delta_1\delta_2^\vee$

且 $D:=\mathrm{D}(M_2)\otimes\mathrm{D}(M_1)^\vee$。那么对任意极大理想 $\mathfrak{m}\subseteq A$ 和 $n\in\mathbb{N}$，自然映射：

$$\mathcal{R}_{K,A}(\delta)\otimes_A A/\mathfrak{m}^n\to D\otimes_A A/\mathfrak{m}^n$$

是一个单射。

证明。注意，(φ,Γ_K)-模上的庞加莱对偶函子与基变换相容。特别地

$$D\otimes_A A/\mathfrak{m}^n\cong(\mathrm{D}(M_2)\otimes_A A/\mathfrak{m}^n)\otimes_{A/\mathfrak{m}^n}(\mathrm{D}(M_2)\otimes_A A/\mathfrak{m}^n)^\vee$$

。因此，我们可以将上面的引理应用于同构

$$\mathrm{D}(M_1)(\delta)\otimes_A A/\mathfrak{m}^n\cong\mathrm{D}(M_2)\otimes_A A/\mathfrak{m}^n$$

并得出结论。 □

引理 2.40. 设 A 是 C 上的局部阿廷环，且 $\dim_C A\leq\infty$，设 $\delta:K^\times\to A^\times$ 是一个特征，并设 M 是 $\mathcal{R}_{K,\,A}$ 上的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模。假设存在一个单射态射

$$\mathcal{R}_{K,A}(\delta)\hookrightarrow\mathbf{D}(M)$$

（φ,Γ_K）-模的，那么 δ 是 de Rham 的，使得光滑部分 δ_{sm} 限制在 $I_L\subset W_K$上是平凡的。

证明。首先注意，当 A 是一个域时，该结论成立。事实上，根据 [Ber04 的推论 III.2，5]，有 $\mathcal{R}_K(\delta)\cong\mathrm{D}(M')$，其中 M 是 A上的某个秩一过滤（$\varphi,N,G_{L/K}$）-模。由注 2.37(3)，δ 是 de Rham 的。

回到一般的 A。接着我们忘记 $\mathcal{R}(\delta)$（分别为 $\mathrm{D}(M)$）的 A-结构，只保留其 C-结构，并将其记为 D_1（分别为 D_2）。根据同上的推论，对于 $\mathbb{Q}_p$上的某个过滤（$\varphi,N,G_{L/K}$）-模 M_1，有 $D_1\cong\mathrm{D}(M_1)$。

注意，在 D_1 上具有 A-结构等价于存在一个 C-代数同态：$A\to\mathrm{Hom}_{\varphi,\,\Gamma_K}(D_1,D_1)$。由于 $\mathrm{Hom}_{\varphi,\,\Gamma_K}(D_1,D_1)\cong\mathrm{Hom}_{\mathfrak{m}^{L/K}}(M_1,M_1)$，$\mathcal{R}(\delta)$上的 A-结构便在 M_1 上诱导出一个 A-结构，并使其成为 A 上的过滤（$\varphi,N,G_{L/K}$）-模，且 $\mathrm{D}(M_1)=\mathcal{R}(\delta)$。剩下只需证明 M_1 是 $L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A$ 上的自由秩一模。

当 A 是域时，该断言显然。对于一般情形，令 $\mathfrak{m}$ 为 A的极大理想。将 M_1 沿 $A/\mathfrak{m}$ 作基变换后，得到一个秩一的自由 $(A/\mathfrak{m})$-模（注意函子 $\mathrm{D}(-)$与基变换可交换）。根据中山引理，M_1 由一个元素生成。注意到

$$\dim_C(M_1)/[L_0:\mathbb{Q}_p]=\mathrm{rank}_{\mathcal{R}_{K,C}}D_1=\dim_C A,$$

因此，通过考察其 C-维数可知，它是秩一自由模。 □

命题 2.41.设 $\delta:K^\times\to A^\times$ 是某个连通既约 affoind 复数域-代数 A 的特征。假设

$$\delta(x):K^\times\to R^\times\to(R/\mathfrak{m}_x)^\times$$

是 de Rham，且 $\delta(x)$ 的光滑部分 $\delta(x)_{\mathrm{sm}}$ 对于任意点 $x\in\mathrm{Sp}R$，在 $I_L\subset W_K$ 上都是平凡的。那么 δ 是 de Rham，且 δ 的光滑部分 δ_{sm} 在 I_L 上是平凡的。

证明。假设 that

$$\delta(x)_{\mathrm{alg}}=\delta_{\underline{k}'(x)},$$

对于任意 $x\in\mathrm{Sp}R$ （此处 $\underline{k}'(x)\in\mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(K,C)}$）。

选择 $a\in\mathcal{O}_K$ 使得 $\mathbb{Q}_p(a)=K$。那么对于任意 $1\le i\le[K:\mathbb{Q}_p]$, $m\in\mathbb{N}$，定义:

$$\delta_i^m:=\frac{\delta(1+p^ma^i)-1}{p^m}\in A.$$

因此，对于任意 $x\in\mathrm{Sp}R$ 和 $m\gg 0$，我们有:

$$\begin{aligned}\delta_i^m(x)&=\frac{\delta(x)_{\mathrm{sm}}(1+p^ma^i)\prod\limits_{\eta:K\hookrightarrow C}\eta(1+p^ma^i)^{k'_\eta(x)}-1}{p^m}\\&=\frac{\prod\limits_{\eta:K\hookrightarrow C}\eta(1+p^ma^i)^{k'_\eta(x)}-1}{p^m}=\sum_{\eta:K\hookrightarrow C}k'_\eta(x)\eta(a^i)+p^mb,\end{aligned}$$

这里，b 是 $\mathcal{O}_C$ 中的某个元素。

因此 $|\delta_i^m(x)-\delta_i^{m'}(x)|\le p^{-m}$ 对于任意 $m'>m$，这意味着 $|\delta_i^m-\delta_i^{m'}|\le p^{-m}$且 $\{\delta_i^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 R 中的柯西序列（注意，A 是一个巴拿赫代数，并且当 A 既约时，$a\in A$ 的范数定义为 $\sup_{x\in\mathrm{Sp}A}\{|a(x)|\}$）。

现在选取 $\{\eta|\eta$ 的一个顺序：$K\hookrightarrow C\}=\{\eta_1,\dots,\eta_n\}$，并定义矩阵$\Delta:=(\eta_j(a^i))_{1\le j,\ i\le n}\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$。于是我们有

$$\lim_{m\to+\infty}(\delta_1^m(x),\dots,\delta_n^m(x))=(k'_{\eta_1}(x),\dots,k'_{\eta_n}(x)\Delta.$$

注意，Δ 是可逆的，因为 $|\det(\Delta)|=N_{K/\mathbb{Q}_p}(a)\prod\limits_{1\le j<k\le n}|\eta_k(a)-\eta_j(a)|\ne 0$ 根据直接计算。若设:

$$(k_{\eta_1},\dots,k_{\eta_n}):=\lim_{m\to+\infty}(\delta_1^m,\dots,\delta_n^m)\Delta^{-1},$$

则对任意 $\eta:K\hookrightarrow C$ 和 $x\in\mathrm{Sp}R$，有 $k_\eta(x)=k'_\eta(x)$。

现在注意，对任意 $\eta\in\mathrm{Hom}(K,C)$，它定义了一个连续映射

$$\mathrm{Sp}R\to\overline{C},x\mapsto k_\eta(x),$$

其像包含于 $\mathbb{N}$ 中（注意，$\mathbb{N}$ 作为 $\overline{C}$ 的拓扑子空间，带有离散拓扑）。因此，对任意 $x\in\mathrm{Sp}A$，$k_\eta(x)$ 是常值的，因为 A 是连通的。

因此，若我们设

$$\delta_s:=\delta\cdot\delta_{\underline{k}}^{-1}$$

对于 $\underline{k}:=(k_\eta)_\eta$，则对任意 $x\in\mathrm{Sp}A$，$\delta_s(x)$ 在 I_L 上是平凡的，这意味着 δ_s 在 I_L 上是平凡的（注意，R 是既约的）。因此，δ 是 de Rham 的，其光滑部分为 δ_s，代数部分为 $\delta_{\underline{k}}$。□

命题 2.42. 设 A 是一个连通的仿射 C-代数。设 $\delta_i:K^\times\to A^\times$是特征，且 M_i 是 $\mathcal{R}_{K,A}$ 上的过滤 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模，其中 $i=1$取 1, 2，使得

$$\mathbf{D}(M_1)(\delta_1)\cong\mathbf{D}(M_2)(\delta_2),$$

那么，$\delta_1\delta_2^{-1}$是德拉姆特征，且光滑部分在 I_L上是平凡的。

此外，$M_1(\delta_1\delta_2^{-1})\cong M_2$

证明。令 $\delta:=\delta_1\delta_2^{-1}$。对于任意 $\mathfrak{m}\in\mathrm{Sp}A$ 和 $n\in\mathbb{N}$，由引理 2.40 可得

$$\delta_{\mathfrak{m}^n}:=K^\times\xrightarrow{\delta}A^\times\to(A/\mathfrak{m}^n)^\times$$

在 I_L上的 de Rham，且光滑部分限制后为平凡。显然，$\delta_{\mathfrak{m}^n}$ 的代数部分与 $\delta_{\mathfrak{m}}$的代数部分相同。因此，根据命题 2.41，存在一个代数特征 $\delta_{\mathrm{alg}}:K^\times\to A^\times$，使得 $\delta_{\mathfrak{m}^n}\cdot\delta^{-1}$ 代数部分是

在 I_L 上平凡（这里我们将 $R/\sqrt{0}$ 应用于命题 2.41）。令 $\delta_s := \delta\cdot\delta^{-1}$ 代数部分，那么上述讨论意味着 $\delta_s(I_L)\in 1+\cap\mathfrak{m}^n=1$，因为 A 是诺特的。因此 δ_s 是光滑的，且限制在 I_L 上为平凡。

此外，由定理 2.30 可知，蕴含的是

$$M_1(\delta_1\delta_2^{-1})\cong M_2$$

作为 $\mathbf{D}(M_1(\delta_1\delta_2^{-1}))\cong\mathbf{D}(M_2)$。 □

令 $X(W_K/I_L)$ 表示将 A 赋给该群的刚性 C-群

$$\{\delta: W_K\to A^\times|\delta \text{ is a character with } \delta|_{I_L} \text{ is trivial}\}$$

则 $X(W_K/I_L)$ 可通过局部阿廷映射 $\mathrm{Art}: W_K^{\mathrm{ab}}\xrightarrow{\sim}K^\times$ 视为 $\mathcal{T}$ 的闭子空间。令 $\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0}$ 表示 $\mathfrak{M}^{L/K,d}$ 的子栈，使得对于任意 $M\in\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0}$，$\mathcal{F}^0(M_\eta)\neq 0$，但对于任意 $\eta\in\mathrm{Hom}(K,C)$，$\mathcal{F}^1(M_\eta)=0$。

推论 2.43。按如下方式定义 $X(W_K/I_L)$ 在 $\mathcal{T}_K\times\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0}$ 上的作用：

$$\begin{aligned}X(W_K/I_L)\times\mathcal{T}_K\times\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0}&\to\mathcal{T}_K\times\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0}\\(\delta,\delta',M)&\mapsto(\delta'\delta^{-1},M(\delta)).\end{aligned}$$

于是得到以下同构：

$$\begin{aligned}[(\mathcal{T}_K\times\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0})/X(W_K/I_L)]&\xrightarrow{\sim}\mathcal{Z}^{L/K,d,\leq 0}\\(\delta,M)&\mapsto\mathbf{D}(M)(\delta)\end{aligned}$$

证明。令 A 为一个连通的仿射有限 C 代数。

注意，对于秩为 d 的任意过滤的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 M（在 A 上），都存在唯一的代数特征 $\delta_{\underline{k}}$，其中 $k\in\mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(K,C)}$ 使得 $M(\delta_{\underline{k}})$ 属于 $\mathcal{Z}^{L/K,d,\leq 0}$。因此我们有一个满射态射

$$\mathcal{T}_K\times\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0}\twoheadrightarrow\mathcal{Z}^{L/K,d,\leq 0}$$

那么，这个推论恰好是对命题 2.42 的重新表述。 □

考虑分解

$$\begin{aligned}\mathcal{W}\times\mathbb{G}_m^{\mathrm{rig}}&\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}\\(\delta,b)&\mapsto(a\mapsto b^{v_K(a)}\cdot\delta(\frac{a}{\varpi^{v_K(a)}})).\end{aligned}$$

请注意，这种分解并非典范的，并且取决于 ϖ 的选择。

令 I_K^a（分别为 I_L^a）表示 I_K（分别为 I_L）在阿贝尔化 W_K^{ab}（分别为 W_L^{ab}）中的像（注意，这不同于惯性群的阿贝尔化）。令 $X(I_K^a/I_L^a)$ 表示将群赋给 A 的刚性 C-群

$$\{\delta: I_K^a\to A^\times|\delta \text{ is a character with } \delta|_{I_L^a} \text{ is trivial}\}$$

那么，$X(I_K^a/I_L^a)$ 可以视为 $\mathcal{W}$ 的一个闭子空间，因为它是 I_K 在局部阿廷映射 $\mathrm{Art}: W_K^{\mathrm{ab}}\xrightarrow{\sim}K^\times$ 下的像，即 $\mathcal{O}_K$。于是我们有（取决于 ϖ 的选择）

$$X(I_K^a/I_L^a)\times\mathbb{G}_m^{\mathrm{rig}}\cong X(W_K/I_L),$$

这是由上述分解诱导的。

尽管推论 2.43 中的态射是典范的，且不依赖于 ϖ 的选择，但下面的陈述在很大程度上取决于ϖ 的选择，而且该态射并非典范。

定理 2.44. 通过分解 $\mathcal{T}\cong\mathcal{W}\times\mathbb{G}_m^{\mathrm{rig}}$（取决于一致化子 $\varpi\in K$ 的选择），可以将 $\mathcal{W}$ 视为 $\mathcal{T}$ 的一个子刚性群 C-空间。于是，态射:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_K\times\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0}&\to\mathcal{Z}^{L/K.d}\\(\delta,M)&\mapsto\mathbf{D}(M)(\delta)\end{aligned}$$

是一个伽罗瓦覆盖，具有

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{Z}^{L/K,d}}(\mathcal{W}_K\times\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0})\cong X(I_K^a/I_L^a)$$

证明。注意，对于任意群 C-刚性叠作用 $G\times X\to X$ 于刚性 C-叠X 以及一个子群刚性 C-叠 $G'\subseteq G$，我们有以下同构:

$$\begin{aligned}(G\times X)/G'&\xrightarrow{\sim}(G/G')\times X\\(g,x)&\mapsto(\overline{g},gx),\end{aligned}$$

其中作用 $G'\times G\times X\to G\times X$ 定义为

$$(h,g,x)\mapsto(gh^{-1},hx).$$

因此我们有:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{L/K,d}&\cong\left[(\mathcal{T}_K\times\times\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0})/X(W_K/I_L)\right]\\&=\left[(\mathcal{T}_K\times\times\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0})/(X(I_K^a/I_L^a)\times\mathbb{G}_m^{\mathrm{rig}})\right]\\&\cong\left[(\mathcal{W}_K\times\mathbb{G}_m^{\mathrm{rig}}\times\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0})/(X(I_K^a/I_L^a)\times\mathbb{G}_m^{\mathrm{rig}})\right]\\&\cong\left[(\mathcal{W}_K\times\mathfrak{M}^{L/K,d,\leq 0})/X(I_K^a/I_L^a)\right]\end{aligned}$$

并得出结论。

□

3. Global Paraboline (φ,Γ_K)-modules

在本节中，我们也固定一个 p-进局部域 K，并沿用之前的记号 L 表示其上的某个伽罗瓦扩张 K。我们用 C 表示系数域，它是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，且足够大。此外，对于一个群 G，用 $X(G)$ 表示群 G 的特征所构成的 C-刚性空间。

特别地，我们要求 $|\mathrm{Hom}(K,C)|=[K:\ \mathbb{Q}_p]$。

3.1. 参数空间。本小节将构造一个刚性空间 $\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}$，它是 $\mathcal{Z}^{L/K,d}$ 的某个连通分支 $\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}}$ 的一个图表（见下文的定义）。这将用于定义精化抛物型簇的参数空间。根据构造， $\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}$ 是形式为 $\mathcal{T}_\tau\times\mathrm{Flag}$ 的空间，其中 $\mathcal{T}_\tau$ 将用于定义抛物线型簇的参数空间，并与自守侧的海克特征簇的参数空间相识别。

设 (ρ,V) 是 K over$C$ 上的一个绝对不可约 WD 表示（$N=0$），则根据命题 2.8， ρ 的形式为 $\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\tilde{\tau}\otimes\delta_0)$，其中 $\delta_0:W_\tau\to C^\times$ 是一个非分歧特征。在这种情况下，称 ρ 为类型 τ。在本小节中，固定一个秩为 d_τ、定义在 C 上的光滑绝对不可约表示 τ。令 $d=d_\tau e_\tau$。令 $\mathfrak{W}^{L/K,\ n_\tau=1^{\ d}}$ 表示 $\mathfrak{W}^{L/K,\ d}$ 的连通分支，其中包含类型为 τ 的不可约 WD 表示。根据定理 2.9， $\mathfrak{W}^{L/K,\ n_\tau=1^{\ d}}$ 可定义在 C 上，且与 $\mathfrak{W}^{K_\tau/K_\tau,1}$ 同构（回想一下， K_τ 是

K 上唯一的 e_τ 次非分歧扩张，并记 $W_\tau \subseteq W_K$ 为 K_τ 的魏尔群）。以下是本小节及本文后续部分中使用的一些关于准 de Rham (φ,Γ_K)-模的术语。

定义 3.1. 设 A 是一个仿紧 C-代数。若一个准 de Rham (φ,Γ_K)-模D定义在 A 上，且具有某个滤过的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 M 的 $D\cong \mathbf{D}(M)(\delta)$，以及某个连续特征 $\delta\colon K^\times\to A^\times$，则称其为

(1) 若 M 是一个自由的（$L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A$）-模，则称其为拟自由；(2) 若其具有（滤过）权类型 $\underline{k}\in(\mathbb{Z}_+^{d'})^{\mathrm{Hom}(K,C)}$，即 M 的滤过权为$\underline{k}$，其中 d' 是 D的秩；(3) 若存在某个类型 τ'，使得 $\mathrm{WD}(M)$ 对应于 $\mathfrak{W}^{L/K}{}_{,n_{\tau'}=1}^{d'}(A)$ 中的一个元素，则称其为不可约，其中 $\mathrm{WD}(M)$ 是附属于 M 和 $d'=d_{\tau'}e_{\tau'}$的 WD 表示。在这种情况下，我们也称 D 具有类型 τ'。

根据定理 2.9，这等价于存在 $\mathrm{Spec}(A)$ 上的线丛 $\mathcal{L}$，以及一个非分歧特征 $\delta\colon W_{\tau'}\to A^\times\cong\mathrm{End}_A(\mathcal{L})$，使得

$$\mathrm{WD}(M)\cong \mathrm{Ind}_{W_{\tau'}}^{W_K}(\widetilde{\tau}'\otimes\mathcal{L}),$$

这里，$\mathcal{L}$ 被视为 $W_{\tau'}$ 的秩一 WD 表示。

特别地，如果 D 是 τ' 型且滤过权型为 $\underline{k}$，我们简称 D 为 $(\tau',\underline{k})$ 型。

定义 3.2. 令 $\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}}$ 表示 $\mathcal{Z}^{L/K,d}$ 的子叠，使得对任意仿射 C-代数 A，$\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}}(A)$ 是由 D 给出的、定义在 A 上且为 (φ,Γ_K) 型的模的群胚。

注 3.3. 根据第 2.4 节，对于拟 de Rham (φ,Γ_K)-模 D，表达式 $D\cong\mathbf{D}(M)(\delta)$ 并不唯一。但可以看出，D 的拟自由性和不可约性与 M 和 δ 的选择无关，而类型 τ 和滤过权型 $\underline{k}$ 则与之有关。更准确地说，假设 D 不可约。若存在两个滤过 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 M_1（类型为 τ_1，滤过权为 $\underline{k}_1$）和 M_2（类型为 τ_2，滤过权为 $\underline{k}_2$），以及两个连续特征 δ_1,δ_2，使得

$$D\cong\mathbf{D}(M_1)(\delta_1)\cong\mathbf{D}(M_2)(\delta_2),$$

于是根据命题 2.42，存在一个元素 $g\in W_K$ 和光滑特征$\delta'\colon I_K\to C^\times$，使得 $\tau_1\cong\tau_2^g(\delta')$，并且存在一个元素 $\underline{k}'\in\mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(K,C)}$，使得$\underline{k}_1=\underline{k}_2-\underline{k}'$。因此，当我们说 D 是类型为（τ，$\underline{k}$）时，类型 τ 可视为由 W_K共轭的、I_K 的不可约光滑表示在光滑特征扭曲意义下的等价类集合中的一个元素，而 $\underline{k}$ 可视为 $(\mathbb{Z}_+^d/\mathbb{Z})^{\mathrm{Hom}(K,C)}$中的一个元素。

设 X是一个 C-概形，设（$\mathcal{L}$，ρ，$N=0$）是 K_τ 上的一个以 X 为系数的秩一 Weil–Deligne 表示，且 ρ 是非分歧的。则 $\mathcal{L}$ 是 X上的一个线丛，而 ρ是一个非分歧特征 $W_\tau\to\mathcal{O}_X^\times(X)$。设 s 是 W_τ中的一个 q^{e_τ}-Frobenius 元（q 是剩余域 k_K的基数），则 ρ 由 $\rho(s)$确定。用叠的语言来说，上述分析意味着

$$\mathfrak{W}^{K_\tau/K_\tau,1}\cong\mathbb{G}_m\times[\mathrm{Spec}(C)/\mathbb{G}_m]\cong[\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m],$$

其中，$\mathbb{G}_m$ 在 $\mathbb{G}_m$ 上的作用是平凡的。

通过直接计算，$\mathcal{L}^{\mathrm{univ}}$ 在 $[\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m]$ 上的 WD 表示的泛层 K_τ可描述如下：

设 X 是一个 C-概形，并带有一个态射 $f: X \to [\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m]$。根据纤维积的泛性质， f 对应于一对 (f_1, f_2)，其中 f_1 是一个态射 $X \to \mathbb{G}_m$ ，而 f_2 是一个态射 $X \to [\mathrm{Spec}(C)/\mathbb{G}_m]$。若将 $\mathbb{G}_m$ 记为 $\mathrm{Spec}(C[T^{\pm 1}])$，则 f_1 诱导出一个环同态 $f_1^*: C[T^{\pm 1}] \to \mathcal{O}_X(X)$。我们选取一个元素 $f_1^*(T) \in \mathcal{O}_X^\times(X) = \mathrm{End}(\mathcal{L})$，并通过 f_2构造一个线丛 $\mathcal{L}$。然后我们定义

$$\mathcal{L}^{\mathrm{univ}}(f) := (\mathcal{L}, \rho),$$

其中 $\rho(s) = f_1^*(T)$。

现在，对每个 $\eta \in \mathrm{Hom}(K, C)$，我们固定一个 η-滤过权

$$\underline{k}_\eta := (k_{\eta,1} < \cdots < k_{\eta,d} = 0),$$

并记作 $\underline{k} := (\underline{k_\eta})_{\{\eta: K \hookrightarrow C\}}$。令 $\mathfrak{M}^{L/K}_{,n_\tau=1^{\underline{k}}}$ 表示 $\mathfrak{M}^{L/K}_{,d,}{}^{\leq 0}$ 的连通分支，它由那些滤过权为 $\underline{k}$ 且相应 WD 表示属于类型 τ（因此 $N = 0$）的滤过（φ, N, $G_{L/K}$）-模组成。令 B_d 表示 GL_d （在 C 上）中由上三角矩阵组成的标准 Borel 子群。根据定理 2.15，可以计算得

$$\mathfrak{M}^{L/K,\underline{k}}_{n_\tau=1} \cong \Big(\prod_{\eta: K \hookrightarrow C} [(\mathrm{GL}_d/B_d)/\mathrm{GL}_d]\Big) \times_{[\mathrm{Spec}(C)/\mathrm{GL}_d]} [\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m]$$

其中 $\mathrm{GL_d}$ 通过共轭作用于旗簇（$\mathrm{GL_d}/B_d$），而态射$[\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m] \to [\mathrm{Sp}(C)/\mathrm{GL}_d]$ 来自自然嵌入 $\mathbb{G}_m \cong \mathrm{GL}_1 \hookrightarrow \mathrm{GL}_d$。下面的命题表明，Artin 叠 $\mathfrak{M}^{L/K}_{,n_\tau=1^{\underline{k}}}$ 沿自然投影 $\mathrm{pr}: \mathbb{G}_m \twoheadrightarrow [\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m]$ 进行基变换后成为一个概形。

命题 3.4。选取不可约 WD 表示 $\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\tilde{\tau})$ 的一组基，即 $\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\tilde{\tau}): W_K \to$ 一般线性群$_d(C)$。该 C-概形

$$M_\tau := \Big(\prod_{\eta: K \hookrightarrow C} \mathrm{GL}_d/B_d\Big) \times \mathbb{G}_m$$

表示函子

$$X \to \{(\delta: W_\tau \to \mathcal{O}_X^\times, \mathcal{F}^\bullet) | \delta \text{ is unramified}\}$$

其中 $\mathcal{F}^\bullet$ 是 $\left(\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\tilde{\tau} \otimes_C \delta)\right) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ 的一个滤过，它等于函子

$X \mapsto \{$秩为 d 的自由滤过 $(\varphi, N, G_{L/K})$-模，定义在 X 上，类型为 $\tau\}/\sim$.该态射

$$\phi_\tau : M_\tau \to \mathfrak{M}^{L/K,\underline{k}}_{n_\tau=1},$$

由自然投影诱导

$$(\mathrm{GL}_d/B_d) \twoheadrightarrow [(\mathrm{GL}_d/B_d)/\mathrm{GL}_d] \ and \ \mathrm{pr}: \mathbb{G}_m \twoheadrightarrow [\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m],$$

使下面的图表

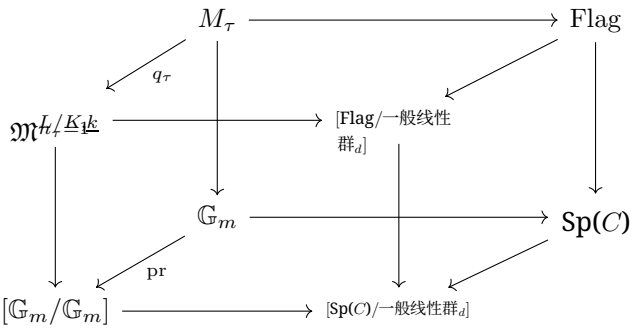
$$\begin{array}{ccc} M_\tau & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_\tau} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}} \\ \mathfrak{M}^{L/K,\underline{k}}_{n_\tau=1} & \longrightarrow & [\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m] \end{array} .$$

彼此对易并成为一个笛卡尔积。

此外，根据定理 2.15，若我们将泛特征记为δ^{univ}，并将 $\left(\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\tilde{\tau} \otimes_C \delta^{\mathrm{univ}})\right) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ 在 M_τ 上的泛滤过记为 $\mathcal{F}^{\mathrm{univ},\bullet}$，那么 $\mathrm{FWD}(\delta^{\mathrm{univ}}, \mathcal{F}^{\mathrm{univ},\bullet})$ 是经由 ϕ_τ 得到的诱导滤过 $(\varphi, N, G_{L/K})$-模（其中 FWD 是定理 2.15 中的同构）。

证明。我们只证明该图表是笛卡尔的，因为其他断言只是定理 2.15 结合上述讨论所得的直接推论。

简记 Flag 为 $\prod \mathrm{GL}_d/B_d$ 。接着考虑以下交换η: $K\hookrightarrow C$立方图（所有箭头均以显然的方式典范定义。）



再次由定理 2.15，前面的方形图表是笛卡尔的；根据定义，右侧和后面的方形图表也是笛卡尔的（而底部的不是），这意味着左侧的方形图表是笛卡尔的。□

引理 3.5. 令 $\delta:\ W_K\to C^\times$ 为一个光滑特征。记 $\delta_0:=\delta|_{W_\tau}$。则存在一个同构

$$\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}\otimes\delta_0)\to\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau})\otimes\delta$$

W_K 表示的

此外，对于任意光滑特征 $\delta:\ W_\tau\to C^\times$，有

$$\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau})\cong\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}\otimes\delta)$$

当且仅当对于某个 $g\in W_K/W_\tau$，有 $\widetilde{\tau}\otimes\delta\cong\widetilde{\tau}^g$。

证明。考虑这个 W_τ-等变映射：

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}\otimes\delta_0&\to\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau})\otimes\delta\\ v\otimes 1&\mapsto(1\otimes v)\otimes 1\end{aligned}$$

因此，根据 Frobenius 互反律，存在一个诱导的 W_K-等变映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}\otimes\delta_0)&\to\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau})\otimes\delta\\ g\otimes(v\otimes 1)&\mapsto(g\otimes v)\otimes\delta(g)\end{aligned}$$

该映射显然是满射的，并且通过考察两边的 C维数可知它是单射的。

根据我们在第1节中的计算，有

$$\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau})\cong\bigoplus_{g\in W_K/W_\tau}\widetilde{\tau}^g$$

作为 W_τ 表示。于是第二个断言成立。 □

令 X_τ 为 $X(W_K/I_L)$ 的子群概形，它表示满足 $\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau})\otimes\delta\cong\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau})$ 的 W_K/I_L 的特征 δ 。

注 3.6. 令 Y_τ 表示某个 $g \in W_K/W_\tau\}$ 的 $\{\psi \in X(I_K^a/I_L^a)|\tau \otimes \psi \cong \tau^g$。典范映射

$$X_\tau \to Y_\tau$$
$$\delta \mapsto \delta|_{I_K}$$

是一个群概形的满射态射，其核为 $X(W_K/I_K)$（回忆一下，I_K^a（分别为 I_L^a）表示 I_K（分别为 I_L）在阿贝尔化 W_K^{ab} 中的像）。

证明。此处只是改述引理 3.5。 □

现在我们以显式方式给出 $\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}}$ 的一个图表，并描述相应的（φ,Γ_K）-模层。

回忆一下，Ω_L 表示不可约 I_K/I_L-表示的 W_K-共轭类集合（并在每个共轭类中固定一个代表元）。若记

$$\Omega_\tau := \{\tau' \in \Omega_L \mid [\tau'] = [\tau \otimes \delta] \text{ for some } \delta \in X(W_K/I_L)\},$$

则 $X(W_K/I_L)$ 在 Ω_τ 上传递作用，其核为 X_τ。由推论 2.43，可得

$$\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}} \cong [\left(\coprod_{\tau' \in \Omega_\tau} \mathcal{T} \times \mathfrak{M}_{n_{\tau'}=1}^{L/K,\underline{k}}\right)/X(W_K/I_L)] \cong [(\mathcal{T} \times \mathfrak{M}_{n_{\tau'}=1}^{L/K,\underline{k}})/X_\tau].$$

令 $\mathcal{T}_\tau$ 表示 $N_{K_\tau/K}: K_\tau^\times \to K^\times$ 的像的连续特征函子所表示的 C-刚性空间。由于 K_τ 在 K 上非分歧，因此 $N_{K_\tau/K}(K_\tau^\times) = \{a \in K^\times | v_K(a) \in e_\tau\mathbb{Z}\}$。于是 $\mathcal{T}_\tau$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个商，其核为 $X(W_K/W_\tau)$。典范映射 $\mathcal{T} \times X(W_\tau/I_K)) \to \mathcal{T}_\tau, (\delta_1, \delta_2) \mapsto \overline{\delta}_1\delta_2$ 诱导出一个同构

$$[(\mathcal{T} \times X(W_\tau/I_K))/X(W_K/I_K)] \cong \mathcal{T}_\tau.$$

令 Y_τ 表示表示函子的群 C-刚性空间

$$A \to \{\psi \in X(I_K/I_L)(A)|\tau \otimes \psi \cong \tau^g \text{ for some } g \in W_K/W_\tau\}$$

由注 3.6 可知，存在短正合列

$$0 \to X(W_K/I_K) \to X_\tau \to Y_\tau \to 0$$

因此

$$\begin{aligned} &\cong [((\mathcal{T} \times X(K_\tau/I_K) \times \mathrm{Flag})/X(W_K/I_K))/(Y_\tau \times \mathbb{G}_m)] \\ &\cong [(\mathcal{T}_\tau \times \mathrm{Flag})/(Y_\tau \times \mathbb{G}_m)] \end{aligned}$$

上述讨论可总结为以下命题：

命题 3.7。态射

$$[\mathcal{T}_\tau \times \mathrm{Flag}/\mathbb{G}_m] \to \mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}}$$

是具有伽罗瓦群 Y_τ 的 ´etale。

定义 3.8。记 $\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}} := \mathcal{T}_\tau \times$Flag，且记 θ 为典范态射的复合：

$$\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}} \to [\mathcal{T}_\tau \times \mathrm{Flag}/\mathbb{G}_m] \to \mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}}.$$

注 3.9。

(1) 沿 θ 拉回后，我们得到 $\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}$ 上的 (φ,Γ_K)-模的典范族 $D^u := \theta^*(D^{\mathrm{univ}})$，其中 D^{univ} 是 $\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}}$ 上的 (φ,Γ_K)-模的泛族。

(2) 令 δ^{univ} 表示 $\mathcal{T}_\tau$ 上 $K_\tau^\times$ 的泛特征。根据构造，可以计算：

$$\mathrm{pr}_*(D^{u,r})[1/t] \cong \mathrm{Ind}_{K_\tau}^K \left((\widetilde{\tau}\otimes_C \mathcal{R}^r_{K_\tau,C})^{H_{K_\tau}} \otimes_C \mathcal{R}_{K_\tau,C}(\delta^{\mathrm{univ}})\right)[1/t],$$

这里 $r > r(K)$，pr 是到 $\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}} \to \mathrm{Flag}$ 的自然投影，而 $\mathrm{Ind}_{K_\tau}^K$ 是 [Liu07 第 2.2] 节中定义的诱导函子。

令 $\mathcal{F}^{\mathrm{univ},\bullet}$ 表示 Flag 上的泛滤过（因此，对于每个仿射子域 $\mathrm{Sp}(A)\subseteq\mathrm{Flag}$，它是 $A\otimes_C(\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}\widetilde{\tau})\otimes_{K_0}K$ 上的一个滤过）。那么，对于足够大的 n，典范同构

$$D^{u,r}(\mathrm{Sp}(A))[1/t]\otimes^{\iota_n}_{\mathcal{R}_{K,C}} K_n[\![t]\!] \cong A\otimes_C (\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}\widetilde{\tau}\otimes\delta^{\mathrm{univ}})\otimes^{\iota_n}_{K_0} K_n(\!(t)\!)$$

