arXiv:2304.06532v1 [cs.IT] 13 Apr 2023

$_m$在 $\mathfrak{R}^{s,m} = \sum v_m^{\varsigma-1}\mathcal{A}_{m-1}$ 上的线性码，其中 $v_m^m = v_{m^{\varsigma=1}}$

Mouna. Malki *和 Karima. Chatouh †

2023年4月14日

摘要

本文的主要目标是将先前定义的码族从环 $\mathfrak{R} = \sum v_5^s\mathcal{A}_4$ 上推广到 $_4$ $_m$ $\mathfrak{R}^{s,m} = \sum v_m^{\varsigma-1}\mathcal{A}_{m-1}$，并提出一个更广泛的框架 $_{s=0}$ $_{\varsigma=1}$，以便在编码理论中实现该码族，同时从这一广义码族中推导出更多性质，包括循环码和准循环码的构造。此外，我们还将介绍这一扩展码族的具体应用。

关键词：交换弗罗贝尼乌斯环、线性码、格雷映射。

1 引言

Bustomi 等人 [1] 扩展了 Li 等人 [3] 的工作，将环 $\mathbb{Z}_4 + u\mathbb{Z}_4 + v\mathbb{Z}_4 + uv\mathbb{Z}_4$ 推广为包含额外元素 $w\mathbb{Z}_4$、$uw\mathbb{Z}4$、$vw\mathbb{Z}_4$ 和 $uvw\mathbb{Z}_4$，同时施加条件 $u_2 = u$、$v_2 = v$、$w_2 = w$、$uv = vu$、$uw = wu$ 和 $vw = wv$。作者研究了该环上的线性码，并推导出一些相关性质。

此外，Ndiaye 和 Gueye [7], 研究了环 $F_p^k + vF_p^k + v^2F_p^k + \cdots + v^rF_p^k$ 上的循环码，其中 $v^{r+1} = v$, p为素数，$r \geq 1$且 $gcd(r; p) = 1$。Ndiaye 和 Gueye [7]推广了 [4], 的结果，即：他们证明这些码均由主理想生成，给出了这些码的生成多项式，并证明幂等元取决于上述环 [8] 的幂等元。

在我们的研究中，我们将 Bustomi 等人 [1] 研究的环扩展为包含环 $\mathcal{A}_4$。我们将环 $F_p^k + vF_p^k + v^2F_p^k + \cdots + v^rF_p^k$中的 F_p^k替换为 $\mathcal{A}_4$，这

*数学与信息学学院，数学系，Mostefa Ben Boula¨ıd大学，巴特纳2，巴特纳，阿尔及利亚。电子邮箱：karima.chatouh@gmail.com

†数学与信息学学院，数学系，Mostefa Ben Boula¨ıd大学，巴特纳2，巴特纳，阿尔及利亚。电子邮箱：malki mouna@yahoo.com -

此前已由 Ndiaye 等 [7] 进行研究。受 [5], 启发，我们结合4这两个环，探究环 $\mathfrak{R} = \sum v_5^s \mathcal{A}_4$ 的推广，其中 $v_5^5 = v_{5\circ}$ $s{=}0m$我们的方法促使我们研究广义环 $\mathfrak{R}^{s,}$ $^m = \sum v_m^{\varsigma-1}\mathcal{A}_{m-1}{}^{\varsigma=1}$的性质，其中 $v_m^m = v_{m\circ}$ 在接下来的章节中，我们将深入探讨通过这一方法发现的新性质。

本文的灵感源于 [5]和 [5]中的研究发现。我们的重点是m研究环 $\mathfrak{R}^{s,}$ $^m = \sum v_m^{\varsigma-1}\mathcal{A}_{m-1}$ ，其中 $v_m^m = v_m$ 是由两个环$\varsigma{=}1$和 $\mathbb{Z}_{4^s}$ $\mathcal{A}_{m-1}$复合而成的。这为构造环提供了一种新方法，通过这种方法，我们发现了关于幂等元的新结果和新发现。此外，我们利用中国剩余定理以及基于复合环的新方法，揭示了 $\mathfrak{R}^{s,}$ ^{m}上线性码的新结构性质。我们还利用新的幂等元和格雷像构造了生成矩阵。本文通过三个应用展示了我们的研究发现和环的构造。

本文结构如下：首先，第 2 节介绍预备知识。随后，第 3 节定义了从 $\mathfrak{R}^{s,}$ ^{m} 到 $\mathbb{Z}_{4^s}^{3\times 2^{m-1}}$ 的两个格雷映射的复合，并建立了 $\mathfrak{R}^{s,}$ ^{m}上的一个线性码，同时给出了生成矩阵和格雷像。第 3 节则.....在第 4 节中，我们研究了 $\mathfrak{R}^{s,}$ ^{m}上单纯形码所生成的准循环码。此外，我们还展示了一些应用和示例。

2 预备知识

本研究的重点是利用环 $\mathcal{A}_{m-1}$ 上的线性码来构造环 $\mathfrak{R}^{s,m}$ 上的线性码。

文献 [5], 以更一般的形式给出了 $\mathfrak{R}^{s,m}$ 的定义。我们有

环 $\mathfrak{R}^{s,m} = \mathcal{A}_{m-1}+v_m\mathcal{A}_{m-1}+\ldots+v_m^{m-1}\mathcal{A}_{m-1}$，其中 $\mathcal{A}_{m-1} = \mathbb{Z}_{4^s}[v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}]/\langle v_i^2 = v_i$、$v_i v_j = v_j v_i\rangle$、 i、 $j = \overline{1、\ m-1}$、 $i \neq j$ 和 $s \geq 1$ 是交换弗罗贝尼乌斯环，且 $|\mathfrak{R}^{s,m}| = 4^{ms2^{m-1}}$。我们也可以将 $\mathfrak{R}^{s,m}$ 视为环 $\mathbb{Z}_{4^s}[v_1, v_2 \ldots v_m]/ < v_i^2 - v_i$ 上多项式环的商环，其中 $v_m^m - v_m >$，且 $i = 1、\ m-1$。

根据交换环 $\mathfrak{R}^{s,m}$ 中正交非零幂等元的定义，我们可以陈述如下命题。

命题 2.1 设 κ_1、 κ_2 和 κ_3 是 $\mathfrak{R}^{s,}$ ^{m} 中的三个元素。那么，对于 $i = 1$，3 有 $\kappa_{i\circ}$