诱导出 $D^{u,r}(\mathrm{Sp}(A))[1/t]\otimes^{\iota_n}_{\mathcal{R}_{K,C}} K_n[\![t]\!]$ 上的一个滤过，其中

$$\mathcal{F}^i(A\otimes_C(\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}\widetilde{\tau})\otimes^{\iota_n}_{K_0}K_n(\!(t)\!)) := \sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}^j(A\otimes_C \mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}\widetilde{\tau}\otimes^{\iota_n}_{K_0}K)\otimes_K t^{i-j}K_n[\![t]\!].$$

Then $D^u = D^{u,r}\otimes_{\mathcal{R}^r_{K,C}}\mathcal{R}_{K,C}$ for

$$D^{u,r} = \{x\in D^{u,r}[1/t]\mid \iota_n(x)\in\mathcal{F}^0(D^{u,r}[1/t]\otimes^{\iota_n}_{\mathcal{R}_{K,C}}K_n[\![t]\!])\}.$$

(3) 尽管 $\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}$, $\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}}$ 的构造以及典范映射 θ 不依赖于 K 中一致化子 ϖ 的选择。我们可以通过如下选择一个一致化子来构造 $\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}$ 上的（φ,Γ_K）-模 $\mathcal{D}^{\mathrm{u}}$。

取一个一致化子 $\varpi\in K$，则 K_τ 的一致化子为 ϖ^{e_τ}。于是，$N_{L/K}(K_\tau^\times)$ 在 $\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}$ 上的泛特征 δ^{u} 可分解为 $\delta_1\delta_2$，其中 $\delta_1(a):=\delta^{\mathrm{u}}(\varpi^{e_\tau})^{v_{K_\tau}(a)}$ 是非分歧的，而 δ_2 是满足 $\delta_2|_{\mathcal{O}_K^\times}=\delta^{\mathrm{u}}|_{\mathcal{O}_K^\times}$ 且 $\delta_2(\varpi^{e_\tau})=1$ 的唯一特征。我们可以将 δ_2 延拓为 $K^\times$ 的一个特征$\sim\delta_2$（例如，令 $\delta_2(\varpi)=1$）。然后我们可以定义

$$\mathcal{D}^{\mathrm{u}} := \mathbf{D}(\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}\otimes_C\delta_1))(\widetilde{\delta_2}).$$

$\sim$在同构意义下，$\mathcal{D}^{\mathrm{u}}$ 不依赖于 δ_2的扩张 δ_2，根据定义也不依赖于一致化子 ϖ 的选择。

(4) 设 X 是一个刚性 C-空间，且 f 是一个态射 $X\to\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}$。从现在起，我们用记号 $\mathcal{R}(f)$ 表示普遍 (φ,Γ_K)-模 $\mathcal{D}^{\mathrm{u}}$的拉回 $f^*(\mathcal{D}^{\mathrm{u}})$。

(5) 对于一点 $x=(\delta_x,\mathcal{F}^\bullet)\in\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}$，特化 $\mathcal{R}(x)=\mathcal{D}^{\mathrm{u}}_x$ 可通过 (2) 中的方法计算。也可以用以下方式计算。设 $V_0:=\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau})$。根据定理 2.15，可以定义一个过滤的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 $M_x:=\Omega(\mathcal{F}^\bullet,V_0)$。或许需要扩张 C之后，令$\delta:K^\times\to k(x)^\times$ 为一个扩张 δ_x的连续特征。然后可以证明存在一个 (φ,Γ_K)-模的同构：

$$\mathbf{D}(M_x)(\delta)\cong\mathcal{D}^{\mathrm{u}}_x$$

(6) 设 τ_1、τ_2 是 C 上的绝对不可约光滑 I_K-表示。假设存在一个光滑特征 $\delta:I_K\to C^\times$ 和一个元素$g\in W_K$，使得 $\tau_1\otimes\delta\cong\tau_2^g$。那么 δ 诱导一个典范同构。

$$\kappa(\delta,g):\mathcal{S}_{\tau_1}^{\underline{k}}\to\mathcal{S}_{\tau_2}^{\underline{k}}$$

使得 $\kappa(\delta,g)^*(\mathcal{D}_2^{\mathrm{u}})\cong\mathcal{D}_1^{\mathrm{u}}$，其中 $\mathcal{D}_i^{\mathrm{u}}$是 $\mathcal{S}_{\tau_i}^{\underline{k}}$的泛对象。

定理 3.10. $\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau$ 是函子（按 [MFK82，定义 5.9] 的意义）的粗模空间

$$\mathcal{Q}_{\tau,\underline{k}} : C\text{-rigid spaces} \to \text{Sets}$$
$$A \mapsto \{(\varphi,\Gamma_K)\text{-module } D \text{ over } A \text{ of type } (\tau,\underline{k})\}/\sim .$$

证明。注意，$\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau \cong (\mathcal{T}\times X(W_\tau/I_L))/X_\tau \times \mathrm{Flag}$，因此确实是一个刚性空间。

设 Y 是 C 上的一个刚性空间，配备了一个类型为（$\tau,\underline{k}$）的（φ,Γ_K）-模 D，则 D 诱导出一个态射 $f_D:\ Y\to\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}}\cong[(\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau)/\mathbb{G}_m]$，它对应于一个图表

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{E} & \xrightarrow{\widetilde{f}_D} & \mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau\\ \big\downarrow{\scriptstyle p} & & \\ Y & & \end{array}$$

~这里 p 是一个 $\mathbb{G}_m$-主丛，且 f_D 是 $\mathbb{G}_m$ 等变的。

由于 $\mathbb{G}_m$在$\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau$ 上的作用是平凡的，因此局部地在 étale 拓扑下存在唯一的态射 $g_D:\ Y\to\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau$，使得 $\widetilde{f}_D=g_D\circ p$。由于这种分解是唯一的，可以应用 ′的 étale 下降，得到唯一的全局态射 $g_D:\ Y\to\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau$。映射 $\Psi:\ f_D\mapsto g_D$ 确实是从 $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}})$ 到 $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau)$ 的一个函子。

设 X 是一个 C-刚性空间，并且存在一个函子

$$\Psi_X:\mathrm{Hom}(-,\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}})\to\mathrm{Hom}(-,X).$$

那么 $\Psi_X(\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau\to\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}}):\ \mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau\to X$ 是唯一的态射，使得对于任意$f_D:\ Y\to\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}}$，复合 $\Psi_X(\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau\to\mathcal{Z}_\tau^{\underline{k}})\circ\Psi(f_D)$ 等于 $\Psi_X(f_D)$。

最后，当 $Y=\mathrm{Sp}(C')$，其中 C'/C是某个有限域扩张时，唯一的$\mathbb{G}_m$-扭子（在同构意义下）是 $\mathbb{G}_{m,\ C'}$。因此，任意 $\mathbb{G}_m$-等变态射$\mathbb{G}_{m,\ C'}\to\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau$ 都来自一个态射 $\mathrm{Sp}(C')\to\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau$。由此可知，$\Psi$ 在点上是双射，因此 $\mathcal{S}_\tau^{\underline{k}}/Y_\tau$ 是函子 $\mathcal{Q}_{\tau,\ \underline{k}}$的粗模空间。

□

3.2. 参数空间的正则轨。为方便起见，从现在起，对于定义在同一个仿射刚性代数或同一个解析刚性空间上的两个 (φ,Γ_K)-模 D_1,D_2，其张量积简记为 $D_1\otimes D_2$，并省略基。类似地，(φ,Γ_K)-模之间的态射空间记为 $\mathrm{Hom}(D_1,D_2)$，并省略“φ,Γ_K”下标。

从现在起，我们固定以下设置和记号：

（1）一个正整数 n，以及一个有序分拆 $n:=n_1+\cdots+n_l$；（2）对于每个 $1\le i\le l$，以及每个 $\eta\in\mathrm{Hom}(K,C)$，一个 η-滤过权

$$\underline{k_\eta^{(i)}}:=(k_{\eta,1}^{(i)}<\cdots<k_{\eta,n_i}^{(i)}=0);$$

(3) $\underline{k^{(i)}}:=(\underline{k_\eta^{(i)}})_{\{\eta:K\hookrightarrow C\}}$; (4) 对每个 $1\le i\le l$，一个定义在 C 上的绝对不可约光滑 I_K-表示 τ_i（实际上，我们可以选取某个有限伽罗瓦扩张 L/K，使得每个 τ_i 在 I_L 上都是平凡的），使得 $d_{\tau_i}e_{\tau_i}=n_i$，其中 d_{τ_i} 是 τ_i 的维数，且 $e_{\tau_i}:=[K_\tau:K]$。

(5) $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}_{\tau_i}$，对于 $1 \le i \le l$，且 $\mathcal{T} := \prod_{1\le i\le l} \mathcal{T}_i$。(6) $\mathcal{S}_i := \mathcal{S}_{\tau_i}^{\underline{k}^{(i)}}$，对于 $1 \le i \le l$，且 $\mathcal{S} := \prod_{1\le i\le l} \mathcal{S}_i$。

(7) 对于每个 i，记作

$$\Delta : \mathcal{S}_i \to \mathcal{T}_i$$

为自然投影，并且也用相同记号 Δ 表示自然投影 $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$。

注 3.11. 为方便起见，我们可以通过将 τ_j 替换为 $\tau_j^g \otimes \delta^{-1}$，假设 $\tau_i \otimes \delta \cong \tau_j^g$ 仅在 $\tau_i \cong \tau_j$ 时发生。根据注 3.9(6)，这不会改变 $\mathcal{S}_j$。对于这样的配对 (i,j)，如果我们还有 $\underline{k^{(i)}} = \underline{k^{(j)}}$，那么典范同构

$$\kappa(\delta, g) : \mathcal{S}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_j$$

由 $\mathcal{T}_i \times \prod \mathrm{GL}_{n_i}^{\mathrm{rig}}/B_{n_i}^{\mathrm{rig}}$ 上的恒等映射诱导。

注 3.12. 由于 $\mathcal{S}_i \cong \mathbb{G}_m^{\mathrm{rig}} \times \mathcal{W} \times (\prod_{\eta:K\hookrightarrow C}$ 一般线性群$_{n_i}^{\mathrm{rig}}/B_{n_i}^{\mathrm{rig}})$ 是 C-刚性空间，因此 $\mathrm{one}_{\eta:\ K\hookrightarrow C}$ 可计算出 $\dim(\mathcal{S}_i) = 1 + [K:\ \mathbb{Q}_p] + [K:\ \mathbb{Q}_p]\binom{n_i}{(n_i-1),2}$。因此

$$\dim(\mathcal{S}) = l + [K:\mathbb{Q}_p] \sum_{i=1}^{l} \frac{n_i^2 - n_i + 2}{2}$$

现在令 $|z|$ 表示 $K^\times$ 的特征 $z \mapsto |N_{K/\mathbb{Q}_p}(z)|$。

定义 3.13。对于一对 $1 \le i < j \le l$，满足 $\tau_i \cong \tau_j$，我们将 $\mathcal{T}_{i,j} \subset \mathcal{T}_{\tau_i}$ 记作 C-值点 $\delta_{-\underline{k}}$，$|z|\delta_{\underline{k}+1}$ 满足 $\underline{k} = (k_\eta)_{\eta:K\hookrightarrow C}$ 且 $k_\eta \le k_\eta^{(j)} - k_\eta^{(i)}$，对所有 η 和 $1 \le t \le n_i$ 均成立的扎里斯基开补集（尽管 $\delta_{-\underline{k}}$ 和 $|z|\delta_{\underline{k}+1}$ 是 W_K 的特征，此处表示它们在 W_τ 上的限制）。

我们将 $\mathcal{T}$ 的正则轨迹 $\mathcal{T}_{\mathrm{reg}}$ 定义为满足以下条件的点 $(\delta_1, \cdots, \delta_l)$ 所组成的扎里斯基开子集：对于每个满足 $\tau_i \cong \tau_j$ 的 $i < j$，都有 $\delta_i \delta_j^{-1} \in \mathcal{T}_{i,j}$。并将 $\mathcal{S}$ 的正则轨迹 $\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}$ 定义为 $\Delta^{-1}(\mathcal{T}_{\mathrm{reg}})$。

如上给出正则轨迹的定义，动机在于我们需要参数空间的一个扎里斯基稠密开子空间 $\mathcal{S}$，它满足如下性质，类似于 KPX14，命题 6.2.8] 对秩一 (φ,Γ_K)-模的情形。

命题 3.14. 对于一个点 $x = (x_1, \cdots, x_l) \in \mathcal{S}_{\mathrm{reg}}$，我们记作 $D_i := \mathcal{D}_{x_i}^{\mathrm{u}}$。有以下结论。

(1) $H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_i^\vee \otimes D_i) = k(x)$；(2) $H^m_{\varphi,\gamma_K}(D_i^\vee \otimes D_j) = 0$ 对于 $i < j$，以及 $m = 0,\ 2$；(3) $\dim_{k(x)} H^1_{\varphi,\gamma_K}(D_i^\vee \otimes D_j) = [K:\ \mathbb{Q}_p] n_i n_j$ 对于 $i < j$。

证明。

(1) 根据注 3.9(3)，我们可以将 D_i 写成 $\mathrm{D}(M_{x_i})(\delta_i)$ 的形式。由于函子 D 是全忠实的，有

$$H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_i^\vee \otimes D_i) = \mathrm{Hom}(D_i, D_i) = \mathrm{Hom}(M_{x_i}, M_{x_i}).$$

注意，M_x 作为一个$(\varphi, N, G_{L/K})$-模是不可约的，这意味着

$$\dim_{k(x)} H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_i^\vee \otimes D_i) = 1.$$

(2) 我们只需证明

$$\mathrm{Hom}(D_i, D_j) = 0,$$

这意味着 $H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_i^\vee \otimes D_j) = 0$；利用[KPX14 中的 Tate 对偶定理 4.4, 5], 可以通过类似的计算证明 $H^2_{\varphi,\gamma_K}(D_i^\vee \otimes D_j) = 0$。

令 δ_i（分别令 δ_j）表示一个连续特征 $K \to k(x)^\times$，使得$\delta|_{W_\tau}$ 对应于 $\Delta(x_i)$（分别对应于 $\Delta(x_j)$）。则 $D_i \cong \mathbf{D}(M_{x_i})(\delta_i)$ 且$D_j \cong \mathbf{D}(M_{x_j})(\delta_j)$。假设 $\mathrm{Hom}(D_i, D_j) \neq 0$，则存在一个非零单射

$$\mathcal{R}(\delta_i\delta_j^{-1}) \hookrightarrow \mathbf{D}(M_{x_i}^\vee \otimes M_{x_j}).$$

因此 $\delta := \delta_i\delta_j^{-1}$是 de Rham 的。现在假设 $\delta = \delta_{\underline{k}}\delta_{\mathrm{sm}}$，其中某个代数特征的权为 $\underline{k} = (k_\eta)_{\eta:K\hookrightarrow C}$，且某个光滑特征为 δ_{sm}。那么δ 对应于一个秩一滤过（$\varphi, N, G_{L/K}$）-模 $M(\delta)$，其滤过权为 $-\underline{k}$，并且其（$\varphi, N, G_{L/K}$）-结构作为 WD 表示对应于 δ_{sm}。由于 D 是全忠实的，因此它诱导出一个非零映射 $M_{x_i}(\delta) \to M_{x_j}$，这意味着存在一个非零的 W_K-等变映射

$$\mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}_i \otimes_C \delta_{\mathrm{sm}}|_{W_\tau}) \to \mathrm{Ind}_{W_\tau}^{W_K}(\widetilde{\tau}_j).$$

因此，根据 Frobenius 互反律，它诱导出一个非零的 I_K-等变（实际上是 W_τ-等变）映射 $\widetilde{\tau}_i \otimes_C \delta_{\mathrm{sm}}|_{W_\tau} \to \widetilde{\tau}_j^g$，其中某个 $g \in W_K$。根据假设，有 $\tau_i \cong \tau_j$，且 $\delta_{\mathrm{sm}}|_{W_\tau}$ 是平凡的。

由此可知，存在一个非零映射 $M_{x_i}(\delta) \to M_{x_j}$（因此是一个同构），它是 $(\varphi, N, G_{L/K})$-模之间的映射。注意，$M_{x_i}(\delta)$ 的 η-滤过权为 $\underline{k_\eta^{(i)}} - k_\eta$，而 M_{x_j} 的 η-滤过权为 $\underline{k_\eta^{(j)}}$。因此，对于每个 $1 \le t \le n_i$，必有 $k_{\eta,t}^{(i)} - k_\eta \le k_{\eta,t}^{(j)}$，这与其属于正则轨迹的条件矛盾。

(3) 这由 [KPX14 定理 4.4.5] 的欧拉示性数公式得出。

□

3.3. 精化抛物型簇。

定义 3.15. 设 X 是一个 C-刚性空间。

(1) 对于 $1 \le i \le l$，设 $f_i\colon X \to \mathcal{S}_i$ 是 C-刚性空间之间的一个态射。若一个秩为 n、定义在 X 上的 (φ,Γ_K)-模 D 具有有序参数 $(f_1, \ldots, f_l)$，且在可能扩大 C 后，存在一个递增滤过 $(\mathcal{F}_iD)_{i=0,\ldots,l}$，其由 (φ,Γ_K)-子模给出，并且在 X 上有线丛 $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_l$，使得每个 $\mathrm{gr}_i(D) \cong \mathcal{R}_{K,X}(f_i) \otimes \mathcal{L}_i$，则称其为抛物线型。这样的滤过称为 D 的抛物化（有序参数为 $(f_1, \ldots, f_l)$）。

(2) 在 $X = \mathrm{Sp}(C)$ 的情形下，若经抛物化的 (φ,Γ_K)-模 $(D, \mathcal{F}_\bullet D)$ 在 X 上具有有序参数 $(f_1, \ldots, f_l)$，且 $\mathcal{F}_{i-1}D$ 是 $\mathcal{F}_iD$ 的唯一 (φ,Γ_K)-子模，使得对所有 $1 \le i \le l$，$\mathcal{F}_iD/\mathcal{F}_{i-1}D \cong \mathcal{R}(f_i)$，则称其为严格抛物线型。这等价于对所有 $1 \le i \le l$，$H^0_{\varphi,\gamma_K}((\mathcal{F}_iD^\vee)\otimes\mathcal{R}(f_i)) = C$。特别地，$\mathcal{F}_\bullet D$ 是唯一满足 $\mathrm{gr}_i(D) \cong \mathcal{R}_{K,X}(f_i)$ 的滤过。

(3) 如果存在一组 C-态射 $f_i\colon X \to \mathcal{S}_i$，分别对应每个 $i = 1$、.....、l，以及一个扎里斯基稠密子集 $X_{\mathrm{alg}} \subseteq X$，使得对每个点 $z \in X_{\mathrm{alg}}$，D_z 都是具有有序参数 $(f_1(z) \ldots, f_l(z))$ 的严格抛物线型，则称 (φ,Γ_K)-模 D over X 为稠密逐点严格抛物线型。

注 3.16。在 [KPX14 中，定义 6.31],声称，严格抛物线型的条件等价于以下条件：

$$H^0_{\varphi,\gamma_K}(\mathcal{R}_{K,X}(f_{i+1})^\vee \otimes (D/\mathcal{F}_iD)) = C$$

对所有 $1\le i\le l$ 都成立。然而，这似乎并不正确，即使在三角型情形下也是如此。

设 $\mathcal{R}:=\mathcal{R}_{K,C}$，令 δ为非代数特征（因此 $H^0_{\varphi,\gamma_K}(\mathcal{R}(\delta^{\pm1}))=0$）。令 E 为 $\mathcal{R}$ 由 $\mathcal{R}(\delta)$ 扩张而成的非平凡扩张，即有如下非分裂短正合列：

$$0\to\mathcal{R}\to E\to\mathcal{R}(\delta)\to 0.$$

于是令 $D:\ E\oplus\mathcal{R}$，其滤过为 $0\subset\mathcal{R}\subset E\subset D$。显然 $\mathrm{Hom}(\mathcal{R},D)=C\oplus C$，因此“替代”条件不成立。另一方面，对于 $i=1$，2，显然 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_iD,\mathrm{gr}_iD)=C$。对于 $i=3$，有

$$\mathrm{Hom}(D,\mathcal{R})=\mathrm{Hom}(E,\mathcal{R})\oplus\mathrm{Hom}(\mathcal{R},\mathcal{R}),$$

因此，只需证明 $\mathrm{Hom}(E,\mathcal{R})=0$。假设 $f\in\mathrm{Hom}(E,\mathcal{R})$ 非零。那么 f 在 $\mathcal{R}$ 上的限制为零；否则，经过某个 C 中的常数缩放后，f 将给出上述短正合列的一个分裂，这与假设矛盾。因此 f 通过 $E/\mathcal{R}\cong\mathcal{R}(\delta)$ 分解，这也与 δ 为非代数特征的条件矛盾。

实际上，这两个条件都能保证给定参数对应的滤过是唯一的，但二者本身并不等价。对于后续的证明（以及 [KPX14 第 6 节中的证明），我们只需要条件

$$H^0_{\varphi,\gamma_K}((\mathcal{F}_iD^\vee)\otimes\mathcal{R}_{K,X}(f_i))$$

因此，我们将其作为严格抛物线型 (φ,Γ_K)-模的定义。

定义 3.17. 设 A（分别为 B）是阿贝尔范畴 $\mathfrak{A}$ 中的一个对象，其子对象为 A'（分别为 B'）。若存在以下对象，则称元组 (A,A',B,B') 满足经由条件：

(1) 一个递增滤过

$$0=\mathcal{F}_0A\overset{\alpha_1}{\hookrightarrow}\mathcal{F}_1A\overset{\alpha_2}{\hookrightarrow}\cdots\overset{\alpha_s}{\hookrightarrow}\mathcal{A}_s=A$$

其中 $\mathcal{F}_{s_0}A=A'$，对某个 s_0;

(2) 以及一个递增滤过

$$0=\mathcal{F}_0B\overset{\beta_1}{\hookrightarrow}\mathcal{F}_1B\overset{\beta_2}{\hookrightarrow}\cdots\overset{\beta_t}{\hookrightarrow}\mathcal{B}_t=B$$

其中对于某个 t_0，有 $\mathcal{F}_{t_0}B=B'$，

使得 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\text{余核}\alpha_i,\text{余核}\beta_j)=0$，如果 $i\le s_0$ 或 $j\ge t_0$。

命题 3.18. 设 (A,A',B,B') 是某个阿贝尔范畴中的一个元组，并满足经由条件，则自然映射

$$\mathrm{Hom}(A/A',B')\to\mathrm{Hom}(A,B)$$

是一个双射。

证明。由函子 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1A,-)$ 的左正合性，可得以下左正合短正合列。

$$0\to\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1A,\mathcal{F}_{j-1}B)\to\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1A,\mathcal{F}_jB)\to\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1A,\mathrm{coker}\beta_j)=0$$

对于每一个 $j=1,\dots,t_0$。由此可得，

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1A,B)=\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1A,\mathcal{F}_{t-1}B)=\cdots\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1A,\mathcal{F}_0B)=0.$$

因此可由左正合列得到 $\mathrm{Hom}(A,B)=\mathrm{Hom}(A/\mathcal{F}_1A,B)$

$$0\to\mathrm{Hom}(A/\mathcal{F}_1A,B)\to\mathrm{Hom}(A,B)\to\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1A,B)=0.$$

反复应用上述论证可得，$\mathrm{Hom}(A,B) = \mathrm{Hom}(A/A',B)$。对 B 采用对称论证，容易看出

$$\mathrm{Hom}(A/A',B') = \mathrm{Hom}(A,B).$$

□

推论 3.19。设 $D, D_1, \ldots, D_r$ 是 C 上的 (φ,Γ_K)-模，并设 $(\mathcal{F}_i D)_{i=0,\ldots,r}$ 是由 (φ,Γ_K)-子模构成的递增滤过，使得 $\mathrm{gr}_i(D) \cong D_i$。假设。

$$\mathrm{Hom}(D_i, D_j) = \begin{cases} C & i = j \\ 0 & i < j \end{cases}$$

于是便有

$$H^0_{\varphi,\gamma_K}((\mathcal{F}_i D)^\vee \otimes D_i) = C$$

证明。注意到 $H^0_{\varphi,\gamma_K}((\mathcal{F}_i D)^\vee \otimes D_i) = \mathrm{Hom}((\mathcal{F}_i D)\ D_i)$，并且 $(\mathcal{F}_i D, \mathcal{F}_{i-1} D, D_i, D_i)$ 满足经由条件。因此

$$H^0_{\varphi,\gamma_K}((\mathcal{F}_i D)^\vee \otimes D_i) = \mathrm{Hom}(D_i, D_i) = C.$$

□

对于 $\eta \in \mathrm{Hom}(K,C)$，令 $\delta_\eta\colon a \mapsto \eta(a)^{-1}$ 为代数特征。由于 $\mathcal{R}_{K,\ C}$ 是若干贝祖域的乘积，因此理想 $\mathcal{R}(\delta_\eta) \subset \mathcal{R}_{K,\ C}$ 由一个元素生成 $t_\eta \in \mathcal{R}_{K,\ C}$。元素 t_η 并非唯一确定，但它所生成的理想是唯一的。此外，有如下结论。

$$\mathcal{R}_{K,C}/(t) \cong \bigoplus_{\eta: K \hookrightarrow C} \mathcal{R}_{K,C}/(t_\eta).$$

更多细节请参见 [KPX14，记号 6.2.7]。

引理 3.20. 设 D_1, D_2 是 $\mathcal{R}_{K,\ C}$ 上的 (φ,Γ_K)-模。对于任意 $f \in \mathrm{Hom}(D_1, D_2)$，$f$ 的像在 D_2 中是饱和的（回顾 [KPX14，记号 6.0.2] 中饱和的定义），当且仅当诱导映射的像

$$\widetilde{f}\colon \mathcal{R}_{K,C} \to D_1^\vee \otimes D_2$$

在 $D_1^\vee \otimes D_2$ 中是饱和的。

证明。我们可以假设 f 非零，否则结论显然。

设 $\mathcal{R} := \mathcal{R}_{K,\ C}$。假设 $\mathrm{Im}(f)$ 是饱和的。因此，对于任意 $\eta\colon K \hookrightarrow C$，基$\widetilde{\ }$变换映射 $f \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/t_\eta$ 非零，这意味着诱导映射 $f \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/(t_\eta)\widetilde{\ }$ 非零。根据 KPX14，引理 2.6.10]，f 的像是饱和的。

$\widetilde{\ }$现在假设 f 的像在 $D_1^\vee \otimes D_2$ 中是饱和的。那么

$$\widetilde{f} \otimes \mathrm{id}_{D_1} : D_1 \to D_1 \otimes D_1^\vee \otimes D_2$$

是饱和的。与自然映射 $g\colon D_1 \otimes D_1^\vee \otimes D_2 \to D_2$ 复合，得到映射 f，由此可知其像是饱和的（这里需要用到 g 作为自由 $\mathcal{R}$-模的态射有截面这一事实）。□

回顾一下（见定义 3.1），若 D 具有如下形式：对于某个不可约的过滤 (φ,Γ_K)-模 M，$\mathrm{D}(M)(\delta)$，则称 φ,Γ_K-拟 de Rham 模 D（定义在 C 上）为不可约。

引理 3.21. 设 D是定义在 $\mathcal{R}_{K,\ C}$上的拟 de Rham 不可约 (φ,Γ_K)-模。那么，任意非零 (φ,Γ_K)-子模 $j\colon\ D'\hookrightarrow D$的嵌入的余核都被 t的某个幂湮灭。特别地，唯一的非零饱和子模就是 D 本身。

证明。我们可以将 $D\ \cong$D(M)(δ) 写为某个不可约滤过的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模 M over C，以及某个特征 $\delta\colon\ K^\times\to C^\times$。将 D 替换为 $D(\delta^{-1})$ 后，我们可以假设 D 是 de Rham 的。根据 Ber04 证明 III.2.5], 的推论，每个 (φ,Γ_K)-模的嵌入 $j\colon\ D'\hookrightarrow D$ 都来自某个嵌入。

$$\mathbf{D}^{-1}(j):M'\hookrightarrow M$$

滤过的（φ、N、$G_{L/K}$）模，使得 $D'\cong$D(M')。由于 M 是不可约的，D^{-1}(j) 实际上是底层（φ、N、$G_{L/K}$）结构之间的同构。因此存在某个 m，使得有唯一的映射 j'，满足复合

$$M[m]\xrightarrow{j'}M'\xrightarrow{\mathbf{D}^{-1}(j)}M$$

即为典范平移映射。因此，(D(M)/D(M')) 被 t^m 消去（注意，根据定义，D($M[m]$) $=t^n$D(M)）。□

以下定理推广了 [KPX14, 定理 6.3.9] 中的结果。因此，对于与同上论证完全相同的部分，我们将略去证明细节。

定理 3.22. 设 X 是一个既约刚性 C-解析空间。设 D （分别为 D'）是 $\mathcal{R}_{K,X}$ 上的一个秩为 d （分别为 d'）的 (φ,Γ_K)-模，其中 $d'<d$。假设对于每个闭点 $z\in X$（k_z 是 z 的剩余域），$D'_z:=D'\otimes_X k_z$ 都是拟 de Rham 不可约的。假设存在 X 的闭点的一个扎里斯基稠密子集 X_{alg}，使得对于每个 $z\in X_{\mathrm{alg}}$，$H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_z^\vee\otimes D'_z)$ 这个 k_z-向量空间都是一维的，并且对于任意基，诱导映射 $D_z\to D'_z$ 都是满射。那么存在如下典范数据：

（a）一个既约刚性 C-解析空间的真双有理态射 $f\colon\ X'\to X$；（b）一个唯一的（模$\mathcal{O}_{X'}^\times$）同态 $\lambda\colon\ f^*D\to f^*D'\otimes\mathcal{L}$，它是$\mathcal{R}_{X',\ K}$上的（$\varphi$，$\Gamma_K$）-模，其中 $\mathcal{L}$ 是 X' 上的线丛，且具有平凡的（φ，Γ_K）-作用，

满足以下条件。

（1）不满足以下性质的闭点集合 $Z\ \ z\in X'$ 是扎里斯基闭的，且与 f^{-1}（X_{alg}）不相交（因此其补集是扎里斯基开稠密的）：诱导同态 $\lambda_z\colon\ D_Z\to D'_z$ 是满射，且相应元素张成$H^0_{\varphi,\ \Gamma_K}$（$D_z^\vee\otimes D'_z$）（因此后者是一维的）。（2）在 X' 上局部地，λ 的余核被 t的某个幂所消去，并且支撑在 Z 之上，具体而言，对于任何沿Z消失的解析函数 g，g 的某个幂也会消去 λ 的余核。（3）λ的核是$\mathcal{R}_{X',\ K}$上的一个秩为 $d-d'$的（φ，Γ_K）-模。

~证明。由于 X 可以替换为其正规化 $b\colon\ X\to X$，因此以下假设 X 是正规且连通的。此外，对于X中的每个仿射子域 Sp(A)，我们看到 Spec(A) 是不可约的。因此，X上的任意凝聚层，或沿任意支配态射的拉回，都具有恒定的一般秩。

根据 [KPX14、推论 6.3.3] 以及同上中的推论 6.3.6(2)，存在一个真双有理态射： $g : Y \to X$，使得 $D_0 := g^*(D^\vee \otimes D')$满足以下条件：

(1) $H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_0)$ 是平坦的，且 $H^i_{\varphi,\gamma_K}(D_0)$ 的 Tor 维数小于或等于一，其中 $i = 1, 2$；(2) $H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_0/t_\eta)$ 是平坦的，且 $H^i_{\varphi,\gamma_K}(D_0/t_\eta)$ 的 Tor 维数小于或等于一，其中 $i = 1,2$，并且对于每个 η： $K \hookrightarrow C$；

（实际上，我们在 X 上局部且典范地构造这样的 g ，使其满足上述条件。然后，根据同上文献中的定理 4.4.3(2)，我们可以将这些态射粘合在一起，从而得到一个满足相同条件的整体态射。注意，这里 Y 也可以替换为其幂零约化的正规化，因此我们可以且将会取 Y 为正规且既约的。）

条件 (1) 使我们可以援引同上中的定理 6.3.7，从而存在一个扎里斯基开稠密子集 U_0，它属于 Y，使得 $\mathrm{Tor}_1^Y(H^1_{\varphi,\gamma_K}(D_0)\ k_z) = 0$ 当且仅当 $z \in U_0$。然后，基变换谱序列

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Tor}^Y_{-i}(H^j_{\varphi,\gamma_K}(D_0), k_z) \Rightarrow H^{i+j}_{\varphi,\gamma_K}(D_{0,z})$$

给出短正合列

$$0 \to H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_0) \otimes k_z \to H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_{0,z}) \to \mathrm{Tor}_1^Y(H^1_{\varphi,\gamma_K}(D_0), k_z) \to 0,$$

这意味着，对于 $U_0 \cap g^{-1}(X_{\mathrm{alg}})$ 中的任意点 z， k_z-向量空间

$$H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_0) \otimes k_z \cong H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_{0,z})$$

是一维的。再次根据条件 (1)， $H^0_{\varphi,\ \gamma_K}(D_0)$ 是 Y 上的一个线丛。令$\mathcal{L}_0$ 表示 $H^0_{\varphi,\ \gamma_K}(D_0)$ 的对偶线丛。对自然同态$g^*D \otimes \mathcal{L}_0^\vee \to g^*D'$取对偶，便得到唯一的（在 $\mathcal{O}'_Y$ 意义下）同态

$$\lambda_0 : f^*D \to f^*D' \otimes \mathcal{L}_0.$$

现在我们来检查性质 (1) 和 (2)。之后我们将构造一个态射。

$$f : X' \to Y \to X$$

通过在 Y 上膨胀，这将保持性质 (1) 和 (2)，并检查 (3)。

(1) 实际上，我们已经证明 $H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_{0,z}) = k_z$ 当且仅当 $z \in U_0$。对于任意非零元素 $c \in H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_{0,z})$，对应的映射 $D_z \to D'_z$ 是满射，当且仅当由引理 3.20 和 3.21，诱导映射 $\mathcal{R}_{K,k_z} \to D_{0,z}$ 是饱和的。根据 [KPX14，引理 2.6.10], ，映射 $D_z \to D'_z$ 是满射，当且仅当对每个 $\eta \in \mathrm{Hom}(K, C)$，映射

$H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_z^\vee \otimes D'_z) \cong H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_0) \otimes_Y k_z \to H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_0/t_\eta) \otimes_Y k_z \hookrightarrow H^0_{\varphi,\gamma_K}((D_z^\vee \otimes D'_z)/t_\eta)$ 非平凡。这里，上述最后一个同态的单射性由基变换谱序列 $E_2^{i,j} = \mathrm{Tor}^Y_{-i}(H^j_{\varphi,\gamma_K}(D_0/t_\eta)\ k_z) \Rightarrow H^{i+j}_{\varphi,\gamma_K}(D_{0,z}/t_\eta)$ 得出。该条件等价于 z 属于轨迹的交集 Z_η ，在该交集中，对每个 η: $K \hookrightarrow C$，自然映射$H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_0) \to H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_0/t_\eta)$ 都为零。因此，$U_0 \setminus (\cap_\eta Z_\eta)$ 恰好是满足以下条件的轨迹：$\lambda_{0,z} : D_z \to D'_z$ 是满射，且对应元素张成 $H^0_{\varphi,\gamma_K}(D_{0,z})$；显然，它包含 $g^{-1}(X_{\mathrm{alg}})$。

(2) 论证与 [KPX14, 定理 6.3.9] 中的证明完全相同。唯一的不同之处在于，我们需要调用引理 3.21，以确保余核$(\lambda_0)_z$ 被 t 的某个幂所消灭。

(3) 注意， λ_0 是一个态射的基变换

$$\lambda_0^r : g^*(D^r) \to g^*(D'^r)$$

设 M^r 表示 λ_0^r 的余核。于是，我们可以在局部对 [的任意有限表示应用 KPX14 的推论 6.3.6(1)] ，并将这些局部构造粘合起来，得到态射 $h\colon X'\to Y$，使得 $h^*(M^r)$ 的 Tor 维数至多为一。设 $f:=g\circ h$，并设 $\lambda:=h^*(\lambda_0)$。那么，同上文定理 6.3.9 证明中完全相同的论证表明，λ 的核的秩为 $d-d'$。□

推论 3.23. 设 X 是 C 上的约化刚性解析空间。设 D 是 $\mathcal{R}_{X,\ K}$ 上秩为 n 的稠密逐点严格抛物线型（φ,Γ_K）-模，关于有序参数（$f_1,\dots,f_r$）及扎里斯基稠密子集 X_{alg}。则存在以下典范数据：

（a）一个真双有理态射 $F\colon X'\to X$，其中两者均为约化解析空间，

（b）一个唯一的递增滤过（$\mathcal{F}_i$（F^*D））$_{0\le i\le r}$，它是通过（φ,Γ_K）-稳定相干 $\mathcal{R}_{X',\ K}$-子模对 $\mathcal{R}_{X',\ K}$ 上的拉回（φ,Γ_K）-模 f^*D 给出的，

使得满足以下条件。

（1）在其中（$\mathcal{F}^\bullet$（f^*D））$_z$ 不是 D_z 上关于有序参数（f_1（z） .. ., f_r（z））的严格抛物滤过的闭点 Z 的集合 $z\in X'$，在 X' 中是扎里斯基闭的，并且与 f^{-1}（X_{alg}）不相交（因此 Z 的补集是扎里斯基开稠密的）。（2）每个 gr_i（F^*D）都能（φ,Γ_K）-等变地嵌入到 F^*（$\mathcal{R}$（f_i））$\otimes_{X'}\mathcal{L}_i$ 中，其中 $\mathcal{L}_i$ 是 X' 上的某个线丛；该嵌入的余核在 X' 上局部地被 t 的某个幂所湮灭，并且支撑在 Z 上。

证明。由定理 3.22，利用归纳法可得满足所有性质的数据。□

以下定义和命题是 [HS16 第 2 节2]中相应结果的平行版本。回忆 $\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}$ 定义 3.13 中的定义。

定义 3.24。考虑函子 $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}$，它将一个刚性 C空间 X 映到四元组 $(D,\mathcal{F}_\bullet(D)\ f,\nu)$ 的同构类，其中 D是定义在 X上的秩为 n的 (φ,Γ_K)-模，而 $\mathcal{F}^\bullet(D)$ 是 D的一个递增滤过，由 (φ,Γ_K)-子模给出，满足 $\mathcal{F}_0D=0$和 $\mathcal{F}_lD=D$。此外，$f=(f_1,\dots,f_l)\in\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}(X)$，且 $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_l)$ 是一个平凡化族

$$\nu_i:\mathcal{F}_i(D)/\mathcal{F}_{i-1}(D)\xrightarrow{\sim}\mathcal{R}_{K,X}(f_i)$$

命题 3.25。设 $f=(f_1,\dots,f_l)\in\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}(X)$，其中 C是某个既约刚性空间X。设 $1\le a_1<\cdots<a_s\le l$是1,2,...,l的一个子序列，并设 D是 $D_i:=\mathcal{R}(f_{a_i})$（$1\le i\le s-1$）的逐次扩张。则$H^1_{\varphi,\ \gamma_K}(D\otimes D_s^\vee)$是秩为 [$K$的局部自由 $\mathcal{O}_X$-模：$\mathbb{Q}_p$]rk($D\otimes D_s^\vee$)。

证明。由 [KPX14，定理 4.4.5] 可知，上同调是一个凝聚层，因此只需计算所有闭点处的秩。我们对 s进行归纳法。$s=2$ 情形已由命题 3.14(3) 证明。对于一般的s，考虑短正合列：

$$0\to D_1\to D\to D'\to 0$$

与 $D_s^\vee$ 张量。由归纳假设，$H^1_{\varphi,\gamma_K}(D'\otimes D_s^\vee)$ 是秩为 [K：$\mathbb{Q}_p$]rk($D'\otimes D_s^\vee$) 的局部自由模，因此 Euler 示性数公式 [KPX14, 定理 4.4.5(2)] 推出 $H^i_{\varphi,\gamma_K}(D'\otimes D_s^\vee)=0$，其中 $i=0$ 为2。

再次由命题 3.14，$H^1_{\varphi,\gamma_K}(D_1\otimes D_s^\vee)$ 是秩为 $[K:\mathbb{Q}_p]\mathrm{rk}(D_1\otimes D_s^\vee)$ 的自由模，并且 $H^2_{\varphi,\gamma_K}(D_1\otimes D_s^\vee)=0$。现在，结论由上述短正合序列（与 $D_s^\vee$ 张量）所对应的长正合列推出。□

定理 3.26.

(1) 函子 $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}$ 由刚性空间表示。(2) 自然映射 $\kappa'\colon \mathcal{P}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}\to\mathcal{S}$ 是相对维数为光滑的。

$$[K:\mathbb{Q}_p]\sum_{1\le i<j\le r} n_in_j$$

证明。该证明与 [HS16，定理 2.4]，的证明非常相似，因此我们仅给出一个简要的证明思路。设 $\mathcal{S}^{(i)}:=\mathcal{S}_1\times\cdots\times\mathcal{S}_i$，则可以用类似的方式定义函子 $\mathcal{P}_{\mathcal{S}^{(i)}_{\mathrm{reg}}}$。现在我们通过对 i 使用归纳法来进行证明。

$i=1$ 的情形已由$\mathcal{P}_{\mathcal{S}^{(1)}_{\mathrm{reg}}}=\mathcal{S}_1$解决。现在假设$U\subseteq\mathcal{P}_{\mathcal{S}^{(i-1)}_{\mathrm{reg}}}\times\mathcal{S}_i$是利用典范投影 $g_{i-1}\times\mathrm{id}_{\mathcal{S}_i}$在 $\mathcal{S}^{(i)}_{\mathrm{reg}}\subseteq\mathcal{S}^{(i-1)}_{\mathrm{reg}}\times\mathcal{S}_i$ 下的原像，并且$\mathcal{P}_{\mathcal{S}^{(i-1)}_{\mathrm{reg}}}$是以泛对象（$\mathcal{D}_{i-1}$，$\mathcal{F}_\bullet\mathcal{D}_{i-1}$，$g_{i-1}$，$\mu_{i-1}$）构造的。上面的命题（针对情形（$a_1$，...，$a_s$）=（1，2，...，$i$））表明，

$$\mathcal{M}_U:=\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{R}_{K,U}}(\mathcal{D}_{i-1},\mathcal{R}_{K,U}(\mathrm{pr}_i))=H^1_{\varphi,\gamma_K}(\mathcal{D}_{i-1}\otimes\mathcal{R}_{K,U}(\mathrm{pr}_i)^\vee)$$

是秩为 $[K$的向量丛：$\mathbb{Q}_p]n_i(n_1+\cdots+n_{i-1})$，这里 pr_i是自然投影 $\mathrm{pr}_i:U\to\mathcal{S}_i$。现在，$\mathcal{P}_{\mathcal{S}^{(i)}_{\mathrm{reg}}}=\mathrm{Spec}_U(\mathrm{Sym}^\bullet\mathcal{M}_U^\vee)$ 是 U 上的几何向量丛，对应于 $\mathcal{M}_U$。

那么，$\mathcal{D}_i$ 是泛扩张

$$0\to p_i^*\mathcal{D}_{i-1}\to\mathcal{D}\to\mathcal{R}(\mathrm{pr}_i')\to 0$$

其中，$\mathrm{pr}_i'\colon\mathcal{P}_{\mathcal{S}^{(i)}_{\mathrm{reg}}}\to\mathcal{S}_i$ 和 $p_i\colon\mathcal{P}_{\mathcal{S}^{(i)}_{\mathrm{reg}}}\to\mathcal{P}_{\mathcal{S}^{(i-1)}_{\mathrm{reg}}}$是自然投影。

滤过 $\mathcal{F}_\bullet\mathcal{D}_i$ 为

$$0\subseteq p_i^*(\mathcal{F}_1\mathcal{D}_{i-1})\subseteq\cdots\subseteq p_i^*(\mathcal{D}_{i-1})\subseteq\mathcal{D}_i,$$

而 g_i、μ_i 以显然的方式定义。

注意，态射 $p_i\times\mathrm{pr}_i'\colon\mathcal{P}_{\mathcal{S}^{(i)}_{\mathrm{reg}}}\to\mathcal{P}_{\mathcal{S}^{(i-1)}_{\mathrm{reg}}}\otimes S_i$ 是光滑的，其相对维数为 $[K:\mathbb{Q}_p]n_i(n_1+\cdots+n_{i-1})$。由此可得，$\kappa'$ 是光滑的，其相对维数为

$$\begin{aligned}\dim(\kappa')&=\sum_{2\le i\le l-1}\dim(p_i\times\mathrm{pr}_i')\\&=[K:\mathbb{Q}_p]\sum_{1\le i<j\le l}n_in_j\end{aligned}$$

□

定义 3.27。固定一个连续表示 $\bar r\colon G_K\to$一般线性群$_n(k_C)$，并令 $R^\square_{\bar r}$为 $\bar r$ 的通常带框局部变形环，它是剩余域为 k_C 的局部阿廷环函子的原表示：

$$A\mapsto\{r:G_K\to\mathrm{GL}_d(A)|r\otimes_A k_C=\bar r\}$$

它是剩余域为 k_C 的局部完备诺特 $\mathcal{O}_C$-代数，我们将与形式概形相关联的、定义在 C 上的刚性解析空间记作 $\mathfrak{X}_{\bar r}:=(\mathrm{Spf}R^\square_{\bar r})^{\mathrm{rig}}$

$\mathrm{Spf}R^{\square}_{\bar{r}}$。我们将 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$定义为 C 上的既约刚性解析空间，它是 $\mathfrak{X}_{\bar{r}}\times\mathcal{S}$ 中的扎里斯基闭包。

$$U_{\mathrm{par}}(\bar{r}):=\{(r,f)\in\mathfrak{X}_{\bar{r}}\times\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}|\ D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(r)\text{ is paraboline with parameters }f\}$$

我们将 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 称为 $\bar{r}$ （形状为 $\mathcal{S}$）的精细抛物线簇，并将 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 称为 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的正则轨迹（我们将在下述定理中证明， $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 在 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中扎里斯基稠密）。

我们将 ω 记为复合 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})\hookrightarrow\mathfrak{X}_{\bar{r}}\times\mathcal{S}\twoheadrightarrow\mathcal{S}$，并将 ω_i 记为复合 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})\xrightarrow{\omega}\mathcal{S}\twoheadrightarrow\mathcal{S}_i$。

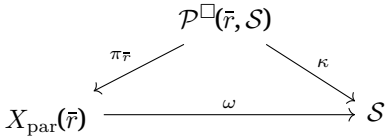
定理 3.28.

(1) 刚性空间 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 是等维的，维数为

$$[K:\mathbb{Q}_p](\frac{n(n-1)}{2}+l)+n^2;$$

(2) 集合 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 在 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中是扎里斯基开，因此它在 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中也是扎里斯基稠密的；(3) 刚性空间 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 是光滑的，并且态射 ω 限制在 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 上是光滑的。

证明。我们的策略如下。我们将构造一个光滑的刚性 C-空间 $\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$，使其拟合进如下交换图



并证明 $\pi_{\bar{r}}$ 是相对维数为 l 的光滑态射，其像为 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$，且态射 κ 是相对维数为 $n^2+\dim\kappa'$的光滑态射，这里 κ' 是定理 3.26 中的态射。

考虑函子 $\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$，它将一个既约刚性 C-空间 X 映为四元组 $(r,\mathcal{F}_{\bullet}(D)\ f,\nu)$ 的同构类，其中 $r\colon G_K\to\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_X^+)$ 是连续表示，使得对于任意闭点 $x\in X$，$r\otimes\mathcal{O}_{k_x}$ 的约化与 $\bar{r}$重合； $\mathcal{F}_{\bullet}$ 是 $D^{\dagger}$ 刚性(r) 的递增滤过，由 (φ,Γ_K)-子模给出，这些子模在 X 上局部地是 $\mathcal{R}_{K,X}$-模的直和项，并且满足 $\mathcal{F}_0=0$ 和 $\mathcal{F}_l=D^{\dagger}$ 刚性(r)。此外， $f=(f_1,\dots,f_l)\in\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}(X)$，且$\nu=(\nu_1,\dots,\nu_l)$ 是一个平凡化族

$$\nu_i:\mathrm{gr}_i(D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(r))\xrightarrow{\sim}\mathcal{R}(f_i)$$

现在我们将证明 $\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$ 可由一个刚性 C-空间表示。事实上，论证与证明 [BHS17b，定理 2.6] 中的论证几乎相同。采用同上类似的记号，我们可以通过以下一系列态射构造 $\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$:

$$\kappa:\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})\hookrightarrow\mathcal{P}^{\square,\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}\xrightarrow{\pi}\mathcal{P}^{\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}\hookrightarrow\mathcal{P}_{S_{\mathrm{reg}}}\xrightarrow{\kappa'}\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}\tag{4}$$

我们还可以计算 κ 的相对维数，并证明 κ 是光滑的，因此$\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$是既约的。现在我们说明复合式 (4) 中的记号和态射。

(1) $\mathcal{P}^{\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}$ 是 $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}$ 的容许开子空间，由 [Hel16，定理 1.2]，定义；也就是说，它是 $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}$ 的最大开子空间，使得存在一个其上的秩为 n 的向量丛 $\mathcal{V}$ $\mathcal{P}^{\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}$ 以及一个连续态射$G_K \to \mathrm{Aut}^{\mathcal{O}_{\mathcal{P}^{\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}}}(\mathcal{V})$，满足 $D^{\dagger}{}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{V})$同构于$\mathcal{P}^{\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}$上 $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}$的普适$(\varphi,\Gamma_K)$-模的逆像。

(2) $\pi:\ \mathcal{P}^{\square,\ \mathrm{adm}}_{\ \mathcal{S}_{\mathrm{reg}}} \to \mathcal{P}^{\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}$是向量丛 $\mathcal{V}$ 的平凡化的一般线性群$_n$ 主丛。

(3) 存在一个典范同构 $\pi^*(\mathcal{V})\cong \mathcal{O}^{n}_{\mathcal{P}^{\square,\ \mathcal{S}^{\ \mathrm{adm}}_{\ \mathrm{reg}}}}$，因此 G_K 在 $\mathcal{V}$ 上的作用诱导出一个连续表示

$$\widetilde{r}: G_K \to \mathrm{GL}_n(\Gamma(\mathcal{P}^{\square,\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}, \mathcal{O}_{\mathcal{P}^{\square,\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}})).$$

由于 G_K 是由有限多个元素拓扑生成的，因此 $\mathcal{P}^{\square,\ \mathrm{adm}}_{\ \mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}$ 中满足 $\widetilde{r}$ 经过因子分解的点的集合

$$\mathrm{GL}_n(\Gamma(\mathcal{P}^{\square,\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}, \mathcal{O}^{+}_{\mathcal{P}^{\square,\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}})) \subset \mathrm{GL}_n(\Gamma(\mathcal{P}^{\square,\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}, \mathcal{O}_{\mathcal{P}^{\square,\mathrm{adm}}_{\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}}))$$

在 $\mathcal{P}^{\square,\ \mathrm{adm}}_{\ \mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}$ 中是容许开集。回顾一下，我们已经固定了一个剩余表示 $\bar{r}: G_K \to \mathrm{GL}_n(k_C)$，然后我们将 $\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{P}^{\square,\ \mathrm{adm}}_{\ \mathcal{S}_{\mathrm{reg}}}$定义为满足 $\widetilde{r}_x$ 模 ulo $\mathcal{O}_{k_x}$ 的极大理想后等于 $\bar{r}$ 的点所构成的容许开子空间 x 。

由构造可知，$\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$确实表示了上述函子。我们将 $r_X: G_K \to \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}^{+}_{\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\ \mathcal{S})})$记为 $\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$上的泛表示。

由定理 3.26，κ 是相对维数为 $n^2+[K:\mathbb{Q}_p](\sum_{1\le i<j\le r} n_i n_j)$的光滑态射。回忆一下，根据注 3.12，$\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}$ 是维数为 $r+[K:\mathbb{Q}_p](\sum_{1\le i\le r}\frac{n_i^2-n_i+2}{2})$的光滑态射。因此，$\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$是光滑且等维的，其维数为

$$l+n^2+[K:\mathbb{Q}_p](\sum_{1\le i<j\le l} n_i n_j+\sum_{1\le i\le l}\frac{n_i^2-n_i+2}{2}) = l+n^2+[K:\mathbb{Q}_p](\frac{n(n-1)}{2}+l).$$

我们有自然态射

$$\pi_{\bar{r}}: \mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S}) \to \mathfrak{X}_{\bar{r}} \times \mathcal{S},\ (r,\mathcal{F}^{\bullet}(D),f,\nu)\mapsto (r,f)$$

此外，根据 $\mathcal{S}^{\square}(\bar{r},\underline{d})$的描述，我们可以将$\pi_{\bar{r}}$ 分解为经由 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$的态射，其像为 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$。因此，若能证明 $\pi_{\bar{r}}$ 是相对维数为 l 的光滑态射，则$U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$是 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$中的扎里斯基开集，且等维，维数正如我们所述。

根据推论 3.19，$U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中的点是严格抛物线型的。因此，我们可以应用推论 3.23，得到一个真双有理、因而是满射的态射

$$F: X \to X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$$

并且，若记 $D:=D^{\dagger}{}_{\text{刚性}}(F^*r_X)$，则存在 (φ,Γ_K)-子模的递增滤过 $\mathcal{F}_{\bullet}(D)$，使得对于 $1\le i\le r$，存在一个 X 上的 (φ,Γ_K)-模的短正合列

$$0 \to \mathrm{gr}_i D \to F^*(\mathcal{R}(\omega_i))\otimes \mathcal{L}_i \to \mathcal{M}_i \to 0$$

其中，$\mathcal{L}_i$是 X上的线丛，带有平凡的（φ，Γ_K）-作用，并且在 X上局部地，余核 $\mathcal{M}_i$ 被 t的某个幂湮灭，并且支集位于某个扎里斯基闭集 Z_i 上，该集合与 F^{-1}（U_{par}（$\bar{r}$））不相交。4

令 U 为 $X\setminus(\bigcup Z_i)$ 与 $X\to X_{\mathrm{par}}(\bar{r})\to\mathcal{S}$的态射 $X\to X_{\mathrm{par}}$的 $\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}\subseteq\mathcal{S}$ 的原像之间的交集。它是扎里斯基开集，并且包含 $F^{-1}(U_{\mathrm{par}}(\bar{r}))$，这意味着它在 X中扎里斯基稠密。令 $t\colon\ U^{\square}\to U$ 表示线丛 $\mathcal{L}_i|_U$的平凡化的 $\mathbb{G}_m^l$ 托orsor。根据构造，注意到 $U^{\square}$具有如下泛性质。存在典范同构 $t_i\colon\ \mathcal{O}_{U^{\square}}\cong t^*(\mathcal{L}_i)$，对于 $1\le i\le l$成立；如果 $g\colon\ T\to U$ 是一个态射，并带有平凡化 $s_i\colon\ \mathcal{O}_Y\cong g^*(\mathcal{L}_i)$，对于 $1\le i\le l$成立，那么存在唯一的提升 $h\colon\ T\to U^{\square}$，其经过 t 分解，使得 $h^*(t_i)=s_i$。

我们可以通过$\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$的泛性质构造一个态射 $s\colon\ U^{\square}\to\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$，使得 $\pi_{\bar{r}}\circ s$ 是复合

$$U^{\square}\xrightarrow{t}U\xrightarrow{F|_U}X_{\mathrm{par}}(\bar{r}).$$

由于 F 是由爆破和正规化复合而成的，因此可以找到一个扎里斯基开且扎里斯基稠密的子空间 $V\subseteq X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$，使得 $F^{-1}(V)\subseteq U$ 且 $F|_{F^{-1}(V)}$是一个同构。类似地，我们记 $t'\colon\ V^{\square}\to V$ 为 $\mathcal{L}_i|_V$ 的 $\mathbb{G}_m^l$-主丛，容易看出，我们可以将 $V^{\square}$ 与 $t^{-1}(V)$ 和 $t'=t|_{V^{\square}}$ 识别。于是，$V^{\square}$ 的泛性质使我们能够构造一个态射。

$$\pi^{\square}:\pi_{\bar{r}}^{-1}(V)\to V^{\square}$$

使得 $t\circ\pi^{\square}=F^{-1}|_V\circ\pi_{\bar{r}}$。再次利用 $V^{\square}$ 的泛性质，可得$\pi^{\square}\circ s|_{V^{\square}}=\mathrm{id}_{V^{\square}}$。根据 $\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$ 的描述，$\pi^{\square}$ 在 $\pi_{\bar{r}}^{-1}$ 上的限制是单射。由于 $\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$ 是既约的，因此有 $s\circ\pi^{\square}=\mathrm{id}_{\pi_{\bar{r}}^{-1}(V)}$，这意味着 $\pi^{\square}$ 是一个同构。由于 $t\colon\ V^{\square}\to V$ 是一个 $\mathbb{G}_m^l$-挠子，因此其相对维数为 l。结合我们此前对 $\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$ 维数的计算，可得 V 是等维的，其维数为

$$[K:\mathbb{Q}_p](\frac{n(n-1)}{2}+l)+n^2.$$

由于 V 是 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中的扎里斯基开稠密子集，因此 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 也是如此。这证明了断言(1)。

现在我们将证明 $\pi_{\bar{r}}$ 是相对维数为 l的光滑态射，这蕴含断言（2）和（3）。为此，只需证明：若 $x\in\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$ 和$y=(r_y,f_y)=\pi_{\bar{r}}(x)\in U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$，则存在一个在 $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{par}}(\bar{r})\,y}$ 上的完备局部环同构 $\hat{}$

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S}),x}\cong\hat{\mathcal{O}}_{X_{\mathrm{par}}(\bar{r}),y}[\![x_1,\dots,x_l]\!].$$

$\hat{}\,\hat{}$ 记 $A:=\mathcal{O}_{X_{\mathrm{par}}(\bar{r})\,y}$ 和 $B:=\mathcal{O}_{\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})\,x}$，则 $\pi_{\bar{r}}$ 诱导一个完备局部环的局部态射 $A\to B$。

自然投影 $X_{\mathrm{par}}\to\mathfrak{X}_{\bar{r}}$ 诱导一个完备局部环的局部态射

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X}_{\bar{r}},r_y}\to\hat{\mathcal{O}}_{X_{\mathrm{par}}(\bar{r}),y}.$$

根据 [Kis09，命题 2.3.3 和命题 2.3.5],，在 $\hat{}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\bar{r}},r_y}$ 与 $R^{\square}_{r_y}$ 之间也存在一个拓扑同构，其中 $R^{\square}_{r_y}$ 是 r_y 的带框架的泛变形环，r_y 是与点 y 对应的伽罗瓦表示。令 $\mathcal{F}_\bullet$ 为与点 y 对应的 (φ,Γ_K)-模 $D^{\dagger}{}_{\mathrm{rig}}(r_y)$ 的唯一抛物化，并令 $R^{\square}_{r_y,\mathcal{F}_\bullet}$ 为该对 $(r_y,\mathcal{F}_\bullet)$ 的带框架泛变形环，其含义显而易见。与之前一样，环 $B=\mathcal{O}_{\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})\,x}$ 自然同构于一个完备局部 $R^{\square}_{r_y,\mathcal{F}_\bullet}$-代数，且相对维数为 l。

设 $(x_1, .., x_l)$ 为 $R^{\square}_{r_y,\mathcal{F}_\bullet}$-代数 B 的一组拓扑生成元，这意味着环同态

$$\begin{aligned} R^{\square}_{r_y,\mathcal{F}_\bullet}[\![X_1,\ldots,X_l]\!] &\to B \\ X_i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

是一个同构。因此可以定义一个 A-线性映射

$$\begin{aligned} A[\![X_1,\ldots,X_l]\!] &\to B \\ X_i &\mapsto x_i. \end{aligned}$$

与映射 $R^{\square}_{r_y} \to A$ 复合后，得到如下交换图

$$\begin{array}{ccc} R^{\square}_{r_y}[\![X_1,\ldots,X_l]\!] & \longrightarrow & A[\![X_1,\ldots,X_l]\!] \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^{\square}_{r_y,\mathcal{F}_\bullet}[\![X_1,\ldots,X_l]\!] & \xrightarrow{\sim} & B \end{array} .$$

根据 [BC09a，命题 2.3.6 和命题 2.3.9]（实际上，我们需要副抛物线情形下的相应性质，见下方引理），自然映射 $R^{\square}_{r_y} \to R^{\square}_{r_y,\mathcal{F}_\bullet}$是满射。因此，态射 $A[\![X_1, \ldots, X_l]\!] \to B$ 也是满射。由于 B 和 $A[\![X_1, \ldots..., X_l]\!]$ 都是诺特、局部且完备的，并且维数相同，只需证明 A 是整的，即可证明 $A[\![X_1, \ldots..., X_l]\!] \to B$ 是同构。

由于 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 是既约的，根据 [BGR84, §7.2,Prop.8]， A 也是既约的。因此，只需证明 A 有唯一的极小理想。若我们将 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的正规化记作 X^{norm}，那么只需证明 y 在 X^{norm} 中的纤维是一个闭点。

由于 $\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$ 和 $U^{\square}$ 都是正规的，它们到 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的态射可经由 X^{norm} 分解，即有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S}) & & \\ & \overset{s}{\nearrow} & \downarrow & \overset{\pi_{\bar{r}}}{\searrow} & \\ U^{\square} & \longrightarrow & X^{\mathrm{norm}} & \longrightarrow & X_{\mathrm{par}}(\bar{r}) \end{array}$$

s 的构造表明， X^{norm} 中 y 的纤维内所有点都属于 $\mathcal{P}^{\square}(\bar{r},\mathcal{S})$ 在 X^{norm} 中的像。由于 $\pi_{\bar{r}}^{-1}(y)$ 是连通的（实际上同构于 $\mathbb{G}_m^l$），因此它在 X^{norm} 中的像也是连通的，而该像就是 y 的纤维。由于 y 的纤维是有限集，因此它是一个闭点。

现在只需证明断言（2）和（3）。根据 [Hub96, Prop.1.7.8], $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 是 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中的容许开集。s的构造也意味着 $F(U) = F \circ r(U^{\square}) = \pi_{\bar{r}} \circ s(U^{\square}) \subseteq U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$。根据定义，有 $F^{-1}(U_{\mathrm{par}}(\bar{r})) \subseteq U$。由于 F 是投射的，因此可得 $F(U) = U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$。因此，根据 [HS16, Lem.2.14]， $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 是扎里斯基可构造的，且是 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中的容许开集，故由同上 Lemma 2.13 可知，它是 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中的扎里斯基开集。这就证明了断言（2）。

由于 $\pi_{\bar{r}}$ 和 κ 是自由的，因此根据 [BHS17b, Lem.5.8]，限制在 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 上的 ω 是光滑的；此外，由于 $\mathcal{S}$ 是光滑的， $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 也是光滑的。这就证明了断言（3）。□

在上面的证明中，我们需要将 [BC09a 命题 2.3.6 和命题 2.3.9] 中的相应结果用于抛物线型情形（即将同上中的三角型 (φ, Γ_K)-模替换为抛物线型

(φ,Γ_K)-模）。根据同上的证明，我们只需核查以下引理这一额外陈述。我们只给出陈述而略去证明，因为证明与同上完全相同。

引理 3.29. 设 A 是一个局部 Artin C-代数，并配有映射 $A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} C$。设 $(D,\mathcal{F}_\bullet)$ 是 C 上带参数 $f \in \mathcal{S}_{\mathrm{reg}}$ 的抛物化 (φ,Γ_K)-模。若 (D_A,π_{D_A}) 是 D 在 A 上的一个变形，即

(1) D_A 是 A 上的 (φ,Γ_K)-模；(2) $\pi_{D_A}\colon D_A \to D$ 是一个 $\mathcal{R}_{K,\ A}$-线性 (φ,Γ_K)-态射，且诱导映射

$$D_A \otimes_A C \xrightarrow{\sim} D$$

是一个同构。

then

(1) 至多存在一个使 $\mathcal{F}_\bullet D$ 变形的 D_A 的抛物化 $\mathcal{F}_\bullet D_A$，即

$$\pi_{D_A}(\mathcal{F}_i D_A) = \mathcal{F}_i D.$$

(2) 若 $A \to A'$ 是 Artin C-代数之间的局部映射，且其剩余域同构于 C，若 D_A 有一个使 $\mathcal{F}_\bullet D$ 变形的（唯一）抛物化，则 $D_A \otimes_A A'$ 也如此。(3) 设 $A \to A'$ 如上。假设 $A \to A'$ 是单射，则反向结论也成立。(4) 设 A, A' 是剩余域等于 C 的局部 Artin C-代数。若 (D_A,π_{D_A})（分别为 $(D_{A'},\pi_{D_{A'}})$）是 D 的一个变形，且具有使 $\mathcal{F}_\bullet D$ 变形的唯一抛物化，则 $(D',\pi_{D'})$ 也如此，其中 $D' := D_A \times_D D_{A'}$，且 $\pi_{D'} := \pi_{D_A} \circ \mathrm{pr}_{D_A} = \pi_{D_{A'}} \circ \mathrm{pr}_{D_{A'}}$。

以下推论及其证明包含在定理 3.28 的证明中。由于下一节会用到该结论，我们将其明确写出。

推论 3.30. 设 $x = (r_x, f_x)$ 是 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中的一个闭点，投影 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r}) \to \mathfrak{X}_{\bar{r}}$ 诱导出局部映射

$$\hat{O}_{\mathfrak{X}_{\bar{r}},r_x} \to \hat{O}_{U_{\mathrm{Par}}(\bar{r}),x}$$

完备局部环之间的映射是满射。

证明. 在定理 3.28 的证明中，我们已经证明

(1) $\hat{}O_{\mathfrak{X}_{\bar{r}},r_x} \cong R^{\square}_{r_x}$; (2) 存在一个同构 $\hat{}O_{U_{\mathrm{Par}}(\bar{r})\ x}[\![X_1,\ldots,X_l]\!] \xrightarrow{\sim} B$，其中 B 是某个完备局部环。(3) 复合 $R^{\square}_{r_x}[\![X_1,\ldots,X_l]\!] \to \hat{}O_{U_{\mathrm{Par}}(\bar{r})\ x}[\![X_1,\ldots,X_l]\!] \xrightarrow{\sim} B$ 是满射。

由此可得局部映射

$$\hat{O}_{\mathfrak{X}_{\bar{r}},r_x} \to \hat{O}_{U_{\mathrm{Par}}(\bar{r}),x}$$

是满射。 □

3.4. 抛物线型簇。在上一小节中，我们给出了抛物线型 (φ,Γ_K)-模的定义。现在设 D 是这样的一个 (φ,Γ_K)-模，具有抛物化 $(\mathcal{F}_iD)_{i=0,\ \ldots,\ l}$，其中有序参数为 $f=(f_1,\ldots,f_l)\in\mathcal{S}$。假设 f 属于 $\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}$，那么根据推论 3.19， D 是严格抛物线型的。我们令

$$\Delta:\mathcal{S}_i=(\mathcal{T}_{\tau_i}\times\prod_{\sigma:K\hookrightarrow C}\mathrm{GL}_{n_i}/B_{n_i})\to\mathcal{T}_{\tau_i}$$
$$f_i=(\delta_i,(\mathrm{Fil}^\bullet_{i,\sigma})_\sigma)\mapsto\delta_i$$

表示自然投影。特别地， Δ 是真。我们有:

命题 3.31. 设 $D,\mathcal{F}_\bullet,f=(f_1,\ldots,f_l)$ 如上所述（即 $f\in\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}$）。假设存在另一个滤过 $(\mathcal{F}'_iD)_{i=0\ldots,l}$，它是某个有序参数 $f'=(f'_1,\ldots,f'_l)$ 的抛物化，且满足 $\Delta(f'_i)=\Delta(f_i)$。那么，对于所有 $i=0,\ldots,l$，均有 $\mathcal{F}'_iD=\mathcal{F}_iD$，特别地， $f_i=f'_i$。

证明。事实上，证明几乎与推论 3.19 相同。确实，注意定义 3.13 中定义的正则性条件仅取决于特征的数据（因为滤过权已经固定），这意味着对每个$i<j$，正则性条件对（f_i， f'_j）成立，因此可以应用命题 3.14 得出，

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{R}(f_i),\mathcal{R}(f'_j))=0.$$

因此，$(D,\mathcal{F}_{l-1}D,\mathcal{R}(f'_j)\ \mathcal{R}(f'_j))$ 满足经由条件，进而自然投影

$$D\to D/\mathcal{F}'_{l-1}D\cong\mathcal{R}(f'_l)$$

通过 $\mathcal{F}_{l-1}D$ 分解，这意味着 $\mathcal{F}_{l-1}D\subseteq\mathcal{F}'_{l-1}D$。由对称性可得$\mathcal{F}'_{l-1}D\subseteq\mathcal{F}_{l-1}D$，（注意，根据定义， f' 也属于 $\mathcal{S}_{\mathrm{reg}}$），因此

$$\mathcal{F}'_{l-1}D=\mathcal{F}_{l-1}D.$$

因此，通过归纳法可得，对于所有 $i=0,\ldots,l$， $\mathcal{F}'_iD=\mathcal{F}_iD$。 □

上述命题表明，在此情况下，抛物型滤过 $\mathcal{F}_\bullet D$ 由 $(\delta_1,\ldots,\delta_l)$ 唯一确定。因此，通过以下方式修订先前对精化抛物型簇的定义，进而定义抛物线型簇是合理的。

定义 3.32. 令 $V_{\mathrm{par}}(\bar r)$ 为 $U_{\mathrm{par}}(\bar r)$ 在 $\mathfrak{X}_{\bar r}\times\mathcal{T}$ 中关于自然投影的像

$$\mathrm{id}_{\mathfrak{X}_{\bar r}}\times\Delta:\mathfrak{X}_{\bar r}\times\mathcal{S}\to\mathfrak{X}_{\bar r}\times\mathcal{T}.$$