在 $\mathfrak{R}^{s,m}$ 上满足皮尔斯条件的正交非零幂等元，其中

$$\kappa_1 = \prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)\frac{1}{m-1}[v_m + v_m^2 + \ldots + v_m^{m-1}],$$

$$\kappa_2 = \prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)\frac{-1}{m-1}[v_m + v_m^2 + \ldots - (m-2)v_m^{m-1}],$$

and

$$\kappa_3 = 1 - \prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)v_m^{m-1}.$$

证明。由 [[5],命题 1], 可得

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\kappa_i &= 1 + \frac{1}{m-1}\prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)\left[v_m + v_m^2 + \ldots - v_m - v_m^2 - \ldots\right. \\
&\quad \left. + (m-2)v_m^{m-1} - (m-1)v_m^{m-1}\right] \\
&= 1 + \frac{1}{m-1}\prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)\left[v_m^{m-1} + (m-2)v_m^{m-1} - (m-1)v_m^{m-1}\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. 我们证明 $\kappa_i^2 = \kappa_i$, 对于 $i = 1, \overline{3}$, 我们有

$$\begin{aligned}
\kappa_1^2 &= \left[\prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)\right]^2 \frac{1}{(m-1)^2}\left(v_m + v_m^2 + \ldots + v_m^{m-1}\right)\left(v_m + v_m^2 + \ldots + v_m^{m-1}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{m-1}\left((1-v_i)\frac{1}{(m-1)^2}(v_m^2 + v_m^3 + v_m^4 + \ldots + v_m^{m-1} + v_m^m + v_m^3 + v_m^4 + \ldots\right. \\
&\quad \left. + v_m^{m-1} + v_m^m + v_m^{m+1} + \ldots + v_m^m + v_m^{m+1} + v_m^{m+2} + \ldots + v_m^{2(m-1)}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)\frac{1}{(m-1)^2}\left(v_m^2 + 2v_m^3 + 3v_m^4 + \ldots + (j-1)v_m^j + \right. \\
&\quad \ldots + (m-2)v_m^{m-1} + (m-1)v_m^m + (m-2)v_m^{m+1} + (m-3)v_m^{m+2} + \\
&\quad \left. \ldots + (m-j)v_m^{m+j-1} + ... + v_m^{m-1}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)\frac{1}{(m-1)^2}\left[(m-1)v_m + (m-1)v_m^2 + (m-1)v_m^3 + (m-1)v_m^4 + \right. \\
&\quad \left. \ldots + (m-1)v_m^j + \ldots + (m-1)v_m^{m-1} + (m-1)v_m^m\right] \\
&= \kappa_1.
\end{aligned}$$

对于 κ_2, 论证类似。

同样，对于 κ_3，我们有

$$\begin{aligned}\kappa_3^2 &= \left[1-\prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)v_m^{(m-1)}\right]^2\\ &= 1-2\prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)v_m^{m-1}+\prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)v_m^{m-1}\\ &= 1-\prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)v_m^{m-1}\\ &= \kappa_3.\end{aligned}$$

3. 现在，我们正在验证 $\kappa_i\cdot\kappa_j=0$，用于 $1\le i\neq j\le 3$,

$$\begin{aligned}\kappa_1\cdot\kappa_2 &= \prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)\frac{1}{m-1}(v_m+v_m^2+\ldots+v_m^{m-1})\\ &\quad \prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)(\frac{-1}{m-1})(v_m+v_m^2+\ldots-(m-2)v_m^{m-1})\\ &= \kappa_1\left[-\kappa_1+\prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)v_m^{m-1}\right]\\ &= -\kappa_1^2+\kappa_1\\ &= 0.\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}\kappa_2\cdot\kappa_3 &= \prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)(\frac{-1}{m-1})(v_m+v_m^2+\ldots-(m-2)v_m^{m-1})\left[1-\prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)v_m^{m-1}\right]\\ &= \kappa_2-\left[\prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i)\right]^2(\frac{1}{m-1})(-v_m^m-v_m^{m+1}-\ldots+(m-2)v_m^{2(m-1)})\\ &= \kappa_1-\kappa_1=0.\end{aligned}$$

对于 $\kappa_1\cdot\kappa_3=0.$，类似的论证同样成立。 ■

根据命题 2.1，我们将 $\mathfrak{R}^{s,m}$ 分解为三个分量的直和

$$\mathfrak{R}^{s,m}=\kappa_1\mathfrak{R}^{s,m}\oplus\kappa_2\mathfrak{R}^{s,m}\oplus\kappa_3\mathfrak{R}^{s,m}. \tag{1}$$

此外，我们可以将环 $\mathfrak{R}^{s,\ m}$ 表示为

$$\mathfrak{R}^{s,m}=\kappa_1\mathcal{A}_{m-1}\oplus\kappa_2\mathcal{A}_{m-1}\oplus\kappa_3\mathcal{A}_{m-1}. \tag{2}$$

考虑 $\mathcal{A}_{m-1}$的以下幂等元,

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \prod_{i=1}^{m-1}(1-v_i) \\
\eta_i &= v_i\prod_{j=1}^{m-1}(1-v_j)\,,\ i\neq j,\ 1\leq i\leq m-1,\ |\eta_i| = \begin{pmatrix} 1 \\ m-1 \end{pmatrix} \\
\eta_{ij} &= v_iv_j\prod_{k=1}^{m-1}(1-v_k)\,,\ i\neq j\neq k,\ 1\leq i,j\leq m-1,\ |\eta_{ij}| = \begin{pmatrix} 2 \\ m-1 \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
\eta_{2^{m-1}-1} &= \prod_{k=1}^{m-1}v_k,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
|\eta_0|+|\eta_i|+|\eta_{ij}|+\ldots+|\eta_{2^{m-1}-1}| &= 1+\begin{pmatrix} 1 \\ m-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ m-1 \end{pmatrix}+\ldots+1 \\
&= 2^{m-1}.
\end{aligned}$$

$_{2^{m-1}-1}$上面的元素也两两正交，因为 $\eta_\iota\eta_\zeta=0$ 和 $\sum\ \eta_\iota=1$，对于 $\iota\neq\zeta_{\iota=0}$，并且 ι, $\zeta\in\{0,i,ij,\ldots,2^{m-1}-1\}$。因此，根据中国剩余定理，我们得到

$$\mathcal{A}_{m-1}=\eta_0\mathcal{A}_{m-1}\oplus\eta_i\mathcal{A}_{m-1}\oplus\ldots\oplus\eta_{2^{m-1}-1}\mathcal{A}_{m-1}, \tag{3}$$

and

$$\mathcal{A}_{m-1}=\eta_0\mathbb{Z}_{4^s}\oplus\eta_i\mathbb{Z}_{4^s}\oplus\ldots\oplus\eta_{2^{m-1}-1}\mathbb{Z}_{4^s}. \tag{4}$$