我们将 $\bar r$ （形状为 $\mathcal{S}$）的抛物线簇 $Y_{\mathrm{par}}(\bar r)$ 定义为 C 上的约化刚性解析空间，它是 $\mathfrak{X}_{\bar r}\times\mathcal{T}$ 中 $V_{\mathrm{par}}(\bar r)$ 的扎里斯基闭包。我们称 $V_{\mathrm{par}}(\bar r)$ 为 $Y_{\mathrm{par}}(\bar r)$ 的正则轨迹（我们将证明 $V_{\mathrm{par}}(\bar r)$ 在 $Y_{\mathrm{par}}(\bar r)$ 中也是扎里斯基开集）。

注记 3.33。

(1) 根据定义， $V_{\mathrm{par}}(\bar r)$ 可以描述为满足以下条件的闭点 $(r,\delta)\in\mathfrak{X}_{\bar r}\times\mathcal{T}_{\mathrm{reg}}$ 的集合：对于某个 $\Delta^{-1}(\delta)$ 中的闭点 f， $D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(r)$ 是参数为 f 的抛物线型对象。

(2) 尽管环境空间 $\mathfrak{X}_{\bar r}\times\mathcal{T}$ 仅取决于伽罗瓦表示 $\bar r$ 和有序惯性类型 $\underline{\tau}=(\tau_1,\ldots,\tau_l)$，但抛物线簇 $Y_{\mathrm{par}}(\bar r)$ 还取决于滤过权 $\underline{k}$。由于作为函子， $\mathcal{S}$ 由唯一的一对 $(\underline{\tau},\underline{k})$ 确定，因此，称 $\bar r$ 的抛物线簇 $Y_{\mathrm{par}}(\bar r)$ 具有形状 $\mathcal{S}$ 确实是有意义的。我们省略了.....的信息。

我们在记号中将抛物线簇 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的形状记为 $\mathcal{S}$，因为在整篇文章中，我们始终固定 $\mathcal{S}$。

(3) 原像 $\Delta^{-1}(Y_{\mathrm{par}}(\bar{r}))$ 在 $\mathfrak{X}_{\bar{r}} \times \mathcal{S}$ 中是闭的，因此包含 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$。由于 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 和 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 是既约的，故存在唯一的态射 Ξ: $X_{\mathrm{par}}(\bar{r}) \to Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$，使得下图

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathrm{par}}(\bar{r}) & \hookrightarrow & \mathfrak{X}_{\bar{r}} \times \mathcal{S} \\ \downarrow{\scriptstyle \Xi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \times \Delta} \\ Y_{\mathrm{par}}(\bar{r}) & \hookrightarrow & \mathfrak{X}_{\bar{r}} \times \mathcal{T} \end{array}.$$

交换。

(4) Ξ 是满射。事实上，由于 $\mathrm{id} \times \Delta$ 是真态射，因此 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 在$\mathfrak{X}_{\bar{r}} \times \mathcal{T}$中的像是闭的，故包含 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$。

实际上，我们还有另一个更有力的动机来定义抛物线型簇。在下一节中，我们将在自守侧定义一些特征簇，而我们的目标是理解抛物线型簇与特征簇之间的比较。事实上，这些特征簇也有参数空间（例如精细抛物线簇 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的参数空间 $\mathcal{S}$），但结果表明该参数空间是 $\mathcal{T}$ 而非 $\mathcal{S}$，这意味着不存在任何滤过结构。这一事实促使我们修订精细抛物线簇的原始定义。

命题 3.34. 有

$$\Xi^{-1}(V_{\mathrm{par}}(\bar{r})) = U_{\mathrm{par}}(\bar{r}).$$

证明. 设 (r, δ) 是 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中的一个闭点。设 (r, f) 是 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中满足 $\Delta(f) = \delta$ 的一个闭点。由命题 3.31，存在唯一的点 $(r, g) \in U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$，使得 $\Delta(g) = \delta$。只需证明 $f = g$。

令 $D_r := D^{\dagger}{}_{\mathrm{rig}}(r)$，其递增滤过唯一，

$$0 = D_{r,0} \subset D_{r,1} \subset \cdots \subset D_{r,l}$$

是 (φ, Γ_K)-子模，且满足 $D_{r,i}/D_{r,i-1} \cong \mathcal{R}(g_i)$。特别地，由命题 A.3 可得

$$\mathrm{Sen}_{D_{r,i}}(T) = \mathrm{Sen}_{D_{r,i-1}}(T) \cdot \mathrm{Sen}_{\mathcal{R}(g_i)}(T).$$

另一方面，我们可以应用推论 3.23，得到一个真双有理、因而是满射的态射 F: $X \to X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$。若记 $D := D^{\dagger}{}_{\mathrm{rig}}(F^* r_X)$，则有一个递增滤过 $\mathcal{F}_\bullet(D)$，它是 (φ, Γ_K)-子模的滤过，且这些子模包含于 D，从而在 X 上存在一个 (φ, Γ_K)-模的短正合列，其中 $1 \le i \le l$

$$0 \to \mathrm{gr}_i D \to F^*(\mathcal{R}(\omega_i)) \otimes \mathcal{L}_i \to \mathcal{M}_i \to 0$$

其中 $\omega_i : X_{\mathrm{par}}(\bar{r}) \to \mathcal{S}_i$ 是自然投影，$\mathcal{L}_i$ 是 X上的线丛，带有平凡的（φ, Γ_K）-作用，并且在 X上局部地，余核 $\mathcal{M}_i$ 被 t的某个幂湮灭，且其支集位于某个与 $F^{-1}(U_{\mathrm{par}}(\bar{r}))$不相交的扎里斯基闭集 Z_i 上。

令 x 为 X 中 (r, f) 的原像中的一个闭点。或许增大 C 后，我们可以假设它们的剩余域相同，于是有:

(1) $D_x \cong D_r$ （从现在起，我们通过选择一个同构来认定 D_x 与 D_r）；

(2) F^*（$\mathcal{R}$（ω_i））$_x \cong \mathcal{R}$（f_i）；

（3）复形】【。

$$0 \to (\mathcal{F}_{i-1}D)_x \to (\mathcal{F}_iD)_x \xrightarrow{\mu_i} \mathcal{R}(f_i) \to \mathcal{M}_{i,x} \to 0$$

其中 $\mathcal{M}_{i,\ x}$ 被 t 的某个幂湮灭，其中 $i = 1$、.....、l;

（4）方程（由命题 A.3）

$$\mathrm{Sen}_{(\mathcal{F}_iD)_y}(T) = \mathrm{Sen}_{(\mathcal{F}_{i-1}D)_y}(T) \cdot \mathrm{Sen}_{(F^*(\mathcal{R}(\omega_i)))_y}(T)$$

对 $F^{-1}(U_{\mathrm{par}}(\bar{r}))$ 中的每个闭点 y 都成立，因此由连续性可知，它对整个 X 中的 y 都成立。特别地，该方程对 $y = x$ 成立;

（5）根据推论 A.7 中的公式，$\mathrm{Sen}_{\mathcal{R}(f_i)}(T) = \mathrm{Sen}_{\mathcal{R}(g_i)}(T)$。

我们将通过比较 Sen 多项式，归纳地证明（$\mathcal{F}_iD$）$_x = D_{r,\ i}$ 和 $f_i = g_i$ 。

首先，当 $i = 1$ 时，该单射

$$0 \to (\mathcal{F}_1D)_x \to \mathcal{R}(f_1)$$

根据推论 A.9，由于它们的 Sen 多项式根据 (4) 相同，因此这是一个同构。利用正则性条件（注意 $(f_1, g_2, \ldots, g_l) \in \mathcal{S}_{\mathrm{reg}}$），可得

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{R}(f_1), \mathcal{R}(g_i)) = 0,$$

对于 $i \geq 2$。因此，$((\mathcal{F}_1D)_x, 0, D_r, D_{r_1})$ 满足经由条件，因此 $(\mathcal{F}_1D)_x$ 是 D_r 的 (φ, Γ_K)-子模，$_1$。再次由推论 A.9 可得 $(\mathcal{F}_1D)_x = D_{r,\ 1}$，因为它们的 Sen 多项式相同，而且，$f_1 = g_1$。

现在假设 $(\mathcal{F}_{i-1}D)_x = D_{r,\ i-1}$，因此特别地，$(\mathcal{F}_{i-1}D)_x$ 在D_x中是饱和的，在 $(\mathcal{F}_iD)_x$中也如此。那么复形

$$0 \to (\mathcal{F}_{i-1}D)_x \to (\mathcal{F}_iD)_x \to \mathrm{Im}(\mu_i) \to 0$$

是一个正合的 as

$$\mathrm{rank}((\mathcal{F}_{i-1}D)_x) + \mathrm{rank}(\mathrm{Im}(\mu_i)) = \mathrm{rank}((\mathcal{F}_iD)_x)$$

且 \($(\mathcal{F}_{i-1}D)_x/(\mathcal{F}_{i-1}D)_x$ \) 是无挠的。这意味着 \(\operatorname{Im}(μ_i)\) 的 Sen 多项式等于 \($\mathcal{R}(f_i)$\) 的 Sen 多项式，因此，根据推论 A.9，μ_i 是满射的。由此可知，该复形

$$0 \to (\mathcal{F}_{i-1}D)_x \to (\mathcal{F}_iD)_x \xrightarrow{\mu_i} \mathcal{R}(f_i) \to 0$$

是一个短正合列。再次使用正则性论证，可得

$$\mathrm{Hom}((\mathcal{F}_iD)_x, \mathcal{R}(g_j)) = 0$$

对任意 $j > i$。

于是 $(\mathcal{F}_iD)_x, 0, D_r, D_{r,i})$ 满足经由条件，因此 $(\mathcal{F}_iD)_x$ 是 $D_{r,i}$ 的 (φ, Γ_K)-子模。由此，根据推论 A.9，$(\mathcal{F}_iD)_x = D_{r,i}$，因为它们的 Sen 多项式相同，并且 $f_i = g_i$。然后通过归纳法即可完成证明。□

注 3.35。上面的命题表明，$X_{\mathrm{par}}(\bar{r}) \setminus U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的像是 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r}) \setminus V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中的 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$。由于 Ξ 是真空间，特别是闭的，因此 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r}) \setminus V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 是扎里斯基闭的，而 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 在 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中是扎里斯基开的。由此可知，限制到 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 上的 Ξ 是闭的，并双射到 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$（在拓扑层面上）。因此，$\Xi$ 在 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 与 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的底层拓扑空间之间诱导出一个同构。于是，一旦证明 Ξ 在 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 上光滑，我们就可以看到，Ξ 实际上在 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 与 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 之间诱导出一个刚性空间同构。

定理 3.36. Ξ 限制在 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 上是到 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的一个同构。

证明。根据上述注中的说明，只需证明 Ξ 在 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中是光滑的。这等价于证明，对于 $U_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中的每个闭点 x，所诱导的局部映射

$$\Xi_x^*:\hat{B}_y\to\hat{A}_x$$

是一个同构，其中 $y:=\Xi(x)$，而 A_x（分别为 B_y）是 x（分别为 $\hat{}\,y$）的局部环，且 A_x（分别为 B_y）是 A_x（分别为 B_y）的完备化。

我们首先证明 Ξ_x^* 是单射。设 $V=\mathrm{Sp}B$ 是 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 的一个仿射子域，且包含 y，并设 $U:=\Xi^{-1}(V)$。由于 Ξ 是真态射且纤维有限，根据 [BGR84 第 9.6 节推论 6]，Ξ 是有限的，特别地，$U=\mathrm{Sp}A$，其中某个仿射刚性代数（记号与上文的记号相容）。

由于 $\Xi|_U$ 满射到 V，且 A、B 是既约的，因此核 $\Xi^*:B\to A$ 是

$$(\Xi^*)^{-1}(\{0\})=\bigcap_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Sp}A}(\Xi^*)^{-1}(\{\mathfrak{m}\})=\bigcap_{\mathfrak{n}\in\mathrm{Sp}B}\{\mathfrak{n}\}=0,$$

因此 Ξ^* 是单射。令 $\mathfrak{n}_y$ 表示 y 在 B 中的极大理想，并令 $\mathfrak{m}_x$ 表示 x 在 A 中的极大理想。由于 $\mathfrak{m}_x$ 是 $\mathfrak{n}_y$ 上方唯一的极大理想，可知 $A/\mathfrak{n}_yA$ 是极大理想为 $\mathfrak{m}_x$ 的局部阿廷环。特别地，有 $\mathfrak{m}_x^k\subseteq\mathfrak{n}_y\subseteq\mathfrak{m}_x$，因此在 A 中，$\mathfrak{m}_x$-进拓扑等于 $\mathfrak{n}_y$-进拓扑 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$。由此可知自然映射 $A\otimes_B B_y\to A_x$ 是一个同构。由于 B_y 在 B 上平坦，因此态射

$$\Xi_x^*:\hat{B}_y=B\otimes_B\hat{B}_y\to A\otimes_B\hat{B}_y=\hat{A}_x$$

是单射。

对于满射性，考虑由自然投影 $(r,f)\mapsto r$（分别由 $(r,\delta)\mapsto r$）得到的 x（分别为 y）在 $\mathfrak{X}_{\bar{r}}$ 中的像 z。令 $\hat{}\,C_z$ 表示 z 的局部环的完备化。由推论 3.30，复合

$$\hat{C}_z\to\hat{B}_y\to\hat{A}_x$$

是满射，特别地，Ξ_x^* 是满射。 □

注 3.37。上述比较表明，精细抛物线簇 $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 与抛物线簇 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 非常接近。事实上，我们证明了：

(1) Ξ: $X_{\mathrm{par}}(\bar{r})\to Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 是真双有理且满射。(2) 它们的正则轨迹同构，即 $\Xi|_{U_{\mathrm{par}}(\bar{r})}$ 是到$V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$上的同构。

因此，我们可以推导出 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 与定理 3.28 中类似的几何性质：

(1) 刚性空间 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$是维数为

$$[K:\mathbb{Q}_p](\frac{n(n-1)}{2}+l)+n^2;$$

(2) 集合 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 在 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中是扎里斯基开集，因此它在$Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 中也是扎里斯基稠密的；

(3) 刚性空间 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$是光滑的，且态射

$$\omega':Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})\hookrightarrow\mathfrak{X}_{\bar{r}}\times\mathcal{T}\to\mathcal{T}$$

限制在 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$ 上是光滑的。

注 3.38. 我们对 $V_{\mathrm{par}}(\bar{r})$（分别地，对 $Y_{\mathrm{par}}(\bar{r})$）的构造实际上与 Breuil 和 Ding 在 [BD21, 第 4 节.2] 中对 $U_{\Omega,\mathfrak{h}}(\bar{\rho})$（分别地，对 $X_{\Omega,\mathfrak{h}}(\bar{\rho})$）的构造一致。由于我们构造中涉及的记号有相当多不同之处，这里我们列出

它们之间的对应关系（左侧是 Breuil 和 Ding 的记号，右侧是我们的记号）：

- $r := l$。
- $L := K$。
- $E := C$。
- $\overline{\rho} := \overline{r}$。
- 设 K_1, K_2 是 p-进局部域。尽管在 [BD21] 和本文中，记号$\mathcal{R}_{K_1,\ K_2}$都表示相对 Robba 环，但 K_1 和 K_2 的角色恰好相反。也就是说，在 [BD21] 中，$R_{K_1,\ K_2}$ 表示$\mathcal{R}_{K_2,\ K_1}$在本文中的含义。
- $\mathbf{h} = (h_{i,\ \eta})_{i=1,\ \dots,\ \eta:\ L\hookrightarrow E}^{n} := (-k_{(s_i)\,j_i,\ \eta})_{i=1,\ \dots,\ \eta:\ K\hookrightarrow C}^{n}$，其中 s_i和 j_i是唯一的整数，使得 $1 \le s_i \le l-1$，且 $1 \le j_i \le n_{s_i+1}$是唯一的整数，使得 $n_1 + \cdots + n_{s_i} + j_i = i$（由于我们对 Hodge-Tate 权重的约定与 Breuil 和 Ding 的约定相差一个符号，因此这里出现了一个负号）。
- $\Omega = (\Omega_i)_{i=1,\dots,r} := $（与 $n_i(K)$ 相关联的 τ_i 的 GL 一般线性群尖点类型$_{i=1,\dots,r}$。
- 参数空间之间存在一个典范同构：

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{Z}_{\Omega_i}) \times \widehat{\mathcal{O}_L^\times} \cong \mathcal{T}_i$$

这由 B.2（即 Bernstein 中心的计算）得出。由此得到整个参数空间之间的典范同构：

$$\mathscr{Z} := \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{Spec}(\mathcal{Z}_{\Omega_i}) \times \widehat{\mathcal{O}_L^\times}) \cong \mathcal{T} := \prod_{i=1}^{r} \mathcal{T}_i.$$

- 可以直接验证，BD21 第 4 节中的一般位置 $\mathscr{Z}_{\mathrm{gen}} \subset \mathscr{Z}$ 与我们在 3.13 中定义的正则轨迹 $\mathcal{T}_{\mathrm{reg}} \subset \mathcal{T}$ 一致。

- 由引理 3.21 的证明可知，[BD21, Section 4.2] 中的条件 (4.17) 成立，当且仅当存在某个点 $f \in \Delta^{-1}(\underline{x}, \chi)$，使得 $D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(\rho)$ 是参数为 f 的抛物线型（回顾一下，$\Delta\colon \mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathcal{T}$ 是第 3.2 节开头定义的自然投影）。这意味着，同上定义的集合 $U_{\Omega,\mathbf{h}}(\overline{\rho})$ 与我们定义的集合 $V_{\mathrm{par}}(\overline{r})$ 相同。特别地，它们在 $\mathfrak{X}_{\overline{r}} \times \mathcal{T}$ 中的扎里斯基闭包相同，即 $U_{\Omega,\mathbf{h}}(\overline{\rho}) = V_{\mathrm{par}}(\overline{r})$。

4. Applications to Eigenvarieties

令 F^+ 为全实数域，F 为 F^+ 的虚扩张，并假设 F^+ 中每个整除 p 的有限处 v 都在 F 中分裂。我们固定一个定义在 F^+ 上、具有 n 个变量的酉群 $\mathcal{G}$，它在 F 上分裂，并且在 F^+ 的所有无穷处都是紧的。对于这样的群 $\mathcal{G}$（以及温和层的选取，即 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_{F^+}^{p\infty})$ 的一个紧开子群），人们构造了一个良好的海克特征簇，它是维数为 $n[F^+ : \mathbb{Q}]$ 的等维解析刚性空间，参见例如 [Che04] 或 [BC09a]。我们称这样的海克特征簇为三角型，因为对于附属于该特征簇中某个点 x 的每个有限斜率 $\mathfrak{p}$ 进超收敛特征形式，都可以关联一个连续半单伽罗瓦表示

$$\rho_x : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

它在 [Col08] 的意义下是三角型的，在 F 中所有整除 p 的素位处皆如此（见 [KPX14]）。在 [BHS17a], 中，Breuil、Hellmann 和 Schraen 研究了这类特征簇中经典点的特征（若一个点对应于某个经典特征形式，则称其为经典点），并证明这些点在该

特征簇中扎里斯基稠密。这是构造从这类特征簇到三角化簇的合理映射的关键性质（[BHS17a]），体现了朗兰兹对应的思想，并有助于理解 Fontaine-Mazur猜想。

本节中，我们将上述结果推广到副抛物线情形。更确切地说，我们将构造一个副抛物线型的海克特征簇；其含义是，附属于该特征簇中某个超收敛形式点 x 的伽罗瓦表示 $\rho_x\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$（满足一些额外的技术条件），在 F 中所有整除 p 的素位处，均为第 3 节意义下的副抛物线型；类似地，我们还将构造一个从该特征簇到我们在第 3 节定义的抛物线簇的合理映射。

如本节所示，涉及的记号很多，其中许多都按照相同的规则定义。为避免重复，我们在此给出本节通篇使用的一些记号约定。

- 如果 δ 是一个局部代数特征，我们总是用 $\delta_{\text{光滑}}$（分别用 $\delta_{\text{代数}}$）表示 δ 的光滑部分（分别表示代数部分）。
- 若已定义群 G 及其子群 G_k，则对于任意子群H（分别地，商群 H），我们自动记作 $H_k := H \cap G_k$（分别地，$H_k :=\mathrm{Im}(G_k \to H)$).
- 若对于某个整体域 F中整除 p的每个素位 v，群 G_v均已定义，则记作 $G_p := \prod_{v|p} G_v$；此外，若 π_v是一个已定义的 G_v-表示（分别地，幺半群、环、代数等），则记作 $\pi_p := \otimes_{v|p}\pi_v$。
- 若已在某个局部域 F上定义群概形 $\mathcal{G}$，则对于 F的每个素位 v，记作 $G_v := \mathcal{G}(F_v)$。
- 对于仿射刚性空间 X，记作 $R_X := \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$。
- 设 R 是一个交换环，M 是一个 R-模。对于任意子集$\Delta \subseteq R$，记作 对于点 $x \in \mathrm{Spec}R$，记作 其中 $\mathfrak{p}_x$ 是与 x相关联的素理想。

$$M[\Delta] := \{m \in M \mid am = 0,\ \forall a \in \Delta\}.$$

$$M[x] := M[\mathfrak{p}_x],$$

4.1. 记号与设定。本小节将说明我们在特征簇中使用的所有记号与设定。特别地，我们将按照 [Loe17], 的表述定义过收敛特征形式空间，并介绍该空间的一些基本性质。

首先，我们回顾整体设定，这基本上与 [BHS17a] 相同。固定一个全实域 F^+，并用 S_p 表示 F^+ 中整除 p 的素位集合。固定一个在 S_p 中所有素位处均分裂的全虚二次扩张 F/F^+。固定 $\mathbb{Q}_p$ 的一个有限扩张 C，并假设它足够大，使得对于所有 $v \in S_p$，都有$|\mathrm{Hom}(F_v^+\colon C)| = [F_v^+\colon \mathbb{Q}_p]$。

固定一个在 F^+ 上、具有 n 个变量的酉群 $\mathcal{G}$，使得 $\mathcal{G}(F^+\times_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$ 紧致，且 $\mathcal{G}\times_{F^+}F \cong \mathrm{GL}_{n,\ F}$。固定 $\mathrm{GL}_{n,\ F}$ 的一个抛物子群 $\mathcal{P}$，它对应于大小为 $\underline{n} = (n_1,\dots,n_l)$ 的上分块三角矩阵，其莱维子群为 $\mathcal{M} \cong \mathrm{GL}_{n_1,\ F}\times\cdots\times\mathrm{GL}_{n_l,\ F}$，幺正根基为 $\mathcal{N}$。令 $\overline{\mathcal{P}}$ 表示幺正根基为 $\overline{\mathcal{N}}$ 的对偶抛物子群，并令 $\mathcal{H} \cong \mathbb{G}_m^l$ 表示 $\mathcal{M}$ 的极大商环面。

我们固定一个同构 $i\colon \mathcal{G}\times_{F^+}F \xrightarrow{\sim}$ 一般线性群$_{n,\ F}$，并对每个 $v \in S_p$ 固定一个整除 v 的 F 的素位$\tilde{v}$。于是，i 和同构 $F_v^+ \to F_{\tilde{v}}$ 诱导出一个同构

$i_{\widetilde{v}}$： $\mathcal{G}(F_v^+) \to GL_n(F_{\widetilde{v}})$。按照上述记号约定，我们有 $G_v := \mathcal{G}(F_v^+) \cong$ 一般线性群$_n(F_{\widetilde{v}})$。那么，对于一般线性群$_n(F_{\widetilde{v}})$ 中的任意子群（例如 $M_{\widetilde{v}}$），我们总是通过 $i_{\widetilde{v}}$ 将其与 $\mathcal{G}(F_v^+)$ 的一个子群等同起来（并将其记作 M_v）。

我们固定一个温和层 $U^p = \prod_v U_v \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}^{p,\infty}_{F^+})$，其中 U_v是 $\mathcal{G}(F_v^+)$ 的一个紧开子群。我们固定 S一个在 F 中分裂的 F^+ 的有限个素点集合，其中包含所有$v|p$ 以及集合 $v \notin p$（在 F 中分裂），使得 U_v 不是超特殊的。我们用 $\mathbb{T}^S$ 表示交换球面 Hecke 代数:

$$\varinjlim_{I} \left(\bigotimes_{v \in I} \mathcal{O}_C[U_v \backslash G_v / U_v] \right),$$

归纳极限取遍 F^+ 中分裂的有限处的有限集合 I，使得 $I \cap S = \emptyset$。

然后我们陈述局部情形，并讨论超收敛特征形式空间；这基本上是将 Loeffler 的设定专门应用于酉群 $\mathcal{G}$的情形。

对于每个 $v \in S_p$，在 F_v^+ 中固定一个一致化子 ϖ_v。令

$$G_{v,0} := \{ g \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{F_{\widetilde{v}}}) \mid g \in \mathcal{P}(k(F_{\widetilde{v}})) \mod \varpi_v \},$$

并令

$$G_{v,k} := \{ g \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{F_{\widetilde{v}}}) \mid g \in \mathcal{N}(k(F_{\widetilde{v}})) \mod \varpi_v^k \}$$

对于 $k \geq 1$。那么 $G_{v,k}$ 构成 $G_{v,0}$ 的拓扑基。并且对于每个 $k \geq 0$，都有

$$\begin{aligned} \overline{N}_{v,k} \times \overline{M}_{v,k} \times N_{v,k} &\xrightarrow{\sim} G_{v,k} \\ (\overline{n}, m, n) &\mapsto \overline{n}mn. \end{aligned}$$

设 $\Sigma_v :=\varpi_v^{\mathbb{Z}} I_{n_1} \times \cdots \times \varpi_v^{\mathbb{Z}} I_{n_l}$。那么，$M_v$ 的子群 Σ_v 包含于 M_v 的中心中。我们定义子幺半群

$$\Sigma_v^+ := \{ \varpi_v^{k_1} I_{n_1} \times \cdots \times \varpi_v^{k_r} I_{n_l} | k_1 \leq \cdots \leq k_l \},$$

和半群

$$\Sigma_v^{++} := \{ \varpi_v^{k_1} I_{n_1} \times \cdots \times \varpi_v^{k_l} I_{n_r} | k_1 < \cdots < k_l \}.$$

注意，在这种情况下，对于任意 $z \in \Sigma_v^+$，有 $z(\overline{N}_{v,\,0})z^{-1} \subseteq \overline{N}_{v,\,0}$。我们简记为 $\Sigma := \Sigma_p$（分别为 $\Sigma^+ := \Sigma_p^+$ 和 $\Sigma^{++} := \Sigma_p^{++}$）。

我们用 $\mathbb{I}_v \subset G_v$ 表示由 $G_{v,0}$ 和 Σ_v^+ 生成的幺半群，并定义 Hecke 代数

$$\mathcal{H}_v := C[G_{v,0} \backslash \mathbb{I}_v / G_{v,0}].$$

由 [Loe17，引理 3.41]可知，该 ma p

$$\begin{aligned} C[\Sigma_v^+] &\to \mathcal{H}_v \\ z \in \Sigma_v^+ &\mapsto \frac{1}{N_z}[G_{v,0} z G_{v,0}] \end{aligned}$$

是一个同构，其中 $N_z := |G_{v,0} z G_{v,0} / G_{v,0}|$。特别地，我们有一个同构

$$\mathcal{H}_p := \bigotimes_{v \in S_p} \mathcal{H}_v \cong C[\Sigma^+]$$

C-代数的。

对于每个 $v \in S_p$，我们固定一个元素

$$a^{(v)} = (a_{\eta,1}^{(v)} \leq \cdots \leq a_{\eta,l}^{(v)})_\eta \in (\mathbb{Z}_+^n)^{\mathrm{Hom}(F_{\widetilde{v}}, C)}.$$

我们将 W_v 记为 M_v 在 C 上的不可约代数表示，其相对于上三角矩阵博雷尔子群的最低权为 $a^{(v)}$，即

$$W_v \cong \mathrm{Ind}_{M_v\cap\overline{B}_v}^{M_v}\delta_{a^{(v)}},$$

这里的 $\overline{B}_v$ 是由下三角矩阵组成的 G_v 的博雷尔子群，而 $\delta_{a^{(v)}}$ 是 M_v 的权为 $a^{(v)}$ 的代数特征。为简便起见，我们将 $W:=W_p$ 记作。

对于每个 $v\in S_p$，我们固定一个系数取值于 C 的 M_v 的超尖点表示 σ_v。根据 [Vyt05，定理 1.3]，，存在一个 σ_v 的 $M_{v,0}$-类型 $\sigma_{v,0}$。为简便起见，我们记$\sigma:=\sigma_p$ 和 $\sigma_0:=\sigma_{p,0}$。

令 Π_v 表示 $\mathrm{End}_{M_v}(c\text{–}\mathrm{Ind}_{M_{v,0}}^{M_v}\sigma_{v,0})$，其中 $c\text{–}\mathrm{Ind}_{M_{v,0}}^{M_v}(\text{–})$ 表示紧诱导，并令 $\mathfrak{Z}_v$ 表示 σ_v 的伯恩斯坦中心。根据 [Dat99, 定理 4.1],，有 $\mathfrak{Z}_v\cong\Pi_v$。为简便起见，我们记 $\mathfrak{Z}:=\mathfrak{Z}_p$。

引理 4.1. 对任意 t 元素 M_p，我们将 r_t 在$c\text{–}\mathrm{ind}_{M_p,0}^{M_p}\sigma_{p,0}$ 上的右正则作用记为 $r_tf(x):=f(xt)$。那么映射

$$i_\Sigma : t\in\Sigma\mapsto r_t$$

将 $C[\Sigma]$ 与 $\Pi_p=\mathfrak{Z}$ 的一个子环等同起来。

证明. 对任意 $t\in\Sigma_p$ 和 $m\in M_p$，有 $r_m\circ r_t=r_t\circ r_m$（注意 t 位于 M_p 的中心）。因此 r_t 是 $\Pi_p=\mathfrak{Z}$ 中的一个元素。

现在我们来证明该映射是单射。对任意 $t\in\Sigma$ 和任意$x\in\sigma_0$，令 $f_{t,x}$ 表示 $c\text{–}\mathrm{ind}_{M_p}^{M_p},_0\sigma_p,0$ 中满足以下条件的唯一元素：对所有 $x'\in M_p\backslash tM_p,0$，均有 $f_{t,x}(t)=x$ 且 $f_{t,x}(x')=0$。因此，通过映射 $(x_t)_{t\in\Sigma}\mapsto\sum_{t\in\Sigma}f_{x_t,t}$，可以将 $\bigoplus\sigma_0$ 视为 $c\text{–}\mathrm{ind}_{M_p}^{M_p},_0\sigma_p,0$ 的一个子$_{t\in\Sigma}$向量空间。注意，对任意t、$t'\in\Sigma$ 以及 $x\in c\text{–}\mathrm{ind}_{M_p}^{M_p},_0\sigma_p,0$，有 $r_tf_{x,t'}=f_{x,t't^{-1}}$。这意味着

$$\bigoplus_{t\in\Sigma}\sigma_0\cong C[\Sigma]\otimes_C\sigma_0$$

作为一个 $C[\Sigma]$-模。因此，$C[\Sigma]$ 忠实地作用于 $\bigoplus\sigma_0$，且映射 $t\mapsto r_t$ 是$_{t\in\Sigma}$单射的。□

ˆ我们将表示函子 C的群 H_v -刚性空间记为

$$R\to\{\delta:M_v\to R^\times\mid\delta\ is\ continuous\}.$$

ˆ我们也将表示函子 C的群$H_{v,\ 0}$ -刚性空间记为

$$R\to\{\delta:M_{v,0}\to R^\times\mid\delta\ is\ continuous\}$$

（注意，M_v（分别为$M_{v,\ 0}$）的任意连续特征 δ 总是经由ˆ ˆH_v（分别为$H_{v,\ 0}$）因子化。因此，H_v（分别为$H_{v,\ 0}$）也可以描述为 H_v（分别为$H_{v,\ 0}$）的连续特征群（刚性空间）。）

我们将ˆ H_v的有限、闭且既约子空间记为ˆ$H_v^{\sigma_v}$，其 C'-点为

$$\{\delta:M_p\to(C')^\times\mid\sigma_?\otimes\delta\cong\sigma\}$$

对任意有限域扩张 C'/C。我们记ˆ $H_{\sigma_v}:=$ˆ$H_v/$ ˆ$H_v^{\sigma_v}$以及ˆ $H_\sigma:=\prod_{v\in S_p}$ ˆH_{σ_v}。

注 4.2.

(1) 对于每个 $v\in S_p$，都有 $\sigma_v\cong\sigma_{v,1}\otimes\cdots\otimes\sigma_{v,l}$，其中每个 $\sigma_{v,i}$ 都是 $\mathrm{GL}_{n_i}(F_{\tilde{v}})$ 的超尖点表示。令 $\tau_{v,i}$ 表示 $\mathrm{rec}(\sigma_{v,i})$ 的类型（回忆一下，WD 表示的类型定义于第 3.1 小节）。由引理 B.1，可得

$$\hat{H}_v^{\sigma_v}\cong\mu_{e_{\tau_{v,1}}}\times\cdots\times\mu_{e_{\tau_{v,l}}},$$

其中 $\mu_{e_{\tau_{v,i}}}$ 是 $e_{\tau_{v,i}}$ 次单位根构成的有限群概形。

(2) 若我们将 $G_{\sigma_{v,i}}$ 记为一般线性群 $n_i(F_{\tilde{v}})$ 的唯一正规子群，其具有有限指标 $e_{\tau_{v,i}}$，并且包含一般线性群 $n,i(F_{\tilde{v}})$ 的所有紧子群，并将 $G_{\sigma_v}:=\prod G_{\sigma_{v,i}}$ 写作 M_v 的子群。

那么，$\hat{}\,H_{\sigma_v}$（分别地，$\hat{}\,H_\sigma$）可以通过映射 $\delta\mapsto\delta|_{G_{\sigma_v}}$ 描述为 G_{σ_v}（分别地，$\prod_{v\in S_p}G_{\sigma_v}$）的连续特征群（刚性空间）。

（3）对于任意光滑特征 $\delta\in\hat{}\,H_\sigma$，根据注 B.4.1，记号 $\sigma\otimes\delta$ 是有意义的。事实上，或许扩大 C 后，可以将 δ 延拓为 M_p 的某个光滑特征 δ，于是 $\sigma\otimes\delta:=\sigma\otimes\delta$。

(4) 令 $\mathcal{T}_{F_{\tilde{v}}}$ 表示 $F_{\tilde{v}}^\times$ 的连续特征群（C-刚性空间），令 $\mathcal{W}_{F_{\tilde{v}}}$ 表示 $\mathcal{O}_{F_{\tilde{v}}}^\times$ 的连续特征群（C-刚性空间）。则有如下分解（取决于 π_v 的选择）：

$$\mathcal{T}_{F_{\tilde{v}}}\cong\mathcal{W}_{F_{\tilde{v}}}\times\mathbb{G}_m$$

与第 2.4 小节中的做法相同。

Note that $\hat{H}_v\cong\prod_{1\le i\le l}\mathcal{T}_{F_{\tilde{v}}}$ and $\hat{H}_{v,0}\cong\prod_{1\le i\le l}\mathcal{W}_{F_{\tilde{v}}}$. Then one has (also 取决于 ϖ_v的选择)

$$\hat{H}_v\cong\hat{H}_{v,0}\times\mathbb{G}_m^l$$

由定理 B.2 可得

$$\hat{H}_{\sigma_v}\cong(\hat{H}_{v,0}\times\mathbb{G}_m^l)/\hat{H}_v^{\sigma_v}\cong\hat{H}_{v,0}\times\prod_{1\le i\le l}(\mathbb{G}_m/\mu_{e_{\tau_{v,i}}})\cong\hat{H}_{v,0}\times\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z}_v)^{\mathrm{rig}}$$

命题 4.3. 设 $\delta\in$ 是 $\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z})$ 的一个闭点。则有

$$(c\text{-}\mathrm{Ind}_{M_{p,0}}^{M_p}\sigma_0)\otimes_{\mathfrak{Z}}k_\delta\cong\sigma\otimes\delta$$

证明. 根据引理 3.5.2，有如下同构

$$\mathfrak{Z}\cong C[T_{v,i}^{\pm e_{\tau_{v,i}}}]_{v\in S_p,1\le i\le l},$$

其中 $\tau_{v,i}$ 是 $\mathrm{rec}(\sigma_{v,i})$ 的类型，使得 $\mathfrak{Z}$ 在 $\sigma\otimes\delta$ 上的作用为特征δ。那么根据 [CEG+18, 命题 3.10], ，有

$$(c\text{-}\mathrm{Ind}_{M_{p,0}}^{M_p}\sigma_0)\otimes_{\mathfrak{Z}}k_\delta\cong\sigma\otimes\delta$$

□

设 $V_v:=W_v\otimes\sigma_{v,0}^\vee$ 为 $M_{v,0}$ 的局部代数表示，其代数部分为 W_v，光滑部分为 $\sigma_{v,0}$；这里 $(-)^\vee$ 表示对偶表示，并设$V:=\prod_{v\in p}V_v$ 为 $M_{p,0}$对应的局部代数表示。

令 $k(V)$ 为使 $V|_{M_{p,k}}$ 为代数的最小整数。令 X_v 为 $H_{v,0}$ 的一个仿射刚性子空间（注意，一般而言，$H_{v,0}$ 只是拟 Stein 空间，而非仿射空间）。令 $k(X_v)$ 为使自然映射

$$H_{p,k}\to\Gamma(X_v,\mathcal{O}_{X_v}^\times)$$

具有解析性的最小整数。我们沿用 [Loe17，定义 2.3.1] 中的记号，并令 $\mathcal{C}(X_v,V_v,k)$ 表示 $N_{v,\ 0}$ 上取值于 $(R_{X_v}\otimes_C V_v)$ 的局部 C-解析函数所成的集合，这些函数在 $N_{v,\ k}$ 的陪集中解析。该集合带有一个 $G_{v,\ 0}$-作用，其定义同上。

ˆ 现在，对于形如 $H_{p,0}$ 的仿射刚性子空间

$$X=\prod_{v\in S_p}X_v,$$

其中每个 X_v 都是 ˆ$H_{v,0}$的仿射刚性子空间，我们定义 $k(X):=\max_{v\in S_p}\{k(X_v)\}$。于是，对于任意 $k\geq\max\{k(V)\ k(X)\}$，记 $\mathcal{C}(X,V,k)$ 为 $G_{p,0}$-表示

$$\prod_{v\in S_p}\mathcal{C}(X_v,V_v,k).$$

事实上， $\mathcal{C}(X,V,k)$ 是一个具有性质 (Pr) 的 Banach R_X-模（关于 (Pr) 的定义和证明，参见 [Loe17, 3.5]）。

ˆ设 $\delta\in H_{v,0}$ 是一个局部代数点，即 $\delta=\delta_{\mathrm{sm}}\delta_{\mathrm{alg}}$ 对于某个光滑特征 δ_{sm} 和某个代数特征 δ_{alg}成立；那么对于任意 $k\geq\max\{k(V)\ k(\delta)\}$，我们定义 $G_{v,0}$-表示

$$\mathcal{C}(\delta,V_v,k)^{\mathrm{cl}}:=\left(\mathrm{Ind}_{\overline{P}_{v,0}}^{G_{v,0}}(W\otimes\delta_{\mathrm{alg}})\right)^{\mathrm{alg}}\otimes\mathrm{Ind}_{\overline{P}_{v,0}/\overline{P}_{v,k}}^{G_{v,0}/G_{v,k}}(\sigma_{v,0}^{\vee}\otimes\delta_{\mathrm{sm}}).$$

实际上，根据 ˆ[Loe17, 命题 2.3.2]， $\mathcal{C}(\delta,V_v,k)^{\mathrm{cl}}$ 是 $\mathcal{C}(\delta,V_v,k)$ 的一个自然子表示。对于局部代数点 $\delta=(\delta_v)_{v\in S_p}\in H_{p,0}$，我们记

$$\mathcal{C}(\delta,V,k)^{\mathrm{cl}}:=\prod_{v\in S_p}\mathcal{C}(\delta_v,V_v,k)^{\mathrm{cl}}.$$

根据 [Loe17, 定理 2.4，7], 对于每个 $v\in S_p$，我们将 $G_{v,0}$ 对$\mathcal{C}(X_v,V_v,k)$的作用扩展为 $\mathbb{I}_v$ 作用（回顾一下， $\mathbb{I}_v$ 是由 $G_{v,0}$ 和Σ_v^+生成的幺半群），其作用由连续的 R_{X_v}-线性算子给出（见下文的注）。

注 4.4.

(1) 记 $\overline{N}_{\mathbb{I}_v}:=\mathbb{I}_v\cap\overline{N}_v$， $M_{\mathbb{I}_v}:=\mathbb{I}_v\cap M_v$，以及 $N_{\mathbb{I}_v}:=\mathbb{I}_v\cap N_{v\circ}$ 则 $\mathbb{I}_v$是 Iwahori 可分解的，即

$$\mathbb{I}_v\cong\overline{N}_{\mathbb{I}_v}\times M_{\mathbb{I}_v}\times N_{\mathbb{I}_v}.$$

此外，$M_{\mathbb{I}_v}=M_{v,0}\Sigma_v^+$ 和 $N_{\mathbb{I}_v}=N_{v,0\circ}$ 因此，若将 V_v （分别将R_{X_v}）视为一个 $M_{\mathbb{I}_v}$-表示（分别视为一个 $M_{\mathbb{I}_v}$-特征），且 Σ_v^+在其上平凡作用，则 $\mathbb{I}_v$对 $\mathcal{C}(X_v,V_v,k)$的作用由以下双射诱导

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{Ind}_{\overline{P}_{\mathbb{I}_v}}^{\mathbb{I}_v}(V_v\otimes R_{X_v})\right]^{k-\mathrm{an}}&\xrightarrow{\sim}\mathcal{C}(X_v,V_v,k)\\ f&\mapsto f|_{N_{\mathbb{I}_v}}.\end{aligned}$$

因此， $\mathbb{I}_v$ 在 $\mathcal{C}(X_v,V_v,k)$ 上的作用是非典范的，并且取决于我们对 ϖ_v 的选择（注意， $M_{\mathbb{I}_v}$ 的作用取决于我们对 Σ_v^+ 的选择，而后者又取决于对 ϖ_v 的选择）。

(2) 设 $\delta=\delta_{\mathrm{sm}}\delta_{\mathrm{alg}}$ 是 $M_{p,0}$ 的局部代数特征。代数 $M_{p,0}$ 表示 W （分别地，代数 $M_{p,0}$ 特征 δ_{alg}）可自然地视为 M_p 的代数表示（分别地， M_p 的代数特征）；其上的 Σ^+ 作用通常并非平凡。假设对每个 $v\in S_p$， δ_{alg} 在 M_v 上的限制是

$$\delta_{\mathrm{alg},v}=\delta_{b^{(v)}}$$

对于某个 $b^{(v)}=(b^{(v)}_{\eta\ i},)\in(\mathbb{Z}^l)^{\mathrm{Hom}(F_{\tilde{v}},C_)}$。我们记

$$\Delta_{\delta_{\mathrm{alg},v}}:M_v\to C^\times$$
$$(B_1,\dots,B_l)\mapsto\prod_{1\le i\le l}\prod_{\eta\in\mathrm{Hom}(F_{\tilde{v}},C)}\eta(\varpi_v)^{b^{(v)}_{\eta,i}v_{F_{\tilde{v}}}(\det(B_i))},$$

这是 M_v 的一个非分歧特征。因此，将 $\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}\delta^{-1}$ 代数限制在 Σ 上后是平凡的，其中 $\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}:=\prod_v\Delta_{\delta_{\mathrm{alg},\ v}}$。

类似地，我们也可以选取并固定一个非分歧特征 Δ_W（一般而言并不唯一），使得 Σ 在 $W\otimes\Delta_W^{-1}$ 上平凡作用。

（3）对于 $M_{p,\ 0}$ 的一个局部代数特征 δ，我们可以将局部代数 $\mathbb{I}_p$-表示 $\mathcal{C}(\delta,V,k)^{\mathrm{cl}}$ 唯一分解为 $U_{\mathrm{alg}}\otimes U_{\mathrm{sm}}$，其中各因子分别是代数表示和光滑表示。然后，使用上述记号，有

$$U_{\mathrm{alg}}\cong\left(\mathrm{Ind}_{\overline{P}_p}^{G_p}(W\otimes\delta_{\mathrm{alg}})\right)\Big|_{\mathbb{I}_p}$$

and

$$U_{\mathrm{sm}}\cong\left(\mathrm{Ind}_{\overline{P}_{v,0}/\overline{P}_{v,k}}^{G_{v,0}/G_{v,k}}(\sigma_{v,0}^\vee\otimes\delta_{\mathrm{sm}})\right)\otimes\left(\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}^{-1}\right)\Big|_{\mathbb{I}_p},$$

如前所述，第一因子可以视为一个 $\mathbb{I}_p$-表示。

对于任意 $k\ge\max\{k(V)\ k(X)\}$，我们定义

$$M(X,V,k):=\{\phi:\mathcal{G}(F^+)\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)\to\mathcal{C}(X,V,k)\mid\phi(gu)=u_p^{-1}\phi(g)\ for\ u\in U^p\times G_{p,0}\}$$

温和层为 U^p、权为“$\mathcal{C}(X,V,k)$”的超收敛自守形式空间，其中 u_p 是 u 从 $U^p\times G_{p,0}$ 到 $G_{p,\ 0}$ 的自然投影。这是一个 R_X-模，并带有幺半群 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_{F^+}^{p\infty})\times\mathbb{I}_p$ 的光滑左作用，其定义公式如下:

$$u(\phi)(g)=u_p\phi(gu).$$

特别地，根据 [Loe17，命题 3.5.2]，$M(V,X,k)$ 是一个具有性质 (Pr) 的 Banach R_X-模。

对于局部代数特征 $\delta\in\hat{}H_{p,0}$，以及 $k\ge\max\{k(V)\ k(\delta)\}$，我们定义

$$M(\delta,V,k)^{\mathrm{cl}}:=\{\phi\in M(\delta,V,k)\mid\mathrm{Im}(\phi)\subseteq\mathcal{C}(\delta,V,k)^{\mathrm{cl}}\}$$

温和层为 U^p、权为“$\mathcal{C}(\delta,V,k)$”的经典自守形式空间。它是 $M(\delta,V,k)$ 的闭子空间，在 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_{F^+}^{p\infty})\times\mathbb{I}_p$ 的作用下保持不变。

注 4.5。

(1) 注意，$G_\infty:=\mathcal{G}(F^+\times_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$ 是连通的，因此有

$$G(F^+)\backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)\cong G(F^+)\backslash G(\mathbb{A}_{F^+})/G_\infty^0,$$

其中 G_∞^0 是 G_∞ 中单位元所在的连通分支。那么，我们对 $M(X,V,k)$（分别对 $M(\delta,V,k)^{\mathrm{cl}}$）的记号，与 Loe17, Def 3.7. 中 [Loe17 对 $M(e_U,X,V,k)$ 的记号一致（分别与 Loe17, Def 3.9. 中 [Loe17 对 $M(e_U,1,V(\delta)\ k)$ 的记号一致），其中 $U:=U^p\times G_{p,0}$。

(2)（见 [Loe17, 定义 3.3.2] 下方的段落），$M(X,V,k)$（分别为 $M(\delta,V,K)^{\mathrm{cl}}$）是一个带有线性 $\mathbb{T}^S[1/p]\otimes_C\mathcal{H}_p$ 作用的 R_X-模（分别为 k_δ-向量空间），该作用由（$\mathcal{G}(\mathbb{A}_{F^+}^{p\infty})\times\mathbb{I}_p$）作用诱导而来。

4.2. 将 Hecke 作用扩展到 Bernstein 中心 $\mathfrak{Z}$。在 [Loe17],Loeffler 已经使用 [Buz10] 的特征簇构造机制构造了特征簇。我们需要细化他的构造。粗略地说，这是因为这样的特征簇仅参数化了在 F^+ 整除 p 的素位处的阿特金–莱纳代数$\mathcal{H}_p$ 的特征特征标，但出于我们的目的，我们希望参数化 Bernstein 中心 $\mathfrak{Z}$ 的特征特征标。注意，根据引理 4.1，阿特金–莱纳代数可以被识别为 Bernstein 中心 $\mathfrak{Z}$ 的一个子 L-代数。因此，我们解决这一问题的策略是，将超收敛形式的特征子空间上的 $\mathcal{H}_p$ 作用统一扩展为 $\mathfrak{Z}$ 作用，这正是本小节的目标。

为此，我们需要给出超收敛自守形式空间的另一种描述。

记 $\hat{S}(U^p,C)$ 为 p-进自守形式空间：其定义在 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty})$ 上，温和层为 U^p，系数取自 C；也就是说，它是由连续函数 f: $\mathcal{G}(F^+)\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty})/U^p \to C$ 构成的 C-向量空间，并赋予 G_p 通过函数的右平移所诱导的线性连续作用。我们还记 $\hat{S}(U^p,C)^{k\text{-an}} \subset \hat{S}(U^p,C)$ 为 G_p 作用下 $\mathbb{Q}_p$-解析向量构成的 C-子向量空间，k ([ST03，第 7] 节)。我们将 $R_X \otimes_C V$ 视为一个 $\overline{P}_{p,0} = \overline{N}_{p,0}M_p$,0-表示，在 $\overline{N}_{p,0}$ 上作用平凡。

那么，$\hat{S}(U^p,L)\hat{\otimes}_C R_X \otimes_C V$可以视为连续函数构成的 C-向量空间

$$f : \mathcal{G}(F^+)\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty})/U^p \to R_X \otimes_C V,$$

赋予线性连续的 $\overline{N}_{p,0}$-作用 $u(f)(g) := u(f(g\cdot u))$。并且

$$\hat{S}(U^p,C)^{k\text{-an}}\hat{\otimes}_C R_X \otimes_C V \subset \hat{S}(U^p,L)\hat{\otimes}_C R_X \otimes_C V$$

是 $\mathbb{Q}_p$-解析向量构成的 L-子向量空间，其中 $\overline{N}_{p,0}$ 作用于该空间。

此外，我们定义 $\mathcal{H}_p = L[\Sigma^+]$ 在 $\left(\hat{S}(U^p,L)^{k-\text{an}}\right)^{\overline{N}_{p,0}}$ 上的作用如下：

$$(z\circ f)(g) := \frac{1}{[\overline{N}_{p,0} : z\overline{N}_{p,0}z^{-1}]} \sum_{n\in\overline{N}_{p,0}/z\overline{N}_{p,0}z^{-1}} f(gnz).$$

此作用定义良好，且不依赖于 $[\overline{N}_{p,0}$ 的陪集中代表元 n 的选取：$z\overline{N}_{p,0}z^{-1}]$，因为对于任意满足 $n_2^{-1}n_1 \in z\overline{N}_{p,0}z^{-1}$ 的 $n_1,n_2 \in \overline{N}_{p,0}$，都有

$$f(gn_1z) = f(gn_2z\cdot z^{-1}n_2^{-1}n_1z) = f(gn_2z).$$

我们也通过分解将 R_X 视为 M_p 的一个表示（这取决于我们为 $v\in S_p$ 选择的 ϖ_v）

$$\hat{H}_p \cong \hat{H}_{p,0}\times\mathcal{T}_{F_{\tilde{v}}}^l,$$

特别地，Σ 在 R_X上的作用是平凡的，并设 Σ^+ 在 V上的作用是平凡的。然后，我们将 $C[\Sigma^+]$ 在张量积上的作用延拓

$$\left(\hat{S}(U^p,C)^{k\text{-an}}\right)^{\overline{N}_{p,0}}\hat{\otimes}_C(R_X\otimes_C V)$$

通过令 Σ^+ 在第二个因子上平凡作用。注意，$C[\Sigma^+]$ 在 $\left(\hat{S}(U^p,C)\right)^{\overline{N}_{p,0}}\hat{\otimes}_C($ $R_X\otimes_C V)$ 上的作用在 $M_{p,0}$-不变子空间上是稳定的。事实上，如果

f 是一个 $M_{p,0}$-不变函数，那么 $z\circ f$ 也一样。

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\overline{N}_{p,0}/z\overline{N}_{p,0}z^{-1}} mf(gmnz) &= \sum_{n\in\overline{N}_{p,0}/z\overline{N}_{p,0}z^{-1}} mf(g\cdot mnm^{-1}\cdot mz)\\ &= \sum_{n\in\overline{N}_{p,0}/z\overline{N}_{p,0}z^{-1}} mf(g\cdot mnm^{-1}\cdot zm)\\ &= \sum_{n\in\overline{N}_{p,0}/z\overline{N}_{p,0}z^{-1}} f(g\cdot mnm^{-1}\cdot z)\\ &= \sum_{n\in\overline{N}_{p,0}/z\overline{N}_{p,0}z^{-1}} f(gnz)\end{aligned}$$

对于 $m\in M_{p,0}$ 和 $n\in\overline{N}_{p,0}$ 和 $z\in\Sigma^+$（注意 $mz\overline{N}_{p,0}z^{-1}m^{-1}=z\overline{N}_{p,0}z^{-1}$，于是映射 $n\mapsto mnm^{-1}$ 在 $\overline{N}_{p,0}/z\overline{N}_{p,0}z^{-1}$ 上诱导出一个双射）。因此我们最终定义 $\mathcal{H}_p=C[\Sigma^+]$ 在

$$(\hat{S}(U^p,C)^{k-\mathrm{an}}\hat{\otimes}_C R_X\otimes_C V)^{\overline{P}_{p,0}}\cong((\hat{S}(U^p,C)^{k-\mathrm{an}})^{\overline{N}_{p,0}}\hat{\otimes}_C R_X\otimes_C V)^{M_{p,0}}$$

下面的命题是 [Loe17，命题 3.10.1] 的“族”版本。由于论证与 Loeffler 在同上所做的几乎相同，这里只给出证明的概要。

定理 4.6. 存在一个同构

$$M(X,V,k)\xrightarrow{\sim}(\hat{S}(U^p,C)^{k\text{-an}}\hat{\otimes}_C R_X\otimes_C V)^{\overline{P}_{p,0}}$$

R_X 模之间的映射，并且与两侧的 $\mathbb{T}^S$ 和 $\mathcal{H}_p$ 的 Hecke 作用交换。

证明。注意到

$$\mathcal{C}(X,V,k)\cong\mathcal{C}^{k\text{-an}}(N_{p,0},R_X\otimes_C V),$$

带有一个求值映射 $\mu:\mathcal{C}(X,V,k)\to R_X\otimes_C V$，通过将函数在 $\mathrm{id}\in N_{p,0}$ 上求值来定义。给定 $f\in M(X,V,k)$，我们可以将 f 视为一个映射

$$\mathcal{G}(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)\to\mathcal{C}(X,V,k).$$

$\sim$与 μ 复合后，得到一个函数 $f:\mathcal{G}(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)\to R_X\otimes_C V$。可以验证，$_\sim f$ 是 $G_{p,k}$-解析的，左 $\mathcal{G}(F^+)$-不变且右 U^p-不变，并且 $\overline{P}_{p,0}$-不变。因此，我们可以将 $\widetilde{f}$ 定义为 f 在 $(\hat{S}(U^p,C)^{k-\mathrm{an}}\hat{\otimes}_C R_X\otimes_C V)^{\overline{P}_{p,0}}$ 中的像。

反过来，给定 $h\in(\hat{S}(U^p,C)^{\mathrm{an}}\hat{\otimes}_C R_X\otimes_C V)^{\overline{P}_{p,0}}$，我们将其视为一个映射 $G:\mathcal{G}(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)\to R_X\otimes_C V$。我们将 f 定义为函数 $G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)\times N_0\to R_X\otimes_C V$，其由 $f(g)(n)=h(gn^{-1})$ 给出。也可以验证，这给出了映射 $_\sim f\mapsto f$ 的逆。

此外，这个同构显然是 $\mathbb{T}^S$-等变的，并且根据 [Loe17，命题 3.10.2]，它也是 $\mathcal{H}_p$-等价的。□

注 4.7. 对于任意 C-点 $x:R\to C$ in $X\subseteq H_p$，我们可以在 x 处特化上述同构，右端变为

$$(\hat{S}(U^p,C)^{k\text{-an}}\hat{\otimes}_C R_X\otimes V)^{\overline{P}_{p,0}}\otimes_{R,x}C\cong(\hat{S}(U^p,C)^{k\text{-an}}\hat{\otimes}_C V(\delta_x))^{\overline{P}_{p,0}},$$

（取归纳极限 $\varinjlim_k$ 后）得到 [Loe17, 命题 3.10.1] 中的同构。

设 $\mathfrak{m}^S$ $\mathbb{T}^S$ 中有一个剩余域为 k_C 的极大理想（必要时扩大 C），使得 $\hat{S}(U^p,C)_{\mathfrak{m}^S}\neq 0$。令 $\bar{\rho}=\bar{\rho}_{\mathfrak{m}^S}\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)\to$一般线性群$_n(k_C)$ 表示与 $\mathfrak{m}^S$ 相关联的唯一绝对半单伽罗瓦表示（参见 [CHT08，命题 3.4.2]）。此外，我们假设 $\mathfrak{m}^S$ 是非艾森斯坦的，即 $\bar{\rho}$ 绝对不可约。由此，根据 [CHT08，命题 3.4.4]，空间 $\hat{S}(U^p,C)_{\mathfrak{m}^S}$ 成为 $R_{\bar{\rho},S}$ 上的模；后者是一个完备局部诺特 $\mathcal{O}_C$-代数，剩余域为 k_C，它对如下形变函子进行拟表示：ρ 是 $\bar{\rho}$ 的形变，在 S 之外非分歧，并且满足 $\rho'\circ c\cong\rho\otimes\chi^{n-1}$（$c\in\mathrm{Gal}(F/F^+)$ 是复共轭，其中 ρ' 是 ρ 的对偶，且 $\chi\colon\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)\to\mathbb{Z}_p^\times$ 是 p-进圆分特征）。

注 4.8. 注意，$\mathbb{T}^S$ 作用与 G_p 作用在 $\hat{S}(U^p,C)$ 上可交换，尤其是保持$G_{p,k}$-解析性。因此，定理 4.6 中的同构意味着

$$M(X,V,k)_{\mathfrak{m}^S}\cong(\hat{S}(U^p,C)^{k-\mathrm{an}}_{\mathfrak{m}^S}\hat{\otimes}_C R_X\otimes_C V)^{\overline{P}_{p,0}},$$

这使得 $M(X,V,k)_{\mathfrak{m}^S}$ 成为一个 $R_{\bar{\rho},S}$-模。

我们用 $J_{\overline{P}_p}(-)$ 表示 Emerton 的 Jacquet 函子，其定义见 [Eme06, 定义 3.4.5]。

命题 4.9. 对于一个元素 $\varsigma\in\Sigma^{++}$ 和 $\lambda\in C^\times$。自然商映射

$$(\hat{S}(U^p,C)^{k-\mathrm{an}})^{\overline{N}_{p,0}}\to J_{\overline{P}_p}(\hat{S}(U^p,C)^{k-\mathrm{an}})$$

在 $M(X,V,k)$ 与 $[J_{\overline{P}_p}(\hat{S}(U^p,C)^{k-\mathrm{an}})\hat{\otimes}_C R_X\otimes_C V]^{M_{p,0}}$ 之间诱导出 λ-特征子空间（分别为广义 λ-特征子空间）的同构，对 ς 成立。

证明。由于 $\overline{N}_{p,0}$ 在 R_X 和 V 上作用平凡，因此有

$$[(\hat{S}(U^p,C)^{k-\mathrm{an}})\hat{\otimes}_C R_X\otimes_C V]^{\overline{P}_{p,0}}\cong[(\hat{S}(U^p,C)^{k-\mathrm{an}})^{\overline{N}_{p,0}}\hat{\otimes}_C R_X\otimes_C V]^{M_{p,0}}.$$

注意到 $C[\Sigma]\cong C[\Sigma^+]_{(\varsigma)}$（通过 ς 进行的局部化），因此 $C[\Sigma^+]$-作用在

$$M(X,V,k)^{\varsigma=\lambda}$$

唯一地扩张为一个 $C[\Sigma]$-作用。我们将 $(-)_{\mathrm{fs}}$ 记为 Emerton 的有限斜率部分函子（定义见 [Eme06, Def 3.2.1]）。根据有限斜率部分的泛性质（参见同上文献的命题 3.2.4），有

$$M(X,V,k)^{\varsigma=\lambda}\cong M(X,V,k)^{\varsigma=\lambda}_{\mathrm{fs}}.$$

然后可以运用同上中的命题 3.2.9 得出结论（注意，$J_{\overline{P}_p}(-)$ 定义为 $(-)^{\overline{N}_{p,0}}_{\mathrm{fs}}$）。□

命题 4.10. 设 $X\subset H_{p,0}$ 是一个仿射子域。我们可以将 $\mathcal{H}_p$-作用延拓到

$$[J_{\overline{P}_p}(\hat{S}(U^p,C)^{k-\mathrm{an}})\hat{\otimes}_C R_X\otimes_C V]^{M_{p,0}} \tag{5}$$

通过嵌入得到伯恩斯坦中心 $\mathfrak{Z}$ 的作用。

$$i_\Sigma:\mathcal{H}_p\hookrightarrow\mathfrak{Z}$$
$$z\in\Sigma^+\mapsto r_z,$$

在引理 4.1 中定义。

证明。在开始证明之前，注意到我们可以自然地将 W 视为 M_p的代数表示，其中中心 $Z(M_p)$通过代数特征 δ_W作用。我们还将 R_X 上的$M_{p,0}$作用经由以下分解扩展为 M_p 的作用

$$\hat{H}_v \cong \hat{H}_{v,0} \times \mathbb{G}_m^l$$

与之前相同（取决于 π_v 的选择）。特别地， Σ^+ 在 R_X 上平凡作用。

暂时简记 J 为 $J_{\overline{P}_p}(\hat{S}(U^p,C)^{G_k-\mathrm{an}})$。有

$$\begin{aligned}[J\hat{\otimes}_C R_X \otimes_C V]^{M_{p,0}} &\cong (\sigma_{p,0}^\vee \otimes_C J \otimes R_X \otimes_C W)^{M_{p,0}} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{M_{p,0}}(\sigma_{p,0}, J \otimes R_X \otimes_C W) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{M_p}(c\text{–}\mathrm{Ind}_{M_{p,0}}^{M_p}\sigma_{p,0}, J \otimes R_X \otimes_C W(\delta_W^{-1})). \qquad (6)\end{aligned}$$

对于任意 $z \in \Sigma^+$ 和 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{M_p}(c\text{–}\mathrm{Ind}_{M_{p,0}}^{M_p}\sigma_{p,0}, J \otimes R_X \otimes_C W(\delta_W^{-1}))$，根据 $\mathcal{H}_p$-作用的定义，有

$$z(\alpha) : f \mapsto z(\alpha(f)),$$

其中 z 在 R_X 和 $W(\delta_W^{-1})$ 上平凡作用。注意，空间 (6) 还具有如下自然的左 $\mathfrak{Z}$-模结构:

$$F(\alpha) : f \mapsto \alpha \circ F(f)$$

于是有

$$\begin{aligned}(i_\Sigma(z)(\alpha))(f) &= (\alpha \circ r_z)(f) \\ &= z \circ \alpha(f) \\ &= (z(\alpha))(f),\end{aligned}$$

对任意 $z \in \Sigma$，以及 space (6) 中的任意 α 和 $c\text{-}\mathrm{ind}_{M_p^-,0}^{M_p}\sigma_{p,0}$ 中的任意 f，都有此结论。由此可知，若通过 i_Σ 将 $\mathcal{H}_p$ 视为 $\mathfrak{Z}$ 的子环，则它们在 space (6) 上的作用相同。因此，我们可以通过嵌入i_Σ将 space (6) 上的 $\mathcal{H}_p$-作用扩张为 $\mathfrak{Z}$ 的作用。□

注 4.11. 从现在起，我们保留 space (5) 上 $\mathfrak{Z}$-作用的这一扩张，并牢记该扩张取决于我们对 ϖ_v的选择。

4.3. 特征簇的构造。现在我们可以给出特征簇的构造。尽管我们不能直接应用[Buz10, Construction 5.7], 中的特征簇构造机制，但其步骤非常相似。

对于仿射刚性域 $X \subset \hat{H}_{p,0}$，简记 M_X 为 $M(X,V,k)_{\mathfrak{m}^s}$。注意，作为闭的 R_X-子模， M_X是 $M(X,V,k)$ 的直和项。因此， M_X也是具有性质 (Pr) 的 Banach R_X-模。我们还固定一个元素 $\varsigma \in \Sigma^{++}$，则

$$\mathbb{T}_X := R_X \otimes_C (\mathcal{H}_p \otimes_C R_{\bar{\rho},S}[\frac{1}{p}])$$

是一个交换含幺的 R_X代数，并配备了一个 R_X代数同态$\mathbb{T}_X \to \mathrm{End}_{R_X}(M_X)$，使得由 $\varsigma \in \mathbb{T}$ 诱导的 M_X的端同态是紧的（回忆一下 $\mathcal{H}_p \cong C[\Sigma_p^+]$，而 ς 作用的紧性可由 [Loe17，定理 3.7.2(4)]推出）。令 Z_ς 为 $X \times \mathbb{A}^1$的闭子空间, $_C^{\mathrm{rig}}$ 它由 ς 的特征幂级数 $F \in R_X\{\{T\}\}$ 的零点集定义，并带有 $Z_\varsigma(X,V)$ 的仿射刚性可容覆盖 $\mathcal{C}$，该覆盖按 [Buz10，第 4]节中的方式构造。

设 Y 是 $\mathcal{C}$ 中的一个元素，其像为 $X_Y \subseteq X$。根据 $\mathcal{C}$ 的构造，集合 X_Y 是 X 的一个仿射子域，其全局截面环 R_{X_Y} 是既约的。令 M_{X_Y} 表示 $M_X \hat{\otimes}_{R_X} R_{X_Y}$，对于 $t \in \mathbb{T}_X$，令 t_{X_Y}: $M_{X_Y} \to M_{X_Y}$ 表示

由 $t\colon M_X\to M_X$ 诱导的 R_{X_Y}-线性连续自同态。根据 [Buz10，引理 2.13]，ς_{X_Y} 仍是紧的，其在 M_{X_Y} 上的特征幂级数为 F_{X_Y}，其中 F_{X_Y} 正是 F 在 $R_{X_Y}\{\{T\}\}$ 中的像。

若 Y 连通，且作为 X_Y 上的模是有限的，次数为 d，则可将 Y 与 $F_{X_Y}(T)$ 的一个次数为 d 的首一因子 $Q_Y(T)$ 关联起来，使得 R_Y 与 $R_{X_Y}[T]/(Q_Y(T))$ 典范同构。因此，我们可以应用 [Buz10, 3.3]，将 M_{X_Y} 分解为 ς-不变闭子模 $N_Y\oplus N_Y'$ 的直和，使得 $Q^*(\varsigma)$ 在N_Y上为零，并在 N_Y' 上可逆（其中 $Q^*(T):=T^dQ(T^{-1})$），且 N_Y 是一个秩为 d 的投射R_{X_Y}-模。

因此，N_Y 是映射 $Q^*(\varsigma)\colon M_{X_Y}\to M_{X_Y}$ 的核（即 $N_Y=M_{X_Y}[\{Q^*(\varsigma)\}]$）。由命题 4.9，$N_Y$ 同构于

$$[J_{\overline{P}_p}(\hat{S}(U^p,C)^{k-\mathrm{an}}_{\mathfrak{m}^S})\hat{\otimes}_C R_{X_Y}\otimes_C V]^{M_{p,0}}[\{Q^*(\varsigma)\}].$$

根据命题 4.10，我们可以将 $\mathcal{H}_p$ 对 N_Y 的作用扩展为 $\mathfrak{Z}$ 作用。接着，我们将 $\mathbb{T}_Y$ 定义为由 $\mathbb{T}\otimes_{\mathcal{H}_p}\mathfrak{Z}$ 在 $\mathrm{End}_{R_X}(N_Y)$ 中的像生成的 R_{X_Y} 代数，并记 $D_Y:=(\mathrm{Spec}(\mathbb{T}_Y))^{\mathrm{rig}}$ 为相应的仿射解析簇。注意，由于 $Q^*(\varsigma)$ 在 N 上为零，环 $\mathbb{T}_Y$ 是一个有限 R_Y 代数（通过将 T 映至 ς^{-1}），因此存在一个自然的有限映射 $D_Y\to Y$。

对于一般的 Y，Y 在 $\mathrm{Max}(R)$ 中的像 X 不一定是连通的。假设X 可以写成有限个互不相交的连通分支的并 $X:=\coprod X_i$，并记 X_i 在 Y 中的原像为 Y_i。我们将D_{Y_i}的不交并定义为 D_Y，并配以有限映射 $D_Y\to Y$。根据以下引理，当 Y遍历 $\mathcal{C}$ 的所有元素时，我们可以将 D_Y 粘合在一起，由此得到的刚性空间 $D_\varsigma(X,V)$ 是 $Z_\varsigma(X,V)$ 的有限覆盖，称为 $M(X,V,k)$ 的特征簇。

引理 4.12. 若 $Y\in\mathcal{C}$ 的像为 $X_Y\subseteq X$，且 X' 是 X_Y 的仿射子域，我们将 X' 在映射 $Y\to X_Y$ 下的原像记为 Y'。那么 Y' 属于$\mathcal{C}$，并且是 Y 的仿射子域。此外，$D_{Y'}$ 与 Y' 在映射 $D_Y\to Y$ 下的原像典范同构。

证明. 第一部分直接出自 [Buz10, 引理 5.1]。对于第二部分，注意到 $N_{Y'}$ 是核 $\mathcal{Q}^*(\varsigma)\colon M_X\to M_X$从 R_X 到 $R_{X'}$ 的基变换，而 $R_{X'}$ 在 R_X 上是平坦的。因此，$N_{Y'}$ 与 $N_Y\otimes_{R_X}R_{X'}$ 典范同构，并且 $\mathbb{T}_{Y'}$ 与 $\mathbb{T}_Y\otimes_{R_X}R_{X'}$ 典范同构（注意，在命题 4.10 的证明中构造的对 $\mathfrak{Z}$ 作用的扩张显然与基变换相容），这意味着

$$D_{Y'}\cong D_Y\times_{X_Y}X'\cong D_Y\times_Y Y'.$$

□

引理 4.13. 如果 Y_1、$Y_2\in\mathcal{C}$，那么 $Y:=Y_1\cap Y_2\in\mathcal{C}$。此外，对于 $i=1$、2，Y 是 Y_i 的一个仿射子域，并且 D_Y 在映射 $D_{Y_i}\to Y_i$ 下与 Y 的原像典范同构。

证明。这个引理与 [Buz10，引理 5.2]几乎相同，唯一的区别在于 D_Y的构造经过了修订；另外需要注意，我们将作用扩张到 $\mathfrak{Z}$ 的构造与基变换相容。因此，关于 Y的断言在我们的情形下仍然成立。具体而言，若记 $X':=X_1\cap X_2$，其中 X_i 是 Y_i在 X中的像，并记 $Y_i':=Y_i\times_{X_i}X'$用于 $i=1$，2。那么我们有 $Y=Y_1'\cap Y_2'$，且 Y是 Y_i'的连通分支之并。因此，根据

D_Y 以及引理 4.12，有典范同构：

$$D_Y \cong D_{Y_i} \times_{Y_i} Y$$

□

构造 4.14. 根据 [BGR84, 命题 9.3.2/1], ，我们可以将系统$\rightsquigarrow\{D_Y|Y \in \mathcal{C}\}$粘合成一个刚性空间 $D_\varsigma(X,V,k)$，并将 $D_\varsigma(X,V,k)$ 记为$\rightsquigarrow D_\varsigma(X,V,k)$ 的约化。

注意，根据 [Loe17, Cor 3.7.3], ，对于任意 $k_1 \geq k_2 \geq \max\{k(X)\ k(V)\}$，自然嵌入 $M(X,V,k_2)^{Q^*_{(\varsigma)}}{}_{\mathfrak{m}^S} \hookrightarrow M(X,V,k_1)^{Q^*_{(\varsigma)}}{}_{\mathfrak{m}^S}$是一个同构。因此我们有一个典范同构

$$D_\varsigma(X,V,k_2) \cong D_\varsigma(X,V,k_1),$$

并简记为 $D_\varsigma(X,V)$。

$\hat{}$ 当 X 遍历 $H_{p,0}$ 的仿射子域时，我们可以进一步将系统 $\{D_\varsigma(V,X)|\ X \subseteq H_{p,0}\}$ 粘合成一个刚性空间 $D_\varsigma(V)$。我们称 $D_\varsigma(V)$ 为温和层 U^p、权 V 的特征簇。

注 4.15.