引理2.2 *[5, 7]* 元素 $\tau=\kappa_1\eta_\iota+\kappa_2\eta_\zeta+\kappa_3\eta_\lambda$ 在 $\mathfrak{R}^{s,m}[x]/(x^n-1)$ 中是一个幂等元，当且仅当 η_ι、η_ζ 和 η_λ 是 $\mathcal{A}_{m-1}[x]/(x^n-1)$ 中的幂等元，对所有 ι、ζ 和 $\lambda\in\{0,i,ij,\ldots,2^{m-1}-1\}$. 均成立。

证明。如果 $\tau=\kappa_1\eta_\iota+\kappa_2\eta_\zeta+\kappa_3\eta_\lambda$ 是 $\mathfrak{R}^{s,\ m}[x]/(x^n-1)$ 中的幂等元，那么

$$\begin{aligned}
\tau^2=[\kappa_1\eta_\iota+\kappa_2\eta_\zeta+\kappa_3\eta_\lambda]^2 &= \kappa_1\eta_\iota^2+\kappa_2\eta_\zeta^2+\kappa_3\eta_\lambda^2 \\
&= \kappa_1\eta_\iota+\kappa_2\eta_\zeta+\kappa_3\eta_\lambda \\
&= \tau,
\end{aligned}$$

这意味着 $\eta_\iota^2=\eta_\iota$、$\eta_\zeta^2=\eta_\zeta$ 和 $\eta_\lambda^2=\eta_\lambda$。

反之，如果 η_ι、 η_ζ 和 η_λ 是 $\mathcal{A}_{m-1}[x]/(x^n-1)$中的幂等元，对于所有 ι、ζ 和 $\lambda \in \{0, i, ij, \ldots, 2^{m-1}-1\}$，那么

$$[\kappa_1\eta_\iota + \kappa_2\eta_\zeta + \kappa_3\eta_\lambda]^2 = [\kappa_1\eta_\iota + \kappa_2\eta_\zeta + \kappa_3\eta_\lambda].$$

哪个结果 $[\kappa_1\eta_\iota + \kappa_2\eta_\zeta + \kappa_3\eta_\lambda]$ 是 $\mathfrak{R}^{s,\ m}[x]/(x^n-1)$ 中的幂等元。 ■

2.1 关于 $\mathfrak{R}^{s,\ m}$ 上线性码的格雷映射和格雷像

根据 [2] 和 [7], [6] ，我们将构造格雷映射，并以能够为我们提供保距等距映射的方式定义重量。根据 [2,5]中描述的方法和公式1， $\mathfrak{R}^{s,\ m}$ 中的任意元素都可以表示为

$$\mathfrak{R}^{s,m} = \sum_{t=0}^{m-1} v_m^t \left[\mathbb{Z}_{4^s} + \left(\sum_{i=1}^{m-1} v_i\right)\mathbb{Z}_{4^s} + \left(\sum_{i=1}^{m-2} v_i \sum_{j=i+1}^{m-1} v_j\right)\mathbb{Z}_{4^s} + \cdots + \prod_{k=1}^{m-1} v_k \mathbb{Z}_{4^s}\right]$$

.

令 $r \in \mathfrak{R}^{s,m}$，则

$$\begin{aligned} r &= \kappa_1 \sum_{t=0}^{m-1} v_m^t \left[a_0 + \sum_{i=1}^{m-1} v_i a_1^i + \sum_{i=1}^{m-2}\sum_{j=i+1}^{m-1} v_i v_j a_2^{ij} + \ldots + \prod_{k=1}^{m-1} v_k a_{2^{(m-1)}-1}\right] \\ &+ \kappa_2 \sum_{t=0}^{m-1} v_m^t \left[b_0 + \sum_{i=1}^{m-1} v_i b_1^i + \sum_{i=1}^{m-2}\sum_{j=i+1}^{m-1} v_i v_j b_2^{ij} + \ldots + \prod_{k=1}^{m-1} v_k b_{2^{(m-1)}-1}\right] \\ &+ \kappa_3 \sum_{t=0}^{m-1} v_m^t \left[c_0 + \sum_{i=1}^{m-1} v_i c_1^i + \sum_{i=1}^{m-2}\sum_{j=i+1}^{m-1} v_i v_j c_2^{ij} + \ldots + \prod_{k=1}^{m-1} v_k c_{2^{(m-1)}-1}\right], \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} r &= \sum_{t=0}^{m-1} v_m^t \left[\kappa_1 a_0 + \kappa_1\left(\sum_{i=1}^{m-1} v_i a_1^i\right) + \kappa_1\left(\sum_{i=1}^{m-2}\sum_{j=i+1}^{m-1} v_i v_j a_2^{ij}\right) + \ldots + \kappa_1\left(\prod_{k=1}^{m-1} v_k a_{2^{(m-1)}-1}\right)\right] \\ &+ \sum_{t=0}^{m-1} v_m^t \left[\kappa_2 b_0 + \kappa_2\left(\sum_{i=1}^{m-1} v_i b_1^i\right) + \kappa_2\left(\sum_{i=1}^{m-2}\sum_{j=i+1}^{m-1} v_i v_j b_2^{ij}\right) + \ldots + \kappa_2\left(\prod_{k=1}^{m-1} v_k b_{2^{(m-1)}-1}\right)\right] \\ &+ \sum_{t=0}^{m-1} v_m^t \left[\kappa_3 c_0 + \kappa_3\left(\sum_{i=1}^{m-1} v_i c_1^i\right) + \kappa_3\left(\sum_{i=1}^{m-2}\sum_{j=i+1}^{m-1} v_i v_j c_2^{ij}\right) + \ldots + \kappa_3\left(\prod_{k=1}^{m-1} v_k c_{2^{(m-1)}-1}\right)\right], \end{aligned}$$