(1) 从特征簇的构造可以看出，$D_\varsigma(V,X)$ 是在 $X \times(\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z}))^{\mathrm{rig}} \times \mathfrak{X}$ 中扎里斯基闭 $_{\overline{\rho},S}$。因此 $D_\varsigma(V)$ 在其中是扎里斯基闭的 $\hat{H}_{\sigma,0} \times(\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z}))^{\mathrm{rig}} \times \mathfrak{X}_{\overline{\rho},S} \cong \hat{H}_\sigma \times \mathfrak{X}_{\overline{\rho},S}$。

(2) 当 X 遍历 $\hat{}H_{p,0}$ 的仿射子域时，我们还可以将谱簇系统 $\hat{}\ \{Z_\varsigma(V,X)|\ X \subset H_{p,0}\}$ 进一步粘合为一个刚性空间 $Z_\varsigma(V)$，它在 $\hat{}H_{p,0} \times \mathbb{G}_m$ 中是扎里斯基闭的。

那么，根据 Buz10，引理 4.1], 自然投影 $Z_\varsigma(V) \to \hat{}H_{p,0}$ 是平坦的（且准有限的）。尽管有限态射

$$D_\varsigma(V) \to Z_\varsigma(V)$$

一般而言并非平坦，但 $D_\varsigma(V)$ 的每个不可约分支都满射到 $Z_\varsigma(V)$ 的某个不可约分支（证明见 [Che04, Prop 6.4.2]$\hat{}$）。因此，特别地，$D_\varsigma(V)$ 的每个不可约分支在 $H_{p,0}$ 中的像都是 $H_{p,0}$的某个连通分支中的扎里斯基开稠密子集。

(3) 目前，为了构造到抛物线型簇的映射，我们将 $D_\varsigma(V)$ 视为 $\hat{}H_\sigma \times \mathfrak{X}_{\overline{\rho},S} \cong \hat{}H_{p,0} \times (\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z}))^{\mathrm{rig}} \times \mathfrak{X}_{\overline{\rho},S}$ 的一个闭子空间，这通过将上述闭嵌入与扭曲复合而得到。

$$\begin{aligned}\hat{H}_{p,0} \times (\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z}))^{\mathrm{rig}} \times \mathfrak{X}_{\overline{\rho},S} &\xrightarrow{\sim} \hat{H}_{p,0} \times (\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z}))^{\mathrm{rig}} \times \mathfrak{X}_{\overline{\rho},S} \\ (\delta_0,\delta_{\mathfrak{Z}},\rho) &\mapsto (\delta_0^{-1},\delta_{\mathfrak{Z}},\rho)\end{aligned}$$

注 4.16. 设 $x=(\delta,\rho) \in \hat{}H_\sigma \times \mathfrak{X}_{\overline{\rho},S}$ 是 $D_\varsigma(V)$ 中的一个点。根据注释 4.2(3)，可以将 δ 分解为 $(\delta_0,\delta_{\mathfrak{Z}})$，其中 $\delta_0 := \delta|_{M_{p,0}}$ 是 δ 在 $M_{p,0}$ 上的限制，而 $\delta_{\mathfrak{Z}}: \mathfrak{Z} \to k_\delta$ 是 $(\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z}))^{\mathrm{rig}}$ 中的一个闭点。通过嵌入 i_Σ，还可以将 $\delta_{\mathfrak{Z}}$ 进一步限制在 Σ 上，并写作 $\delta_\Sigma := \delta_{\mathfrak{Z}}|_\Sigma: \Sigma \to k_\delta$。

4.4. 经典点。本节旨在描述特征簇中的经典点。

设 X 是包含 x 的 $\hat{}H_\sigma$ 的仿射子域，并令 $k \geq \max\{k(X)\ k(V)\}$。$\hat{}$ 对于闭点 $x=(\delta,\rho) \in H_\sigma \times \mathfrak{X}_{\overline{\rho},S}$，我们按如下方式定义记号 $M(X,V,k)_{\mathfrak{m}^S}[x]$（可能需要扩大 C）：首先，

$$M(\delta_0^{-1},V,k)_{\mathfrak{m}^S}[\rho] \subseteq M(\delta_0^{-1},V,k)_{\mathfrak{m}^S}$$

是由 ρ 的特征向量组成的闭 Banach子空间：$R_{\rho,\ S} \to k_{\delta_0}$。然后我们考虑

$$M(\delta_0^{-1},V,k)_{\mathfrak{m}^S}[\rho,\delta_\Sigma] := \left(M(\delta_0^{-1},V,k)_{\mathfrak{m}^S}[\rho]\right)[\delta_\Sigma],$$

于是，Σ的特征 δ_Σ 的特征子空间。根据命题 4.10，我们已将 $\mathfrak{Z}$的作用扩张到这个空间上。因此我们记为

$$M(X,V,k)[x] := \left(M(\delta_0^{-1},V,k)_{\mathfrak{m}^S}[\rho,\delta_\Sigma]\right)[\delta_\mathfrak{Z}]$$

$M(\delta_0^{-1},V,k)_{\mathfrak{m}^S}[\rho,\delta_\Sigma]$上 $\delta_\mathfrak{Z}$的特征子空间。

然后，几乎照搬 [Buz10, Lem 5.9], 中的论证，可以证明$x=(\delta,\rho) \in \hat{}$ $H_\sigma \times \mathfrak{X}_{\bar{p},\ S}$是 $D_\varsigma(V)$中的一个点，当且仅当 $M(X,V,k)[x] \neq \emptyset$。

下面的定义与 Loeffler 在 [Loe17, Sect 3.13] 中对经典点给出的定义类似。

定义4.17。若闭点 $x=(\delta,\rho) \in D_\varsigma(V)$ 满足

(1) δ_0 is locally algebraic.

(2) $M(X,V,k)^x_{\mathfrak{m}^S} \cap \left[\varinjlim_{k'\geq k} M(\delta_0^{-1},V,k')^{\mathrm{cl}}\right] \neq \emptyset$ for some (and hence any) affinoid subdomain X in $\hat{H}_\sigma$, and $k \geq \max\{k(X),k(V)\}$.

我们将对经典点给出另一种描述，使其与经典自守形式的联系更加明确。

引理 4.18. 设 E 是 C 上的一个光滑表示。那么对于任意 $z \in \Sigma_v^+$，映射

$$x \mapsto \frac{1}{[\overline{N}_{v,0} : z\overline{N}_{v,0}z^{-1}]} \sum_{g \in \overline{N}_{v,0}/z\overline{N}_{v,0}z^{-1}} gzx$$

（分别地，$[x] \mapsto [zx]$）使 $\overline{N}_{v,0}$-不变空间 $E^{\overline{N}_{v,0}}$（分别地，使 $\overline{N}_{v,0}$-余不变空间 $E_{\overline{N}_{v,0}}$）成为一个 $C[\Sigma_v^+]$-模，且映射

$$\begin{aligned} E^{\overline{N}_{v,0}} &\to E_{\overline{N}_{v,0}} \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

是 $C[\Sigma_v^+]$-模之间的一个同构。

此外，自然投影 $E_{\overline{N}_{v,0}} \to E_{\overline{N}_v}$ 诱导一个同构

$$E_{\overline{N}_{v,0}} \otimes_{C[\Sigma_v^+]} C[\Sigma_v] \cong E_{\overline{N}_v} \tag{7}$$

$C[\Sigma_v]$-模之间的同构。

证明。第一个断言可以直接验证。我们只证明此外的部分。

设 z 是 Σ_v^{++} 中的一个元素，注意，

$$\bigcup z^{-m}\overline{N}_{v,0}z^m = \overline{N}_v.$$

那么，自然投影 $E_{\overline{N}_{v,0}} \to E_{\overline{N}_v^{m\in\mathbb{N}}}$的核为 $\bigcup_m (E_{\overline{N}_{v,0}}[z^m])$。由于$C[\Sigma_v] \cong C[\Sigma_v^+]_z$，且 z 在 $E_{\overline{N}_v}$ 中可逆，因此

$$E_{\overline{N}_{v,0}} \otimes_{C[\Sigma_v^+]} C[\Sigma_v] \cong E_{\overline{N}_v}.$$

□

注 4.19。同构 (7) 的左边是将 Emerton 的 Jacquet 函子作用于光滑（因而局部解析的）表示 E 所得的结果。右边则是光滑表示论中的经典 Jacquet 函子。因此，对于光滑表示，我们可以毫无歧义地使用记号 $J_{\overline{P}_v}(-)$（分别为 $J_{\overline{P}_p}(-)$），因为这两个函子相同。

我们固定一个嵌入 $\iota\colon\ \overline{\mathbb{Q}}_p \to \mathbb{C}$。然后这个复合

$$\iota_{v,\eta} : F^+ \overset{v}{\hookrightarrow} F_v^+ \cong F_{\widetilde{v}} \overset{\eta}{\hookrightarrow} C \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{C}$$

给出集合之间的一个双射：

$$\{(v,\eta) \mid v \in S_p \text{ and } \eta \in \mathrm{Hom}(F_{\widetilde{v}}, C)\} \to S_\infty := \{\textit{infinite places of } F^+\}$$
$$(v,\eta) \mapsto \iota_{v,\eta}$$

定义 4.20. 设 δ_{alg} 是 M_p 的代数特征，其形式为

$$\delta_{\mathrm{alg}} : (g_{v,1},\dots,g_{v,l})_{v\in S_p} \mapsto \prod_{v\in S_p}\left(\prod_{\eta\in\mathrm{Hom}(F_{\widetilde{v}},C)} \eta\left(\det(g_{v,i})^{b_{\eta,i}^{(v)}}\right)\right)$$

我们称 δ^{-1} 代数 关于 W 是反支配的，如果对于任意 $v\in S_p$ 和 $\eta\in\mathrm{Hom}(F_{\widetilde{v}},C)$，都有

$$a_{\eta,1}^{(v)} - b_{\eta,1}^{(v)} \le \cdots \le a_{\eta,j}^{(v)} - b_{\eta,i_j}^{(v)} \le \cdots \le a_{\eta,n}^{(v)} - b_{\eta,l}^{(v)},$$

其中 i_j 是满足 $n_1+\cdots+n_{i_j} \ge i$ 的最小整数。

若一个点 $x=(\delta,\rho)\in D_\varsigma(V)$ 满足 δ 是局部代数的，则称其为支配点，若 δ^{-1} 的代数部分 δ^{-1} 代数 相对于 W 是反支配的。

注 4.21. 在这种情况下，$\mathrm{Ind}_{\overline{P}_p}^{G_p}(W(\delta^{-1}\text{代数}))$ 是 G_p 的一个不可约代数表示，其最低权为

$$c_\eta^{(v)} := \left(a_{\eta,1}^{(v)} - b_{\eta,1}^{(v)} \le \cdots \le a_{\eta,j}^{(v)} - b_{\eta,i_j}^{(v)} \le \cdots \le a_{\eta,n}^{(v)} - b_{\eta,l}^{(v)}\right).$$

我们将 $\iota(\mathrm{Ind}_{\overline{P}_p}^{G_p}(W(\delta^{-1}{}_{\mathrm{alg}})))$ 记作 $\mathbb{C}$ 上最低 $\iota_{v,\eta}$-权为 $c_\eta^{(v)}$ 的不可约 $\mathcal{G}(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$-表示。

命题 4.22. 支配点 $x=(\delta,\rho)\in \hat{}H_\sigma\times\mathfrak{X}_{\overline{\rho},S}$ 在 $D_\varsigma(V)$ 中是经典的，当且仅当存在一个 $\pi=\pi_\infty\otimes\pi_f^p\otimes\pi_p$ 在 $G(\mathbb{A}_{F^+})$ 上、定义于 $\mathbb{C}$ 之上的自守表示，使得以下条件成立：

(1) $\mathcal{G}(F^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$-表示 π_∞ 同构于 $\iota(\mathrm{Ind}_{\overline{P}_p}^{G_p}(W(\delta^{-1}\text{代数})))^\vee$（在这种情况下，我们称 π 的权为 $W(\delta^{-1}$ 代数$)$）；(2) $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-表示 ρ 是与 π 相关联的伽罗瓦表示；(3) 不变子空间 $(\pi_f^p)^{U^p}$ 非零；(4) M_p-表示 $\sigma(\delta_{\mathrm{sm}}\Delta_W)^{\otimes_{k(\delta),\ \iota}}\mathbb{C}$ 是 $J_{\overline{P}_p}(\pi_p)$ 的子表示（特征 Δ_W 的定义参见注释 4.4(2)）。

证明。为简便起见，在整个证明过程中，对于 F^+ 的任意有限处 v，我们总是通过 ι^{-1} 将 π 的 v-连通分支π_v 视为 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上的表示。

考虑如下分解

$$\hat{H}_\sigma \cong \hat{H}_{p,0}\times \mathrm{Spec}(\mathfrak{Z})^{\mathrm{rig}}$$

在注释 4.2(3) 中。我们写作 $\delta=(\delta_0,\delta_{\mathfrak{Z}})$，其中 δ_0 是 $\hat{}H_{p,\ 0}$ 中的一个点，而 $\delta_{\mathfrak{Z}}$ 是 $\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z})^{\mathrm{rig}}$ 中的一个点。考虑分解 $\delta=\delta_{\mathrm{sm}}\cdot\delta_{\mathrm{alg}}$，其中某个光滑特征

δ_{sm} 和某个代数特征 δ_{alg}。类似地，我们写作 $\delta_{\mathrm{sm}}=(\delta_{\mathrm{sm},0},\delta_{\mathrm{alg},3})$ 和$\delta_{\mathrm{alg}}=(\delta_{\mathrm{alg},0},\delta_{\mathrm{alg},3})$。有 $\delta_3=\delta_{\mathrm{sm},3}\delta_{\mathrm{alg},3}$。

设 M_p 的非分歧特征 $\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}$ 由 δ_{alg} 给出，并由注释 4.4(2) 定义。注意，借助商映射， $\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}$ 可视为 $\mathrm{Spec}(3)^{\mathrm{rig}}$ 中的一个点。

$$\hat{H}_p \twoheadrightarrow \hat{H}_\sigma.$$

然后很容易看出 $\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}=\delta_{\mathrm{alg},\ 3}$。

ˆ设 X 是 $H_{p,0}$ 中的一个仿射子域，使得 $\delta_0\in X$。只需证明 (δ,ρ) 是 $D_\varsigma(X,V)$ 中的一个经典点。令 $k\geq\max\{k(X)\ k(V)\}$。注意，根据 Loe17 的命题 2.3.2 和推论 3.3.5], , 有

$$M(X,V,k)[\delta_0]\cong M(X,V,k)\otimes_{R_X,\delta_0}k(\delta_0)\cong M(1,V(\delta_0^{-1}),k).$$

根据 [Loe17, Cor 3.7.3],, 有 $\varinjlim M(X,V,k')_{\mathfrak{m}^S}[x]=M(X,V,k)_{\mathfrak{m}^S}[x]$。因此$k'\geq k$ 这个空间

$$M(1,V(\delta_0^{-1}),k)_{\mathfrak{m}^S}[x]\cap\varinjlim_{k}M(1,V(\delta_0^{-1}),k)^{\mathrm{cl}}$$

非空当且仅当空间

$$\varinjlim_{k'\geq k}M(1,V(\delta_0^{-1}),k)^{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{m}^S}[x]$$

非空。

令 Δ_W （分别令 Δ_{alg}）为与 W （分别与 δ_{alg}）相关联的 M_p 的非分歧特征。由 [Loe17, Theo 3.9.2] 可知，$\varinjlim_{k'\geq k}M(1,V(\delta_0)\ k)^{\mathrm{cl}}$ 作为一个 $\left(\mathcal{H}_p\otimes_L\mathbb{T}^S[\frac{1}{p}]\right)$-模同构于

$$\bigoplus_{\pi}m(\pi)\left[(\pi_f^p)^{U^p}\otimes\left(\pi_p\otimes\left(\mathrm{Ind}_{\overline{P}_{p,0}}^{G_{p,0}}(\sigma_0^\vee\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1})\right)_{\mathrm{sm}}\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}\right)^{G_{p,0}}\right]\tag{8}$$

其中直和取遍所有权为 $W(\delta_{\mathrm{alg}})$ 的自守表示 π，满足 $(\pi_f^p)^{U^p}\neq 0$。注意，$G_{p,\ 0}$ 在 [Loe17，定义 2.2.1], 的意义下是可分解的，$G_{p,\ 0}\cong\overline{N}_{p,\ 0}\times M_{p,\ 0}\times N_{p,\ 0}$。于是有:

$$\begin{aligned}
&\left(\pi_p\otimes\left(\mathrm{Ind}_{\overline{P}_{p,0}}^{G_{p,0}}(\sigma_0^\vee\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1})\right)_{\mathrm{sm}}\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}\right)^{G_{p,0}}\\
\cong&\left(\left(\left(\pi_p\otimes\left(\mathrm{Ind}_{\overline{P}_{p,0}}^{G_{p,0}}(\sigma_0^\vee\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1})\right)_{\mathrm{sm}}\right)^{N_{p,0}}\right)^{M_{p,0}}\right)^{\overline{N}_{p,0}}\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}\\
\cong&\left(\left(\left(\mathcal{C}^{\mathrm{sm}}(N_{p,0},\pi_p\otimes\sigma_0^\vee\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1})\right)^{N_{p,0}}\right)^{M_{p,0}}\right)^{\overline{N}_{p,0}}\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}\\
\cong&\left(\left(\pi_p\otimes\sigma_0^\vee\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1}\right)^{M_{p,0}}\right)^{\overline{N}_{p,0}}\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}\\
\cong&\left[\mathrm{Hom}_{M_{p,0}}(\sigma_0,\pi_p\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1})\right]^{\overline{N}_{p,0}}\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}\\
\cong&\,\mathrm{Hom}_{M_{p,0}}(\sigma_0,\pi_p^{\overline{N}_{p,0}}\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1})\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}\\
\cong&\,\mathrm{Hom}_{M_{p,0}}(\sigma_0,(\pi_p)_{\overline{N}_{p,0}}\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1})\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}
\end{aligned}$$

（倒数第二个等号源于 $\overline{N}_{p,0}$ 对 σ_0 andξ_x 的作用是平凡的，最后一个等号则由引理 4.18得出）。

在 $\mathfrak{m}^S$ 处局部化后，空间 $M(1,V(\delta_0^{-1})\ k)^{\mathrm{cl}}$ 成为一个 $R_{\overline{p},S}$-模。接着取 $\mathfrak{p}_\rho$-挠子（$\mathfrak{p}_\rho$ 是 $R_{\overline{p},S}$ 中与 ρ 相关联的素理想）后，它成为一个闭子空间，该空间可表示为 (8) 中相同项的直和，其中 π 遍历所有权为 $W(\delta^{-1}{}_{\mathrm{alg}})$ 且满足 $(\pi_p^f)^{Up}\neq 0$ 的自守表示 π；而 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-表示 ρ 是与 π 相关联的伽罗瓦表示。由此可得，空间

$$[\varinjlim_{k'\geq k} M(1,V(\delta_0^{-1}),k)^{\mathrm{cl}}]_{\mathfrak{m}^S}[x]$$

非空，当且仅当存在一个满足条件（1）、（2）和（3）的自守表示 π，使得空间

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{Hom}_{M_{p,0}}(\sigma_0,(\pi_p)_{\overline{N}_{p,0}}\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1}\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}})\right)[\delta_{\mathfrak{Z}}]\\ (9)\qquad&\cong\left(\mathrm{Hom}_{M_{p,0}}(\sigma_0,J_{\overline{N}_p}(\pi_p)\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1}\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}})\right)[\delta_{\mathfrak{Z}}]\\ (10)\qquad&\cong\left(\mathrm{Hom}_{M_p}(c\text{-}\mathrm{Ind}_{M_{p,0}}^{M_p}\sigma_0,J_{\overline{N}_p}(\pi_p)\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1}\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}})\right)[\delta_{\mathfrak{Z}}]\end{aligned}$$

非空，这里 $\delta_{\mathrm{sm},\ 0}$ 被视为 H_p 的一个特征，使得

$$\delta_{\mathrm{sm},0}((\varpi_{v,1}^{k_{v,1}},\ldots,\varpi_{v,l}^{k_{v,l}})_{v\in S_p})=1.$$

事实上，同构 (9) 可由命题 4.9 中的相同论证得出，因为 ς 的特征值在特征 $\delta_{\mathfrak{Z}}$ 下可逆（并且注意，根据注 4.19，这里的雅克特函子 $J_{\overline{N}_p}(-)$ 是经典的）。还要注意，由命题 4.10 中的构造所诱导的 $\mathfrak{Z}$-作用在空间 (10) 上，恰好是第一因子 $c\text{-}\mathrm{Ind}_{M_p^{\ ,\ 0}}^{M_p}\sigma_0$ 上的自然作用。

注意，$(c\text{-}\mathrm{Ind}_{M_p^{\ ,0}}^{M_p}\sigma_0)\otimes_{\mathfrak{Z}}\delta_{\mathfrak{Z}}\cong\sigma(\delta_{\mathfrak{Z}})$。由此可知，上述空间非空，当且仅当存在一个 M_p-等变映射

$$\alpha:c\text{-}\mathrm{Ind}_{M_{p,0}}^{M_p}\sigma_0\to J_{\overline{N}_p}(\pi_p)\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1}\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}$$

使得

$$\alpha\circ F(f)=\delta_{\mathfrak{Z}}(F)\cdot\alpha(f)$$

对任意 $F\in\mathfrak{Z}$（注意，根据命题 4.10 中的构造，伯恩斯坦作用为 $\alpha\mapsto\alpha\circ F$）。这样的 α 存在，当且仅当它可经由投影分解

$$c\text{-}\mathrm{Ind}_{M_{p,0}}^{M_p}\sigma_0\twoheadrightarrow(c\text{-}\mathrm{Ind}_{M_{p,0}}^{M_p}\sigma_0)\otimes_{\mathfrak{Z},\delta_{\mathfrak{Z}}}k(\delta_{\mathfrak{Z}})\cong\sigma(\delta_{\mathfrak{Z}}),$$

也就是说，当且仅当存在一个 M_p-等变映射

$$\overline{\alpha}:\sigma(\delta_{\mathfrak{Z}})\to J_{\overline{N}_p}(\pi_p)\otimes\delta_{\mathrm{sm},0}^{-1}\otimes\Delta_W^{-1}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}$$

由于$\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}=\delta_{\mathrm{alg},\ \mathfrak{Z}}$ 作为 $\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z})^{\mathrm{rig}}$中的一个点，因此$\delta_{\mathfrak{Z}}\cdot\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}^{-1}=\delta_{\mathrm{sm},\ \mathfrak{Z}}$。因此，若我们用 $\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}^{-1}\delta_{\mathrm{sm},\ 0}\Delta_W$ 扭曲$\overline{\alpha}$，左侧为

$$\begin{aligned}\sigma(\delta_{\mathfrak{Z}}\Delta_{\delta_{\mathrm{alg}}}^{-1}\delta_{\mathrm{sm},0}\Delta_W)&\cong\sigma(\delta_{\mathrm{sm},\mathfrak{Z}}\delta_{\mathrm{sm},0}\Delta_W)\\&\cong\sigma(\delta_{\mathrm{sm}}\Delta_W)\end{aligned}$$

由此可知，这样的 α 存在，当且仅当存在一个 M_p-等变映射

$$\sigma(\delta_{\mathrm{sm}}\Delta_W)\to J_{\overline{P}_p}(\pi_p),$$

由于 σ 不可约，因此它是单射。这正是条件（4），证明至此完成。□

4.5. 经典点的稠密性及其应用。本节将证明经典点的扎里斯基稠密性（实际上，是支配、非常正则、经典、非临界点的稠密性。定义见下文）。随后，我们利用这一性质，通过朗兰兹对应的局部—整体相容性比较特征簇与抛物线型簇，并证明特征簇 $D_\varsigma(V)$（在同构意义下）不依赖于 $\varsigma\in\Sigma^{++}$的选择。

为此，我们需要在第 3 节澄清抛物线型簇参数空间的设定，使其与我们关于特征值簇的设定相兼容。

在本节中，我们始终用 $s_i:=n_1+\cdots+n_l$ 表示。并固定一个同构：$\iota:\overline{\mathbb{Q}}_p\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}$。我们将 val 记为任意 p-进局部域上的标准化赋值，使得 $\mathrm{val}(p)=1$。

对于每个 $v\in S_p$，我们固定一个 M_v 的超尖点表示 σ_v，它与上一节中的 $\mathrm{GL}_{n_1}(F_{\widetilde{v}})\times\cdots\times\mathrm{GL}_{n_l}(F_{\widetilde{v}})$ 同构。因此 σ_v 的形式为:

$$\sigma_{v,1}\otimes\cdots\otimes\sigma_{v,l},$$

其中每个 $\sigma_{v,i}$ 都是一般线性群$_{n_i}(F_{\widetilde{v}})$ 的超尖点表示。

我们将通过《HT》中的局部朗兰兹对应，记 $\varrho_{v,i}=\mathrm{rec}(\sigma_{v,i})$ 为与 $F_{\widetilde{v}}$ 相联系的 $\sigma_{v,i}$ 的 Weil-Deligne 表示。并记 $\tau_{v,i}$ 为 $\varrho_{v,i}$ 的类型。

注 4.23. 回想一下，根据命题 2.8，对于每个 $v\in S_p$ 和 $1\leq i\leq l$，都存在唯一的有限指数子群 $W_{\tau_{v,i}}$，它是 $W_{F_{\widetilde{v}}}$ 的子群，且具有相同的惯性群$I_{F_{\widetilde{v}}}$，以及某个 $W_{\tau_{v,i}}$ 的不可约光滑表示 $\widetilde{\tau}_{v,i}$，使得 $\widetilde{\tau}_{v,i}|_{I_{F_{\widetilde{v}}}}$ 是不可约的，并且

$$\varrho_{v,i}\cong\mathrm{Ind}_{W_{\tau_{v,i}}}^{W_{F_{\widetilde{v}}}}(\widetilde{\tau}_{v,i})$$

那么我们称 $\tau_{v,i}:=\widetilde{\tau}_{v,i}|_{I_{F_{\widetilde{v}}}}$ 为 $\varrho_{v,i}$ 的类型。

沿用第 2.1 节中的记号，我们将 $K_{\tau_{v,\,i}}$ 记为 $F_{\widetilde{v}}$ 的次数为 $e_{\tau_{v,\,i}}=[W_{F_{\widetilde{v}}}$ 的唯一非分歧扩张：$W_{\tau_{v,\,i}}]$。我们将 $K_{\tau_{v,\,i}}$在 $F_{\widetilde{v}}$ 中经范数映射得到的像记为 $F_{\tau_{v,\,i}}$，并将 $F_{\tau_{v,\,i}}$的连续特征的模空间（C-刚性）记为 $\mathcal{T}_{\tau_{v,\,i}}$，并且记为

$$\mathcal{T}_v:=\prod_{i=1}^{l}\mathcal{T}_{\tau_{v,i}}.$$

为简单起见，如果 $\sigma_{v,\,i}$ 和 $\sigma_{v,\,j}$ 属于同一个 Bernstein 块，我们总可以假设 $\sigma_{v,\,i}\cong\sigma_{v,\,j}$ 以及 $\widetilde{\tau}_{v,\,i}\cong\widetilde{\tau}_{v,\,j}$。

回顾一下，对于每个 $v\in S_p$，我们固定一个不可约代数表示 M_v，其最低 η-权为

$$a_{\eta,1}^{(v)}\leq\cdots\leq a_{\eta,n}^{(v)}.$$

令 $\mathcal{S}_v$ 为第 3 节中定义的、与韦伊-德利涅数据 $(\widetilde{\tau}_{v,\,i},\ldots,\widetilde{\tau}_{v,\,i})$ 以及滤过权 $\underline{k}^{(v)}:=(\underline{k}_1^{(v)},\ldots,\underline{k}_l^{(v)})$ 相关联的参数空间，其中

$$\underline{k}_i^{(v)}:=(a_{\eta,s_{i-1}+1}^{(v)}+s_{i-1}<a_{\eta,s_{i_{i-1}+2}}^{(v)}+s_{i-1}+1<\cdots<a_{\eta,s_i}^{(v)}+s_i-1)_{\eta\in\mathrm{Hom}(F_{\widetilde{v}},C)}.$$

然后，根据 $\mathcal{S}_v$ 的构造得到 $\mathcal{S}_v\cong\mathcal{T}_v\times\mathrm{Flag}_v$，其中 Flag_v 是权数据 $\underline{k}^{(v)}$ 对应的旗簇。

注记 4.24. 在第 3 节中，我们要求参数空间的最大权为 0。这里，为了与特征簇的惯例保持一致，我们将其平移 $a_{\eta,\ s_i}^{(v)}+s_i-1$ 这实际上仍表示同一个模空间，即 l 准 de Rham $(\varphi,\Gamma_{F_{\widetilde{v}}})$-模 $(D_1,\dots,D_l)$ 的模空间，其中每个 D_i 都具有如下形式：对于连续特征 δ_i，$\mathrm{D}(M_i)(\delta_i)$ 是类型为 $\tau_{v,\ i}$ 且权为 $\underline{k}_i^{(v)}$ 的滤过 $(\varphi,N,G_{F_{\widetilde{v}}})$-模$M_i$。

事实上，将 $\underline{k}_i^{(v)}$ 替换为 $\underline{k}_i^{(v)}-a_i^{(v)}$ 后，我们仍可通过映射得到相同的模空间

$$(M_i,\delta_i)\mapsto(M_i(\delta_{a_i^{(v)}}),\delta_i\cdot\delta_{a_i^{(v)}}^{-1}),$$

其中 $a_i^{(v)}:=(a_{\eta,\ s_i})_\eta+s_i-1$。

设 $\overline{\rho}\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)\to\mathrm{GL}_n(k_C)$ 是上一节中的绝对不可约伽罗瓦表示。对每个 $v\in S_p$，记 $\overline{\rho}_v$ 为将 $\overline{\rho}$ 限制到 $\mathrm{Gal}(\overline{F}_{\widetilde{v}}/F_{\widetilde{v}})\hookrightarrow\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ 后得到的 $\mathrm{Gal}(\overline{F}_{\widetilde{v}}/F_{\widetilde{v}})$ 的伽罗瓦表示。我们将自然映射记为：

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_{\overline{\rho},S}&\to\prod_{v\in S_p}\mathfrak{X}_{\overline{\rho}_v}\\ \rho&\mapsto(\rho_v)_{v\in S_p},\end{aligned}$$

其中 ρ_v 是 ρ 在 $\mathrm{Gal}(\overline{F}_{\widetilde{v}}/F_{\widetilde{v}})$ 中的限制。

引理 4.25. 设 δ 是定义在 C 上的 $\mathrm{GL}_{n_i}(F_{\widetilde{v}})$ 的非分歧特征。那么

$$\sigma_{v,i}\cong\sigma_{v,i}(\delta)$$

当且仅当 δ限制在 $\{g\mid\det(g)\in F_{\tau_{v,i}}^\times\}$ 上是平凡的。

证明. 由局部朗兰兹对应可知，$\sigma_{v,i}\cong\sigma_{v,i}(\delta)$ 当且仅当 $\varrho_{v,i}\cong\varrho_{v,i}\otimes\mathrm{rec}(\delta)$。然后由引理 3.5 得出断言。□

推论 4.26. 局部阿廷映射：

$$\mathrm{rec}:\mathrm{GL}_1(F_{\widetilde{v}})\to F_{\widetilde{v}}^\times$$

诱导出一个同构

$$\begin{aligned}j_{v,i}:\hat{H}_{\sigma_{v,i}}&\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}_{\tau_{v,i}}\\ \delta&\mapsto\delta\circ\mathrm{rec}^{-1}|_{F_{\tau_{v,i}}^\times}\end{aligned}$$

证明. 由上面的引理可知，$H_{\sigma_{v,i}}$ 是 $\{g\mid\det(g)\in F_{\tau_{v,i}}^\times\}$的连续特征模空间。于是得到结论。□

我们将 $\delta_{\mathcal{P}}$ 记为模特征：

$$(g_1,\dots,g_l)\mapsto|\det(g_1)|_{F_{\widetilde{v}}}^{n-n_1}\otimes\cdots\otimes|\det(g_i)|_{F_{\widetilde{v}}}^{n+n_i-2s_i}\otimes\cdots\otimes|\det(g_l)|_{F_{\widetilde{v}}}^{n_l-n}$$

对于 M_v。

我们用 $j'_{v,\ i}$ 表示映射

$$\begin{aligned}j'_v:\hat{H}_{\sigma_v}&\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}_{\tau_v}\\ \delta&\mapsto j_v(\Delta_W\cdot\delta_{\mathcal{P}}^{-\frac{1}{2}}\cdot|\det|^{\frac{1-n}{2}}\cdot\delta)\end{aligned}$$

其中 $j_v:=(j_{v,\ 1}、\dots\dots、j_{v,\ l})$

定义 4.27. 若对每个 $v\in S_p$，特征 $j'_v(\delta_v)=(\delta'_{v,1}\dots,\delta'_{v,l})$ 不具有以下性质，则局部代数特征 $\delta=(\delta_v)_{v\in S_p}\in\hat{}H_\sigma$ 称为非常正则：

存在 $1\le i,j\le l$ 使得 $\tau_{v,i}\cong\tau_{v,j}$，并且对于这样的 i,j，$\delta'_{v,i}/\delta'_{v,j}$ 的光滑部分是一个非分歧特征，满足 $(\delta'_{v,i}/\delta'_{v,j})_{\mathrm{sm}}(\varpi^{e_{\tau_v,v}\quad i})\in\{1,q_{v,i}\}$，其中 $q_{v,i}$ 是 $K_{\tau_{v,i}}$ 的剩余域的基数。

命题 4.28. 设 (δ,ρ) 是 $D_\varsigma(V)$ 中的一个支配经典点。假设 δ 非常正则。并且假设

$$\delta_{\mathrm{alg}}\left((g_{v,1},\dots,g_{v,l})_{v\in S_p}\right)=\prod_{\substack{v\in S_p\\ \eta:F_{\tilde v}\hookrightarrow C}}\left(\prod_{i=1}^{l}\eta(\det(g_{v,i}))^{b^{(v)}_{\eta,i}}\right),$$

对于 $g_{v,i}\in$ 一般线性群 $_n(F_{\tilde v})$。

那么对于每个 $v\in S_p$，$\mathrm{Gal}(\overline{F}_{\tilde v}/F_{\tilde v})$-表示 ρ_v 都是 de Rham 的，并具有以下性质：

(1) 对于每个 $\eta\in\mathrm{Hom}(F_{\tilde v},C)$，$\eta$-Hodge-Tate 权重（定义见 [BC09b, 定义 2.3.4]）为 ρ_v

$$a^{(v)}_{\eta,1}-b^{(v)}_{\eta,1}<\dots<a^{(v)}_{\eta,j}-b^{(v)}_{\eta,i_j}+(j-1)<\dots<a^{(v)}_{\eta,n}-b^{(v)}_{\eta,l}+(n-1),$$

其中 i_j 是满足 $j\le s_{i_j}$ 的最小整数；

(2) 与 ρ_v 相关联的 Weil-Deligne 表示 $\mathrm{WD}(\rho_v)$ 同构于

$$\bigoplus_{1\le i\le l}\varrho_{v,i}\otimes(\delta'_{v,i})_{\mathrm{sm}},$$

where $(\delta'_{v,1}\dots,\delta'_{v,l})=j'_v(\delta_v)$.