由公式 2 可得

$$\begin{aligned} r &= \Bigg[\eta_0\left(\kappa_1 a_0 + \kappa_2 b_0 + \kappa_3 c_0\right) + \sum_{i=1}^{m-1} \eta_i v_i \left(\kappa_1(a_0 + a_1^i) + \kappa_2(b_0 + b_1^i) + \kappa_3(c_0 + c_1^i)\right) \\ &+ \cdots + \eta_{2^{(m-1)}-1} \prod_{k=1}^{m-1} v_k \left(\kappa_1(a_0 + a_1^i + \ldots + a_{2^{(m-1)}-1}) + \kappa_2(b_0 + b_1^i + \ldots + b_{2^{(m-1)}-1})\right. \\ &\left. + \kappa_3(c_0 + c_1^i + \ldots + c_{2^{(m-1)}-1})\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

从 $\mathfrak{R}^{s,\ m}$ 到 $\mathbb{Z}_{4^s}^{3\times 2^{m-1}}$ 的格雷映射定义为

$$\begin{array}{rccccc} \phi=\Psi_2\circ\Psi_1 & : & \mathfrak{R}^{s,m} & \xrightarrow{\Psi_1} & \mathcal{A}_{m-1}^3 & \xrightarrow{\Psi_2} & \mathbb{Z}_{4^s}^{3\times 2^{m-1}} \\ & & r & \mapsto & \Psi_1(r) & \mapsto & \phi(r), \end{array} \tag{5}$$

其中 $\Psi_1(r) = (a(r)\ b(r)\ c(r))$,

其中

$$\begin{aligned} a(r) &= \left(a_0, a_1^i, \ldots a_{2^{(m-1)}-1}\right), \\ b(r) &= \left(b_0, b_1^i, \ldots b_{2^{(m-1)}-1}\right), \\ a(r) &= \left(c_0, c_1^i, \ldots c_{2^{(m-1)}-1}\right). \end{aligned}$$

此外, $\phi(r) = \Psi_2(a(r)\ b(r)\ c(r)) = (a_0, b_0, c_0, a_0+a_1^i, b_0+b_1^i, c_0+c_1^i, \ldots, a_0+a_1^i+\cdots+a_{2^{(m-1)}-1}, b_0+b_1^i+\cdots+b_{2^{(m-1)}-1}, c_0+c_1^i+\cdots+c_{2^{(m-1)}-1})$。

这个格雷映射可以自然地逐坐标扩展到 n 元组, 进而我们可以定义

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & (R^{s,m})^n & \to & \mathbb{Z}_{4^s}^{n3\times 2^{m-1}} \\ & & (r_1, r_2 \ldots, r_n) & \mapsto & \Phi(r_1, r_2 \ldots, r_n), \end{array} \tag{6}$$

其中

$$\Phi(r_1, r_2 \ldots, r_n) = \Psi_2\left((a(r_1), b(r_1), c(r_1)), (a(r_2), b(r_2), c(r_2)), \ldots, (a(r_n), b(r_n), c(r_n))\right). \tag{7}$$

根据公式7, 我们有 $\Phi(r_1, r_2 \ldots, r_n)$ 等于,

$(a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^n, a_0^1+a_1^{1i}, a_0^2+a_1^{2i}, \ldots, a_0^n+a_1^{ni}, \ldots, a_0^1+a_1^{1i}+\cdots+a_{2^{(m-1)}-1}^1, a_0^2+a_1^{2i}+\cdots+a_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, a_0^n+a_1^{ni}+\cdots+a_{2^{(m-1)}-1}^n;\ b_0^1, b_0^2, \ldots, b_0^n, b_0^1+b_1^{1i}, b_0^2+b_1^{2i}, \ldots, b_0^n+b_1^{ni}, \ldots, b_0^1+b_1^{1i}+\cdots+b_{2^{(m-1)}-1}^1, b_0^2+b_1^{2i}+\cdots+b_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, b_0^n+b_1^{ni}+\cdots+b_{2^{(m-1)}-1}^n c_0^1, c_0^2, \ldots, c_0^n, c_0^1+c_1^{1i}, c_0^2+c_1^{2i}, \ldots, c_0^n+c_1^{ni}, \ldots, c_0^1+c_1^{1i}+\cdots+c_{2^{(m-1)}-1}^1, c_0^2+c_1^{2i}+\cdots+c_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, c_0^n+c_1^{ni}+\cdots+c_{2^{(m-1)}-1}^n)$。

例 2.3

2.2 关于 $\mathfrak{R}^{s,m}$ 的线性码

长度为 n 、定义在 $\mathfrak{R}^{s,m}$ 上的码 $\mathfrak{C}$ 是 $(\mathfrak{R}^{s,m})^n$ 的一个 $\mathfrak{R}^{s,m}$-子模。我们用记号 $\mathfrak{C}^\perp$ 表示 $\mathfrak{C}$ 的对偶码, 使得

$$\mathfrak{C}^\perp = \{x \in (R^{s,m})^n : \langle x, y\rangle_{R^{s,m}} = 0, y \in \mathfrak{C}\}.$$

我们需要定义码 $\mathcal{C}$、$\overline{\mathcal{C}}$ 和 $\overline{\mathcal{C}}$, 如下所示

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{a \in \mathcal{A}_{m-1})^n | \exists b, c \in \mathcal{A}_{m-1})^n | \kappa_1 a + \kappa_2 b + \kappa_3 c \in \mathfrak{C}\}, \\ \overline{\mathcal{C}} &= \{b \in \mathcal{A}_{m-1})^n | \exists b, c \in \mathcal{A}_{m-1})^n | \kappa_1 a + \kappa_2 b + \kappa_3 c \in \mathfrak{C}\}, \\ \overline{\overline{\mathcal{C}}} &= \{c \in \mathcal{A}_{m-1})^n | \exists a, b \in \mathcal{A}_{m-1})^n | \kappa_1 a + \kappa_2 b + \kappa_3 c \in \mathfrak{C}\}. \end{aligned}$$

下面的结果很有用 [?], , 并将在本文后续部分中使用

定理 2.4 设 $\mathfrak{C}$ 是长度为 n 、定义在 $\mathfrak{R}^{s,\ m}$上的线性码。那么我们有如下唯一分解

$$\mathfrak{C} = \kappa_1 \mathcal{C} \oplus \kappa_2 \overline{C} \oplus \kappa_3 \overline{\overline{C}}, \tag{8}$$

and

$$\mathfrak{C}^{\perp} = \kappa_1 \mathcal{C}^{\perp} \oplus \kappa_2 \overline{\mathcal{C}^{\perp}} \oplus \kappa_3 \overline{\overline{\mathcal{C}^{\perp}}}. \tag{9}$$