证明。断言 (1) 以及 ρ_v 是 de Rham 的结论可由 [BLGHT11，定理 1.2] 得出。（注意，按我们的定义，de Rham 表示的 Hodge-Tate 权重就是其所附带的滤过 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模的滤过权。）

对于断言 (2)，设 $\pi=\pi_\infty\otimes\pi_f^v\otimes\pi_v$ 为与 ρ 关联的自守表示。我们写作

$$\delta=(\delta_v)_v\in\prod_{v\in S_p}\hat{H}_{\sigma_v}$$

and

$$\delta_v=(\delta_{v,1},\dots,\delta_{v,l})\in\prod_{i=1}^{l}\hat{H}_{\sigma_{v,i}}.$$

根据局部朗兰兹对应（见 [Wed00, 4.2.2]），可得

$$\iota^{-1}(\mathrm{rec}(\pi_v))\cong\bigoplus_{1\le i\le l}\varrho_{v,i}\otimes(\delta_{\mathcal{P}}^{-\frac{1}{2}}\cdot\Delta_W\cdot\delta_{v,i})_{\mathrm{sm}},$$

（由命题 4.22 的条件（4）可知，存在一个满射态射

$$\mathrm{Ind}_{P_v}^{G_v}(\sigma_v\otimes\Delta_W\otimes\delta_{v,\mathrm{sm}})\twoheadrightarrow\iota^{-1}(\pi_v)$$

的 G_v 表示。请注意，非常正则条件意味着这些分量在同上文的（2.2.8）意义下彼此不相连，这意味着

$$\iota^{-1}(\pi_v)\cong\mathrm{Ind}_{P_v}^{G_v}(\sigma_v\otimes\Delta_W\otimes\delta_{v,\mathrm{sm}}).$$

然后应用同上文中的（4.2.2）。

由 [BLGGT14，定理 A], 可知，与 ρ_v 相关联的 WD 表示 WD(ρ_v) 的半单化为

$$\bigoplus_{1\le i\le l} \varrho_{v,i}\otimes(\delta'_{v,i})_{\mathrm{sm}}.$$

事实上，WD(ρ_v) 必须关于 $N=0$ Frobenius 半单。确实，有

$$\mathrm{Hom}(\varrho_{v,i}\otimes(\delta'_{v,i})_{\mathrm{sm}},\varrho_{v,j}\otimes(\delta'_{v,j})_{\mathrm{sm}})=0$$

对于任意 $\varrho_{v,i}\cong\varrho_{v,j}$，有 $(\delta'_{v,i})_{\mathrm{sm}}\neq(\delta'_{v,j})_{\mathrm{sm}}$。由此可知 WD($\rho_v$) 是 Frobenius 半单的。而条件 $((\delta'_{v,i})/(\delta'_{v,j}))_{\mathrm{sm}}$ 不关于 sm 非分歧

$$((\delta'_{v,i})/(\delta'_{v,j}))_{\mathrm{sm}}(\varpi_v^{e_{\tau_{v,i}}})=q_{v,i}$$

对于任意 $\varrho_{v,i}\cong\varrho_{v,j}$，蕴含 $N=0$。 □

注 4.29。注意，若 $N=0$ 且 $\varrho_{v,i}\otimes(\delta'_{v,i})_{\mathrm{sm}}\ncong\varrho_{v,j}\otimes(\delta'_{v,j})_{\mathrm{sm}}$ 对任意 $i\neq j$ 成立，则存在滤过模 $(\varphi,N,G_{F_{\tilde{v}}})$-模 $D_v=\mathrm{D}^{\mathrm{pst}}(\rho_v)$ 的唯一递增滤过：

$$0=D_{v,0}\subset D_{v,1}\subset\cdots\subset D_{v,l}=D_v,$$

由滤过的 $(\varphi,N,G_{F_{\tilde{v}}})$-子模给出，使得附属于 $D_{v,\ i}/D_{v,\ i-1}$ 的 Weil-Deligne 表示 WD($D_{v,\ i}/D_{v,\ i-1}$) 与 $\varrho_{v,\ i}\otimes(\delta'_{v,\ i})_{\mathrm{sm}}$ 同构，其中每个$i=1,\dots,l$均如此。

定义 4.30。

(1) 设 K 是一个 p-进局部域，带有某个有限伽罗瓦扩张 L；设C是一个 p-进局部域，使得 $[K\colon\mathbb{Q}_p]=\#\,\mathrm{Hom}(K,C)$。设 M 是 C 上的滤过 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模，具有递增滤过

$$0=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_r=M \tag{11}$$

由滤过的 (φ,N,G_K)-子模给出。假设 M（分别为 M_i）的秩为 d（分别为 d_i），且 M 的 η-滤过权为

$$k_{\eta,1}\le\cdots\le k_{\eta,d}$$

对于每个 $\eta\in\mathrm{Hom}(K,C)$。注意，$M_i\otimes_{L_0}L$ 的滤过结构由 $\mathcal{F}^j(M_i\otimes_{L_0}L):=(M_i\otimes_{L_0}L)\cap\mathcal{F}^j(M\otimes_{L_0}L)$ 定义。因此，M_i 的滤过权是 M 的滤过权的一个含有 d_i 个元素的子序列。

我们称这个递增滤过 (11) 为非临界的，如果 M_i 的 η-滤过权是 η-滤过权中最小的 d_i 个整数，其中 M，即

$$k_{\eta,1}\le\cdots\le k_{\eta,d_i}$$

对于每个 $1\le i\le r$ 和 $\eta\in\mathrm{Hom}(K,C)$。

(2) 设 $x=(\delta,\rho)$ 是 $D_\varsigma(V)$ 中一个非常正则的支配经典点。令 $(D_{v,1}\subset\cdots\subset D_{v,l})$ 为上述注中所述的 $\mathrm{D}^{\mathrm{pst}}(\rho_v)$ 的滤过。若滤过 $(D_{v,1}\subset\cdots\subset D_{v,l})$ 是非临界的，我们称 x 是非临界的。

引理 4.31. 设 K 是一个 p-进局部域，其有限伽罗瓦扩张为 L。设 M 是一个定义在 C 上的带滤过的（φ，N，$G_{L/K}$）-模，秩为 n，其中 C 是另一个 p-进局部域，满足 $|\mathrm{Hom}(K,C)|=[K\colon\mathbb{Q}_p]$。假设

(1) M 按照 [BC09b，定义 8.2.1] 的意义是弱可容许的。(2) 与之相关的 W_K 的 WD 表示 (ϱ,N) 同构于 $(N=0)$

$$\varrho_1\oplus\cdots\oplus\varrho_l,$$

其中每个 ϱ_i 都是秩为 n_i 的不可约 WD 表示。

(3) 假设对于每个 $\eta\in\mathrm{Hom}(K,C)$， M 的 η-滤过权为

$$k_{\eta,1}\leq\cdots\leq k_{\eta,n},$$

对于任意的 $1\leq i\leq l-1$ 和 $\eta\in\mathrm{Hom}(K,C)$，均有

$$(k_{\eta,s_{i+1}}-k_{\eta,s_i})+\left(\sum_{\eta:K\hookrightarrow C}\sum_{j=1}^{s_i}k_{\eta,j}\right)>[K:K_0]\left(\sum_{j=1}^{i}\mathrm{val}(\det(\varrho_j(\mathrm{Fr}_{\mathrm{K}}^{-1})))\right),$$

这里的 Fr_K^{-1} 是 W_K 中某个几何弗罗贝尼乌斯。

如果我们将 M_i 写作 M 中唯一的子对象，使其作为过滤的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模所对应的 WD 表示同构于

$$\varrho_1\oplus\cdots\oplus\varrho_i$$

对于每个 $0\leq i\leq l$，然后是滤过

$$0=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_l=M,$$

是非临界的。

证明。由于 M 是弱可容许的，因此对每个 $1\leq i\leq l$，有

$$t_H(M_i)\leq t_N(M_i),$$

此处我们用 t_H （分别用 t_N）表示霍奇数（分别表示牛顿数）。

根据定义，可以计算出 M_i 的牛顿数 $t_N(M_i)$为

$$\frac{1}{[K_0:\mathbb{Q}_p]}\sum_{j=1}^{j}\mathrm{val}(\det(\varrho_j(\mathrm{Fr}_{\mathrm{K}}^{-1})))$$

假设 M_i 的 η-滤过权为

$$k_{\eta,\omega_i(\eta,1)}\leq\cdots\leq k_{\eta,\omega_i(\eta,l)},$$

其中， $\omega_i(\eta,-)$是某个保序映射 $\{1,\ldots,s_i\}\to\{1,\ldots,n\}$。那么 M_i 的霍奇数 $t_H(M_i)$为

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}_p]}\sum_{\eta:K\hookrightarrow C}\sum_{j=1}^{s_i}k_{\eta,\omega_i(\eta,j)}$$

对于 $m\leq n$，在集合上定义偏序

$$\Omega(m,n):=\{\omega:\{1,\ldots,m\}\to\{1,\ldots,n\}\mid\omega(i)<\omega(i+1),\forall 1\leq i\leq n-1\}$$

当且仅当对于所有 $1\leq i\leq l$， $\omega_1(i)\leq\omega_2(i)$ 时， $\omega_1\leq\omega_2$ 。于是很容易得到以下事实。

(1) 恒等映射 ω_{id} 是 $\Omega(m,n)$ 中唯一的极小元；(2) 如果我们将映射记作 ω_0 ，则 $\omega_0(i)=i$ 对于 $i<m$ ，且 $\omega_0(m)=m+1$。那么 ω_0 是 $\Omega(m,n)\setminus\{\omega_{\mathrm{id}}\}$ 中唯一的极小元；(3) $\omega_1\leq\omega_2$ 意味着 that

$$\sum_{j=1}^{m}k_{\eta,\omega_1(j)}\leq\sum_{j=1}^{m}k_{\eta,\omega_2(j)}.$$

现在我们断言，对于每个 $1\leq i\leq l$ 和 $\eta\in\mathrm{Hom}(K,C)$， $\omega_i(\eta,-)=\omega_{\mathrm{id}}$ 属于 $\Omega(s_i,n)$。如果这成立，那么可以看出，这恰好就是细化的条件。

$$M_1\subset\cdots\subset M_l=M$$

是非临界的。

否则，我们可以假设对某些 i 和 η'，$\omega_i(\eta',-) \neq \omega_{\mathrm{id}}$。根据上述观察，有

$$\begin{aligned}
[K:\mathbb{Q}_p]t_H(M_i) &= \sum_{\eta:K\hookrightarrow C}\sum_{j=1}^{s_i} k_{\eta,\omega_i(\eta,j)} \\
&\geq \left(\sum_{j=1}^{s_i} k_{\eta',\omega_0(j)}\right) + \left(\sum_{\eta\neq\eta'}\sum_{j=1}^{s_i} k_{\eta,j}\right) \\
&\geq (k_{\eta',s_{i+1}} - k_{\eta',s_i}) + \left(\sum_{j=1}^{s_i} k_{\eta',j}\right) + \left(\sum_{\eta\neq\eta'}\sum_{j=1}^{s_i} k_{\eta,j}\right) \\
&= (k_{\eta',s_{i+1}} - k_{\eta',s_i}) + \left(\sum_{\eta:K\hookrightarrow C}\sum_{j=1}^{s_i} k_{\eta,j}\right) \\
&> [K:K_0]\left(\sum_{j=1}^{i}\mathrm{val}(\det(\varrho_j(\mathrm{Fr}_{\mathrm{K}}^{-1})))\right) \\
&= [K:\mathbb{Q}_p]t_N(M_i),
\end{aligned}$$

这与 M 弱可容许的条件相矛盾。 □

命题 4.32. 设 $x=(\delta,\rho)$ 是 $D_\varsigma(V)$ 中的一个点，且 $\delta=\delta_{\mathrm{sm}}\delta_{\mathrm{alg}}$ 是局部代数的。我们将分解记作 $\delta=(\delta_0,\delta_\mathfrak{Z})$（取决于 ϖ_v的选择）

$$\hat{H}_\sigma \cong \hat{H}_{p,0}\times \mathrm{Spec}(\mathfrak{Z})^{\mathrm{rig}}.$$

我们记 $B_{v,i}$:=$\mathrm{diag}(I_{n_1},\ldots,I_{n_{i-1}},\varpi_v I_{n_i},I_{n_{i+1}},\ldots,I_{n_l})$，并记

$$c_{v,i} := \mathrm{val}((\Delta_W\cdot\delta_\mathfrak{Z})(B_{v,i}))$$

（注意 $B_{v,i}\in\Sigma$，并回忆我们已固定一个嵌入 $i_\Sigma: C[\Sigma]\hookrightarrow\mathfrak{Z}$）。并假设

$$\delta_{\mathrm{alg}}\left((g_{v,1},\ldots,g_{v,l})_{v\in S_p}\right) = \prod_{\substack{v\in S_p\\ \eta:F_{\tilde{v}}\hookrightarrow C}}\left(\prod_{i=1}^{l}\eta(\det(g_{v,i}))^{b_{\eta,i}^{(v)}}\right),$$

对于 $g_{v,i}\in$ 一般线性群$_{n_i}(F_{\tilde{v}})$。

我们记 $\delta=(\delta_v)_v\in\prod_{v\in S_p}\hat{}H_{\sigma_{v,i}}$，并记 $(\delta'_{v,1},\ldots,\delta'_{v,l}):=j'_v(\delta_v)$。那么

(1) if

$$b_{\eta,i}^{(v)} - b_{\eta,j}^{(v)} > [F_{\tilde{v}}:\mathbb{Q}_p](1+n+|c_{v,i}-c_{v,j}|)$$

对于每个 $v\in S_p$ 和 $i<j$，那么 x 是非常正则的；

（2）如果

$$b_{\eta,i}^{(v)} - b_{\eta,i+1}^{(v)} > [F_{\tilde{v},0}:\mathbb{Q}_p]\mathrm{val}(\delta_\mathfrak{Z}(\varsigma))$$

对于每个 $v\in S_p$ 和 $1\leq i\leq l$，那么 x 是经典的；

(3) i *f*

$$b_{\eta,i}^{(v)} - b_{\eta,i+1}^{(v)} > \frac{[F_{\tilde{v}}:F_{\tilde{v},0}]}{e_{\tau_{v,i}}}\mathrm{val}\left((\delta'_{v,1}\ldots\delta'_{v,i})(\varpi_v^{-e_{\tau_{v,i}}})\right) + C_i + C'_i,$$

where $(\delta'_{v,1},\ldots,\delta'_{v,l}):=j'_v(\delta)$, *and*

$$C_i := [K:K_0]\sum_{1\leq j\leq i}\mathrm{val}(\det(\varrho_{v,j}(\mathrm{Fr}_{F_{\tilde{v}}}^{-1})))$$

and

$$C_i' := -\sum_{\substack{\eta\in\mathrm{Hom}(F_{\widetilde{v}},C)\\ 1\le j\le s_i}}(a_{\eta,j}^{(v)}+j-1),$$

那么 x 是非临界。

证明。

(1) 记 $\delta_v=(\delta_{v,1},\ldots,\delta_{v,l})$。于是可
以计算得

$$(\delta'_{v,i})_{\mathrm{sm}}(\varpi_v^{n_i})=\Delta_W(B_{v,i})|\varpi_v|_{F_{\widetilde{v}}}^{\frac{n_i(2s_i-2n-n_i+1)}{2}}(\delta_{v,i})_{\mathrm{sm}}(B_{v,i}).$$

注意到

$$(\delta_{v,i})_{\mathrm{sm}}(B_{v,i})=\delta_{\mathfrak{Z}}(B_{v,i})\left(\prod_{\eta\in\mathrm{Hom}(F_{\widetilde{v}},C)}\eta(\varpi_v)^{n_ib_{\eta,i}^{(v)}}\right)^{-1},$$

于是对任意满足 $\tau_i\cong\tau_j$ 的 $1\le i<j\le l$ （这意味着 $n_i=n_j$），有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{e_{\tau_{v,i}}}\mathrm{val}\left((\delta'_{v,j}/\delta'_{v,i})_{\mathrm{sm}}(\varpi_{v,i}^{e_{\tau_v}})\right)\\
=&\frac{1}{n_i}\mathrm{val}(\Delta_W(B_{j,v}/B_{i,v}))+(s_i-s_j)[F_{\widetilde{v},0}:\mathbb{Q}_p]\\
+&\frac{1}{n_i}\left[\mathrm{val}((\delta_{v,j})_{\mathrm{sm}}(B_{j,v}))-\mathrm{val}((\delta_{v,i})_{\mathrm{sm}}(B_{i,v}))\right]\\
=&\frac{1}{n_i}\mathrm{val}((\Delta_W\cdot\delta_{\mathfrak{Z}})(B_{j,v}/B_{i,v}))+(s_i-s_j)[F_{\widetilde{v},0}:\mathbb{Q}_p]\\
+&\frac{1}{[F_{\widetilde{v}}:F_{\widetilde{v},0}]}\sum_{\eta\in\mathrm{Hom}(F_{\widetilde{v}},C)}(b_{\eta,i}^{(v)}-b_{\eta,j}^{(v)})\\
>&\frac{1}{n_i}\mathrm{val}((\Delta_W\cdot\delta_{\mathfrak{Z}})(B_{j,v}/B_{i,v}))+\frac{1}{[F_{\widetilde{v}}:F_{\widetilde{v},0}]}\sum_{\eta}(b_{\eta,i}^{(v)}-b_{\eta,j}^{(v)})-n[F_{\widetilde{v},0}:\mathbb{Q}_p]\\
>&[F_{\widetilde{v},0}:\mathbb{Q}_p]
\end{aligned}$$

因此，(δ,ρ) 是非常正则的。

(2) 假设 $(\varsigma_v)_{v\in S_p}=\varsigma\in\Sigma^+$ for

$$\varsigma_v=\mathrm{diag}(\varpi_{v,1}^{t_{v,1}}I_{n_1},\ldots,\varpi_{v,1}^{t_{v,l}}I_{n_l})$$

其中 $t_{v,1}<\cdots<t_{v,l}$。

在 [Loe17] 的勘误中，将 [命题 2.6.3'] 应用于一般线性群 $_n$ 的特殊情形，可以直接在同上计算不等式 (†)，并可看出，如果 ς 在点 (δ,ρ) 处满足条件，那么 $\mathrm{val}(\delta_{\mathfrak{Z}}(\varsigma))$ 是一个小斜率。

$$\frac{t_{v,i+1}-t_{v,i}}{[F_{\widetilde{v},0}:\mathbb{Q}_p]}\left((b_{\eta,i}^{(v)}-b_{\eta,i+1}^{(v)})-(a_{\eta,s_i}^{(v)}-a_{\eta,s_i+1}^{(v)}-1)\right)>\mathrm{val}(\delta_{\mathfrak{Z}}(\varsigma)),$$

这由我们的条件 (2) 得出。于是，根据 [Loe17，同上，定理 3.9，(δ,ρ) 是经典的。6]

(3) 由引理 4.31，利用以下等式可得：

$$
\begin{aligned}
&[F_{\widetilde{v}}:F_{\widetilde{v},0}]\mathrm{val}\left(\det\left(((\delta'_{v,i})_{\mathrm{sm}}\otimes\varrho_{v,j})(\mathrm{Fr}_{F_{\widetilde{v}}^{-1}})\right)\right)-\sum_{\substack{\eta\in\mathrm{Hom}(F_{\widetilde{v}},C)\\ s_{i-1}+1\le j\le s_i}}(a_{\eta,j}^{(v)}-b_{\eta,j}^{(v)}+j-1)\\
&=(C_i-C_{i-1})+n_i[F_{\widetilde{v}}:F_{\widetilde{v},0}]\left[\mathrm{val}((\delta'_{v,i})_{\mathrm{sm}}(\varpi_v))+\mathrm{val}((\delta'_{v,i})_{\mathrm{alg}}(\varpi_v))\right]\\
&-\sum_{\substack{\eta\in\mathrm{Hom}(F_{\widetilde{v}},C)\\ s_{i-1}+1\le j\le s_i}}(a_{\eta,j}^{(v)}+j-1)\\
&=(C_i+C'_i-C_{i-1}-C'_{i-1})+n_i[F_{\widetilde{v}}:F_{\widetilde{v},0}]\left[\mathrm{val}((\delta'_{v,i})(\varpi_v))\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 4.33. $D_\varsigma(V)$ 中支配、非常正则、经典、非临界点的集合在扎里斯基拓扑下稠密。

证明. 若点 $x=(\rho,\delta)\in D_\varsigma(V)$ 满足 δ 是局部代数（即 de Rham）特征，则称其为局部代数点。考虑以下图表：

$$
\begin{array}{ccc}
D_\varsigma(V) & \xrightarrow{\mu} & Z_\varsigma(V)\\
& \searrow^{f_D} & \downarrow f_Z\\
& & \hat{H}_{p,0}
\end{array}
$$

其中 μ 是从特征簇到谱簇的自然有限态射，而 f_D,f_Z 是到权空间的投影。我们用 D_{VCN}（分别用 D_{la}）表示 $D_\varsigma(V)$ 中非常正则、经典、非临界点（分别为局部代数点）的集合。

首先，我们断言 D_{la} 在 $D_\varsigma(V)$ 中扎里斯基稠密。事实上，显然，ˆ局部代数特征的集合在 $H_{p,0}$ 中扎里斯基稠密。根据 Che04 证明的推论 6.4，[Che04, Cor 6.4.4], 每个 $Z_\varsigma(V)$ 不可约分支的像在 $H_{p,0}$ 中是扎里斯基开集。因此，$\mu(D_{\mathrm{la}})$ 在 $Z_\varsigma(V)$ 中扎里斯基稠密。由同上引理 6.2 可知，有限映射 $\mu:\ D_\varsigma(V)\to Z_\varsigma(V)$ 具有如下性质：$D_\varsigma(V)$ 的每个不可约分支都满射地映到 $Z_\varsigma(V)$ 的一个不可约分支。因此，由同上引理 6.2 可得，D_{la} 在 $D_\varsigma(V)$ 中扎里斯基稠密。

那么，根据构造，我们可以选取 $\mathcal{C}$ of $Z_\varsigma(V)$ 的仿射刚性可容覆盖，使得 $\{f_Z(X)|X\in\mathcal{C}\}$（分别地，$\{\mu^{-1}(X)|X\in\mathcal{C}\}$）是 $H_{p,\ 0}$（分别地，$(D_\varsigma(V))$）的仿射刚性可容覆盖。因此，我们可以将上面的图表限制在每个 $X\in\mathcal{C}$ 上，只需证明：若 $D_{\mathrm{la}}\cap\mu^{-1}(X)\neq\emptyset$，则 $V_{\mathrm{VCN}}\cap\mu^{-1}(X)$ 在每个 $\mu^{-1}(X)$ 中扎里斯基稠密。

由于 $\mu^{-1}(X)$ 是拟紧的，函数

$$
\begin{aligned}
f_\varsigma:D_\varsigma(V)&\to\mathbb{Q}\\
x=(\delta_0,\delta_{\mathfrak{Z}},\rho)&\mapsto\mathrm{val}(\delta_{\mathfrak{Z}}(\varsigma)),
\end{aligned}
$$

并且，对于 $v\in\mathrm{Hom}(F_{\widetilde{v}},C)$ 和 $1\le i\le l$，函数

$$
\begin{aligned}
f_{v,i}:D_\varsigma(V)&\to\mathbb{Q}\\
x=(\delta_0,\delta_{\mathfrak{Z}},\rho)&\mapsto\mathrm{val}(\delta_{\mathfrak{Z}}(B_{v,i})),
\end{aligned}
$$

其中，B_i 是一个大小为 $(n_1,\dots,n_l)$ 的分块对角矩阵，其第 i 个连通分支为 $\varpi_v I_{n,\ i}$，其余分量为恒等元，且这些矩阵有上界。因此，由命题 4.32 可知，存在一个常数 $c>0$，使得对于 $\mu^{-1}(X)$ 中任意一个具有 (v,η)-权 $(b_{\eta\ 1,}^{(v)},\ \dots,b_{\eta\ l,}^{(v)})$ 的局部代数点，

$v\in S_p$ 和 $\eta\in\mathrm{Hom}(F_{\tilde{v}},C)$，是支配的、非常正则的、经典的且非临界的，如果 $b_{\eta,\,i}^{(v)}-b_{\eta,\,i+1}^{(v)}>c$ 对每个 i,v 和 ς 均成立。

显然，如果 X 至少包含一个局部代数特征，那么满足上述性质的局部代数特征子集 $H_{>c}\subset H_p$,0 在 H_p,0 的任意仿射子域 X 中都是扎里斯基稠密的。设 X 是 $\mathcal{C}$ 中满足 $\mu^{-1}(X)\cap D_{\mathrm{la}}\neq\emptyset$ 的一个元素。则 $f_Z(X)$ 至少包含一个局部代数特征，因此 $H_{>c}\cap f_Z(X)$ 在 $f_Z(X)$ 中扎里斯基稠密。由于映射 $X\to f_Z(X)$ 是平坦的，故 $f_z^{-1}(\hat{}H_{>c})\cap X$ 在 X 中扎里斯基稠密。再次由 Che04 引理 6.2.8] ，可知 $f_D^{-1}(\hat{}H_{>c})\cap\mu^{-1}(X)$ 在 $\mu^{-1}(X)$ 中扎里斯基稠密。因此， D_{VCN} 在 $D_\varsigma(V)$ 中扎里斯基稠密，因为 $\mu^{-1}(X)\cap f_D^{-1}(\hat{}H_{>c})\subseteq D_{\mathrm{VCN}}$。□

推论 4.34. 特征簇 $D_\varsigma(V)$ 可描述为 $H_\sigma\times\mathfrak{X}_{\overline{\rho},S}$ 的既约闭刚性子空间，其底层拓扑空间是经典点集合的 Zariski 闭包。特别地，特征簇 $D_\varsigma(V)$ 不依赖于 ς 的选择。因此，简记为 $D(V)$。

证明. 这立即由上述性质得出。 □

注 4.35. 特征簇 $D(V)$ 同构于 [BD21] 中定义的伯恩斯坦特征簇$\mathcal{E}_{\Omega,\lambda}(U^p)$（关于 Ω 的定义，回顾注 2.21；支配权 λ 对应于代数表示 W），尽管它们是通过不同方法构造的。事实上，按照证明 [BHS17a, 命题 3.4], 中相同的论证，$\mathcal{E}_{\Omega,\lambda}(U^p)$ 中严格支配的经典点与 $D(V)$ 中的点具有命题 4.22 所述的相同刻画。由定理 4.33 和[BD21, 定理 3.2.11], 可知，经典点在 $D(V)$ 和 $\mathcal{E}_{\Omega,\lambda}(U^p)$ 中都稠密。因此，它们同构。

定理 4.36. 对每个支配的、非常正则的、经典的非临界点 $(\rho,\delta)\in D(V)$，$(\varphi,\Gamma_{F_{\tilde{v}}})$-模 $D^\dagger{}_{\mathrm{rig}}(\rho_v)$ 都是严格抛物线型的，其参数为 $j'_v(\delta_v)$，对每个 $v\in S_p$ 均如此。

特别地，若记 $j':=\prod_{v\in S_p}j'_v$，则复合

$$D(V)\hookrightarrow\hat{H}_\sigma\times\mathfrak{X}_{\overline{\rho},S}\xrightarrow{j'\times j_{\overline{\rho}}}\prod_{v\in S_p}(\mathcal{T}_v\times\mathfrak{X}_{\overline{\rho}_v})$$

经由抛物线型簇的乘积分解

$$\prod_{v\in S_p}Y_{\mathrm{par}}(\overline{\rho}_v)\hookrightarrow\prod_{v\in S_p}(\mathcal{T}_v\times\mathfrak{X}_{\overline{\rho}_v}).$$

证明. 设 $x=(\delta,\rho)\in D(V)$ 是一个支配的、非常正则的、经典的非临界点。并假设

$$\delta_{\mathrm{alg}}\left((g_{v,1},\dots,g_{v,l})_{v\in S_p}\right)=\prod_{\substack{v\in S_p\\ \eta:F_{\tilde{v}}\hookrightarrow C}}\left(\prod_{i=1}^{l}\eta(\det(g_{v,i}))^{b_{\eta,i}^{(v)}}\right),$$

对于 $g_{v,\,i}\in\mathrm{GL}_{n_i}(F_{\tilde{v}})$。记 $(\delta'_{v,\,1},\dots,\delta'_{v,\,l}):=j'_v(\delta_v)$。

我们将 M_v 记作与 ρ_v相关联的滤过（φ, N, $G_{F_{\tilde{v}}}$）-模。由命题 4.28 可知，与 M_v 相关联的 WD 表示 $\mathrm{WD}(M_v)$ 同构于

$$\bigoplus_{1\le i\le l}\varrho_{v,i}\otimes(\delta'_{v,i})_{\mathrm{sm}},$$

以及 η- M_v 的 Hodge-Tate 权重为

$$a_{\eta,1}^{(v)}-b_{\eta,1}^{(v)}<\cdots<a_{\eta,j}^{(v)}-b_{\eta,i_j}^{(v)}+(j-1)<\cdots<a_{\eta,n}^{(v)}-b_{\eta,l}^{(v)}+(n-1),$$

其中， i_j 是满足 $j\leq s_{i_j}$的最小整数。

对于每个 $1\leq i\leq l$，我们将 $M_{v,i}$ 记作 M_v （作为一个带滤过的 $(\varphi,N,G_{F_{\bar{v}}})$-模）的唯一子对象，使得附属于 $M_{v,i}/M_{v,i-1}$ 的 WD 表示 $\mathrm{WD}(M_{v,i}/M_{v,i-1})$ 与 $\varrho_{v,j}\otimes(\delta'_{v,j})_{\mathrm{sm}}$ 同构（令 $M_{v,0}=0$）。

由于 x 是非临界的， $M_{v,i}/M_{v,i-1}$ 的 η-Hodge-Tate 权重是

$$a_{\eta,s_{i-1}+1}^{(v)}-b_{\eta,i}^{(v)}+(s_{i-1})<\cdots<a_{\eta,j}^{(v)}-b_{\eta,i}^{(v)}+(j-1)<\cdots<a_{\eta,s_i}^{(v)}-b_{\eta,i}^{(v)}+(i-1).$$

由此可得（注意， $(\delta'_{v,i})_{\mathrm{alg}}=(\delta_{v,i})_{\mathrm{alg}}$）

$$M_{v,i}/M_{v,i-1}\cong M'_{v,i}(\delta'_{v,i})$$

对某个经过滤的 $(\varphi,N,G_{F_{\bar{v}}})$-模 $M'_{v,i}$ 使得 $\mathrm{WD}(M'_{v,i})\cong\varrho_{v,i}$ 且 η-Hodge-Tate 权重 $M'_{v,i}$ 为

$$a_{\eta,s_{i-1}+1}^{(v)}+(s_{i-1})<\cdots<a_{\eta,j}^{(v)}+(j-1)<\cdots<a_{\eta,s_i}^{(v)}+(s_i-1),$$

这恰好意味着， $(M_{v,\,i}/M_{v,\,i-1})_{1\leq i\leq l}$ 是 $\mathcal{S}_v$ 中的一个点，并且根据构造，它在自然投影 $\mathcal{S}_v\to\mathcal{T}_v$ 下于 $\mathcal{T}_v$中的像为 $j'_v(\delta_v)$。

注意到 $j'_v(\delta_v)$ 属于 $\mathcal{T}_{v,\,\mathrm{reg}}$ 因为非常正则意味着正则。因此， $D^{\dagger}{}_{\mathrm{rig}}(\rho_v)$ 是一个参数为 $j'_v(\delta_v)$ 的严格抛物线型对象。特别地， $(j'\times j_{\bar{\rho}})(\delta,\rho)$ 是 $\prod_{v\in S_p}Y_{\mathrm{par}}(\bar{\rho}_v)$ 中的一个点。

因此，由于支配、非常正则、经典、非临界点的集合在定理 4.33 的 $D(V)$ 中扎里斯基稠密，映射 $j'\times j_{\bar{\rho}}$ 限制在 $D(V)$ 上后可经由 $\prod_v Y_{\mathrm{par}}(\bar{\rho}_v)$ 分解。□

Appendix A. Some Computation for Sen Polynomials

为方便起见，在本节中始终令 A 表示一个连通的仿射解析 C-代数。我们可以很容易地将本节中的断言推广到一般的刚性 C-空间情形。

令 $\pi=\exp(t)-1$ 属于 $\mathcal{R}_K$ （分别为 $\mathcal{R}_K^r$）。记 $q_n:=\varphi^n(\pi)\,\varphi^{n-1}(\pi)$，并记 $n(r)$ 为满足 $p^{n(r)-1}(p-1)\geq r$ 的最小整数。则 (q_n) 是 $\mathcal{R}_K^r$的极大理想，其剩余域为 $K_n=K(\xi_{p^n})$，其中 $n\geq n(r)$。

对于 $\mathcal{R}_{K,A}^r$ 上的秩为 d (φ,Γ_K) 的模 D^r，由 [KPX14, 引理 3.2.3], 可得

$$D^r/tD^r\cong\prod_{n\geq n(r)}D^r/q_nD^r,$$

其中每个 D^r/q_nD^r 都是秩为 d 的局部自由 $(K_n\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)$-模，且 $\varphi^{n'-n}$诱导一个同构

$$D^r/q_nD^r\otimes_{K_n}K_{n'}\cong D^r/q_{n'}D^r$$

对于 $n'\geq n\geq n(r)$，这是 $A[\Gamma_K]$-模之间的同构。

因此，如果 D 是 φ 上的一个（Γ_K）-模，且满足 $\mathcal{R}_{K,\,A}$，使得 $D\cong D^r\otimes_{\mathcal{R}^r_{K,\,A}}\mathcal{R}_{K,\,A}$ 对于某个 $\mathcal{R}^r_{K,\,A}$ 上的（φ，Γ_K）-模 D^r 成立，那么

$$(D/tD)^{\varphi=1}\cong D^r/q_nD^r\otimes_{K_n}K_\infty$$

对于 $n \geq n(r)$，它是一个具有连续半线性 Γ_K 作用的维数为 d 的局部自由 $(K_\infty \otimes_{\mathbb{Q}_p} A)$-模。

定义 A.1. [KPX14，定义 6.2.11]沿用上述记号。考虑 Sen 算子 $\Theta_{\mathrm{Sen}} = \log(\gamma)\ \log(\chi(\gamma))$，其中 $\gamma \in \Gamma_K$ 充分接近 1。我~~们可以~~假设 $\gamma \in \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$，因此 Θ_{Sen} 在 D^r/q_nD^r 上诱导一个 $K_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$-线性映射。

我们将 D 的 Sen 多项式 Sen_D 定义为此线性映射的特征多项式，它是一个首一多项式，系数属于 $K_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$。

注 A.2.

（1）由于 Sen 算子 Θ_{Sen} 与 Γ_K作用可交换，因此 Sen 多项式 Sen_D 是 Γ_K不变的，其系数属于 $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$。（2）可以证明，$\mathrm{Sen}_D$ 不依赖于 r 和 n的选择。（3）在同构下

$$K \otimes_{\mathbb{Q}_p} A[T] \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma: K \hookrightarrow C} A[T]$$

我们可以将 $\mathrm{Sen}_D(T) = (\mathrm{Sen}_{D,\ \sigma}(T))_\sigma$分解，其中 $\mathrm{Sen}_{D,\ \sigma}$ 是 $(D/t_\sigma D)^{\varphi=1}$ 的 Θ_{Sen} 的特征多项式。通常，我们常将 Sen 多项式写成 $(\mathrm{Sen}_{D,\ \sigma}(T))_\sigma$ 的形式。

(4) 当 D 是秩 1 的 (φ,Γ_K)-模时，D 由 KPX14 的定理 6.2.14] 对应于一个连续特征 $\delta: K^\times \to A^\times$。同上的引理 6.2.12 表明，Sen 算子通过乘以 $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$ 中的一个元素 $\mathrm{wt}(\delta)$ 来作用，且 Sen 多项式为 $T - \mathrm{wt}(\delta)$。

命题 A.3. 设

$$0 \to D_1 \to D_2 \to D_3 \to 0$$

是 A 上 (φ,Γ_K)-模的一个短正合列，则

$$\mathrm{Sen}_{D_2} = \mathrm{Sen}_{D_1} \cdot \mathrm{Sen}_{D_3}$$

证明。存在某个 $r > 0$，使得 $D_i \cong D_i^r \otimes_{\mathcal{R}^r_{K,\ A}} \mathcal{R}_{K,\ A}$，其中对 $i = 1,\ 2,\ 3$，它们是 $\mathcal{R}^r_{K,\ A}$ 上的某个 (φ,Γ_K)-模，且该短正合列由某个短正合列诱导

$$0 \to D_1^r \to D_2^r \to D_3^r \to 0$$

由于上面的短正合列作为 $\mathcal{R}^r_{K,A}$-模局部可分裂，因此复

$$0 \to D_1^r/q_nD_1^r \to D_2^r/q_nD_3^r \to D_3^r/q_nD_3^r \to 0$$

是正合的。因此得到。

$$\mathrm{Sen}_{D_2} = \mathrm{Sen}_{D_1} \cdot \mathrm{Sen}_{D_3}.$$

□

引理 A.4. 设 A 是一个仿射 C-代数。设 D 是 A 上的一个 (φ,Γ_K)-模，并记 $D_L := D \otimes_{\mathcal{R}_{K,A}} \mathcal{R}_{L,A}$，则

$$\mathrm{Sen}_{D_L}(T) = \mathrm{Sen}_D(T)$$

证明。通过直接计算，可以证明

$$D_L^r/q_nD_L^r \cong (D^r/q_nD^r) \otimes_{K_n} L_n,$$

对于某个 $r > 0$。注意，D^r/q_nD^r 在 Θ_{Sen} 的作用下保持稳定。因此，Θ_{Sen} 在 $D_L^r/q_nD_L^r$ 上的特征多项式等于 Θ_{Sen} 在 D^r/q_nD^r 上的特征多项式，即

$$\mathrm{Sen}_{D_L}(T) = \mathrm{Sen}_D(T).$$

□

命题 A.5. 设 M 是 $L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A$ 上的一个过滤的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模，秩为d，权为 $(\underline{k_\sigma})_{\sigma:K\hookrightarrow C}$，其中 $\underline{k_\sigma}:=(k_{\sigma,1}\le\cdots\le k_{\sigma,d})$。那么

$$\mathrm{Sen}_{\mathbf{D}(M)}(T)=(\prod_{1\le i\le d}(T+k_{\sigma,i}))_\sigma.$$

证明。对于 $n\ge n(r)$，根据 ι_n 的构造：$\mathcal{R}_L^r\hookrightarrow L_n[\![t_n]\!]$（$\varphi^{-n}$ 参见同上文献中的 [CC99]，例如），可以验证 $\iota_n(q_n)$ 是 $L_n[\![t_n]\!]$ 中的一致化子，因此约化映射

$$\bar{\iota}_n:\mathcal{R}_L^r/q_n\mathcal{R}_L^r\to L_n[\![t_n]\!]\twoheadrightarrow L_n$$

是一个同构。

固定一个嵌入 $K\hookrightarrow L$，我们有满射

$$\mathrm{Hom}(L,C)\to\mathrm{Hom}(K,C)$$
$$\widetilde{\sigma}\mapsto(\sigma:K\hookrightarrow L\xrightarrow{\widetilde{\sigma}}C)$$

回顾一下，我们有典范同构

$$\mathbf{D}_L^r(M)\otimes_{\mathcal{R}^r_{L,A},\iota_n}L_n[\![t_n]\!]\xrightarrow{\sim}\mathbf{D}^n(M),$$

其中 $\mathrm{D}^n(M)$ 具有如下形式 $\mathrm{Fil}^0(L_n[\![t_n]\!]\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)}M')$，对于某个局部自由的滤过（$L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A$）-模 M'，其 $\widetilde{\sigma}$-权为 $\underline{k_{\sigma\circ}}$ 在 $\mathrm{Spec}A$ 上局部地，令 $(e_{\widetilde{\sigma},1},\ldots,e_{\widetilde{\sigma},d})$ 为 $M'_{\widetilde{\sigma}}$ 的一组基：$=M'\otimes_{(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}A)\,\widetilde{\sigma}\otimes\mathrm{id}}A$，使得 $(e_{\widetilde{\sigma},1},\ldots,e_{\widetilde{\sigma},i_j})$ 是 Fil^jM' 的一组基，其中 i_j 是 Fil^jM' 的秩。因此可以看出

$$(t_n^{-k_{\sigma,1}}e_{\widetilde{\sigma},1},\ldots,t_n^{-k_{\sigma,d}}e_{\widetilde{\sigma},d})$$

是 $\mathrm{D}^n(M)$ 的一组基，并且 $\Theta_{\mathrm{Sen}}(t^{-k_{\sigma,n}}{}^ie_{\widetilde{\sigma},i})=-k_{\sigma,i}t^{-k_{\sigma,n}}{}^ie_{\widetilde{\sigma},i}$。因此，$\Theta_{\mathrm{Sen}}$ 在 $\mathrm{D}_L^r(M)/q_n\mathrm{D}_L^r(M)\cong\mathrm{D}^n(M)\otimes_{L_n[\![t_n]\!]}L_n$ 上的特征多项式为

$$(\prod_{1\le i\le d}(T+k_{\sigma,i}))_{\widetilde{\sigma}:L\hookrightarrow C}=(\prod_{1\le i\le d}(T+k_{\sigma,i}))_{\sigma:K\hookrightarrow C}.$$

（注意，如果元素 $a\in\prod_{\widetilde{\sigma}:L\hookrightarrow C}A$ 的形式为 $(a_\sigma)_{\widetilde{\sigma}}$，那么 $a\in K\otimes_CA$ 和 $a=(a_\sigma)_\sigma\in\prod_{\sigma:K\hookrightarrow C}A$。）

由于 $\mathrm{D}(M)\otimes_{\mathcal{R}_{K,A}}\mathcal{R}_{L,A}\cong\mathrm{D}_L(M)$，由引理 A.4 可得

$$\mathrm{Sen}_{\mathbf{D}(M)}(T)=(\prod_{1\le i\le d}(T+k_{\sigma,i}))_{\sigma:K\hookrightarrow C}.$$

□

命题 A.6. 设 D 是 A 上的一个 (φ,Γ_K)-模，并设 $\delta:K^\times\to A^\times$ 是一个权为 wt 的连续特征。则

$$\mathrm{Sen}_{D(\delta)}(T)=\mathrm{Sen}_{D(\delta)}(T-\mathrm{wt}(\delta)).$$

证明. 该断言由注释 A.2(4) 及以下一般事实得出：

对于两个 (φ,Γ_K)-模 D_1,D_2，算子 Θ_{Sen} 在 $D_1\otimes D_2$ 上满足莱布尼茨法则

$$\Theta_{\mathrm{Sen}}(v\otimes w)=v\otimes\Theta_{\mathrm{Sen}}(w)+\Theta_{\mathrm{Sen}}(v)\otimes w.$$

事实上，我们只需证明对于足够接近 1 的 Γ_K 中的元素 γ，$\log(\gamma)$ 满足莱布尼茨法则。令 $\alpha:=\gamma-1$。假设

$$(X+Y+XY)^n=\sum_{i,j\in\mathbb{N}^2}b(n,i,j)X^iY^j,$$

对于某个整数 $b(n,i,j)$。通过归纳法可以证明

$$\alpha^n(v\otimes w)=\sum_{i,j\in\mathbb{N}^2} b(n,i,j)\alpha^i(v)\otimes\alpha^j(w).$$

于是，若记

$$a(i,j)=\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}(-1)^{n-1}\frac{b(n,i,j)}{n},$$

则有

$$\log(\gamma)(v\otimes w)=\sum_{i,j\in\mathbb{N}^2} a(i,j)\alpha^i(v)\otimes\alpha^j(w).$$

另一方面，有

$$a(i,j)=\begin{cases}1/i, & j=0\\ 1/j, & i=0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

通过考虑该方程的形式幂级数方程

$$\log(1+Y+XY)=\log X+\log Y.$$

由此可得 $\log(\gamma)(v\otimes w)=\log(\gamma)(v)\otimes w+v\otimes\log(\gamma)(w)$。 □

推论 A.7. 设 D 为 A 上形如 $\mathrm{D}(M)(\delta)$ 的秩 d 准 de Rham (φ,Γ_K)-模。假设 $\mathrm{wt}(\delta)=(\mathrm{wt}_\sigma(\delta))_\sigma$ 属于 $\prod A$，且 M 具有滤过 $\sigma\colon K\hookrightarrow C$ 权 $(\underline{k}_\sigma)_{\sigma:K\hookrightarrow C}$，其中 $\underline{k}_\sigma=(\underline{k}_{\sigma,1}\le\cdots\le\underline{k}_{\sigma,d})$，则

$$\mathrm{Sen}_D(T)=(\prod_{1\le i\le d}(T-\mathrm{wt}_\sigma(\delta)+k_{\sigma,i}))_{\sigma:K\hookrightarrow C}.$$

定义 A.8. 设 $S=(S_\sigma(T))_\sigma$ 是 $K\otimes_{\mathbb{Q}_p}A[T]$ 中次数为 d 的多项式，其形式为

$$S_\sigma(T)=\prod_{1\le i\le d}(T-a_{\sigma,i}).$$

设 $S'(T)$ 为 $K\otimes_{\mathbb{Q}_p}A[T]$ 中次数为 d 的多项式。如果存在非负整数集 $(k_{\sigma_1},\dots,k_{\sigma_d})$，满足 $\sigma\colon K\hookrightarrow C$，使得 $S'(T)\le S(T)$，则称其为.....

$$S'(T)=(S'_\sigma(T)=\prod_{1\le i\le d}(T-a_{\sigma,i}-k_{\sigma,i}))_{\sigma:K\hookrightarrow C}.$$

很容易看出，这确实是这种形式的多项式偏序。

推论 A.9. 设 A 是 C 上的有限域。设 D 是 A 上的拟 de Rham (φ,Γ_K)-模。那么，对于 D 中任意一个秩相同的 (φ,Γ_K)-子模 D'，有 $\mathrm{Sen}_{D'}(T)\le\mathrm{Sen}_D(T)$，且等号成立当且仅当 $D'=D$。

此外，如果我们将准 de Rham 条件替换为抛物线型条件，同样的性质仍然成立。

证明。首先，假设 D 是形式为 $\mathrm{D}(M)(\delta)$ 的准 de Rham 对象。根据命题 A.6，我们可以针对 D 和 D' 扭曲 δ^{-1}，并可假设 $D=\mathrm{D}(M)$ 是某个带滤过的 $(\varphi,N,G_{L/K})$-模。根据 [Ber04，Lem III.1.3 和 Prop III.2.4]，存在一个单射态射 $i\colon M'\hookrightarrow M$，使得

$$D'\cong\mathbf{D}(M')$$

而自然包含 $D'\subseteq D$来自 $i\colon M'\hookrightarrow M$。由于 D'与 D的秩相同，单射 i必定是底层 $L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A$-模上的同构，且 $\mathrm{Fil}^jM'\subseteq\mathrm{Fil}^jM$。根据推论 A.7 的表述，有

$$\mathrm{Sen}_{D'}(T)\le\mathrm{Sen}_D(T),$$

且当且仅当 $\mathrm{Fil}^j M' = \mathrm{Fil}^j M$时等式成立，这意味着 i 是一个同构，并且 $D' = D$。

那么，对于 D 是抛物线型的情形，注意到

$$\mathrm{Sen}_D(T) = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Sen}_{\mathrm{gr}_i D}(T)$$

and

$$\mathrm{Sen}_{D'}(T) = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Sen}_{\mathrm{gr}_i D'}(T),$$

其中 $\mathcal{F}_i D' = D' \cap \mathcal{F}_i D$。因此 $\mathrm{Sen}^{\mathrm{gr}_i D'}(T) \leq \mathrm{Sen}^{\mathrm{gr}_i D}(T)$ 蕴含

$$\mathrm{Sen}_{D'}(T) \leq \mathrm{Sen}_D(T),$$

并且，当且仅当对每个 i 都有 $\mathrm{gr}D' = \mathrm{gr}D$ 时，等号成立，这等价于$D' = D$。□

Appendix B. The Bernstein Center

设 L 是特征为 0 的域，K 是一个 p-进局部域。设 d 是正整数，σ 是 $\mathrm{GL}_d(K)$ 在 L 上的一个超尖点表示，并设 $\varrho := \mathrm{rec}(\sigma)$ 是相应的 K 的 WD 表示，该表示经由局部朗兰兹对应得到，属于 τ 类型。

我们假设 L 包含 $\mu_{e_\tau}(\overline{L}) := \{e_\tau$个 $\overline{L}\}$中的 – 单位根。在本节中，我们始终将 $\mathrm{GL}_d(K)$简记为 GL_d。

引理 B.1. 设 $\psi : \mathrm{GL}_d \to L^\times$ 是 GL_d的一个非分歧特征，满足$\psi \otimes \sigma \cong \sigma$。那么存在唯一的元素 $\zeta \in \mu_{e_\tau}(L)$，使得

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{GL}_d &\to L^\times \\ B &\mapsto \zeta^{v_K(\det(B))}. \end{aligned}$$

证明. 注意到，由于 ψ 是非分歧的，它必定具有 $B \mapsto \zeta^{v_K(\det(B))}$ 的形式。因此，只需证明对于一个（从而对于任意一个）满足 $v_K(\det(B)) = 1$的矩阵$B \in \mathrm{GL}_d$，$\psi(B)$是一个 e_τ次单位根。

由局部朗兰兹对应可知，$\psi \otimes \sigma \cong \sigma$ 当且仅当 $\mathrm{rec}(\psi) \otimes \varrho \cong \varrho$。根据引理 3.5，$\mathrm{rec}(\psi)$在 W_τ 上的限制是平凡的，这意味着若 $e_\tau | v_K(\det(B))$，则 $\psi(B) = 1$。因此，对于任意满足 $v_K(\det(B))=1$ 的矩阵 $B \in \mathrm{GL}_d$，$\psi(B)$都是一个 e_τ次单位根。□

选取并固定 ζ作为 $\mu_{e_\tau}(L)$的一个生成元，并令 ψ_ζ表示该非分歧特征

$$B \mapsto \zeta^{v_K(\det(B))}.$$

那么，群 $\mathcal{G}_\pi := \{\psi \mid$ 是满足 $\psi \otimes \pi \cong \pi\}$ 由 ψ_ζ 生成的非分歧特征。选取一个同构 $\nu_\zeta : \psi_\zeta \otimes \sigma \xrightarrow{\sim} \sigma$。那么 ν_ζ 诱导出一个同构（为便于理解，也记作 ν_ζ）。

$$\nu_\zeta : \psi_\zeta^i \otimes \sigma \xrightarrow{\sim} \psi_\zeta^{i-1} \otimes \sigma.$$

那么 $\nu_\zeta^{e_\tau} : \sigma = \psi_\zeta^{e_\tau} \otimes \sigma \xrightarrow{\sim} \sigma$ 是 π 的一个自同构。因此，$\nu_\zeta^{e_\tau}$ 是一个标量 $c_\nu \in L$。

令 Π_σ 表示 GL_d-表示 $L[T,T^{-1}]\otimes_L\sigma$ 的族，其中 $L[T,T^{-1}]$ 是通用特征族：

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_d(K)&\to L[T,T^{-1}]\\ B&\mapsto T^{v_K(\det(B))}.\end{aligned}$$

那么根据 [Ber92，引理 22 和命题 27]，Bernstein 块 $\mathrm{Rep}^{[\sigma]}$(一般线性群$_d$) 同构于右 $\mathrm{End}^{\mathrm{GL}_d}(\Pi_\sigma)$-模的范畴。

定理 B.2. 设 $\mathfrak{Z}_\sigma := L[T^{e_\tau},T^{-e_\tau}]$。我们有一个自然包含。

$$\mathfrak{Z}_\sigma\subseteq L[T,T^{-1}]\subseteq\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_d}(\Pi_\sigma),$$

使得 $\mathrm{End}^{\mathrm{GL}_d}(\Pi_\sigma)$ 的中心为 $\mathfrak{Z}_\sigma$，即 $\mathrm{Rep}^{[\sigma]}(\mathrm{GL}_d)$ 的伯恩斯坦中心为 $\mathfrak{Z}_\sigma$。

证明。注意到 Π_σ 是一个自由的 $L[T,T^{-1}]$-模，且 GL_d 的作用是 $L[T,T^{-1}]$-线性的。因此，我们有一个自然包含。

$$L[T,T^{-1}]\subseteq\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_d}(\Pi_\sigma).$$

令 $\nu:=\nu_\zeta$，并令 $F:=L[T,T^{-1}]$。以下是一个 GL_d-等变的 L-线性双射映射。

$$\begin{aligned}\sigma\otimes_L F&\to(\sigma\otimes\psi_\zeta)\otimes_L F\\ x\otimes T^m&\mapsto\zeta^m x\otimes T^m\end{aligned}$$

在 $(\sigma\otimes\psi_\zeta)$ 上诱导出一个 F-模结构 $\otimes_L F$ 定义如下：

$$f(T)(x\otimes g(T)):=x\otimes f(\zeta T)g(T).$$

于是，ν 诱导出一个自同构（也记作 ν）

$$\begin{aligned}\nu:\sigma\otimes_L F&\to(\sigma\otimes\psi_\zeta)\otimes_L F\cong\sigma\otimes_L F\\ x\otimes g(T)&\mapsto\nu(x)\otimes g(T)\end{aligned}$$

在一般线性群 GL_d的表示上，使得对于任意 $x\in\sigma$和 $f(T)\ g(T)\in F$，都有

$$\begin{aligned}\nu\circ f(T)(x\otimes g(T))&=\nu(x\otimes f(T)g(T))\\&=\nu(x)\otimes f(T)g(T)\\&=f(\zeta^{-1}T)(\nu(x)\otimes g(T))\\&=f(\zeta^{-1})\circ\nu(x\otimes g(T))\end{aligned}$$

由此可得 $\nu\circ f(T)=f(\zeta^{-1}T)\circ\nu$。

根据 [Ber92，命题 28],中的计算，有

$$\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_d}(\Pi_\sigma)\cong\bigoplus_{0\le i\le e_\tau-1}F\nu^i$$

使得对于任意 $f(T)\in F$，都有 $\nu\circ f(T)=f(\zeta^{-1}T)\circ\nu$，且 $\nu^{e_\tau}=c_\nu$。

由于 T^{e_τ} 与 ν 交换，因此 $\mathrm{End}^{\mathrm{GL}_d}(\Pi_\sigma)$ 的中心包含 $\mathfrak{Z}_\pi$。另一方面，假设】【。

$$x=(f_0(T),f_1(T)\nu,\dots,f_{e_\tau-1}(T)\nu^{e_\tau-1})$$

是 $\mathrm{End}^{\mathrm{GL}_d}(\Pi_\sigma)$ 中心中的一个元素。因此 $x\circ T=T\circ x$ 意味着

$$f_i(T)T=f_i(T)\zeta^{-i}T,$$

这意味着对于 $i\neq0$，$f_i(T)=0$。然后在考虑方程之后

$$x\circ\nu=\nu\circ x,$$

有 $f_0(T)\in\mathfrak{Z}_\sigma$。我们的结论由此得出。 □

令 G^0 表示由 GL_d 的所有紧子群生成的子群（即 $G^0=\{B\in\mathrm{GL}_d|\ \det(B)\in\mathcal{O}_K^\times\}$），并令 Z 表示 GL_d 的中心。根据 [Ber92，命题 25]，$\sigma|_{G^0}$ 是有限长度的半单模，且每个不可约分支在 Z 的作用下保持稳定。接着，令 $\sigma^0\subset\sigma$ 为一个作为 G^0 表示的不可约分支，并令 $G_\sigma\subseteq\mathrm{GL}_d$ 为使 σ^0 在 G_σ 作用下保持稳定的最大正规子群。由于 G_σ 包含 ZG^0，因此 G_σ 在 GL_d 中具有有限指数。

命题 B.3. 自然映射

$$\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^{\mathrm{GL}_d}\sigma^0\to\sigma$$

由 $\sigma^0\hookrightarrow\sigma$ 诱导，是 GL_d 表示的一个同构。此外，有 $e_\tau=[\mathrm{GL}_d:\ G_\sigma]$。特别地，$e_\tau|d$。

证明。对每个 $B\in$一般线性群$_d$，令 $(\sigma^0)^B$ 表示 σ^0 作为 G_σ 表示的 B-共轭，即对每个 $x\in\sigma^0$，$C^B(x):=B^{-1}CB(x)$，并且 $C\in G_\sigma$；C^B 表示 $(\sigma^0)^B$中 C 的 B-共轭作用。

令 $\{B_1,\dots,B_e\}$ 为 GL_d/G_σ的一组代表元，其中 $e:=[\mathrm{GL}_d:\ G_\sigma]$。于是经由映射 $x\mapsto B(x)$，有 $(\sigma^0)^{B_i}\cong B_i(\sigma^0)$，并且

$$B_i(\sigma^0)\cap B_j(\sigma^0)=\emptyset,$$

对 $1\le i\ne j\le e$，根据 G_σ 的定义，并注意到 σ^0 不可约，可得

$$\sigma=\bigoplus_{1\le i\le e}B_i(\sigma^0)\cong\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^{\mathrm{GL}_d}\sigma^0.$$

记 $G'_\sigma:=\{B\in\mathrm{GL}_d\mid(\sigma^0)^B\sim\sigma^0\}$，并断言 $G'_\sigma\cong G_{\sigma^0}$。事实上，显然 $G_\sigma\subseteq G'_{\sigma^0}$。若 $G_\sigma\ne G'_\sigma$，由于 G'_σ/G_σ 是循环的，可以将 σ^0上的 G_σ-作用扩张为 G'_σ-作用（这种扩张与我们处理 WD 表示时所用的方法类似）。我们将扩张后的 G'_σ-作用记为 $\tilde{\sigma}^0$。于是自然映射

$$\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^{G'_\sigma}\sigma^0\to\tilde{\sigma}^0$$

是满射但不是单射。这意味着自然映射

$$\sigma\cong\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^{\mathrm{GL}_d}\sigma^0=\mathrm{Ind}_{G'_\sigma}^{\mathrm{GL}_d}(\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^{G'_\sigma}\sigma^0)\to\mathrm{Ind}_{G'_\sigma}^{\mathrm{GL}_d}\tilde{\sigma}^0$$

是满射但不是单射，这与 σ 的不可约性矛盾。

现在假设 δ 是定义在 L 上的一般线性群$_d$ 的非分歧特征。那么 $\sigma\otimes\delta\cong\sigma$ 当且仅当存在一个 G_σ-等变映射（根据 Frobenius 互反律）

$$\sigma^0\hookrightarrow\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^{\mathrm{GL}_d}(\sigma^0\otimes\delta|_{G_\sigma}).$$

由于 $\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^{\mathrm{GL}_d}(\sigma^0\otimes\delta|_{G_\sigma})\cong\bigoplus_{1\le i\le e}((\sigma^0)^{B_i}\otimes\delta|_{G_\sigma})$，因此 σ^0 的像必定属于 $(\sigma^0)\otimes\delta|_{G_{\sigma^0}}$。由此可得

$$\sigma\otimes\delta\cong\sigma$$

当且仅当 $\delta|_{G_\sigma}$ 是平凡的，这意味着 $e=e_\tau$。由此可得

$$e_\tau|d$$

因为 $d=[$一般线性群$_d:$ $ZG^0]$。

□

注 B.4.

(1) 对于任意闭点 $\delta\in\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z}_\sigma)$（即 $\delta\colon \mathfrak{Z}_\sigma\to k_\delta^\times$），在可能进行~扩张 k_δ之后，可以将 δ 延拓为 GL_d 的一个非分歧特征 δ。根据~~~

注意到 $f_\zeta(T) = T^{e_\tau} - 1$，那么 T^{e_τ} 在 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d}(\Pi_\sigma, \sigma)$ 上的右作用是平凡的。也就是说，T^{e_τ} 在 σ 上平凡作用。□

References

[BC09a] Jo ¨ ¨ ¨ *Families of Galois representations and Selmer* el Bellaıche *groups* 324 ´ ´ ´ ´ 2009
和 Gaetan Chenevier。《阿斯特里斯克》编号。法国数学会，。[BC09b] Olivier Brinon 和 Brian Conrad。关于 p-adic Hodge 理论的 CMI 暑期学校讲义。2009。[BD21] Christophe Breuil 和 Yiwen Ding。伯恩斯坦特征簇。*arXiv: Number Theory*，2021。[Ber92] Joseph Bernstein。草稿：p 进群表示。1992。[Ber02] Laurent Berger。p 进表示与微分方程。
´ p ´ ´ *Inventiones* , ( ): – 。[Ber04] *Mathematicae* 148 2 219 284, 2002
Laurent Berger。´微分方程 p -adic 与 (φ,N)-滤过模。2004。[BGR84] Siegfried Bosch、Ulrich G ¨ *Non-archimedean Analysis:* untzer 和 Reinhold *A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry*
Remmert。《》。数学基础原理丛书。美国政府印刷局，1984。[BHS17a] Christophe Breuil、Eugen Hellmann 和 Benjamin Schraen。特征簇上的光滑性与经典性。*Inventiones Mathematicae*，209(1):197–274，2017。[BHS17b] Christophe Breuil、Eugen Hellmann 和 Benjamin Schraen。三角型簇的模解释。*Mathematische Annalen*，367(3-4):1587–1645，2017。[BL95] Arnaud Beauville 和 Yves Laszlo。一个下降 *C. R. Acad. Sci. Paris* , ( ): – 。[引理。*Sér. I Math.* 320 3 335 340, 1995

BLGGT14] Thomas Barnet-Lamb、Toby Gee、David Geraghty 和 Richard Taylor。$l = p$ 的局部-整体相容性，II。*Annales Scientifiques de l'École Normale Superiéure*，47:165–179，2014。[BLGHT11] Thomas Barnet-Lamb、David Geraghty、Michael Harris 和 Richard Taylor。卡拉比-丘簇族与潜在自守性 II。 *Publications of The Research Institute for Mathematical Sciences* 47 29 98, 2011 , : – 。[BS07]

Christophe Breuil 和 Peter Schneider。迈向 p 进朗兰兹函子性。
Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik，(610):149–180，2007。[Buz10] Kevin Buzzard。特征簇，2010。[CC99] Fr´ed´eric Cherbonnier 和 Pierre Colmez。局部域的 p 进表示的岩泽理论。p，12(1):241–268，1999 年 12 月。[CEG+18] Ana Caraiani、Matthew Emerton、Toby Gee、David Geraghty、Vytautas Pa˘sk¯unas 和 Sug Woo Shin。拼接与 GL( ) 的 p 进朗兰兹纲领。
p $_2$ $\mathbb{Q}_p$ *Com-* , ( ): – 。[CF00] Pierre *positio Mathematica* 154 3 503 548, 2018
Colmez 和 Jean-Marc Fontaine。半稳定 p 进表示的构造。*Inventiones Mathematicae*，140:1–43，2000。[Che04] Ga ¨ p $_n$ *Journal für* etan *die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2004
Chenevier。GL 的自守形式的 p 进族。
¨ p $_n$ *Journal für* , 。[CHT08] Laurent *die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2004
Clozel、Michael Harris 和 Richard Taylor。某些自守模伽罗瓦表示的 l -adic 提升的自守性。
Publications Mathématiques del'IHÉS，108:1–181，2008。[Col08] Pierre Colmez。维数为 的三角型表示。
´ 2 *Astérisque* 319 213 258, , : – 。[Dat99]
2008
Jean-Fran ` ` *Journal für die* cois Dat。取 *reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 1999 61 83, 1999
值于伯恩斯坦中心的特征。
` ` *Journal für die* , : – 。[Eme06] *reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 1999 61 83, 1999
Matthew Emerton。p-adic 约化群的局部解析表示的雅克模块 I：构造与初步性质。
Annales scientifiques de l'ÉcoleNormale Supérieure，第 4 辑，39(5):775–839，2006。[FO] Jean-Marc Fontaine 和 Yi Ouyang。p-adic 伽罗瓦表示理论，见 *http://staff.ustc.edu.cn/ yiouyang/galoisrep.pdf*。[Hel16] Eugen Hellmann。
p φ Γ *Com-* -adic 伽罗瓦表示族与 (,)- *mentarii Mathematici Helvetici* 91 721 749, 2016
模。 p φ Γ *Com-* , : – 。[HH13] *mentarii Mathematici Helvetici* 91 721 749, 2016
Urs Hartl 和 Eugen Hellmann。半稳定 p-adic 伽罗瓦表示的泛族。*arXiv: Number Theory*，2013。[HS16] Eugen Hellmann 和 Benjamin Schraen。固定权重的潜在晶体表示的稠密性。*Compositio Mathematica*，152(8):1609–1647，2016。

[HT01] Michael Harris 和 Richard Taylor。*The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties. (AM-151) Volume 151*，《数学年刊研究》。普林斯顿大学出版社，2001。[Hub96] Roland Huber。《*Étale Cohomology of Rigid Analytic Varieties and Adic Spaces*》。数学专题丛书。Vieweg+Teubner 出版社，威斯巴登，1996。[Kis09] Mark Kisin。有限平坦群概形的模空间与模性。*Annals of Mathematics* 170 3 1085，( ): –1180，2009。[KPX14] Kiran S. Kedlaya、Jonathan Pottharst 和 Liang Xiao。算术族的 (φ,Γ)-模的上同调。*Journal of the American Mathematical Society*，27:1043–1115，2014。[Liu07] Ruochuan Liu。Robba 环上的 (φ,Γ)-模的上同调与对偶。*International Mathematics Research Notices*，第 3 期，2007。[Loe17] David Loeffler。超收敛代数自守形式。*Proceedings of The London Mathematical Society* 114 399 400, 2017，：–。[MFK82] David Mumford、John Fogarty 和 Frances Kirwan。《*Geometric Invariant Theory*》。数学及其边界领域成果。施普林格出版社，1982。[ST03] Peter Schneider 和 Jeremy Teitelbaum。p-adic 分布代数与容许表示。*Inventiones Mathematicae*，153:145–196，2003。[Vyt05] Vytautas Paˇsk¯unas。GL $_n$ *Pro-* 的超尖点表示的类型唯一性。*ceedings of the London Mathematical Society* 2005 $_n$ *Pro-* ，。[*ceedings of the London Mathematical Society* 2005 Wed00] Torsten Wedhorn。*p*-adic 域上 GL(n) 的局部朗兰兹对应。*arXiv: Algebraic Geometry*，2000。