使得

$$\mathcal{C} = \eta_0 \mathscr{C}_0 \oplus \eta_i \mathscr{C}_i \oplus \cdots \oplus \eta_{2^{(m-1)}-1} \mathscr{C}_{2^{m-1}-1}, \tag{10}$$

$$\overline{C} = \eta_0 \overline{\mathscr{C}}_0 \oplus \eta_i \overline{\mathscr{C}}_i \oplus \cdots \oplus \eta_{2^{(m-1)}-1} \overline{\mathscr{C}}_{2^{m-1}-1}, \tag{11}$$

$$\overline{\overline{C}} = \eta_0 \overline{\overline{\mathscr{C}}}_0 \oplus \eta_i \overline{\overline{\mathscr{C}}}_i \oplus \cdots \oplus \eta_{2^{(m-1)}-1} \overline{\overline{\mathscr{C}}}_{2^{m-1}-1}. \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_0 &= \left\{a_0 \in \mathbb{Z}_{4^s}^n, \forall a \in \mathcal{C}\right\}, \\
\mathscr{C}_i &= \left\{a_0 + a_1^i \in \mathbb{Z}_{4^s}^n, \forall a \in \mathcal{C}\right\}, i \in \{1, \ldots, m-1\}, \\
&\vdots \\
\mathscr{C}_{2^{m-1}-1} &= \left\{a_0 + a_1^i + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1} \in \mathbb{Z}_{4^s}^n, \forall a \in \mathcal{C}\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathscr{C}}_0 &= \left\{b_0 \in \mathbb{Z}_{4^s}^n, \forall b \in \overline{\mathcal{C}}\right\}, \\
\overline{\mathscr{C}}_i &= \left\{b_0 + b_1^i \in \mathbb{Z}_{4^s}^n, \forall b \in \overline{\mathcal{C}}\right\}, i \in \{1, \ldots, m-1\}, \\
&\vdots \\
\overline{\mathscr{C}}_{2^{m-1}-1} &= \left\{b_0 + b_1^i + \cdots + b_{2^{(m-1)}-1} \in \mathbb{Z}_{4^s}^n, \forall b \in \overline{C}\right\},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\mathscr{C}}}_0 &= \left\{c_0 \in \mathbb{Z}_{4^s}^n, \forall c \in \overline{\overline{C}}\right\}, \\
\overline{\overline{\mathscr{C}}}_i &= \left\{c_0 + c_1^i \in \mathbb{Z}_{4^s}^n, \forall c \in \overline{\overline{C}}\right\}, i \in \{1, \ldots, m-1\}, \\
&\vdots \\
\overline{\overline{\mathscr{C}}}_{2^{m-1}-1} &= \left\{c_0 + c_1^i + \cdots + c_{2^{(m-1)}-1} \in \mathbb{Z}_{4^s}^n, \forall c \in \overline{\overline{C}}\right\}.
\end{aligned}$$

结合方程 8、10、11 和 12，我们得到

$$\mathfrak{C} = \kappa_1 \left(\bigoplus_{k=0}^{2^{m-1}-1} \eta_k \mathscr{C}_k \right) \oplus \kappa_2 \left(\bigoplus_{k=0}^{2^{m-1}-1} \eta_k \overline{\mathscr{C}}_k \right) \oplus \kappa_3 \left(\bigoplus_{k=0}^{2^{m-1}-1} \eta_k \overline{\overline{\mathscr{C}}}_k \right) \tag{13}$$

根据公式 13，我们有

推论 2.5 对于 $i=1$、3 和 $\zeta \in \{0, i, ij, \ldots, 2^{m-1}-1\}$，元素 $\kappa_i \eta_\zeta$ 是 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}, \mathfrak{m}$ 的幂等元。

证明。同命题2.1、】【 ■

推论 2.6 设 $\mathfrak{C}$ 是一个长度为 n 的 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}, \mathfrak{m}$ 上的线性码。则 $\Phi(\mathfrak{C}) = \Psi_1(\mathcal{C}) \otimes \Psi_2\left(\overline{\mathcal{C}}\right) \otimes \Psi_2\left(\overline{\overline{\mathcal{C}}}\right)$ 且 $|\mathfrak{C}| = |\Psi_1(\mathcal{C})\ ||\Psi_2\left(\overline{\mathcal{C}}\right)||\Psi_2\left(\overline{\overline{\mathcal{C}}}\right)|$。

定理 2.7 设 $\mathfrak{C}$ 为长度为 n 的 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}, \mathfrak{m}$线性码。则 $\Phi(\mathfrak{C}) = \left(\bigotimes_{j=0}^{2^{m-1}-1} \mathscr{C}_j\right) \otimes \left(\bigotimes_{j=0}^{2^{m-1}-1} \overline{\mathscr{C}_j}\right) \otimes \left(\bigotimes_{j=0}^{2^{m-1}-1} \overline{\overline{\mathscr{C}_j}}\right)$ 和 $|\mathfrak{C}| = |\mathscr{C}_0| \ldots |\mathscr{C}_{2^{m-1}-1}||\overline{\mathscr{C}_0}| \ldots |\overline{\mathscr{C}_{2^{m-1}-1}}||\overline{\mathscr{C}_0}| \ldots |\overline{\mathscr{C}_{2^{m-1}-1}}|$。

证明。令 $y = (a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^n, a_0^1+a_1^{1i}, a_0^2+a_1^{2i}, \ldots, a_0^n+a_1^{ni}, \ldots, a_0^1+a_1^{1i}+\cdots+a_{2^{(m-1)}-1}^1, a_0^2+a_1^{2i}+\cdots+a_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, a_0^n+a_1^{ni}+\cdots+a_{2^{(m-1)}-1}^n;\ b_0^1, b_0^2, \ldots, b_0^n, b_0^1+b_1^{1i}, b_0^2+b_1^{2i}, \ldots, b_0^n+b_1^{ni}, \ldots, b_0^1+b_1^{1i}+\cdots+b_{2^{(m-1)}-1}^1, b_0^2+b_1^{2i}+\cdots+b_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, b_0^n+b_1^{ni}+\cdots+b_{2^{(m-1)}-1}^n c_0^1, c_0^2, \ldots, c_0^n, c_0^1+c_1^{1i}, c_0^2+c_1^{2i}, \ldots, c_0^n+c_1^{ni}, \ldots, c_0^1+c_1^{1i}+\cdots+c_{2^{(m-1)}-1}^1, c_0^2+c_1^{2i}+\cdots+c_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, c_0^n+c_1^{ni}+\cdots+c_{2^{(m-1)}-1}^n)$ 属于 $\Phi(\mathfrak{C})$，则存在 $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathfrak{C}$，使得 $y = \Phi(r)$。因此，根据方程 8，我们有

$$r = \kappa_1 a + \kappa_2 b + \kappa_3 c, \tag{14}$$

其中，$a \in \mathcal{C}$、$b \in \overline{\mathcal{C}}$ 和 $c \in \overline{\overline{\mathcal{C}}}$。

根据方程 10、11 和 12，我们得到

► $a = \eta_0(a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^n) + \eta_i(a_0^1 + a_1^{1i}, a_0^2 + a_1^{2i}, \ldots, a_0^n + a_1^{ni}) + \cdots + \eta_{2^{(m-1)}-1}(a_0^1 + a_1^{1i} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^1, a_0^2 + a_1^{2i} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^2, a_0^n + a_1^{ni} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^n)$.

► $b = \eta_0(b_0^1, b_0^2, \ldots, b_0^n) + \eta_i(b_0^1 + b_1^{1i}, b_0^2 + b_1^{2i}, \ldots, b_0^n + b_1^{ni}) + \cdots + \eta_{2^{(m-1)}-1}(b_0^1 + b_1^{1i} + \cdots + b_{2^{(m-1)}-1}^1, b_0^2 + b_1^{2i} + \cdots + b_{2^{(m-1)}-1}^2, , b_0^n + b_1^{ni} + \cdots + b_{2^{(m-1)}-1}^n)$.

► $c = \eta_0(c_0^1, c_0^2, \ldots, c_0^n) + \eta_i(c_0^1 + c_1^{1i}, c_0^2 + c_1^{2i}, \ldots, c_0^n + c_1^{ni}) + \cdots + \eta_{2^{(m-1)}-1}(c_0^1 + c_1^{1i} + \cdots + c_{2^{(m-1)}-1}^1, c_0^2 + c_1^{2i} + \cdots + c_{2^{(m-1)}-1}^2, c_0^n + c_1^{ni} + \cdots + c_{2^{(m-1)}-1}^n)$.

我们可以通过以下方式将这些向量全部相加到向量 r in $\mathfrak{C}$by 中。

$$\begin{aligned} r &= \kappa_1(\eta_0(a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^n) + \eta_i(a_0^1 + a_1^{1i}, a_0^2 + a_1^{2i}, \ldots, a_0^n + a_1^{ni}) + \eta_{2^{(m-1)}-1} \\ &\quad (\ a_0^1 + a_1^{1i} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^1, a_0^2 + a_1^{2i} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, a_0^n + a_1^{ni} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^n)) \\ &+ \kappa_2(\eta_0(b_0^1, b_0^2, \ldots, b_0^n) + \eta_i(b_0^1 + b_1^{1i}, b_0^2 + b_1^{2i}, \ldots, b_0^n + b_1^{ni}) + \eta_{2^{(m-1)}-1} \\ &\quad (\ b_0^1 + b_1^{1i} + \cdots + b_{2^{(m-1)}-1}^1, b_0^2 + b_1^{2i} + \cdots + b_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, b_0^n + b_1^{ni} + \cdots + b_{2^{(m-1)}-1}^n)) \\ &+ \kappa_3(\eta_0(c_0^1, c_0^2, \ldots, c_0^n) + \eta_i(c_0^1 + c_1^{1i}, c_0^2 + c_1^{2i}, \ldots, c_0^n + c_1^{ni}) + \eta_{2^{(m-1)}-1} \\ &\quad (\ c_0^1 + c_1^{1i} + \cdots + c_{2^{(m-1)}-1}^1, c_0^2 + c_1^{2i} + \cdots + c_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, c_0^n + c_1^{ni} + \cdots + c_{2^{(m-1)}-1}^n)). \end{aligned}$$

该构造得到以下结果，

$(a_0^1, a_0^2 \ldots, a_0^n) \in \mathscr{C}_0$,
$(a_0^1 + a_1^{1i}, a_0^2 + a_1^{2i}, \ldots, a_0^n + a_1^{ni}) \in \mathscr{C}_i$,
$\vdots$
$(a_0^1 + a_1^{1i} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^1, a_0^2 + a_1^{2i} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, a_0^n + a_1^{ni} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^n) \in \mathscr{C}_{2^{(m-1)}-1}$.
上述向量和推论 2.6 立即得出以下结果。

$$(a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^n, a_0^1 + a_1^{1i}, a_0^2 + a_1^{2i}, \ldots, a_0^n + a_1^{ni}, \ldots, a_0^1 + a_1^{1i} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^1,$$
$$a_0^2 + a_1^{2i} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, a_0^n + a_1^{ni} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^n) \in \bigotimes_{j=0}^{2^{m-1}-1} \mathscr{C}_j = \Psi_1(\mathcal{C}),$$

$$(b_0^1, b_0^2, \ldots, b_0^n, b_0^1 + b_1^{1i}, b_0^2 + b_1^{2i}, \ldots, b_0^n + b_1^{ni}, \ldots, b_0^1 + b_1^{1i} + \cdots + b_{2^{(m-1)}-1}^1,$$
$$b_0^2 + b_1^{2i} + \cdots + b_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, b_0^n + b_1^{ni} + \cdots + b_{2^{(m-1)}-1}^n) \in \bigotimes_{j=0}^{2^{m-1}-1} \overline{\mathscr{C}_j} = \Psi_2(\overline{\mathcal{C}})$$

and

$$(c_0^1, c_0^2, \ldots, c_0^n, c_0^1 + c_1^{1i}, c_0^2 + c_1^{2i}, \ldots, c_0^n + c_1^{ni}, \ldots, c_0^1 + c_1^{1i} + \cdots + c_{2^{(m-1)}-1}^1,$$
$$c_0^2 + c_1^{2i} + \cdots + c_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, c_0^n + c_1^{ni} + \cdots + c_{2^{(m-1)}-1}^n) \in \bigotimes_{j=0}^{2^{m-1}-1} \overline{\overline{\mathscr{C}_j}} = \Psi_2\left(\overline{\overline{\mathcal{C}}}\right).$$

因此， y 是 $\Psi_1(\mathcal{C}) \otimes \Psi_2(\overline{\mathcal{C}}) \otimes \Psi_2\left(\overline{\overline{\mathcal{C}}}\right)$. 中的一个元素

反之，我们将上面定义的 y 视为 $\Psi_1(\mathcal{C}) \otimes \Psi_2(\overline{\mathcal{C}}) \otimes \Psi_2\left(\overline{\overline{\mathcal{C}}}\right)$ 中的一个元素，其中 $(a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^n) \in \mathscr{C}_0$， $(a_0^1 + a_1^{1i}, a_0^2 + a_1^{2i}, \ldots, a_0^n + a_1^{ni}) \in \mathscr{C}_i$， .. ., $(a_0^1 + a_1^{1i} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^1, a_0^2 + a_1^{2i} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, a_0^n + a_1^{ni} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^n) \in \mathscr{C}_{2^{(m-1)}-1}$.
利用方程 9、10 和 11，我们得到

$$a = \eta_0(a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^n) + \eta_i(a_0^1 + a_1^{1i}, a_0^2 + a_1^{2i}, \ldots, a_0^n + a_1^{ni}) + \cdots + \eta_{2^{(m-1)}-1}(a_0^1 + a_1^{1i}$$
$$+ \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^1, a_0^2 + a_1^{2i} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, a_0^n + a_1^{ni} + \cdots + a_{2^{(m-1)}-1}^n) \in \mathcal{C},$$

$$b = \eta_0(b_0^1, b_0^2, \ldots, b_0^n) + \eta_i(b_0^1 + b_1^{1i}, b_0^2 + b_1^{2i}, \ldots, b_0^n + b_1^{ni}) + \cdots + \eta_{2^{(m-1)}-1}(b_0^1 + b_1^{1i}$$
$$+ \cdots + b_{2^{(m-1)}-1}^1, b_0^2 + b_1^{2i} + \cdots + b_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, b_0^n + b_1^{ni} + \cdots + b_{2^{(m-1)}-1}^n) \in \overline{\mathcal{C}},$$

and

$$c = \eta_0(c_0^1, c_0^2, \ldots, c_0^n) + \eta_i(c_0^1 + c_1^{1i}, c_0^2 + c_1^{2i}, \ldots, c_0^n + c_1^{ni}) + \cdots + \eta_{2^{(m-1)}-1}(c_0^1 + c_1^{1i}$$
$$+ \cdots + c_{2^{(m-1)}-1}^1, c_0^2 + c_1^{2i} + \cdots + c_{2^{(m-1)}-1}^2, \ldots, c_0^n + c_1^{ni} + \cdots + c_{2^{(m-1)}-1}^n) \in \overline{\overline{\mathcal{C}}}.$$

我们得到， $\kappa_1 a + \kappa_2 b + \kappa_3 c$ 在 $\mathfrak{C}$ 中。因此 $y = \Phi(\kappa_1 a + \kappa_2 b + \kappa_3 c) \in \Phi(\mathfrak{C})$，所以 $y \in \Phi(\mathfrak{C})$。 ■

定理 2.8 $\mathfrak{C}$的生成矩阵（ $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}$上长度为 n 的线性码,$^{\mathfrak{m}}$ ）为

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix},$$

with

$$G_l = \begin{pmatrix} \kappa_l\eta_0\mathscr{G}_{l0} \\ \kappa_l\eta_1\mathscr{G}_{l1} \\ \vdots \\ \kappa_l\eta_{2^{(m-1)}-1}\mathscr{G}_{l2^{(m-1)}-1} \end{pmatrix}, \ for\ 1 \le l \le 3.$$

证明。由推论 2.5 可得

$$G = \begin{pmatrix} \kappa_1\eta_0\mathscr{G}_{10} \\ \vdots \\ \kappa_1\eta_{2^{(m-1)}-1}\mathscr{G}_{12^{(m-1)}-1} \\ \kappa_2\eta_0\mathscr{G}_{20} \\ \vdots \\ \kappa_2\eta_{2^{(m-1)}-1}\mathscr{G}_{22^{(m-1)}-1} \\ \kappa_3\eta_0\mathscr{G}_{30} \\ \vdots \\ \kappa_3\eta_{2^{(m-1)}-1}\mathscr{G}_{32^{(m-1)}-1} \end{pmatrix}$$

■

命题 2.9 若 $\mathfrak{C}$ 是长度为 n 、定义在 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}$, $^{\mathfrak{m}}$ 上的线性码，其生成矩阵为 $\mathcal{G}$，则

$$\Phi(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} \mathscr{G}_{10} & \mathscr{G}_{10} & \dots & & & \mathscr{G}_{10} \\ 0 & \mathscr{G}_{11} & 0 & \dots & & \mathscr{G}_{11} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathscr{G}_{12^{(m-1)}-1} \\ \mathscr{G}_{20} & \mathscr{G}_{20} & \dots & & & \mathscr{G}_{20} \\ 0 & \mathscr{G}_{21} & 0 & \dots & & \mathscr{G}_{21} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathscr{G}_{22^{(m-1)}-1} \\ \mathscr{G}_{30} & \mathscr{G}_{30} & \dots & & & \mathscr{G}_{30} \\ 0 & \mathscr{G}_{11} & 0 & \dots & & \mathscr{G}_{31} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathscr{G}_{32^{(m-1)}-1} \end{pmatrix}$$

3 基于 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{m}$上的单纯形码构造准循环码

准循环码是循环码的一种推广：码字的每次循环移位不一定都是码字，只有每隔 d次循环移位才是码字，其中 d 是码长的一个因数。准循环码是循环码的一种自然扩展，并具有一些使其在编码理论中颇具应用价值的有趣性质。许多研究人员都对准循环码进行了研究。在我们的工作中，我们将考察定义在 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{m}$上的单纯形码所构成的准循环码。我们希望描述 1-生成元、2-生成元直到 p-生成元的准循环码生成矩阵。这一想法是新的，我们将对此进行详细讨论，并尝试回顾它的一些应用。

3.1 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{m}$ 上的 α 型和 β 型单纯形码与麦克唐纳码及其在 Z_{4^s}上的格雷像

本节将构造$\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{m}$ 上的 α 型和 β 型单纯形码与麦克唐纳码，以及它们在 Z_{4^s}上的格雷像。在 [2], 中，构造了$R_{q,\ p,\ m}$ 和 R_q 上α 型和 β 型单纯形码。我们将在环 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{m}$上采用相同的方法。我们仅将结果以条目形式列出，不作详细说明。

因此，我们得到 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}$、$\mathfrak{m}$ 上长度为 $4^{ms2^{m-1}k}$ 、类型为 α 的单纯形码 $S^{\alpha}_{(m,s,k)}$ ，其格雷像 $\phi(S^{\alpha}_{(m,s,k)}) = \mathfrak{S}^{\alpha}_{s,k}$ 是 $4^{ms(2^{m-1})(k+1)}$个长度为 $4^{ms[2^{m-1}(k+1)^{-1}]}$、定义在$Z_{4^s}$ 上的$\mathfrak{S}^{\alpha}_{s,k}$ 单纯形码的级联。关于长度为$4^{ms(2^{m-1})(k-1)+m(s-1)}(4^{mk}-1)$ 3、类型为 β 且定义在 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}$、$\mathfrak{m}$ 上的单纯形码 $S^{\beta}_{(m,s,k)}$，类似的结果表明，其格雷像 $\phi(S^{\beta}_{(m,s,k)}) = \mathfrak{S}^{\beta}_{s,k}$（原文拼写为“wich”）是 $4^{mk[s(2^{m-1}-2)+1]+2m(s-1)}$个定义在 Z_{4^s} 上的长度为

$$\frac{4^{msk(2^{m-1}-1)+m(s-1)}(4^{mk}-1)}{3}.$$

类型为 α 和 β、定义在 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}},\mathfrak{m}$ 上的麦克唐纳码 $M^{\alpha}_{s,m,k,u}$，对于 $1 \le u \le k-1$，是一个定义在 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}},\mathfrak{m}$ 上、长度为 $4^{ms2^{m-1}k} - 4^{ms2^{m-1}u}$ 的码。其格雷像 $\phi(M^{\alpha}_{s,m,k,u})$ 是以下各项的串接

$$\frac{4^{ms2^{m-1}(k-1)-ms} - 4^{ms2^{m-1}(u-1)-ms}}{4^{msk} - 4^{msu}}$$

定义在 Z_{4^s} 上、长度为 的麦克唐纳码 $\mathfrak{M}^{\alpha}_{s,k}$

$$4^{m[s2^{m-1}(k+1)-1]} - 4^{m[s2^{m-1}(u+1)-1]}.$$

麦克唐纳码 $M^{\beta}_{s\ ,\ m,\ k,\ u}$ 是一个定义在 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{m}$ 上的长度为

$$\frac{2^{m[s(4^{m-1}-1)(k-1)+(s-1)]}(4^{mk}-1) - 4^{m[s(2^{m-1}-1)(u-1)+(s-1)]}(4^{mu}-1)}{3}.$$

其格雷像 $\phi(M_s^{\beta}{}_{,\ m,\ k,\ u})$ 是以下内容的串接

$$\frac{4^{msk(2^{m-1}-1)+m(s-1)}(4^{mk}-1)-4^{msk(2^{m-1}-1)+m(s-1)}(4^{mu}-1)}{4^{ms(k-1)}(4^{mk}-1)-4^{ms(u-1)}(4^{uk}-1)}$$

麦克唐纳码 $\mathfrak{M}_s^{\beta}{}_{,k}$ 在 Z_{4^s} 上，长度为

$$\frac{4^{m[sk(2^{m-1}-1)+(s-1)]}(4^{mk}-1)-4^{m[sk(2^{m-1}-1)+(s-1)]}(4^{mu}-1)}{3}.$$

4 结论

讨论的主题是环 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s},\ \mathfrak{m}}$ 及其性质的推广，包括其上的循环码和准循环码$\mathfrak{R}^{\mathfrak{s},\ \mathfrak{m}}$。循环码是一种特殊的线性码，其中码字的每次循环移位仍然是码字。准循环码是循环码的推广，其中码字每经过 d次循环移位仍然是码字，而 d 是码长的因数。

总之，环 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s},\mathfrak{m}}$ 的推广为研究循环码和准循环码提供了丰富的数学结构，并在纠错和信息传输方面具有实际应用。R 上的单纯形码是具有有趣代数性质的准循环码的一个特例，可以使用除环上的单纯形算法来构造。

参考文献

[1] A. Bustomi、P.Santika 和 D. Suprijanto，$\mathbb{Z}_4+u\mathbb{Z}_4+v\mathbb{Z}_4+w\mathbb{Z}_4+uv\mathbb{Z}_4+uw\mathbb{Z}_4+vw\mathbb{Z}_4+uvw\mathbb{Z}_4$上的线性码，IAENG InternationalJournal ofComputer Science，48(3)：1–11，2021年。

[2] K. Chatouh、K. Guenda 和 T. Aaron Gulliver，$R_{q,\ p,\ m}=\mathbb{Z}_{p^m}[u_1,u_2,\cdots,u_q]/\langle u_i^2=0$ 上的新型码及其应用，Computational and Applied Mathematics，39(3)：1–19，2020。

[3] P. Li、X. Guo、S. Zhu 和 X. Kai，关于环 $\mathbb{Z}_4+u\mathbb{Z}_4+v\mathbb{Z}_4+uv\mathbb{Z}_4$ 上线性码的一些结果，Journal of Applied Mathematics and Computing，54(1-2)：307，2017。

[4] Y. Liu、M. Shi 和 P. Sol´e，$\mathbb{F}_p+v\mathbb{F}_p+v^2\mathbb{F}_p$ 上的二次剩余码，载于 WAIFI，204–211，2014。

4[5] M. Mouna、K. Chatouh，《$\mathfrak{R}=\sum v_5^s\mathcal{A}_4$上的线性码构造》，《数学建模与计算》，10(1)，147–158，2023年。

[6] M. Mouna、K. Chatouh，《环 $\mathcal{A}_5$上的斜循环线性码的一些性质》，第一届数学及其应用全国会议（FNCMA），阿尔及利亚布尔吉布阿雷里季，2021年。[7] O. Ndiaye，《 $\mathbb{F}_{p^k} + v\mathbb{F}_{p^k} + v^2\mathbb{F}_{p^k} + \ldots + v^r\mathbb{F}_{p^k}$上的循环码》，《海湾数学杂志》，4(4)，2016年。[8] J. Qian、L. Zhang 和 S. Zhu，《 $\mathbb{F}_p + u\mathbb{F}_p + \ldots + u^{k-1}\mathbb{F}_p$上的循环码》，《电子、通信与计算机科学基础论丛》，88(3): 795–797，2005年。